فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۱، شمارهٔ ۷۱ (پاییز و زمستان ۱۴۰۱) صص. ۲۲۳ تا ۲۴۸

پاورقی

دوست دارم ریاضیدان باشم*

پال هالموس
ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل
ویراستهٔ سیامک کاظمی

جاسوس دون‌پایه

به دلیل موقعیت نیمه‌رسمی‌ام، می‌بایست با مقامات سفارت ایالات متحده در مونته‌ویدئو، کمی بیشتر، فقط کمی بیشتر از توریستهای آمریکایی متوسط سروکار می‌داشتم. آنها را با چند استثنا، کارآمد و صمیمی یافتم. بخش امور مالی تمام فرمهای لازم را برای من پر می‌کرد و تنها کاری که باید انجام می‌دادم این بود که به خانم خوش‌برخورد پشت پیشخوان بگویم که چه اندازه هزینه کرده‌ام، و او پول مخارج مرا روز بعد آماده می‌کرد ــو در یک یا دو نوبت وقتی سؤالی از رایزن فرهنگی پرسیدم و وی می‌بایست آنها را به واشنگتن منعکس کند، او این کار را به‌سرعت انجام داد و جواب هم به‌سرعت آمد.

اولین‌باری که خود را به سفارت معرفی کردم، برای دست دادن دور اتاق چرخیدم؛ یکی از دستها مال رابرت گاهاگان[1] بود. از نظر وضع ظاهری یک بچه‌روستایی قدبلند و با صورتی بی‌حالت به

عبارات و کلمات کلیدی: هالموس، تدریس و پژوهش ریاضیات در اوروگوئه، منطق صوری، جبر بولی
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۱۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۱۷
*ترجمهٔ بخش‌هایی از فصل دهم و یازدهم (صفحات ۱۹۷-۲۱۶) از کتاب:
Halmos, Paul, R., *I Want to be a Mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1985.
در این قسمت از ترجمهٔ کتاب هالموس، برای هماهنگی با قسمت‌های قبلی، شیوهٔ خط مترجم حفظ شده است.

[1] Robert Gahagan

doi: 10.30504/mct.2023.357

نظر می‌آمد. بعداً دوباره در یک مهمانی عصرانه به صرف نوشابه، همدیگر را دیدیم و چند دقیقه‌ای گپ زدیم. پرسید که آیا امکانش هست که در چند روز آینده به سفارت بروم و او را ببینم؟ گفتم بله، البته، اما متحیر بودم؛ به نظر می‌رسید که می‌خواهد نمایش رمزآلود دلهره‌آوری برای من اجرا کند. وقتی به دیدنش رفتم، برای مدتی حالت رمزآلود خود را حفظ کرد. پرسید آیا از این کنفرانس ریاضی که قرار است به‌زودی اینجا برگزار شود، خبر دارم؟ آیا در مورد آن چیزی می‌دانم؟! –چرا، لعنتی، عملاً خودم آغازکنندهٔ این برنامه بودم. آها! خب خب. و چه کسانی و از کجاها می‌آیند؟ اوه، از جاهای بسیاری –همهٔ آمریکای جنوبی– بیشتر آرژانتین و برزیل، و، البته، اوروگوئه، اما برخی از نقاط دورتر مانند مکزیک و کوبا. اوهوم؛ و پرو؟ بله، البته، از پرو هم. از پرو کی میاد؟ تنها کسی که من می‌شناسم –تنها ریاضیدان که به نظر می‌رسد پرو داشته باشد –کسی به نام گودوفردو گارسیا.

حالا به نظر می‌رسید به جایی رسیده‌ایم که گاهاگان می‌خواست برسد. یعنی چیزی که این نمایش رمزآلود دلهره‌آور دربارهٔ آن بود. ظاهراً از نظر گاهاگان، دون گودوفردو[1]ی پیر یک کمونیست خطرناک بود. آیا احتمال داشت که کسی را با خود همراه بیاورد؟ دقیقاً کی و از کجا وارد می‌شود و مدت اقامت او دقیقا چقدر خواهد بود؟ آیا او می‌تواند از همایش ما به عنوان یک محل امتحان برای تبلیغات سیاسی استفاده کند؟ دعوت از او فکر کی بود؟ چه کسی لیست دعوت را تهیه کرده است؟ چه کسانی می‌توانند شرکت کنند؟ من پاسخهای کوتاه و صادقانه‌ای به همهٔ سؤالاتش دادم، و با همان‌حالت تعجب و تحیر که موقع رفتن داشتم، آنجا را ترک کردم.

وقتی همهٔ اینها را به لاگوئاردیا گفتم، به قدر من که [از شنیدن حرفهای کاهاگان] بی‌درنگ در حیرت فرورفته بودم، متحیر نشد –اما به‌هرحال تعجب کرد. (دلیلی نداشت که موضوع را محرمانه تلقی کنم. مطمئناً چنین چیزی از من خواسته نشده بود.) او دون گودوفردو را خیلی خوب می‌شناخت و هرگز به کمونیست بودن او مشکوک نبود. به‌علاوه، گارسیا پیر و بسیار ثروتمند بود، و چهرهٔ شاخصی در یک کشور فاشیستی (رئیس دانشگاه، رئیس چهار دورهٔ دانشکده وغیره) بود –واقعاً چندان محتمل نبود که بتواند مأمور کرملین باشد.

من گفتگوی خود با گاهاگان را به مارشال استون نیز گزارش دادم؛ این پاسخ او است.

> اگر دون گودوفردو کمونیست باشد، شاید بهتر باشد همین الان دست از تلاش برداریم! آخرین‌باری که او را در سال ۱۹۴۸ دیدم، از انقلاب محافظه‌کارانه‌ای که اودریا[2] را به قدرت رساند بسیار خوشنود بود و نیمی از وقت خود را در کاخ ریاست جمهوری

[1] Don Godofredo [2] Odria

> با ژنرال می‌گذراند . . .. البته اگر کسی شکی به فاشیستها داشته باشد، ممکن است چشمش را روی دون گودوفردو بدوزد . . .. اگر وجود جاسوسان را حس کردید و خطر اعلام کردن آن را به جان خریدید، امیدوارم این کار را بکنید.

یکی دو اتفاق مشابه دیگر هم افتاد. یک‌بار، برای مثال، با وابستهٔ فرهنگی، آلن[1]، در سفارت سرگرم گفتگو بودم. از من چند سؤال در مورد تشکیلات دانشگاهی پرسید؛ من از اینکه آن‌قدر بی‌اطلاع بود، تعجب کردم. همچنین از من خواست که یک کار جاسوسی کوچک انجام دهم. به نظر می‌رسید یک سازمان دانشجویی به نام فدراسیون دانشجویان دانشگاههای اوروگوئه[2] وجود داشته، که از نظر سیاسی مشکوک بوده است. (من هرگز قبل از توصیفات آلن چیزی از آن نشنیده بودم.) به تعبیر آلن، یک «گروه با گرایش به موضع سوم»، یعنی آنها که به همان اندازه که ضد یانکی بودند، ضد کمونیست هم بودند. آلن برای اینکه حال‌وهوای این عبارت را برای من شرح دهد، پرونیسم[3] را نیز به عنوان گرایش به موضع سوم توصیف کرد. بله خوب، اخیراً یک کنفرانس بین کشورهای آمریکایی برگزار شده بود و چند نفر از اعضای فدراسیون برای شرکت در آن به ریو رفتند؛ بیشتر به نظر می‌رسد که فدراسیون متشکل از آنارشیستها باشد. آلن فقط دوست داشت که اساسنامهٔ سازمان و اسامی افرادی را که به ریو رفته بودند، ببیند ــ من چه می‌توانستم بکنم؟ من بیشتر از آن غرق در حیرت بودم که بتوانم چیزی بگویم– زیر لب مؤدبانه گفتم که اگر موضوع به‌طورطبیعی طی مکالمه‌ای مطرح شود، سعی می‌کنم چیزی بفهمم، اما از دادن قولی امتناع کردم.

بعد از ترک دفتر آلن، عصبانی شدم. کار من جاسوسی نبود ــ اگر وزارت امور خارجه از من می‌خواست این کار را انجام دهم، باید آن را قبل از اینکه کمک مالی به من بدهند، می‌گفتند. من به اوروگوئه آمده بودم که از هیستری تعقیب بی‌دلیل افراد[4] دور باشم، نه اینکه به آن بیشتر دامن بزنم. در موقعیت دیگری آلن ادعا کرد که به او اطلاع داده شده که لاگوئاردیا کمونیست است، و پرسید نظرم در این مورد چیست؟ گفتم که فکر می‌کنم این بدترین حرف چرندی است که تا حالا شنیده‌ام.

خاطرات کوچک

لاگوئاردیا گفت: «ما برای ساعت ۶:۰۰ دعوت شده‌ایم و با ماشین حداقل نیم‌ساعت تا آنجا طول می‌کشد، من ساعت ۵:۳۰ ترا سوار می‌کنم». او ما را ساعت ۶:۳۰ سوار کرد. در فرصتی دیگر

---
[1] Allen [2] Federaci6n de Estudiantes Universitarios del Uruguay [3] Peronism [4] witch hunt

او عبارت «هورا اوروگوئه»[1] (به وقت اوروگوئه، در مقابل «هورا آمریکانا») را به من آموخت، به معنی قراری که همیشه از آن تخلف می‌شود، ساعتی که همیشه کند است، تأخیری که مزمن و قابل پیش‌بینی است. او به ما اطمینان خاطر داد که «اما من این طور نیستم»؛ «طی زندگی در آمریکای شمالی، مزایای سر وقت حاضر شدن را یاد گرفته‌ام. وقتی قرار ملاقات می‌گذارم، سعی می‌کنم همیشه وقت‌شناس باشم ــفقط اتفاقات مهم لحظهٔ آخری باعث می‌شود که دیر کنم.» مانند اغلب مردم جهان، لاگوئاردیا خود را آن‌طورکه دیگران او را می‌دیدند نمی‌دید ــمن قرارهای زیادی با او داشتم و قبل از همهٔ آنها یک اتفاق مهم لحظهٔ آخری پیش می‌آمد. پس از چند آزمایش کنترل‌شده، الگوریتمی ابداع کردم. «ساعت ۵:۳۰ سوارت می‌کنم» یعنی تصمیم گرفته‌ام که «ساعت ۵:۳۰ دوش گرفتن، اصلاح صورت، و لباس پوشیدن را شروع کنم و شما را زمانی بین ساعت ۶:۰۰ تا ۶:۳۰ سوار خواهم کرد.»

