فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۱، شمارهٔ ۷۱ (پاییز و زمستان ۱۴۰۱) صص. ۱۱۹ تا ۱۲۸

عملگرهای قرصی‌بازگشتی و برخی ویژگی‌های آن‌ها

منصوره موسی‌پور

چکیده. در این مقاله، مفهوم جدید عملگرهای قرصی‌بازگشتی را تعریف و بررسی می‌کنیم. نشان می دهیم چنین عملگرهایی هم در فضاهای باناخ نامتناهی‌بُعد و هم متناهی‌بُعد یافت می‌شوند. ثابت می‌کنیم که یک عملگر، قرصی‌بازگشتی است اگر و تنها اگر مجموعه‌ای چگال از بردارهای قرصی‌بازگشتی داشته باشد. به‌علاوه، نشان می‌دهیم عملگر T قرصی‌بازگشتی است اگر و تنها اگر T^n عملگری قرصی‌بازگشتی باشد.

۱ مقدمه

عملگرهای ابردوری[1] و مفاهیم مرتبط با آن در دهه‌های اخیر مورد توجه بسیاری قرار گرفته است. عملگر خطی و کراندار T، یا به اختصار عملگر T، روی فضای باناخ مختلط X را ابردوری می‌نامیم هرگاه مداری چگال داشته باشد، یعنی عضو $x \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\overline{\operatorname{orb}(T,x)} = \overline{\{x, Tx, \ldots, T^n x, \ldots\}} = X.$$

عملگرهای ابردوری فقط روی فضاهای باناخ با بُعد نامتناهی وجود دارند [۹]. شرایط کافی مختلفی برای ابردوری‌بودن یک عملگر وجود دارد که یکی از مهم‌ترینِ آن‌ها اصل ابردوری است که آن را از [۲] یادآوری می‌کنیم: می‌گوییم عملگر T در اصلِ ابردوری صدق می‌کند هرگاه زیرمجموعه‌های چگال Z و Y از X، دنبالهٔ (n_k) از اعداد صحیح نامنفی، و عملگرهای $S_{n_k} : Y \to X$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

عبارات و کلمات کلیدی: عملگرهای قرصی‌بازگشتی، عملگرهای بازگشتی، عملگرهای ابردوری
نوع مقاله: پژوهشی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۷/۳

[1] hypercyclic

doi: 10.30504/mct.2022.1267.1882

۱) برای هر $x \in Z$، $T^{n_k}x \to 0$؛
۲) برای هر $y \in Y$، $S_{n_k}y \to 0$؛
۳) برای هر $y \in Y$، $T^{n_k}S_{n_k}y \to y$.

اگر عملگری در شرایط اصل ابردوری صدق کند، عملگری ابردوری است ولی عکس آن لزوماً برقرار نیست [۷]. در [۴، ۸] گزارشی از نتایج به‌دست‌آمده دربارهٔ عملگرهای ابردوری و مفاهیم مرتبط دیگر آمده است.

ابردوری بودن روی فضاهای باناخ با ویژگی تراگردی توپولوژیک[۱] معادل است [۹]. عملگر خطی و کراندار T روی X را تراگرد توپولوژیک می‌نامیم هرگاه برای هر دو مجموعهٔ باز و ناتهی U و V از X، عدد طبیعی n یافت شود به‌طوری‌که $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ [۷]؛ به یاد داشته باشید که $x \in T^{-n}(U)$ اگر $T^n x \in U$.

اگر T طوری باشد که برای هر مجموعهٔ باز و ناتهی U از X عدد طبیعی n یافت شود به‌طوری‌که $T^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset$ آنگاه می‌گوییم T بازگشتی[۲] است [۳]. مفهوم عملگرهای بازگشتی برای نخستین‌بار در [۵، ۶] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. عملگرهای بازگشتی روی فضاهای باناخ متناهی و نامتناهی‌بُعد وجود دارند [۳]. به‌روشنی عملگرهای تراگرد توپولوژیک و درنتیجه عملگرهای ابردوری، عملگرهایی بازگشتی‌اند، اما با توجه به اینکه عملگرهای بازگشتی روی فضاهای با متناهی‌بُعد نیز وجود دارند، مجموعهٔ عملگرهای ابردوری زیرمجموعه‌ای سره از مجموعهٔ عملگرهای بازگشتی است.