روز کریستوف کلمب بین مهندسان اوروگوئه‌ای رسم بود که در یک میهمانی دور هم گرد آیند، به چند سخنرانی بعد از ناهار گوش دهند، به افراد جدیدی که پروانهٔ عضویت در جمع آنها را دریافت کرده‌اند، خوشامد بگویند، و سپس به خانه بروند و با خواب خستگی درکنند. لاگوئاردیا برای من دعوت‌نامه‌ای کش رفت، اما نتوانست مرا در سر راه بردارد، بنابراین دستوراتی به من داد. ناهار برای ساعت ۱:۰۰ بعدازظهر برنامه‌ریزی شده بود، اما نوشیدنیهای پیش از ناهار زودتر آماده می‌شد و او می‌خواست مرا به چند نفر معرفی کند و برای حداقل یک گپ‌وگفت کوتاه وقت در نظر بگیرد. گفت: «کافی است فقط یک تاکسی بگیرید و ساعت ۱۲:۳۰ به آنجا برسید. ساعت معمول همین است.» زمان ورودم را با دقت ساعت ۱۲:۴۰ تعیین کردم، اما به‌اندازهٔکافی دیر نبود. آن‌قدر زود بود که معلوم شد، فقط حدود ۲۰ نفر آنجا هستند، سرپا ایستاده بودند، سیگار می‌کشیدند و گپ می‌زدند. شصت صندلی چیده شده بود و مهمانانی که برای آنها در نظر گرفته شده بودند، درنهایت آمدند. لاگوئاردیا (که به من گفته بود ساعت ۱۲:۳۰ آنجا با من ملاقات خواهد کرد) ساعت ۱:۰۰ رسید، و درهمان‌حال که مردم مدام به داخل می‌رفتند، ما به سیگار کشیدن و گپ زدن ادامه دادیم. دقیقاً در ساعت ۲:۰۰ برای صرف ناهار نشستیم و شروع به خوردن کردیم ــدر ساعت ۴:۰۰ از سر میز ناهار برخاستیم. همه چیز دلپذیر بود ــغذا خوب و شایستهٔ نام ضیافت بود، سرویس سریع و مؤدبانه بود، لیوانهای شراب با فراوانی قابل‌قبولی پر می‌شد و سخنرانیها بی‌جهت طولانی نبودند. وقتی همه چیز تمام شد، به خانه رفتم تا استراحت کنم، و من عادت تقریباً ثابتِ خوردن چای اواسط

[1] hora Uruguaya

بعد از ظهر را نقض کردم –به‌دشواری توانستم به‌موقع برای خوردن شام از خواب بیدار شوم.

بخش عمدهٔ زندگی اجتماعی در اوروگوئه حول محور خانواده می‌چرخید. شامهای خانوادگی یکشنبه‌ها و شامهای کریسمس، عروسی و غسل تعمید، و گردشهای خانوادگی در جنگل یا رودخانه قاعدهٔ معمول بود –میهمانیهای عصرانه یا شام صرفاً برای دوستان یا بازدیدکنندگان خارجی جزو استثناهای نادر بودند. بیشتر اوقات که به مناسبتی از من «پذیرایی» به عمل می‌آمد، به صورت گردش با ماشین در بعدازظهر یکشنبه، یا چای در یک رستوران، یا دیدن فیلم در عصر و به دنبال آن یک نوشیدنی و یک میان‌وعده در یک رستوران بود.

تولد و مرگ در همه جا یکسان است، اما شیوه‌ای که بشر با جنبه‌های جزئیتر زندگی روزمره کنار می‌آید –ازقبیل ترافیک و پول و هنر و صنعت– بسته به زمان و مکان، بسیار متفاوت است.

در اوروگوئه یک آیین‌نامهٔ سراسری وجود داشت که به رانندگان دستور می‌داد قبل از عبور از هر تقاطع، بوق ماشینشان را به صدا درآورند. «پس چطور دیگران بفهمند که شما دارید می‌آیید؟» هیچ چراغ راهنمایی در کار نبود و پلیس راهنمایی و رانندگی فقط در سه یا چهار تقاطع اصلی در مرکز شهر مستقر بود. چیزی که مرا بیشتر عصبی می‌کرد، این بود که ماشینها مجاز بودند که از هر دو طرف تراماها عبور کنند و تراماها و اتوبوسها فقط برای سوار کردن زنها توقف می‌کردند –برای مردها آنها سرعت را به‌اندازهٔ کافی (؟) کاهش می‌دادند که آنها بتوانند در حال دویدن سوار شوند. اما باید از روی دیگر سکه هم گفت که قدم زدن در شهر در ساعت ۳:۰۰ صبح هم کاملاً امن بود –دزد، راهزن، و زورگیری در کار نبود، یا اگر هم بود، مسئله‌ای جزئی بود.

کنترل کردن حساب‌ها معمول، اما نادر بود. حقوق به صورت نقدی پرداخت می‌شد؛ شما ماهی یک‌بار به باجهٔ مربوط می‌رفتید و یک خروار پزوی چروک‌خورده برای شما شمارش می‌شد. حساب اعتباری، و به‌طورکلی اعتماد به همنوعان کم بود.

من برای دیدن فیلم هملت رفتم که لارنس اولیویه[1] در آن نقش هملت را داشت. فیلم با زیرنویس اسپانیایی همراهی می‌شد، و برای آنکه حواس مخاطب با سروصدای بی‌ربط پرت نشود، صدا تقریباً به‌طورکامل پایین آورده شده بود، حرفهای اولیویه قابل‌فهم نبود.

یک حالت فرسودگی و کهنگی فراگیر حکمفرما بود –کشور این تصور را در ذهن ایجاد می‌کرد که ضربه‌ای خورده و در حال نشستن روی زانوهاست. هیچ محلهٔ فقیرنشین کثیف یا خطرناکی وجود نداشت –و هیچ چیز درجه‌یکی هم در کار نبود. رنگ سقف ساختمانهایی که دیوارهای مرمری

[1]Lawrence Olivier

داشتند، در حال پوسته‌پوسته‌شدن بود. در رستورانی که کرپ سوزت[1] سرو می‌کرد، پیشخدمت نیاز به اصلاح داشت و کت سفیدش کثیف بود. معمولاً بوی ضعیف فاضلاب در حمامها استشمام می‌شد. پلاژهای لوکس سواحل دریا از نعمت خداوندی آفتاب برخوردار بودند، اما علفهای هرز در لابلای شنها در حال رشد بودند. کیف چرمی ظریف‌کاری‌شده، سگک معیوبی داشت (نشان افتخار «ساخت اوروگوئه» روی آن حک شده بود) که آن را غیرقابل استفاده می‌کرد، و قلاب بی‌دوام روی جواهرات بومی یا باز نمی‌شد یا وقتی که در حال قدم زدن روی چمن بودید، بدون اینکه دستی به آن بخورد، باز می‌شد.

من با امیدها و آرزوهای زیادی به اوروگوئه رفتم که برخی از آنها برآورده شدند و برخی نه. دلخوریهای کوچک روزانه، اغلب هیجان و تازگی و زیبایی و قسمتهای به‌یادماندنی زندگی را، چه در داخل و چه خارج کشور، تحت‌الشعاع قرار می‌دهند. ازآنجاکه من تمایل دارم از یادآوری گذشته و تجسم آینده، و شِکوه از زمان حال مابین آنها لذت ببرم، آن‌قدر که می‌خواستم از اوروگوئه لذت نبردم. اما حالا با علاقه به آن کشور فکر می‌کنم و برای آن آرزوی روزهای خوب دارم. این کشور چیزی به من داد و من بخشی از وجودم را در آن جاگذاشتم؛ خوشحالم که رفتم و خوشحالم که حالا دیگر آنجا نیستم.

فصل ۱۱
دههٔ شگفت‌انگیز پنجاه

بازگشت به خانه

دههٔ ۱۹۵۰ هیجان‌انگیزترین و دلفریبترین و پربارترین سالها در تاریخ شیکاگو بود (که البته منظور از «شیکاگو»، دپارتمان ریاضی دانشگاه است). این یک دیدگاه ذهنی است، اما افراد بسیاری در آن اتفاق نظر دارند، و این وضعیت هنوز هم سر نیامده است. جوّ تحقیق ساختمان اکهارت[2]، با هیئت علمی‌درجه‌یک و برخلاف گفته‌ها، بهتر از بدنهٔ دانشجویی درجه‌یک آن، و در تضاد با وضع متوسط کسالت‌بار مونته ویدئو، نشاط‌آور بود. با اشتیاق تمام در این جوّ رها شدم.

دوباره کار را با تدریس یک درس دربارهٔ گروههای توپولوژیکی شروع کردم. آخرین‌باری که این کار را انجام داده بودم، سال قبل از اوروگوئه، در سه ماههٔ پاییز ۱۹۵۰ بود. من از زمانی که کتاب پونتریاگین[3] به عرصه درآمد؛ مغازلهٔ مداومی با این مبحث داشته‌ام و هنوز هم آن را دوست دارم و

[1] crepe suzettes [2] Eckhart Hall [3] Pontrjagin

درس ۱۹۵۰ را واقعاً دوست داشتم. کلاس نسبتاً بزرگ بود: تعداد آنهایی که درس را گرفته بودند تاحدی در نوسان بود و در نهایت با دادن ۳۴ نمره، ازجمله سه نمرهٔ R و یک نمرهٔ ردی[1] به هرکس که سزاوارش بود، به پایان رسید. شاگردان ممتاز زیادی در این کلاس بودند، به‌عنوان‌مثال، ماوریسیو پویشوتو[2] از برزیل و اندرو والاس[3] از اسکاتلند. من این درس را عمدتاً بر اساس یکی از بهترین کتابهای موجود در آن زمان، یعنی \انتگرال‌گیری روی گروهها . . . [4] اثر آندره وِی[5] قرار دادم و حتی اگر تعریف از خود نباشد، خیلی خوب از عهده برآمدم. به‌ویژه روی سؤالات امتحان نهایی (خارج ازکلاس)[6] سخت کار کردم. از آنجایی که نگاهی به آن ممکن است حال‌وهوای این درس را بهتر از هر نوع ردیف کردن پشت‌سرهم صفتها منتقل کند، من آن را اینجا می‌آورم –ببینید می‌توانید در این امتحان قبول شوید؟ من خودم فکر می‌کنم هنوز هم می‌توانم، اما قبل از اینکه بتوانم اطمینان پیدا کنم، باید در مورد برخی از سؤالات دوباره فکر کنم.

امتحان گروههای توپولوژیک

در هریک از حکمهای زیر، واژهٔ گروه به معنای گروه توپولوژیک است. تاآنجاکه می‌توانید پیدا کنید که آیا حکم درست است یا خیر و پاسخ خود را ثابت کنید. دشواری انجام این کار برای حکم nام کم‌وبیش تابعی صعودی از n است. حل کامل هفت مسئله، کار قابل‌قبول در نظر گرفته خواهد شد. ده‌تا خوب و سیزده‌تا عالی است. از نوابغ انتظار می‌رود هر پانزده مورد را حل کنند. هیچ پاسخی بعد از ساعت ۱۱ و ۵۹ دقیقهٔ صبح شنبه ۲ دسامبر ۱۹۵۰ پذیرفته نخواهد شد.