بردار $x \in X$ را یک بردار بازگشتی برای عملگر T روی X می‌نامیم هرگاه دنبالهٔ افزایشی (k_n) از اعداد صحیحِ مثبت وجود داشته باشد به‌طوری‌که $T^{k_n}x \to x$. ثابت می‌شود عملگر T روی X بازگشتی است اگر و تنها اگر دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای بازگشتی باشد [۳]. برای آشنایی بیشتر با عملگرهای بازگشتی می‌توان [۱۰، ۱۱] را مطالعه کرد.

مفهوم عملگرهای زبَربازگشتی[۳] نیز در [۱] تعریف شده است. عملگر T را زبَربازگشتی می‌گوییم هرگاه برای هر مجموعهٔ باز و ناتهی U از X عدد طبیعی n و اسکالر $\lambda \in \mathbb{C}$ یافت شود به‌طوری‌که $\lambda T^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset$. هر عملگر بازگشتی، زبَربازگشتی است اما عکس آن لزوماً درست نیست [۱]. همچنین، چند شرط کافی برای زبَربازگشتی‌بودن نیز در [۱] آمده است.

در این مقاله، با درنظر گرفتن قرص یکه، مفهوم جدید عملگرهای قرصی‌بازگشتی را تعریف

[1]topological transversality [2]recurrent [3]super-recurrent

می‌کنیم که تعمیمی از مفهوم عملگرهای بازگشتی و عملگرهای زَبَربازگشتی است. قرص یکه را با نماد $\mathbb{D}$ نشان می‌دهیم: $\mathbb{D} = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| \leq ۱\}$. در بخش ۲ بردارهای قرصی‌بازگشتی را تعریف می‌کنیم. همچنین، ثابت می‌کنیم که یک عملگر، قرصی‌بازگشتی است اگر و تنها اگر دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای قرصی‌بازگشتی باشد. ثابت می‌کنیم که این عملگرها علاوه‌بر فضاهای باناخ با بعد نامتناهی، در فضاهای باناخ با بعد متناهی نیز یافت می‌شوند. علاوه‌براین، نشان می‌دهیم عملگر T قرصی‌بازگشتی است اگر و تنها اگر T^n عملگری قرصی‌بازگشتی باشد. در بخش ۳ به بررسی مجموع مستقیم این عملگرها می‌پردازیم. ثابت می‌کنیم که قرصی‌بازگشتی‌بودن مجموع مستقیم دو عملگر، قرصی‌بازگشتی‌بودن هریک از آن‌ها را نتیجه می‌دهد.

۲ قضیه‌های اصلی

این بخش را با تعریف عملگرهای قرصی‌بازگشتی آغاز می‌کنیم. مجموعهٔ همهٔ عملگرهای خطی و کراندار مانند T روی فضای باناخ مختلطِ X را با $B(X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱. عملگر $T \in B(X)$ را قرصی‌بازگشتی می‌گوییم هرگاه برای هر زیرمجموعهٔ باز و ناتهی U از X عدد طبیعی n و اسکالر $\alpha \in \mathbb{D}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $\alpha T^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset$.

به‌روشنی عملگرهای بازگشتی، قرصی‌بازگشتی و همچنین عملگرهای ابردوری، بازگشتی‌اند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که عملگرهای ابردوری، عملگرهایی قرصی‌بازگشتی‌اند. برای مثال، عملگر مشتق $D : f \to f'$ روی فضای توابع تحلیلی $H(\mathbb{C})$، عملگری بازگشتی است [۷]. پس این عملگر، عملگری قرصی‌بازگشتی است. همچنین اگر عملگر انتقال به عقب $B : \ell^۲ \to \ell^۲$ با ضابطهٔ

$$B(x_۱, x_۲, x_۳, \ldots) = (x_۲, x_۳, \ldots)$$

را در نظر بگیریم، آنگاه برای هر اسکالر λ با شرط $|\lambda| > ۱$، عملگر λB عملگری ابردوری است [۷]. پس این عملگر، قرصی‌بازگشتی نیز است.