۱. هر همریختی یک‌به‌یک پیوسته بر روی یک گروه فشرده، باز است.
۲. حاصل‌ضرب گروهی دو مجموعهٔ فشرده با اندازهٔ (هار) صفر، در یک گروه فشرده، مجموعه‌ای با اندازهٔصفر است.
۳. اگر به هر عنصر (به‌جز همانیِ) یک گروه دست‌کم یک سرشت متناظر باشد که در آن عنصر مقدار ۱ را اختیار نمی‌کند، آنگاه گروه، موضعی‌فشرده است.
۴. اگر یک گروه موضعی‌فشرده و آبلی فاقد زیرگروههای نابدیهی و بسته باشد، آنگاه این گروه، متناهی است.
۵. هر گروه فشرده، متناهی یا ناشماراست.
۶. هر گروه همبند، موضعی‌فشرده و نابدیهی، یک زیرگروه نابدیهی، بسته و ناوردا دارد.
۷. اگر هر عنصر یک گروه فشرده و آبلی دارای مرتبهٔ متناهی باشد، آنگاه مرتبه‌های عناصر متناهی‌اند.
۸. هر گروه موضعی‌فشرده، نرمال است.
۹. اگر هر عنصر (به‌جز عنصر همانیِ) یک گروه فشرده، از مرتبهٔ دو باشد، آنگاه گروه، حاصل‌ضرب دکارتی (توپولوژیکی) گروههای از مرتبهٔ دو است.
۱۰. هر گروه نابدیهی و آبلی دست‌کم یک سرشت نابدیهی دارد.
۱۱. اگر هر عنصر (به‌جز عنصر همانی) یک گروه نابدیهی از مرتبهٔ دو باشد، آنگاه گروه همبند نیست.
۱۲. هر همریختی اندازه‌پذیر از یک گروه موضعی‌فشرده به دیگری، پیوسته است.
۱۳. توپولوژی فضاي هیلبرت را می‌توان به‌گونه‌اي تغییر داد که به یک گروه فشرده بدل شود.

[1] F [2] Mauricio Peixoto [3] Andrew Wallace [4] *L'integration dans les groupes*. . . [5] Andre Weil [6] take-home

۱۴. هر گروه فشرده دارای زیرگروههای به‌دلخواه کوچک بسته و ناورداست به‌طوری‌که گروه خارج‌قسمتی، جدایی‌پذیر باشد.
۱۵. هر گروه کاملاً ناهمبند و فشرده، حد وارون گروههای متناهی است.

درس سال ۱۹۵۲ مشابه اما متفاوت بود. کلاس کوچکتر (شامل ۹ دانشجو، ازجمله جک فلدمن[1] و اد نلسون[2]) بود، به لحاظ سطح تحقیق قوت بیشتری یافت (و من هیچ نمره‌ای براساس قضاوت ندادم ـ همه P[3] گرفتند)، و این درس کمتر بر متون کلاسیک و بیشتر بر برخی از مقاله‌های کلاسیک که در دههٔ ۱۹۴۰ منتشر شده بودند (مانند «آنالیز همساز روی گروههای جابه‌جایی. . .» رایکوف[4]، «دوگان و آنالیز همساز» کارتان[5] و گودمان[6] و «جبر گروهی یک گروه موضعی‌فشرده» از سیگارس[7] متکی بود.

دانشجویانی که در سالهای پس از اوروگوئه در دوروبر ساختمان اکهارت دیدم، نه‌تنها در درس من درخصوص گروههای توپولوژیکی، بلکه در درسهای دیگر، برخی از آنها کاملاً مقدماتی، مایهٔ دلخوشی من بودند: دلخوشی از دیدن اشتیاق آنها، دیدن رشدکردنشان، و نیز اینکه طولی نمی‌کشید که می‌بایست ورود آنها را به مرتبهٔ بهترین ریاضیدانان فعال کشور خوشامد بگوییم. من در آن روزها با هارولد ویدوم[8] و ری اسمولیان[9] دیدار کردم. تقریباً در همان زمان مو شرایبر[10] و من صحبت در مورد رسالهٔ او را شروع کرده بودیم. دان اورنشتاین[11] چندین درس با من گرفته بود و یادگیری نظریهٔ ارگودیک را با من شروع کرد (اما رسالهٔ خود را با کاپلانسکی[12] در زمینهٔ جبر نوشت). او در توپولوژی عمومی خیلی خوب از عهده برآمد، و در جبر (درس نظریهٔ گالوا) بسیار خوب بود؛ اما در نظریهٔ توابع مختلط، چندان خوب نبود. جدی نگرفته بود؟

در صحبت از نظریهٔ ارگودیک: من لری والن[13] را در یک درس ارگودیک ترم تابستانی (۱۹۵۵) دیدم و با افتخار می‌گویم که نظریهٔ اندازه را به آروناس لیوله‌ویسیوس[14] در یک درس عادی، و به جان تامپسون[15]، در یک درس خودخوان تدریس کرده‌ام. جان قبلاً خط مستقیمی بین خودش و نظریهٔ گروهها کشیده بود، و تنها، زمانی که مجبور بود، به‌طورموقت یا، به‌صورت‌گذرا، به عنوان آرامش لحظه‌ای به چیزهای دیگر توجه می‌کرد. (در وضعیت اخیر، او این برهان ساده و ظریف را پیدا کرد که تغییر جای یک‌طرفه دارای ریشهٔ دوم نیست ـ اثبات او این امکان را به وجود آورد که برهان بغرنجی را که من و خوان شالر[16] به دست آورده بودیم، به دستِ فراموشی بسپاریم.) من مختصری

---
[1] Jack Feldman [2] Ed Nelson [3] pass [4] Raikov [5] Cartan [6] Godement [7] Segars [8] Harold Widom [9] Ray Smullyan [10] Moe Schreiber [11] Don Ornstein [12] Kaplansky [13] Larry Wallen [14] Arunas Liulevicius [15] John Thompson [16] Juan Schaller

جبر به استیو وِینگر[۱] (که آنالیزدان تیزذهنی شد)، و نظریهٔ مجموعه‌ها را به جیمی میلگرام[۲] (یک توپولوژیست برجسته)، و توپولوژی را به راب کربی[۳] و باب سولوِوِی[۴] (یکی از آنها خیلی خوب از کار در آمد و دیگری متوسط) درس دادم.

بازگشت به خانه چقدر خوب است.

آیا منطق صوری جزو ریاضیات است؟

در دهۀ ۱۹۵۰ تصمیم گرفتم منطق را متحول کنم. من تابه‌حال موفق به این کار نشده‌ام، اما این به دلیل نداشتن میل به تلاش نبوده است.

منطق همیشه برایم جاذبه داشته است. معنای متعارف کلمهٔ منطق آسان است؛ من هیچ تمایلی به ارتکاب خطاهای آشکار در استدلال نداشتم و زنجیره‌های طولانی استنتاجها برایم ترسناک نبودند. زمانی که در مورد قیاس مطالبی شنیدم، گفتم «مطمئناً، بدیهی است» و این احساس را پیدا نکردم که چیزی به معلوماتم اضافه شده است. اولین شوروشوق واقعی در قلبم نسبت به منطق از کتابهای عامه‌پسند راسل ایجاد شد، و فقط چند هفته بعد، از راسل و وایتهد: دست‌ورزی با منطق نمادی جذبهٔ مثبتی داشت. (من حتی اسمش را هم دوست داشتم. «منطق نمادی» هنوز هم، برخلاف «منطق فرمال [صوری]»، برایم آن چیزی جلوه‌گر می‌شود که می‌خواهم در آن کارکنم، چیزی که برای من تعجب‌آور است، تاریخچهٔ این وجه‌تسمیه‌هاست؟ می‌شود حدس زد که منظور از اصطلاح قدیمی آن بوده که توجه را به استفاده از نمادهای جبری به جای پرگویی اسکولاستیک قرون وسطایی جلب کند، و اصطلاح مدرنتر برای آن معرفی شد تا بر مطالعهٔ فرم به جای محتوا تأکید کند. واکنش عاطفی من این است که نمادها را دوست دارم، و علاوه‌براین، بر به کار بردن آنها به عنوان ابزاری برای بحث در مورد محتوا ــ«قوانین اندیشه»ــ صحه می‌گذارم، درحالی‌که از کلمهٔ «فرمال» یک رویکرد خشک و بی‌انعطاف مانند «قدم‌رو» سربازان در رژه برداشت می‌شود که من دوستش ندارم. یک چیز دیگر: از «سمبلیک» چیزهای دیگری هم مستفاد می‌شود، چیزهایی «عالیتر» که نمادها نمایندهٔ آنها هستند، اما «فرمال» عکس غیرفرمال به نظر می‌رسد –شق و رق به جای واهلیده و خوشایند. همه اینها ممکن است ناشی از تجربهٔ شخصی من باشند ــاما بهترین کاری است که می‌توانم به منظور توصیف ترجیحاتم انجام دهم.)

من منطق نمادین را به قدر جبر دوست داشتم: ساده کردن کاسهٔ سوپ پرالفبا [ی درست‌شده

[1]Steve Wainger [2]Jimmy Milgram [3]Rob Kirby [4]Solovay

از پاستا] از حروف سیاه p و q و «یا»ها و «نه»ها به همان اندازه سرگرم‌کننده، و به همان اندازه سودمند بود که کامل کردن مربع برای حل یک معادلهٔ درجه‌دوم یا استفاده از قاعدهٔ کرامر برای حل یک جفت معادلهٔ خطی. بااین‌حال هرچه پیشتر رفتم و بیشتر و بیشتر منطق فرمال یاد گرفتم، کمتر و کمتر از آن خوشم آمد. واکنش من کاملاً ذهنی بود: این مبحث هیچ مشکلی نداشت، من بودم که آن را دوست نداشتم.

چه چیز را دوست نداشتم؟ گفتنش سخت است. موضوع مربوط به زبان این مبحث و نگرش هواداران متعصب آن است و من به طریقی امتحان‌نشده و فرمول‌بندی‌نشده، تصور می‌کنم که اغلب ریاضیدانان همین احساس دردسر و ناراحتی را داشته باشند. هربار که سعی می‌کنم احساساتم را برای یک منطقدان توضیح دهم، او به‌نوبهٔ‌خود سعی می‌کند به من نشان دهد که این احساسات مبتنی‌بر واقعیات نیستند. او می‌گوید که منطقدانان دقیقاً مانند سایر ریاضیدانان عمل می‌کنند: آنها فرضیه‌های دقیقی را فرمول‌بندی می‌کنند، استنتاجهای دقیق انجام می‌دهند و کارشان به اثبات قضیه‌ها ختم می‌شود. او ادامه می‌دهد که تنها تفاوت در خود مبحث است: به جای مفاهیم توپولوژیکی مانند پیوستگی، همبندی و همریختی، و کره‌های عجیب‌وغریب، آنها دربارهٔ مفاهیم منطقی مانند مدلهای بازگشتی، سازگاری، تصمیم‌پذیری و نااستاندارد بحث می‌کنند.

نه، این طور نیست. دوست منطقدان من متوجه نکته نشده است. توپولوژی جبری از نظر فکری و روح مطلب به منطق نزدیکتر است تا مثلاً به شیمی آلی، یا تاریخ اقتصادی –تا این حدش کاملاً درست است. منطقی است که جای استقرار منطقدانان دانشگاه در گروه ریاضی باشد– حتماً این طور است. ولی تفاوتها بین منطق و مباحث «ریاضیات هسته»[1] مانند جبر–آنالیز–هندسهٔ کلاسیک دست‌کم به همان اندازه زیاد است که بین قیاسهایی که منطقدان استدلال خود را بر آن مبنا قرار می‌دهد، موجود است. (درضمن، «ریاضیات هسته»، یک عبارت چندپهلوست که به‌تازگی ابداع شده و کاربران آن فکر می‌کنند که با ترش‌رویی به عبارت «ریاضیات محض» می‌توانند شکاف محض–کاربردی را از بین ببرند.)

او، آن منطقدان، خوب استدلال می‌کند و چیزهای زیادی هم به نفع خود دارد. قطعاً هر ریاضیدانی دستاوردهای معروف گودل و کوهن، دربارهٔ الزام وجود گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر و در مورد وضعیت سازگاری اصل انتخاب و فرضیهٔ پیوستگی را هم جذاب و هم تحسین‌برانگیز می‌بیند. در سطحی نه آن‌قدر چشمگیر، منطقدانان به ما نشان داده‌اند که روابط تردیدناپذیری بین اصل‌موضوع‌های

[1] Core mathematics

پئانو و قضیهٔ رمزی وجود دارد و هر دوی این موضوعات بدون‌شک بخشهایی از «ریاضیات هسته» هستند. و در نهایت منطقدانان با افتخار به تعداد انگشت‌شماری از قضیه‌های ریاضی اشاره می‌کنند که در اولین برهان آنها از تکنیکهای منطق صوری استفاده شده است ؛ نزدیکترین مورد آنها به کار من، نتیجهٔ برنشتاین–رابینسون مربوط به زیرفضاهای ناوردای عملگرهایِ چندجمله‌ای‌فشرده است.

اینها همه درست، اما برای کاهش عذاب ریاضیدان کافی نیستند. چرا نیستند؟ یک پاسخ جزئی این است که هر اندازه هم که برخی از دستاوردهای منطقدانان ممکن است تحسین‌برانگیز باشد، ریاضیدان به آنها نیاز ندارد، او نمی‌تواند از آنها در کار روزانهٔ خود استفاده کند. همهٔ اثباتهای منطقی قضیه‌های ریاضی، تا آنجا که من اطلاع دارم، به‌دردنخور هستند: به جای آنها می‌توان برهانهایی با استفاده از زبان و تکنیکهای ریاضیات معمولی قرار داد. برهان برنشتاین–رابینسون از مدلهای نااستانداردِ زبانهای محمول مراتب بالاتر استفاده می‌کند و زمانی که ابی[1] (نام مستعار آبراهام رابینسون[2]) نسخهٔ پیش‌چاپ مقالهٔ خود را برایم فرستاد، برای موشکافی و برگردان بینش ریاضی آن واقعاً عرق ریختم. بله، عرق ریختم، اما، بله، این یک بینش ریاضی بود و قابل‌برگردان بود. این مقاله، من (یا هیچ کس دیگری؟) را متقاعد نکرد که مدلهای نااستاندارد باید فوراً در جعبه‌ابزار هر ریاضیدان قرار داده شوند؛ این مقاله فقط نشان داد که برنشتاین و رابینسون ریاضیدانان زیرکی هستند که یک مسئلهٔ دشوار را، با استفاده از زبانی که آنها روان به آن صحبت می‌کردند، حل کرده‌اند. اگر این کار را درعوض به زبان تلوگو[3] (زبان دسته‌ای از بومیان جنوب هندوستان) انجام داده بودند، رمزگشایی مقالهٔ آنها را دشوارتر می‌یافتم، اما در آن صورت فقط میزان دشواری فرق می‌کرد، نه نوع آن.

حال که بحث به اینجا رسیده، زمان آن است که آنچه را که در مورد نقش آنالیز نااستاندارد در ریاضیات گمان می‌برم، در قالب کلمات بیان کنم. این، مسئلهٔ حساسی است: برای برخی گروندگان به آن (مانند پیت لوب[4] و اِد نلسون)، این موضوع مانند یک دین محسوب می‌شود، و اگر کسی بگوید که عیوبی دارد، به آنها برمی‌خورد. برای برخی دیگر که مخالف آن هستند (مثلا اِرِت بیشاپ)، به همان اندازه یک موضوع عاطفی است –آنها آن را شیطان‌پرستی می‌دانند. برای اکثر ریاضیدانان، معمایی کمی نگران‌کننده است: آیا واقعاً ارزش محتوایی دارد؟ –آیا باید آن را یاد بگیریم؟ من بر این گمانم که بله، چیز باارزشی دارد و آن زبانی است که برای کسانی که می‌توانند بدون لکنت از آن استفاده کنند، ابزاری مناسب در مطالعات فشردگی است. اما اگر حق با من باشد، همه‌اش همین

---

[1] Abby [2] Abraham Robinson [3] Telegu [4] Pete Loeb

است: این یک زبان است، نه یک ایده، و از این لحاظ زبانی کاملاً تمرکزیافته [بر یک زمینه] است. یک قیاسِ تا حدی نامنصفانه این است: برشهای ددکیند. این نامنصفانه است زیرا حتی تمرکز محدودتری دارد، اما شاید نشان دهد که منظور من چیست. نه، ما مجبور نیستیم آن را یاد بگیریم (برش ددکیند یا آنالیز نااستاندارد را)؛ این یک ابزار ویژه است، بیش از حد ویژه، و ابزارهای دیگر می‌توانند هر کاری را که این انجام می‌دهد، انجام دهند. تنها، مسئلهٔ سلیقه است.

تا آنجا که به قضیه‌های بسیار چشمگیر مربوط می‌شود ــگودل و کوهنــ ما آنها را تحسین می‌کنیم، اما آنها کار، فلسفه، و زندگی ما را تغییر نداده‌اند. اگر کسی موفق به اثبات تصمیم‌ناپذیری فرضیهٔ ریمان شود، شوکه می‌شویم، همان‌قدر که در زمان اثبات تصمیم‌ناپذیری اصل توازی شوکه شدیم ــاما بهبود خواهیم یافت. ما احتمالاً به کشف و مطالعهٔ نظریه‌های غیرریمانی اعداد ادامه خواهیم داد و شادکام خواهیم زیست. در این بین وقتی موضوع صحبت سخنران عمومی بعدی، کاربرد حساب محمولات مرتبهٔ دوم اعلام می‌شود، به شنیدنش می‌رویم: مؤدبانه، محترمانه، اما نه مشتاقانه و نه امیدوارانه. ما فکر نمی‌کنیم که احتمالاً چیزی یاد خواهیم گرفت. در بهترین حالت، سرگرم و در بدترین حالت نگران خواهیم شد. وقتی منطقدان می‌گوید «همهٔ اینها یکی است، همه‌اش ریاضیات است»، ما احساس ناامنی و فروتنی می‌کنیم ــنمی‌دانیم چگونه گفتهٔ او را رد کنیمــ اما، درعین‌حال، مطمئنیم که چیزی که می‌خواهیم بشنویم، مانند صحبت در مورد گروههای بِراوِر[1] یا توابع بِر[2] نیست و نمی‌تواند باشد.

هم منطقدان و هم، مثلاً، ریاضیدانِ متخصصِ آنالیز همساز، به دنبال نوع خاصی از ساختار هستند، اما نوع ساختار آنها از لحاظ روان‌شناختی متفاوت است. ریاضیدان می‌خواهد ارتباطات مبحث خود را با سایر بخشهای ریاضیات بداند و باید بداند. شباهتهای شهودی بین گروهها و فضاهای خارج قسمتی، در کمترین حد، تابلوهای راهنمای ارزشمند، اجزای تشکیل‌دهندهٔ «بلوغ ریاضی»، خِرَد، و تجربه هستند. معاینهٔ ریزبینانهٔ چنین شباهتهایی ممکن است به نظریهٔ رسته‌ها منتهی شود، مبحثی که برخی به آن با همان نوع از سوءظن نگاه می‌کنند که به منطق، اما نه به همان اندازه.

آها، سرنخی وجود دارد: معاینهٔ ریزبینانه. توجه منطقدان به پیچ‌ومهره‌های ریاضیات، به نمادها و واژه‌های آن ($\circ$ و $+$ و «یا» و «و»)، به ترتیب آنها ($\forall\exists$ یا $\exists\forall$)، و به گروه‌بندی آنها (پرانتزها) ممکن است برای ریاضیدان به مثابه بحث زیاد در موارد جزئی جلوه‌گر شود ــنه اینکه غلط باشد،

[1] Brauer [2] Baire

به‌اندازهٔ‌کافی دقیق، اما تأکیداتی انحرافی است. یک قیاس منصفانه ممکن است این باشد: فعالیت منطقدان برای آنالیزدان مدرن به همان طریقی جلوه‌گر می‌شود که ممکن بود اپسیلونها و دلتاها به نظر فوریه بیاید.

گفته شده که بزرگترین تک‌قدم برداشته‌شده در منطق طی ۲۰۰ سال اخیر، تبیین دقیق مفهوم برهان بوده است؛ اجازه دهید من هم به موازات آن، این تز غیرقطعی را پیش بگذارم که بزرگترین گام در زمینهٔ آنالیز در ۲۰۰ سال گذشته تبیین دقیق مفهوم پیوستگی بوده است. اما ریاضیدان متعصب ما می‌گوید: اوه، نه، این دو وضعیت اصلاً شبیه هم نیستند. اپسیلون و دلتا گامی به جلو بودند، آنها امکان جلوگیری از بسیاری از خطاها را فراهم کردند و چشم‌اندازهای جدیدی را باز کردند ــبه ما این امکان را دادند که تابعهای بسیار بیشتری را که قبلاً تصورش را هم نمی‌کردیم، پیوسته بنامیم. اما تاآنجاکه به برهانهای صوری ــبه معنای برخی دنباله‌های متناهی قابل‌پذیرش از فرمولهای خوش‌ترکیب مربوط می‌شودــ آنها علاوه‌بر ارائهٔ تکنیکهایی در درون نظریهٔ برهان، چه کاری برای ما کرده‌اند؟ یک دانشجوی باهوش تحصیلات تکمیلی می‌تواند چیزی جدید به فوریه بیاموزد، اما مطمئناً هیچکس نمی‌تواند ادعا کند که می‌تواند به ارشمیدس بیاموزد که بهتر استدلال کند.

می‌توان قیاس دیگری آورد. یک ادیب شکسپیرپژوه ممکن است بخواهد در مورد هنر، شخصیت‌پردازی، عمق بینش، درک تاریخ، و تکنیک شکسپیر در ساخت درام چیزی بداند؛ یا ممکن است محققی دیگر بخواهد دربارهٔ واژگان، دستور زبان و استفاده از تشبیهات و استعاره‌ها در آثار شکسپیر مطالعه کند. هر دو محقق، اجازه دهید فرض را بر این بگذاریم که، به یک شیوهٔ آکادمیک درست، با استفاده از نوشتگان موجود و بدون پرش به نتیجه‌گیریهای ناموجه، کار را انجام می‌دهند ــاما به‌گمانم آنها در خلوت کمتر نسبت به کارِ فردِ دیگر روی موافق نشان خواهند داد. یکی از آنها می‌گوید که کارِ فردِ ادیب پرابهام و غیرعلمی است، درحالی‌که فرد دیگر می‌گوید که فردِ زباندان یک غرغروی بی‌فرهنگ است. آیا هر دو اشتباه می‌کنند؟ فرد ادیب ممکن است بااکراه اعتراف کند که مشاهدات همکارش در مورد تعیین نویسندهٔ احتمالی و تاریخ انشای فلان غزل‌وارهٔ موردمناقشه قابل‌توجه است، و، البته، واژه‌شمارندهٔ می‌داند که اگر به خاطر مزیتهای شعری آثار شکسپیر نمی‌بود، هیچکس مایل نبود آمار محاسباتی واژگان شکسپیر را بداند. آیا حق با هر دوست؟

من همهٔ این چیزها را نگفتم تا کسی را در مورد مطالبی که گفتم و منظورم تلاش برای آن بود که واکنش بسیاری از ریاضیدانان، ازجمله خودم را، نسبت به منطق صوری، به شکلی که من آن را می‌بینم، توصیف کنم، متقاعد کنم. بحث درست یا غلط بودن نیست. بحث مربوط به صلاحیت

رشته‌ای، تربیت حرفه‌ای، و ذائقهٔ ریاضی است؛ واقعیت این است که، به هر دلیل، واکنش منفی خاصی در میان است.