لم بعد نشان می‌دهد که در یک عملگر قرصی‌بازگشتی مانند T برای هر مجموعهٔ باز و ناتهی U تعداد نامتناهی عدد طبیعی n وجود دارد که به‌ازای آن‌ها $\alpha T^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset$.

لم ۲.۲. اگر $T \in B(X)$ عملگری قرصی‌بازگشتی باشد، آنگاه برای هر زیرمجموعهٔ باز و ناتهی

U از X مجموعهٔ

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{ای وجود دارد به‌طوری‌که } \alpha \in \mathbb{D} \;\; \alpha T^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset\}$$

نامتناهی است.

اثبات. فرض کنیم زیرمجموعه‌ای باز و ناتهی مانند U از X وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{ای وجود دارد به‌طوری‌که } \alpha \in \mathbb{D} \;\; \alpha T^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset\} = \{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$$

تعریف می‌کنیم $m = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$، پس $\alpha T^{-m}(U) \cap U \neq \emptyset$. از پیوستگی T نتیجه می‌شود که $\alpha T^{-m}(U) \cap U$ مجموعه‌ای باز است. بنابراین عدد طبیعی q و $\beta \in \mathbb{D}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\beta T^{-q}(\alpha T^{-m}(U) \cap U) \cap (\alpha T^{-m}(U) \cap U) \neq \emptyset.$$

درنتیجه، اگر در نظر بگیریم $\gamma := \alpha\beta$، آن‌وقت $\gamma \in \mathbb{D}$ و $\gamma T^{-(m+q)}(U) \cap U \neq \emptyset$. اما این حکم تناقض است چون $m + q > m$. بنابراین مجموعهٔ یادشده در قضیه نامتناهی است. □

اکنون بردارهای قرصی‌بازگشتی را تعریف می‌کنیم و به‌کمک آن شرطی معادل با قرصی‌بازگشتی‌بودن یک عملگر را به دست می‌آوریم. در ادامه منظور از $\mathbb{D}^c$ مجموعهٔ متمم $\mathbb{D}$ است.

تعریف ۳.۲. بردار $x \in X$ را یک بردار قرصی‌بازگشتی برای عملگر $T \in B(X)$ می‌گوییم هرگاه دنبالهٔ افزایشی (k_n) از اعداد صحیح مثبت و دنباله $(\alpha_{k_n}) \subseteq \mathbb{D}^c$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\alpha_{k_n} T^{k_n} x \to x$.

مجموعهٔ بردارهای قرصی‌بازگشتی عملگر T را با $\mathbb{D}\mathrm{Rec}(T)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۴.۲. عملگر $T \in B(X)$ قرصی‌بازگشتی است اگر و تنها اگر T مجموعه‌ای چگال از بردارهای قرصی‌بازگشتی داشته باشد.

اثبات. فرض کنیم عملگر T دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای قرصی‌بازگشتی در X است و U زیرمجموعه‌ای باز و ناتهی از X باشد. به‌این‌ترتیب $\mathbb{D}\mathrm{Rec}(T) \cap U$ ناتهی است. فرض

کنیم $x \in \mathbb{D}\mathrm{Rec}(T) \cap U$. درنتیجه، دنبالهٔ افزایشی (k_n) از اعداد صحیح مثبت و دنبالهٔ $(\alpha_{k_n}) \subseteq \mathbb{D}^c$ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha_{k_n} T^{k_n} x \to x$. بنابراین $k_{n_\circ}$ با این ویژگی پیدا می‌شود که $\alpha_{k_{n_\circ}} T^{k_{n_\circ}} x \in U$. پس $x \in \alpha_{k_{n_\circ}}^{-1} T^{-k_{n_\circ}}(U) \cap U$. ازسوی‌دیگر، چون $\alpha_{k_{n_\circ}} \in \mathbb{D}^c$، نتیجه می‌گیریم که $\alpha_{k_{n_\circ}}^{-1} \in \mathbb{D}$. پس T عملگری قرصی‌بازگشتی است.

اکنون فرض می‌کنیم T عملگری قرصی‌بازگشتی باشد. عنصر $x_\circ \in X$ را در نظر می‌گیریم. اگر تعریف کنیم $U_\circ = B(x_\circ, \varepsilon_\circ)$ که در آن $\varepsilon_\circ < ۱$، آنگاه از قرصی‌بازگشتی‌بودن T نتیجه می‌شود که عدد طبیعی $n_۱$ و $\alpha_{n_۱} \in \mathbb{D}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha_{n_۱} T^{-n_۱}(U_\circ) \cap U_\circ \neq \emptyset$. پس $x_۱ \in X$ وجود دارد که $x_۱ \in \alpha_{n_۱} T^{-n_۱}(U_\circ) \cap U_\circ$. اینک از پیوستگی عملگر T عدد $\varepsilon_۱ < \frac{۱}{۲}$ را می‌توان یافت به‌طوری‌که $U_۱ = B(x_۱, \varepsilon_۱) \subseteq \alpha_{n_۱} T^{-n_۱}(U_\circ) \cap U_\circ$. با استفاده لم ۲.۲ و با توجه به اینکه $U_۱$ مجموعه‌ای باز است، می‌توانیم $n_۲ > n_۱$ را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که $\alpha_{n_۲} T^{-n_۲}(U_۱) \cap U_۱ \neq \emptyset$. فرض کنیم $x_۲ \in \alpha_{n_۲} T^{-n_۲}(U_۱) \cap U_۱$. از پیوستگی T نتیجه می‌شود که $\varepsilon_۲ < \frac{۱}{۲^۲}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$U_۲ = B(x_۲, \varepsilon_۲) \subseteq \alpha_{n_۲} T^{-n_۲}(U_۱) \cap U_۱.$$

به‌همین‌ترتیب، دنبالهٔ (ε_k) را می‌توان ساخت به‌طوری‌که $\varepsilon_k < ۲^{-k}$ و

$$U_k = B(x_k, \varepsilon_k) \subseteq U_{k-۱} = B(x_{k-۱}, \varepsilon_{k-۱}). \tag{۱.۲}$$

وانگهی، $U_k = B(x_k, \varepsilon_k) \subseteq \alpha_{n_k} T^{-n_k}(U_{k-۱})$. ازاینجا داریم

$$\alpha_{n_k}^{-۱} T^{n_k}(U_k) \subseteq U_{k-۱}. \tag{۲.۲}$$

بنابر قضیهٔ کانتور از (۱.۲) نتیجه می‌شود که $z \in X$ای وجود دارد به‌طوری‌که

$$\bigcap_k U_k = \bigcap_k B(x_k, \varepsilon_k) = \{z\}.$$

درنتیجه از (۲.۲) داریم $\alpha_{n_k}^{-۱} T^{n_k} z \to z$. پس z یک بردار قرصی‌بازگشتی برای T است. بنابراین عملگر T دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای قرصی‌بازگشتی در X است. □

در گزارهٔ بعد، یک شرط کافی برای قرصی‌بازگشتی بودن بیان می‌کنیم.

گزاره ۵.۲. فرض کنیم $T \in B(X)$ عملگری قرصی‌بازگشتی و $S \in B(Y)$ عملگری دلخواه باشد. اگر عملگر با برد چگال $\varphi : X \to Y$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $S \circ \varphi = \varphi \circ T$، آنگاه S نیز عملگری قرصی‌بازگشتی است.