منطق بولی

شرحی از آنچه منطقدانان آن را حساب گزاره‌ها می‌نامند، می‌تواند برای ریاضیدانان آزاردهنده و بهت‌آور باشد. این شرح ممکن است شبیه مقدار زیادی های‌وهوی بی‌مورد در بارهٔ استفاده از پرانتزها به نظر برسد، تأکید زیادی بر حروف الفبا دارد، و توجه دقیقی به «متغیرها» می‌کند (که به‌هیچ‌وجه تغییر نمی‌کنند). علی‌رغم (یا به دلیل؟) آن‌همه مطالب ملانقطی‌وار، ملاحظهٔ اینکه محتوای واقعی این موضوع چیست، کار دشواری است. مادام که این موضوع دربارهٔ استلزامهای بین گزاره‌ها بحث می‌کند، هر آنچه که می‌گوید بدیهی به نظر می‌رسد. آیا این واقعاً ارزش ریاضی دارد؟

بله، دارد. اگر در کتابخانه به دنبال آن بگردید و سعی کنید دربارهٔ حساب گزاره‌ها چیز یاد بگیرید، مراجع بیشتری درخصوص جبر بولی پیدا خواهید کرد. این، موضوع زیبایی است، موضوعی که هنوز مسائل ژرف، دشوار و هنوز حل‌نشده‌ای دارد، اما در سطحی که با منطق مرتبط است، آسان ــتقریباً بدیهی‌ــ است. مفیدترین کتابهایی که پیدا کردم، کتاب هیلبرت‌ــآکرمان، پل روزن‌بلوم[1] و کتاب اول کلین[2] در مورد فراریاضیات، آن کتاب بزرگ، بودند، و ذره‌ذره مطلب را دریافتم. سؤال: حساب گزاره‌ها چیست؟ پاسخ: نظریهٔ جبرهای بولی آزاد با مجموعه‌ای منتهاشمارا از مولدها.

تصورش را بکنید که شما ریاضیدانی هستید که اتفاقاً نمی‌دانید «گروه» چیست، و درنتیجه، پیش یک فرد خبره می‌روید و تعریف را از او می‌پرسید. حالا این تصور را بکنید که آن فرد خبره به جای ارائهٔ اصل‌موضوع‌های معمول، در مورد دنباله‌های متناهی از حروف، عمل هم‌زنجیرسازی که دنباله‌هایی جدید از دنباله‌های قدیمی می‌سازد و روابط هم‌ارزی که دنباله‌های بسیاری را به هم می‌پیوندند، شروع به صحبت می‌کند. اگر هم فرد خبره و هم شما به‌اندازهٔکافی شکیبایی داشته باشید، ممکن است در این وهله یاد بگیرید که گروه آزاد چیست، و سپس، از طریق مولدها و رابطه‌ها یاد بگیرید که یک گروه از هر نوع چیست. این همان کاری است که حساب گزاره‌ها برای جبرهای بولی انجام می‌دهد: با زحمت زیاد گروههای آزاد را می‌سازد، و سپس گاهی، از طریق به‌اصطلاح اصل‌موضوع‌های نامنطقی، نشان می‌دهد که چگونه می‌توان همهٔ موارد دیگر را نیز به دست آورد.

اِعمال مجموعه‌ای از روابط بر روی (عناصر) یک گروه، عملاً مانند مشخص کردن یک زیرگروه

[1]Paul Rosenbloom [2]Kleene

نرمال و تقسیمش بر آن است. همین مطلب در نظریهٔ بولی هم صادق است: نهادن مجموعه‌ای از اصل‌موضوع‌های نامنطقی روی یک جبر بولی درواقع همانند تعیین یک ایده‌آل بولی و تقسیمش بر آن است. (جبردانان به ایده‌آلها عادت دارند، اما علاقهٔ منطقدانان بیشتر به مفهوم دوگانهٔ پالایه است. در منطق، پالایه‌ها، که در مطالعهٔ جبری اثبات‌پذیری پیش می‌آیند، درواقع طبیعیتر از ایده‌آلها هستند، که با ابطال‌پذیری سروکار دارند.) نظریهٔ گروه را می‌توان مطالعهٔ جفتهای مرتبی مانند (F, N) دانست که در آن F یک گروه آزاد و N یک زیرگروه نرمال F است؛ به‌همین‌ترتیب، هر منطق گزاره‌ای کلی (نه لزوماً «خالص») را می‌توان یک جفت مرتب (B, I) تلقی کرد که در آن B یک جبر بولی آزاد و I یک ایده‌آل در B است.

وجوه تشابه بین گروهها و جبرهای بولی، و نیز بین رویکرد معمول به حساب گزاره‌ها و جبرهای بولی آزاد، بسیار بیشتر و عمیقتر از نکاتی است که در بالا گفته شد. به‌عنوان‌مثال «قضیهٔ استنتاج» را در نظر بگیرید که می‌گوید استلزامی مانند $p = q$ را می‌توان از مجموعه‌ای از اصل‌موضوع‌ها استنتاج کرد اگر و تنهااگر بتوان نتیجهٔ q را از مجموعهٔ بسط‌یافته‌ای به دست آورد که از الحاق p به آن اصل‌موضوع‌ها حاصل شده است. برگردان جبری دوگان‌شده: یک نابرابری $q \leq p$ به هنگ یک ایده‌آل بولی صادق است اگر و تنهااگر q به ایده‌آل تولیدشده توسط p همراه با ایده‌آل مفروض تعلق داشته باشد. مثالی دیگر: یک منطق (B, I) «سازگار» است اگر I «کوچک» باشد (به این معنی که یک ایده‌آل سره باشد، به بزرگی B نباشد ــ همه‌چیز ابطال‌پذیر نباشد) و «کامل» است هرگاه I «بزرگ» باشد (به این معنی که ماکسیمال باشد ــ هر چیزی که ابطال‌پذیر نباشد، اثبات‌پذیر باشد).

مفاهیمی که برای روشن شدن موضوع در این مثالها آمده، در قالب اصطلاحات نظریهٔ ساختار دستگاه جبری بیان شده‌اند؛ منطقدانان آنها را «نحوی» می‌نامند. مفاهیم «معنایی» را نیز داریم که با نظریهٔ نمایش سروکار دارند. برای مثال، «جدولهای ارزش» چیزی نیست جز توصیف همریختیها به ناشیانه‌ترین شکل قابل‌تصور در جبر بولی دو عنصری، و این همان چیزی است که نظریهٔ نمایش شبیه به آن است: ساده‌ترین جبرها را از نوع مورد مطالعه انتخاب کنید و همریختیهایی از جبرهای دلخواه به جبرهای آسان را در نظر بگیرید. (یک مثال استاندارد و نابدیهی، نظریهٔ گروههای موضعی‌فشردهٔ آبلی است که در آن فقط یک گروه، یعنی دایره، نقش «آسانترین» گروه را بازی می‌کند.) مشابه جبری مفهوم منطقی «کمال معنایی» (هر چیزی که ابطال‌پذیر نیست، رضایت‌بخش است) نیم‌سادگی[1] است (هر عنصر گروهی متفاوت با همانی، توسط سرشتی بر روی عددی به غیر از ۱ نگاشته می‌شود).

[1]semisimplicity

من بسیاری از این تشابهات زیبا، هیجان‌انگیز، و روشنگر را یافتم، گاهی فقط به‌طورضمنی، در کتابهایی که حریصانه می‌خواندم، برخی از آنها را حدس زدم، و مجبور شدم تعدادی از آنها را خودم کشف کنم، به‌طرزدردناکی دست‌وپا می زدم و از کوچه‌ای بن‌بست به کوچهٔ بن‌بست بعدی می‌رفتم. من به دنبال یک فرهنگ لغت بودم، باور داشتم که چنین فرهنگی می‌باید وجود داشته باشد، فرهنگ لغتی که کلمات مبهمی را که منطقدانان استفاده می‌کردند، به زبان دقیق ریاضی ترجمه کند. بله مبهم، یا در بهترین حالت، دقیق اما به شیوه‌ای مجبوری و خاصِ‌مورد. وقتی از یک منطقدان معنی متغیر را پرسیدم، گفت که متغیر فقط یک «حرف» یا «نماد» است. آن کلمات به واژگان ریاضیات تعلق ندارند؛ من توضیحی را که در آن از آنها استفاده شده بود، بی‌فایده ــ مبهم ــ یافتم. وقتی پرسیدم منظور از «تفسیر» چیست، پاسخی با جزئیات گیج‌کننده گرفتم (مجموعه، تناظر، جانشانی، فرمولهای صدق‌کرده). در مقایسه با صدق که بعداً آن را یاد گرفتم (همریختی)، پاسخ به نظرم بی‌فایده ــ مجبوری، خاصِ‌مورد ــ آمد. یادگیری صدق، هیجان‌انگیز بود ــ آغاز دیدن این نکته بود که منطق صوری شاید فقط یک عکس‌برداری دستوری از برخی قسمتهای پرمایهٔ ریاضیات باشد ــ این، هم هیجان‌بخش و هم یک چالش بود.

جادهٔ جبرهای چندتایه

چالش، کشف ریاضیات پرمایه‌ای بود که حساب محمولات و نسخه‌های «کاربردی» خاص آن، عکسهایی از آن هستند ــ دریافتن اینکه چه چیزی برای تابعهای گزاره‌ای آن نقشی را ایفا می‌کند که جبرهای بولی برای گزاره‌ها دارند.

اگر گزاره‌ها، هر چه که باشند، به پاکیزه‌ترین شکل از طریق جبرهای بولی مطالعه شوند ــ اگر، به بیان اساسیتر، [در برابر سؤال] گزاره «واقعاً» چیست، [گفته شود که] فقط یک عنصر از جبر بولی است ــ دراین‌صورت، به احتمال زیاد، تابعهای گزاره‌ای حتی مرموزتر، تابعهایی با مقادیری در یک جبر بولی هستند. اگر «سقراط فانی است» یک گزاره باشد (یا دقیقتر، جمله‌ای باشد که یک گزاره را بازنمایی می‌کند ــ عضوی از ردهٔ هم‌ارزی که یک گزاره واقعاً همان است)، دراین‌صورت یک تابع گزاره‌ای (از مثلاً، x) باید چیزی شبیه «x فانی است» باشد. اما درجهٔ پیچیدگی‌ای که آن نشان می‌دهد، هنوز به‌اندازهٔکافی بزرگ نیست. درواقع: اگر «سقراط قبل از افلاطون درگذشت» یک گزاره باشد، آنگاه «x_1 قبل از x_2 درگذشت» نیز، وقتی به عنوان تابعی از دو شناسه در نظر گرفته شود، باید به عنوان یک تابع گزاره‌ای در نظر گرفته شود. در متنهای ریاضی، تابعهای سه، چهار، یا، بر

همین منوال، هر تعداد متناهی از شناسه‌ها، مورد نیازند ــتعداد شناسه‌های موجود باید به‌طوربالقوه نامتناهی باشند. (باید به یاد داشته باشم که در اینجا از کلمهٔ «متغیر» اجتناب کنم– سردرگمی در اینجا نهفته است.)