اثبات. بنابر فرض، عملگر با برد چگال $\varphi : X \to Y$ وجود دارد به‌طوری‌که $S \circ \varphi = \varphi \circ T$. درنتیجه، برای هر عدد طبیعی n داریم $S^n \circ \varphi = \varphi \circ T^n$. عملگر T قرصی‌بازگشتی است. بنابراین، عملگر T دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای قرصی‌بازگشتی در X است، یعنی $\overline{\mathbb{D}\mathrm{Rec}(T)} = X$. حالا فرض کنیم $x \in \mathbb{D}\mathrm{Rec}(T)$. بنابراین، دنبالهٔ افزایشی مانند (k_n) و $(\alpha_{k_n}) \subseteq \mathbb{D}^c$ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha_{k_n} T^{k_n} x \to x$. اینک از پیوستگی و خطی‌بودن عملگر φ نتیجه می‌شود که $\alpha_{k_n} \varphi T^{k_n} x \to \varphi x$. چون برای هر عدد طبیعی n داریم $S^n \circ \varphi = \varphi \circ T^n$ بنابراین $\alpha_{k_n} S^{k_n} \circ \varphi x \to \varphi x$. یعنی φx یک بردار قرصی‌بازگشتی برای S است. از طرفی بنابر فرض، $Y = \overline{\varphi(X)}$. پس عملگر S دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای قرصی‌بازگشتی در Y است و درنتیجه بنابر قضیهٔ ۴.۲ عملگر S قرصی‌بازگشتی است. □

در [۳] ثابت شده است که T بازگشتی است اگر و تنها اگر T^n، به ازای nای، بازگشتی باشد. در قضیهٔ بعد نشان می‌دهیم که این حکم برای عملگرهای قرصی‌بازگشتی هم برقرار است.

قضیه ۶.۲. فرض کنیم p عدد طبیعی دلخواهی باشد. دراین‌صورت عملگر $T \in B(X)$ قرصی‌بازگشتی است اگر و تنها اگر T^p قرصی‌بازگشتی باشد.

اثبات. فرض کنیم p عددی طبیعی و T^p عملگری قرصی‌بازگشتی باشد. بنابراین T^p دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای قرصی‌بازگشتی در X است. برای $x \in \mathbb{D}\mathrm{Rec}(T^p)$ دنبالهٔ افزایشی (k_n) و $(\alpha_{k_n}) \subseteq \mathbb{D}^c$ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha_{k_n} (T^p)^{k_n} x \to x$. درنتیجه $\alpha_{k_n} T^{pk_n} x \to x$. بنابراین $x \in \mathbb{D}\mathrm{Rec}(T)$. پس عملگر T دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای قرصی‌بازگشتی است و درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۴.۲، عملگر T قرصی‌بازگشتی است.

حال فرض کنیم T عملگری قرصی‌بازگشتی باشد. بنابراین $\mathbb{D}\mathrm{Rec}(T)$ در X چگال است. برای $x \in \mathbb{D}\mathrm{Rec}(T)$، دنبالهٔ افزایشی (k_n) و $(\alpha_{k_n}) \subseteq \mathbb{D}^c$ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha_{k_n} T^{k_n} x \to x$. فرض کنیم p عددی طبیعی است، پس $k_n = pl_n + v_n$ که در آن v_n متعلق به مجموعهٔ متناهی $\{۰, ۱, \ldots, p-۱\}$ است. دراین‌صورت $v \in \{۰, ۱, \ldots, p-۱\}$ وجود دارد به‌طوری‌که

برای زیردنباله‌ای از l_n، که بدون کاستن از کلیت دوباره آن را l_n می‌نامیم، داریم

$$\alpha_{pl_n+v}T^{pl_n+v}x \to x \tag{۳.۲}$$

فرض کنیم U زیرمجموعه‌ای باز از X باشد به‌طوری‌که $x \in U$. بنابر (۳.۲) عدد $m_۱ := l_{n_۱}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\alpha_{pm_۱+v}T^{pm_۱+v}x \in U. \tag{۴.۲}$$

اینک از (۳.۲) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\alpha_{pl_n+v}\alpha_{pm_۱+v}T^{p(l_n+m_۱)+۲v}x &= \alpha_{pl_n+v}T^{pl_n+v}\alpha_{pm_۱+v}T^{pm_۱+v}x\\ &\to \alpha_{pm_۱+v}T^{pm_۱+v}x,\end{aligned}$$