پس بسیار خوب: تابع گزاره‌ای نوعی، تابعی از دامنه‌ای مانند X (اعداد صحیح، فیلسوفان یونانی، هر چیز دلخواه) به یک جبر بولی B است. نه، این تعریف به‌اندازهٔکافی کلی نیست: باید از $X^۲$ به B (برای تابعهای دوشناسه‌ای)، یا از $X^۳$ به B، یا، برای آنکه برای هر چیزی آمادگی داشته باشیم، از X^I به B باشد که در آن I یک مجموعهٔ اندیس‌گذار، ترجیحاً نامتناهی، است.

در این مدل، «متغیر» چیست؟ این، عنصری از X، یا $X^۲$، یا X^I نیست: یک ثابت است (مانند ۷ یا سقراط). منطقدانان مدت زیادی است که در متون خود به بقیه می‌گویند که یک متغیر چیست، اما آنها آن شهامت ریاضی راسل را در مورد مصداقها نداشتند که ۲ را به عنوان ردهٔ همهٔ جفتها تعریف کنند. آنها از یک مشابه زبان‌شناختی استفاده کردند: گفتند که متغیر، مانند ضمیر است. در ضرب‌المثل کلاسیک «برای هر h، اگر h دچار تردید شود، آنگاه h ازدست‌رفته است» (گاهی به طرزی نغزتر که به صورت «کسی که تردید دارد ازدست‌رفته است» بیان می‌شود، متغیر «h» که اینجا مطرح می‌شود، یک ضمیر است؛ نقش آن در این بیان نغز توسط «او» ایفا می‌شود.)

برای مثال فرض کنید X مجموعه‌ای از فیلسوفان یونانی و p تابعی از $X^۲$ به یک جبر بولی مناسب مانند B باشد که به‌گونه‌ای تعریف شده است که $p(x_۱, x_۲)$ دارای ارزش «$x_۱$ پیش از $x_۲$ درگذشت» باشد. استفاده از نمادهایی مانند $x_۱$ و $x_۲$ در اینجا یک قرارداد ریاضی است، اما بیشتر ریاضیدانان واقعاً به‌دشواری قادر خواهند بود که بگویند $x_۱$ و $x_۲$ دقیقاً چه هستند. (آنها ممکن است بگویند که اینها «متغیر» هستند، اما به‌زودی اعتراف می‌کنند که نمی‌دانند که این کلمه به چه معناست.) دستوری مانند: «ارزش p را در جفت مرتب (سقراط، افلاطون) تعیین کنید» معنای نامبهمی دارد و در آن تنها از اصطلاحات تعریف‌شده یا قابل‌تعریف ریاضی استفاده شده است. این دستور را می‌توان به این صورت نیز بیان کرد: ارزش p را در جفتی که اولین مختص آن سقراط و دومین مختص آن افلاطون است، تعیین کنید. یا معادلش: «مختص شمارهٔ ۱ را برابر با سقراط و مختص شمارهٔ ۲ را برابر با افلاطون قرار دهید». و باز، خلاصه‌وار اما روشن: «۱ را برابر سقراط و ۲ را برابر افلاطون قرار دهید». دراینجا نمادهای «۱» و «۲» معنای روشن و ثابتی دارند؛ آنها عناصر مجموعهٔ اندیس‌گذار شاخص I (= ۱، ۲) هستند که در اینجا به کار می‌رود. آنها «اسامی» متغیرها هستند ــچرا از خود شجاعت به خرج ندهیم و نگوییم که آنها همان متغیرها هستند؟ و این

همان کاری است که منطقدانان عملاً انجام می‌دهند. وقتی می‌گویند «مجموعه‌ای مانند I از متغیرها را در نظر بگیرید»، منظور آنها این است که «مجموعه‌ای مانند I را در نظر بگیرید که از عناصر آن به عنوان اندیسهایی برای متمایز ساختن مختصات در حاصل‌ضرب دکارتی از یکدیگر استفاده می‌شود».

حتی پس از آنکه توافق کردیم که تابعهای گزاره‌ای را مطالعه کنیم، باید مجموعه‌ای مانند I از متغیرها، دامنه‌ای مانند X و یک جبر ارزشها مانند B داشته باشیم، و اینکه اشیای مطالعه تابعهایی از X^I به B هستند، و هنوز باید تصمیم بگیریم که کدام عملها روی چنین تابعهایی سزاوار تجرید اصل‌موضوعی هستند. نگاههای مکرر به نوشتگان منطق و خیال‌پردازی ریاضی درون‌کاوانه، دو نوع عمل مهم را پیشنهاد می‌کند: جانشانیها، که $x_۱ \leq x_۲$ را مثلاً به $x_۲ \leq x_۱$ یا حتی به $x_۱ \leq x_۱$ تغییر می‌دهند، و تسویرها، که $x_۱ \leq x_۲$ را به‌عنوان‌مثال به «به‌ازای $x_۲$ای $x_۱ \leq x_۲$» تغییر می‌دهند. آنها به یک اندازه مهم‌اند، اما به یک اندازه دشوار نیستند؛ اکثر مردم آشنایی کمتری با ویژگیهای جبری و هندسی تسویر دارند و درنتیجه برای آنها دشوارترند.

فرض کنید $I = \{۱, ۲, ۳\}$، X مجموعهٔ اعداد حقیقی است، و B جبر بولی زیرمجموعه‌های E از $X^۳$ (یا معادلش، جبر بولی از گزاره‌های به شکل «$(x_۱, x_۲, x_۳) \in E$» باشد.) به‌طورمشخص، فرض کنید که E گوی واحد بستهٔ $\{(x_۱, x_۲, x_۳) : x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ \leq ۱\}$ و p تابع گزاره‌ای متناظر باشد (به‌طوری‌که $p(x)$ برای هر x در $X^۳$، این حکم است که «$x \in E$» برای برخی از xها صادق و برای برخی دیگر کاذب است). دراین‌صورت «به‌ازای $x_۳$ای، $p(x)$»، که یک شکل ممکن اختصاری برای آن $\exists_۳ p$ است، تابع گزاره‌ای q با دو شناسه است به‌طوری‌که $q(x_۱, x_۲)$ برای هر $(x_۱, x_۲)$ در $X^۲$، این حکم است که «به‌ازای $x_۳$ای، $(x_۱, x_۲, x_۳) \in E$». به لحاظ هندسی p (متناظر با) گوی واحد است. q به لحاظ هندسی چیست؟ پاسخ: استوانهٔ نامتناهی‌ای که محور مرکزی آن محور $x_۳$ و مقطع عرضی آن در صفحهٔ $(x_۱, x_۲)$، قرص واحد است.

با انگیزهٔ مثالهایی از این دست، تارسکی و مکتب او، در اوایل دههٔ ۱۹۵۰، شروع به مطالعهٔ جبر تسویری کردند و ساختارهایی را معرفی کردند که آنها را جبر استوانه‌ای نامیدند. کار مشابهی در همان زمان در لهستان، برخی مرتبط با تارسکی و برخی مستقل، در حال انجام بود؛ نمایندگان شاخص مکتب لهستان در آن زمان راسی‌یوا[۱] و سیکورسکی[۲] بودند. احتمالاً به انگیزهٔ این خواسته که یک محصول نهایی کامل را عرضه کنند، تارسکی و همکارانش چندین سال تقریباً هیچ چیزی در

[1] Rasiowa [2] Sikorski

مورد جبر استوانه‌ای منتشر نکردند. اگر دوست می‌داشتید که چیزی دربارهٔ کارهای آنها، یاد بگیرید، می‌توانستید دو چکیدهٔ تک‌پاراگرافی را در بولتن ۱۹۵۲ بخوانید یا می‌توانستید سفری زیارتی به برکلی بکنید. چندان طولی نکشید که من هر دو را انجام دادم.

مکاشفه‌های شهودی برخی از پاراگرافهای قبلی (آنهایی که دربارهٔ تابعهای گزاره‌ای و عملهای مهم روی آنهاست) نمونهٔ نوع خاصی از تفکر پیشاپژوهشی هستند، از نوع تفکری که (احتمالاً) پونتریاگین هنگام بررسی گروههای آبلی متناهی، گروه دایره‌ای، خط، چنبره، گروههای برداری، مجموعهٔ کانتور و گروههایی قابل‌حصول از آنها از طریق تشکیل مجموعهای مستقیم، زیرگروهها و گروه‌های خارج‌قسمتی انجام داد –نوعی از تفکر که او را به سمت مفهوم مجرد «درست»، یعنی گروههای آبلی موضعی‌فشرده سوق داد. آها! (او ممکن است گفته باشد) –خودش است– این باید همان زمینهٔ کلی درست باشد –حالا بگذارید ببینیم که آیا واقعاً می‌توان یک قضیهٔ دوگان را فرمول‌بندی و آن را در این زمینه ثابت کرد.

با الهام‌گیری از اشتیاقم برای ساختن جبر راستین از منطق، و مطابق با آنچه از اسرار تارسکی آموخته بودم، در سال ۱۹۵۳، مطالعهٔ جبرهای چندتایه[۱] را آغاز کردم و حدود شش یا هفت سال به آن ادامه دادم. (به‌علاوه، دوباره زمان تغییر رشته رسیده بود و شش یا هفت سال بعد زمان آن فرا رسید که به سراغ تغییر بعدی بروم.) این نام به دلیل وجود («چند»)[۲] عملگر سور (از قبیل $\exists_1$، $\exists_2$، و $\exists_3$) به ذهنم آمد؛ حالت مهم خاصی که در آن فقط یک چنین عملگری وجود داشته باشد، جبرهای یکانی[۳]، رویکرد جبری به قیاسیات[۴] ارسطویی، و حالت مهم تباهیده که در آن چنین عملگری رخ نمی‌نماید، رویکرد بولی آشنا به حساب گزاره‌های سوری است. این برنامه جاه‌طلبانه بود. من می‌خواستم از درون کلِّ منطق، جبر بسازم و، به‌ویژه، می‌خواستم معنای جبری دو نتیجهٔ معروف گودل، قضیهٔ تمامیت و قضیهٔ ناتمامیت را بفهمم. آیا موفقیتی حاصل کردم؟

کلِّ منطق و کلِّ ریاضیات

نه، درساختن جبر از کلِّ منطق موفقیتی نصیبم نشد؛ بله، در حصول بینشی دربارهٔ اینکه چگونه می‌توان این کار را انجام داد، توفیق پیدا کردم. هنوز هم فکر می‌کنم این کار را می‌توان و باید انجام داد و امیدوارم انجام شود، اما نه به دست من. دیگر نه؛ یک ایدهٔ جدید لازم است. این هم کاری بود، کاری سخت، تاآنجاکه به تحقیق مربوط می‌شود، کار تقریباً تمام‌وقتی برای شش سال از زندگی

[1]polyadic [2]poly [3]monadic [4]syllogistics

من، و، تا آنجا که به تحقیق مربوط می‌شود، احتمالاً بهترین کار من در زندگی.