با توجه به (۴.۲)، $\alpha_{pm_۱+v}T^{pm_۱+v}x \in U$. بنابراین عدد طبیعی $n_۲$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\alpha_{pl_{n_۲}+v}\alpha_{pl_{n_۱}+v}T^{p(l_{n_۲}+m_۱)+۲v}x \in U.$$

می‌نویسیم $m_۲ := l_{n_۲}+m_۱$ و توجه می‌کنیم که $m_۲ > m_۱$ و $\alpha_{pl_{n_۲}+v}\alpha_{pl_{n_۱}+v}T^{pm_۲+۲v}x \in U$. با استقرا، می‌توانیم عدد طبیعی m_p را بیابیم به‌طوری‌که $m_p > m_{p-۱}$ و

$$\alpha_{pl_{n_p}+v}\alpha_{pl_{n_{(p-۱)}}+v}\dots\alpha_{pl_{n_۱}+v}T^{pm_p+pv}x \in U. \tag{۵.۲}$$

ازسوی‌دیگر، برای هر $۱ \leq i \leq p$ داریم $|\alpha_{pl_{n_i}+v}| > ۱$. بنابراین، اگر بنویسیم

$$\alpha := \alpha_{pl_{n_p}+v}\alpha_{pl_{n_{(p-۱)}}+v}\dots\alpha_{pl_{n_۱}+v},$$

آن‌وقت $|\alpha| > ۱$ و از (۵.۲) داریم $\alpha(T^p)^{m_p+v}x \in U$. که از آن نتیجه می‌شود که اگر مجموعهٔ U را به‌طور مناسب انتخاب کنیم، آنگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ عدد $\alpha \in \mathbb{D}^c$ وجود دارد به‌طوری‌که $\|\alpha(T^p)^{m_p+v}x - x\| < \varepsilon$. بنابراین x یک بردار قرصی‌بازگشتی برای T^p است و برهان تمام می‌شود. □

چون عملگرهای ابردوری و، درنتیجه عملگرهای بازگشتی، روی هر فضای باناخ تفکیک‌پذیر

و نامتناهی‌بُعد وجود دارند [۷] نتیجه می‌گیریم که عملگرهای قرصی‌بازگشتی هم روی هر فضای باناخ نامتناهی‌بُعد وجود دارند. اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا این عملگرها را می‌توان روی فضاهای با بعد متناهی هم ساخت؟ مثال بعد نشان می‌دهد که پاسخ این سؤال مثبت است.

مثال ۷.۲. فرض کنیم λ عددی مختلط باشد و $|\lambda| < ۱$. حالا عملگر $T : \mathbb{C}^{۳} \to \mathbb{C}^{۳}$ را با ضابطه $T(x) = \lambda x$ تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم U زیرمجموعه‌ای باز و ناتهی از X باشد و $z \in U$. بنابر تعریف این عملگر داریم $z \in \lambda T^{-۱}(U)$. پس $\lambda T^{-۱}(U) \cap U \neq \emptyset$. بنابراین T عملگری قرصی‌بازگشتی است. اما T بازگشتی نیست زیرا بنابر [۳] عملگر تعریف‌شده، بازگشتی است اگر و تنها اگر $|\lambda| = ۱$.

از مثال ۷.۲ نتیجه می‌شود که مجموعهٔ عملگرهای بازگشتی، زیرمجموعه‌ای سره از مجموعهٔ عملگرهای قرصی‌بازگشتی است.

گزاره ۸.۲. فرض کنیم $T \in B(X)$ و λ اسکالری باشد با شرط $|\lambda| = ۱$. دراین‌صورت، اگر λT قرصی‌بازگشتی باشد، آنگاه عملگر T قرصی‌بازگشتی است.