تسویر وجودیِ اصل‌موضوع‌های جبری ساده است، اما ماهها طول کشید تا آنها را هضم کنم و به‌طورشهودی و حسی و نیز از نظر صرفاً فنی بفهمم. من آنها را روی یک تکه مقوای کوچک نوشتم و از آن پس مقوا را در کیفم با خود می‌بردم و به‌طورمکرر در طول آن دقایق زیادی که همهٔ ما هرروزه تلف می‌کنیم ـ ضمن منتظر ماندن برای کسی که با او قرار ناهار داشتم و او پنج دقیقه دیرتر می‌رسید یا ضمن منتظر ماندن درحالی‌که دهانم باز مانده بود تا دندانپزشک برگردد ـ بیرون می‌آوردم تا به آن نگاه کنم. آیا کسی هست که هنوز نداند که آن اصل‌موضوع‌ها چه هستند؟ بسیار خوب: سور وجودی، نگاشتی مانند $\exists$ از یک جبر بولی به خود آن است، به‌طوری‌که

$$\exists \circ = \circ, \qquad p \leq \exists p$$

و

$$\exists(p \wedge \exists q) = \exists p \wedge \exists q$$

هر زمان که p و q عضو جبر باشند.

من در آن سالها، طی جلسات دانشکده، هنگام لم‌دادنهای بعد ناهار، در طول کنسرتها، و البته، در وقتِ کار، که پشت میزم نشسته و بی‌اختیار ورق کاغذ زردرنگی را خط‌خطی می‌کردم، با منطق جبری زندگی و آن را نجوا می‌کردم. در یکی از این مواقعی که مشغول خط‌خطی کردن بودم، باز تحت تأثیر وحدت تفکر ریاضی قرار گرفتم. نیاز به روشن ساختن یک هویتِ بولی به‌ظاهر ابتدایی داشتم، اما نمی‌توانستم ـ گیر کرده بودم ـ ترفند [لازم] را نمی‌دیدم. فقط برای خط‌خطی کردن به روشی متفاوت، بدون انگیزه‌ای هدفمند، یا به نظرم چیزی مثل این، کتابی را از بین کتابهای روی میزم بیرون آوردم ـ کتاب کوچک مقدماتی‌ام دربارهٔ فضای هیلبرت ـ و چند صفحه‌ای از آن را به‌طورتصادفی ورق زدم، یا فکر می‌کنم این کار را کردم. خودشه، پیدا کردم!، کارم نتیجه داد: در صفحهٔ ۵۸ کتاب فضای هیلبرت، آن ترفند بولی که برای منطق جبری به آن نیاز داشتم، وجود داشت؛ یک استدلال مقدماتی که می‌توانم قسم بخورم که قبلاً آن را ندیده بودم (این استدلال ثابت می‌کند که یک اندازهٔ تصویرمقدار، ضربی است).

قضیه‌ای که بیشترین دردسر را برای من به‌همراه داشت، نقطهٔ اوج منطق جبری II بود. آن قضیه، نقطهٔ کمالِ مقدماتی بود که نظریه به آنها نیاز داشت و آن، توجیه اصل‌موضوع‌ها بود. این قضیه بیان می‌کند که مدلهایی که انگیزهٔ تعریف جبرهای چندتایه را فراهم کرده‌اند، درواقع برای نشان

دادن جبرهای چندتایه‌ای که به منطق مربوط می‌شوند، کافی است. شبی را به یاد می‌آورم که از آخرین مانع عبور کردم. ساعت ۹ یک عصر کسالت‌آور، تاریک، و سرد اکتبر در شیکاگو بود. دو ساعت تمام، پشت میز کارم نشسته بودم، در حال تمرکز، دست‌به‌دست کردن تردستانهٔ چیزهایی که به نظر می‌رسید ده‌ها مفهوم و تکنیک‌اند، کلنجار رفتن با آنها، نوشتن، بلند شدن برای راه رفتن دور اتاق و سپس دوباره نشستن، احساس نومیدی اما ناتوان از متوقف کردن کار، احساس فشاری غیر قابل مقاومت برای ادامه دادن. کاغذ و مداد دیگر به دردم نمی‌خورد ــنیاز به تغییر حالت داشتمـ لازم بود کاری بکنم ــبارانی‌ام را پوشیدم و عصایم را برداشتمـ زیر لب زمزمه می‌کردم «برمی‌گردم»، راه افتادم قدم بزنم، سمت دریاچهٔ خیابان ۵۵ام و در برگشت به خیابان ۵۶ام، و دوباره به سمت خیابان ۵۷ام رفتم. پس از آن بود که دیدمش. تمام شد. دیدم که چه کار باید بکنم، جنگ را برده بودم، استدلال روشن بود، قضیه درست بود، و من توانستم آن را ثابت کنم. باید جشن می‌گرفتم. ساعت تقریباً ۱۰ شب بود و خواربارفروشی که تازه از مقابلش رد شده بودم، آماده می‌شد که مغازه را تعطیل کند. باران ناخوشایندی نم نم می‌بارید و انعکاس نور درچاله‌چوله‌های پرآب، زیبا به نظر می‌آمد. در میان وسایل فضای بیرون خواربارفروشی، که در شرف حمل به داخل بود، چند گل تُنُک وجود داشت. داخل جیبم را گشتم و ۹۸ سنت پیدا کردم. از فروشنده پرسیدم که آیا می‌توانم مقداری از آن گلهای تُنُک ته‌مانده را با این پول بخرم یا نه، و او پوزخندی از سر موافقت زد که بله، قیمت آنها یک دلار است، اما شما می‌توانید آنها را با دو سنت کمتر بخرید. ۹۸ سنتم را خرج کردم و آن گلها را به خانه برای همسرم بردم. خیس و خوشحال پیشنهاد کردم که با خوردن آبجویی جشن بگیریم.

قضیهٔ نمایش نقطهٔ اوج کار من در منطق جبری بود، اما پایان کار نبود. قضیهٔ نمایش این امکان را فراهم کرد که قضیهٔ تمامیت گودل را به عنوان قضیهٔ نیم‌سادگانی برای جبرهای چندتایه بشناسیم، اما پرداخت جبری قضیهٔ ناتمامیت گودل (این قضیهٔ معروف دربارهٔ اینکه «شما هرگز نمی‌توانید همه‌چیز را ثابت کنید») کاری بود که هنوز باید انجام می‌شد. هدف اصلی من در تقریباً تمام کارهایی که در اواسط دههٔ ۱۹۵۰ انجام می‌دادم، همین بود: مقاله‌های منتشرشده (ازجمله منطق جبری III وIV)، انبوهی از پیش‌نویسهایی که هرگز برای انتشار آماده نشدند (منطق جبری V، ۳۷۵ صفحه از آن هنوز در قفسهٔ کشودارم جا خوش کرده‌اند)، دانشجویان دکتری‌ام (گالر، لوبلان[1]، دی‌نیو[2])، درسگفتارهایم و سایر کارهای فرعی (مانند یک دورهٔ مؤسسه تابستانی انجمن ریاضی امریکا دربارهٔ

[1] Le Blanc [2] Daigneault

منطق، و مانند کتاب کوچکی دربارهٔ جبرهای بولی) که هدف همهٔ آنها تلاش برای تسخیر جبر مربوط به قضیهٔ الهام‌گونهٔ و اساساً صوری گودل بود.

می‌دانم که همین نزدیکیهاست، منتظر پیدا شدن است، و منطق جبری V مقداری از شاخ‌وبرگ‌ها را زدود. صوری‌گرایی (رویکرد از نوع گروه آزاد) گزیرناپذیر است؛ سؤال در مورد نظریهٔ اعداد بازگشتی است. از دیدگاه سلیقه‌ای من، این یکی از درخشانترین ایده‌ها در ریاضیات، و یکی از زشت‌ترین و کم‌ظرافت‌ترینهاست. من همهٔ آنها را در منطق جبری V، از طریق مفهوم «جبر پئانویی»، نوع خاصی از یک جبر چندتایه که می‌تواند تصویر آیینه‌ای سرشت تکنیک نظریهٔ اعدادی برهان گودل باشد، مرور کردم. این تصویر آیینه‌ای، کامل است؛ هر مرحله از برهان را می‌توان در هر جبر پئانویی بیان کرد و نتیجه آنکه ایده‌آل گزاره‌های ابطال‌پذیر، یا معادلش پالایهٔ گزاره‌های اثبات‌پذیر در یک جبر آزاد پئانویی، ماکسیمال نیست. طبیعی است که گروه خارج‌قسمتی به پیمانهٔ آن ایده‌آل را تشکیل دهیم و از زبان جبر عام برای توصیف نتیجه استفاده کنیم. ازآنجاکه جبرِ بدون ایده‌آلهای نابدیهی معمولاً «ساده» نامیده می‌شود، و ازآنجاکه قضیهٔ گودل، درواقع‌امر، عبارت از این حکم است که در جبر خارج‌قسمتی که هم‌اکنون به آن اشاره شد، ایده‌آلهای نابدیهی وجود دارند، صورت‌بندی جبری دستاورد شکوه‌مند گودل این است که نظریهٔ اعداد، ساده نیست.

جبر چندتایه می‌تواند کاری بیش از نظریهٔ اعداد انجام دهد: می‌تواند «انجام دهد» به این معنی که می‌تواند از هر محاسبات محمولات کاربردی، و به‌طورخاص، نظریهٔ مجموعه‌ها، نسخه‌برداری، تقلید، و تصویربرداری آیینه‌ای با تمام جزئیات، انجام دهد. ریاضیدانانی هستند که اعتقاد دارند که تمامی ریاضیات پیامد منطقی نظریهٔ مجموعه‌هاست، یا در هر صورت، این در مورد تمام ریاضیات موجود صادق است. من یکی از آنها هستم. نظریهٔ مجموعه‌ها، به‌نوبهٔ‌خود، پیامد منطقی اصل‌موضوع‌های تسرملو–فرانکل[1] است. ازآنجاکه، علی‌الاصول، صورت‌بندی آن اصل‌موضوع‌ها در زبان جبر چندتایه آسان است، نتیجه اینکه آن نوع جبرهایی که با چنین صورت‌بندی‌ای مشخص می‌شوند، که اجازه دهید فعلاً آنها را جبرهای زِداِف[2] بنامم، تصویر آیینه‌ای کاملی از کلِ ریاضیات موجود (و احتمالاً کلِ ریاضیات قابل‌تصور نیز) خواهد بود.