اثبات. فرض کنیم λT عملگری قرصی‌بازگشتی باشد، دراین‌صورت λT دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای قرصی‌بازگشتی در X است. فرض کنیم $x \in \mathbb{D}\mathrm{Rec}(\lambda T)$. بنابراین، دنبالهٔ افزایشی (k_n) و $(\alpha_{k_n}) \subseteq \mathbb{D}^c$ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha_{k_n}(\lambda T)^{k_n}x \to x$. درنتیجه $(\alpha_{k_n}\lambda^{k_n})T^{k_n}x \to x$. اگر تعریف کنیم $\beta_{k_n} := \alpha_{k_n}\lambda^{k_n}$ آنگاه

$$|\beta_{k_n}| = |\alpha_{k_n}\lambda^{k_n}| = |\alpha_{k_n}||\lambda^{k_n}| = |\alpha_{k_n}| > ۱.$$

بنابراین $(\beta_{k_n}) \subseteq \mathbb{D}^c$ و $\beta_{k_n}T^{k_n}x \to x$. ازاین‌رو x یک بردار قرصی‌بازگشتی برای T است. درنتیجه، عملگر T دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای قرصی‌بازگشتی در X است و بنابر قضیهٔ ۴.۲ عملگر T قرصی‌بازگشتی است. □

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا عکس قضیهٔ بالا درست است یا خیر؟ یعنی می‌توانیم از قرصی‌بازگشتی بودن T قرصی‌بازگشتی بودن λT را که در آن λ اسکالری با شرط $|\lambda| = ۱$ است نتیجه بگیریم؟

۳ مجموع مستقیم عملگرهای قرصی‌بازگشتی

اگر X و Y دو فضای باناخ باشند، مجموع مستقیم آن‌ها را با $X \oplus Y$ نشان می‌دهیم و به‌صورت $X \oplus Y = \{x \oplus y : x \in X \text{ و } y \in Y\}$ تعریف می‌کنیم. همچنین، اگر $S \in B(X)$ و $T \in B(Y)$، آنگاه عملگر $S \oplus T : X \oplus Y \to X \oplus Y$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(S \oplus T)(x \oplus y) = S(x) \oplus T(y).$$

این بخش را با گزاره‌ای شروع می‌کنیم که نشان می‌دهد از قرصی‌بازگشتی بودن مجموع مستقیم دو عملگر، قرصی‌بازگشتی بودن هریک نتیجه می‌شود.

گزاره ۱.۳. فرض کنیم $S \in B(X)$ و $T \in B(Y)$. دراین‌صورت اگر $S \oplus T$ قرصی‌بازگشتی باشد، آنگاه S و T قرصی‌بازگشتی‌اند.

اثبات. فرض می‌کنیم U زیرمجموعه‌ای باز و ناتهی از X و V زیرمجموعه‌ای باز و ناتهی از Y باشند. چون $S \oplus T$ قرصی‌بازگشتی است پس عدد طبیعی n و $\alpha \in \mathbb{D}$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\alpha(S \oplus T)^{-n}(U \oplus V) \cap (U \oplus V) \neq \emptyset.$$

پس داریم $\alpha(S)^{-n}(U) \cap (U) \neq \emptyset$ و $\alpha(T)^{-n}(V) \cap (V) \neq \emptyset$. یعنی S و T قرصی‌بازگشتی‌اند. □

نمی‌دانیم آیا عکس حکم بالا برقرار است یا نه.

گزاره ۲.۳. فرض کنیم $S \in B(X)$ و $T \in B(Y)$. اگر عددهای طبیعی p و q وجود داشته باشد به‌طوری‌که $S^p \oplus T^q$ قرصی‌بازگشتی باشد، آنگاه عملگرهای S^n و T^n برای هر عدد طبیعی n قرصی‌بازگشتی‌اند.

اثبات. بنابر قضیهٔ ۱.۳، از قرصی‌بازگشتی‌بودن $S^p \oplus T^q$ نتیجه می‌شود که عملگرهای S^p و T^q قرصی‌بازگشتی‌اند. اکنون از قضیهٔ ۶.۲ نتیجه می‌شود که S و T و درنتیجه S^n و T^n، برای هر عدد طبیعی n، قرصی‌بازگشتی‌اند. □

گفتیم که اگر عملگری در اصلِ ابردوری صدق کند، ابردوری است. اکنون نشان می‌دهیم این اصل، قرصی‌بازگشتی‌بودن عملگر و مجموع مستقیم آن با خودش را نتیجه می‌دهد.

نتیجه ۳.۳. اگر $T \in B(X)$ در اصلِ ابردوری صدق کند، آنگاه عملگرهای $T \oplus T$ و T قرصی‌بازگشتی‌اند.

اثبات. اگر T در اصلِ ابردوری صدق کند، آنگاه $T \oplus T$ ابردوری است [۲]. پس $T \oplus T$ و درنتیجه T قرصی‌بازگشتی‌اند. $\square$

عملگر T روی فضای باناخ X را آشوبناک می‌گوییم هرگاه ابردوری و دارای مجموعه‌ای چگال از بردارهای متناوب در X باشد. یادآوری می‌کنیم که بردار $x \in X$ برداری متناوب برای T است هرگاه عدد طبیعی nی وجود داشته باشد به‌طوری‌که $T^n x = x$. می‌دانیم هر عملگر آشوبناک در اصل ابردوری صدق می‌کند [۷] پس چنین عملگری قرصی‌بازگشتی نیز است.

مراجع

[1] Amouch, M., Benchiheb, O., On super-recurrent operators (2021), available at `https://arxiv.org/pdf/2102.12170.pdf`.

[2] Bes, J., Peris, A., Hereditarily hypercyclic operators, *J. Funct. Anal.*, **167** (1999), 94-112.

[3] Costakis, G., Manoussos, A., Parissis, I., Recurrent linear operators, *Complex Anal. Oper. Theory*, **8** (2014), 1601-1643.

[4] Dodson, C. T. J., A review of some recent work on hypercyclicity, *Balkan J. Geom. Appl.*, **19** (2014), 22-41.

[5] Furstenberg, H., *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorialn Number Theory*, Princeton University Press, NJ, 1981.

[6] Gottschalk, W. H., Hedlund, G. H., *Topological Dynamics*, American Mathematical Society, Rhode Island, Providence, 1994.

[7] Grosse-Erdmann, K. G., Peris Manguillot, A., *Linear Chaos*, Springer-Verlag, London, 2011.

[8] Grosse-Erdmann, K. G., Recent developments in hypercyclicity, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat.*, **97** (2003), 273-286.

[9] Grosse-Erdmann, K. G., Universal families and hypercyclic operators, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **36** (1999), 345-381.

[10] Moosapoor, M., On subspace-recurrent operators, *Tamkang J. Math.*, **53** (2022), 363-371.

[11] Moosapoor, M., On the recurrent C_0-semigroups, their existence and some criteria, *J. Math.*, (2021), Article ID 6756908.

منصوره موسی‌پور: دانشگاه فرهنگیان، گروه ریاضی

رایانامه: `m.mosapour@cfu.ac.ir`

Farhang va Andishe-ye Riyazi
Volume 41, Number 71, Fall/Winter 2022, Pages 119–128
doi: 10.30504/mct.2022.1267.1882

Disk-recurrent Operators and Their Properties

M. Moosapoor[1]

Department of Mathematics, Farhangian University, Iran

Abstract. In this article, the new concept of disk-recurrent operators is introduced. We prove that an operator is disk-recurrent if and only if it has a dense set of disk-recurrent vectors. We prove that these operators can be found in infinite dimensional and also finite dimensional Banach spaces. In addition, we show that the operator T is disk-recurrent if and only if T^n is disk-recurrent. We also observe that if the disk-recurrence of the direct sum of two operators is disk-recurrent, then any of them is disk-recurrent and we express some results about this.

Keywords: disk-recurrent operators, recurrent operators, hypercyclic operators
Article history: Recieved 3 February 2022; Accepted 25 September 2022

[1]m.mosapour@cfu.ac.ir

ISSN 1022-6443/