اینجا چه خبر است؟ با استفاده از زبان و رویهٔ معمولی ریاضیات [می‌توانم بگویم که] چیزی بیش از گروهها با عملگرهایی در میان نیست، من نوع خاصی از ساختار –جبرهای چندتایه– را تعریف می‌کنم و به عنوان نمونه‌هایی از آن نوع ساختار، با جبرهای زِداِف روبه‌رو می‌شوم. هر کاری

[1]Zermelo-Fraenkel [2]ZF

را که انجام دادم تا به آنجا برسم، می‌توان تصویر آیینه‌ای آن را با جبرهای زِداِف به دست آورد، یک تصویر آیینه‌ای کامل، بدون اینکه چیزی از قلم بیفتد؛ به‌طورخاص، اگر می‌خواستم، می‌توانستم دربارهٔ گروهها با عملگرهایی در چنین جبرهایی بحث کنم، و اگر می‌خواستم، می‌توانستم دربارهٔ جبرهای زِداِف در چنین جبرهایی بحث کنم. جایگاه بحث اخیر نسبت به اولی دقیقاً همان رابطه‌ای خواهد بود که اولی در وهلهٔ اول با دستگاه نظریهٔ جبرهای زِداِف دارد. جبرهای زِداِف‌ای که در درون جبرهای زِداِف مورد بحث قرار می‌گیرند، تصویربرداری آیینه‌ای کاملی از تصویربرداری آیینه‌ای کامل کلِّ ریاضیات خواهد بود. آیا پدیدهٔ کوویکِر اوتس[1] را در اینجا می بینید؟ ــجعبهٔ غلات صبحانهٔ آشنا با تصویری از یک کوویکر که جعبهٔ غلات صبحانهٔ آشنا را در دست دارد که روی آن عکس یک کوویکر است و قس علی‌هذا؟ موضوع همین است و امکان آن هم هست که به شما احساس ناراحتی دست بدهد ــآیا ما در معرض آن بیماری ناخوشایند هستیم که «رجعت نامتناهی» نامیده می‌شود؟ من نمی‌دانم. این مطلب مرا نگران نمی‌کند، مرا نمی‌ترساند، اما اعتراف می‌کنم که نمی‌توانم تجسم کنم که این عکس، چه پیامدهایی دارد. آیا چیز اشتباهی در این رجعت نامتناهی وجود دارد؟ یا آنکه چیز خوبی در آن وجود دارد ــآیا چشم‌اندازی ارائه می‌دهد که حتی نمی‌دانستم که آیا می‌خواهم آن را ببینم؟ نمی‌دانم، اما فکر می‌کنم که تأمل در این پدیده بسیار سرگرم‌کننده است.

دانشجویان منطق و منطقدانان

از سه دانشجوی دکتری‌ام در منطق، قبلاً به اولینِ آنها اشاره کرده‌ام، گالر[2](۱۹۵۵)، که از مارشال استون به من به ارث رسید. در رسالهٔ او رابطهٔ بین جبرهای چندتایه و جبرهای استوانه‌ای مورد مطالعه قرار گرفته و نشان داده شده بود که آن سیستمها، هرکدام به شیوهٔ خود، آنچه را قصد انجام دادن آنها بود، به انجام رسانده‌اند ــیعنی به‌ترتیب، نمایش حساب محمولات مرتبهٔ اول «خالص» و حساب محمولات با برابری. آخرین نفر اوبر دی‌نیو[3](۱۹۶۰) بود که تنها به معنای عجیبی دانشجوی من بود، اما خوشحالم که او به نوعی دانشجوی من بود.

من دی‌نیو را در یکی از سالهای حضورم در انستیتو، ۱۹۵۷–۱۹۵۸، زمانی که دانشجوی تحصیلات تکمیلی در پرینستون بود و با چرچ[4] کار می‌کرد، ملاقات کردم. بااین‌حال، کاری که می‌خواست انجام دهد، خارج از علایق معمول چرچ بود. از این نظر او یک کاندیدای نامتعارف

---

[1] Quaker oats، یک مارک تجاری برای نوعی غلات صبحانه؛ کوویکر یا کواکر به پیروان برخی فرقه‌های پروتستان مسیحی گفته می‌شود و oat نوعی جو است.

[2] Galler [3] Aubert Daigneault [4] Church

دکتری بود ـ او موضوع رساله‌اش را خود پیدا کرده بود (مرتبط با مفاهیم و سازه‌های جبری از قبیل خودریختیها و حاصل‌ضرب تانسوری). چرچ مایل به سرپرستی رساله بود، اما چون با این موضوع احساس راحتی نمی‌کرد، از من خواست که عضو غیررسمی کمیتهٔ داوران باشم و آن را خوانده و داوری کنم. گفتم بله، البته، و، زمانی که وقتش رسید، کار دی‌نیو را با دقتی به‌مراتب بیشتر از رساله‌هایی که بر پیشرفت آنها نظارت دارم، خواندم. رساله‌ای خوب، و بیشتر در حال‌وهوای جبر محض بود تا مقاله‌های خودِ من، و من خیلی از آن یاد گرفتم. همه‌اش جبر نبود ـ با کار منطقدانان فلسفی و نیز منطقدانان صوری تداخل داشت. یکی از دستاوردهای آن، برای مثال، صورت‌بندی نتیجه‌ای از بث[1] دربارهٔ نظریهٔ تعریف به عنوان مشابهی از یک واقعیت شناخته‌شده در نظریهٔ گروه‌ها بود: در یک حاصل‌ضرب آزاد جبرهای چندتایه با عملِ ادغام، اشتراک عاملها دقیقاً همان قسمت ادغام‌شده است. این مطلب مرا تحت تأثیرقرار داد. من نقد دقیق و مفصلی برای استفادهٔ چرچ، و دی‌نیو، نوشتم، و این کار زحمتی کمتر از حد معمول برایم داشت.

می‌توانم یک نام دیگر به فهرست شاگردانم اضافه کنم. گاهی دانشجو، راهنمای رسالهٔ دکتری خود را به یک دلیل «اشتباه» انتخاب می‌کند و سپس خود را (شاید با حیرت خوشایندی) در وضعیتی می‌بیند که کاری کاملاً متفاوت با آنچه انتظارش را می‌کشیده، انجام داده است. این چیزی بود که برای لئون لو بلان، تنها دانشجوی منطق که به معنی واقعی مالِ خودم بود، اتفاق افتاد. من یک بار سخنرانی‌ای در دانشگاه مونترال ایراد کردم و این مرد جوان باهوش آنجا به من معرفی شد. او بهترین دانشجوی آنها در درس متغیرهای حقیقی در آن سال بود، نظریهٔ اندازه برایش لذت‌بخش بود و حتی یک نکتهٔ کوچک قابل‌انتشار دربارهٔ آن به دست آورده بود. من یک متخصص معروف نظریهٔ اندازه بودم، بنابراین پرسید که آیا می‌تواند برای کار با من به شیکاگو بیاید؟ گفتم البته. لئون چند ماه بعد، زمانی که کار کارشناسی خود را به پایان رسانده بود، به شیکاگو آمد، البته او برای شروع پایان‌نامه در آنجا هنوز آمادگی نداشت، ابتدا باید مقدار زیادی ریاضی یاد می‌گرفت، درسهایی را باید می‌گذراند، و الزاماتی را باید برآورده می‌کرد. هنگامی که برای رساله آماده شد، نمی‌خواستم کاری به کار نظریهٔ اندازه داشته باشم ـ من عمیقاً آلودهٔ جبرهای چندتایه شده بودم. نتیجه: لئون رساله‌ای دربارهٔ جبرهای چندتایه نوشت. این تغییر آن‌گونه که به زبان گفته می‌شود، ناگهانی نبود و از سوی او داوطلبانه بود. دربدو امر مرا به عنوان مؤلف کتابی می‌شناخت که در مونترال خوانده بود. وقتی یکدیگر را دیدیم و هرکدام دیگری را پسندیدیم، او از جایگاه دیگری با من آشنایی حاصل کرد و

[1] Beth

علاقه و اشتیاق من به منطق جبری در او رسوخ کرد. او فداکاری نمی‌کرد، بلکه همسوی جریان آب شنا می‌کرد. علاوه‌براین (آن‌گونه که اغلب به دانشجویان تحت راهنمایی‌ام می‌گویم) آنچه که به عنوان موضوع رساله می‌نویسید، برای شما یک تعهد مادام‌العمر ایجاد نمی‌کند. شما چند سالی را صرف نوشتن رسالهٔ خود می‌کنید و بهتر است سعی نکنید کار دیگری در طول آن سالها انجام دهید، اما زمانی که این کار تمام شد، می‌توانید (و باید!) کار دیگری انجام دهید.

رسالهٔ لئون دربارهٔ جبرهای چندتایهٔ ناهمگن بود. ایدهٔ رساله این است که مجموعهٔ «متغیرها» به «گونه»های مختلف تقسیم می‌شوند و قصد این است که در قسمتهای مختلف ساختار تحت مطالعه تغییر کنند. بدین‌ترتیب، برای مثال، در حساب پئانویی این امکان وجود دارد که از برخی از متغیرها برای اعداد صحیح و از دیگران برای مجموعه‌هایی از اعداد صحیح استفاده کرد و در منطق مرتبهٔ دوم خالص ممکن است متغیرهای «انفرادی» و متغیرهای «تابعی» وجود داشته باشند. لئون بخش قابل‌توجهی از نظریهٔ چندتایه را به جبر ناهمگن گسترش داد، و سپس، به جای رفتن به سراغ انجام کاری دیگر، چندین سال به کار روی منطق جبری ادامه داد. او تا زمان مرگ نابهنگامش (بر اثر تومور مغزی) بر سر همین موضوع ماند و آثار ماندگاری در این زمینه پدید آورد.

من به تلاش برای نشر این دیدگاه نه‌تنها در بین دانشجویان دکتری خودم بلکه هر جا که می‌توانستم و در هر فرصتی که داشتم، ادامه دادم. در بهار ۱۹۵۵ درسی در منطق جبری در شیکاگو ارائه دادم. این کلاس، با در نظر گرفتن موضوع، به طرز شگفت‌آوری بزرگ بود –۱۷ دانشجو داشت. مو هیرش[1] یکی از آنها بود (یک توپولوژی‌دان سرشناس)، جک تاوبر[2] (متخصص نظریهٔ جبری اعداد) هم بود، و مایک مورلی[3] (تنها فرد حرفه‌ای آن دوروبر –یک منطقدان واقعی). من دو ترم را در سالهای ۱۹۵۵–۱۹۵۶ در برکلی گذراندم، و مجموعه‌ای از درسگفتارها را دربارهٔ جبر چندتایه ارائه دادم. گرهارد هاچ‌شیلد[4] به دلایلی (کنجکاوی؟ نزاکت؟) از شرکت‌کنندگان وفادار این دوره بود. در طول همان ترمها، او درسهایی دربارهٔ گروههای لی ارائه می‌داد، و البته من هم یکی از باوفاترین شرکت‌کنندگان کلاس او بودم.

در آن روزها کنفرانسها، گردهماییهای همراه با سرگرمی[5]، سخنرانیهای عمومی، و کارگاههای آموزشی زیادی وجود نداشت، و تعداد اندکی هم که وجود داشتند، مغتنم بودند. دوره‌های مؤسسهٔ تابستانی انجمن ریاضی امریکا به‌ویژه کارآمد و معتبر بودند و به نظرم رسید که برگزاری چنین دوره‌ای در منطق خوب است، به‌خصوص اگر دست‌کم بخشی از آن جبری باشد. این یک تصمیم

[1] Moe Hirsch [2] Jack Towber [3] Mike Morley [4] Gerhard Hochschild [5] jamboree

جسارت‌آمیز بود. من اصلاً در قد و قوارهٔ منطقدانان نبودم، هیچ نفوذی نداشتم، عضوی از حلقهٔ درونی [منطقدانان] نبودم. تنها چیزی که داشتم گستاخی (جرأت اینکه جسارت به خرج بدهم) و پشتکار بود (میل به انجام کارِ گِل). با تارسکی تماس گرفتم، به کلین زنگ زدم، با راسر[1] تماس گرفتم. فهرستی از افراد و فهرستی از موضوعات را تهیه کردم. نامه‌هایی برای افراد حلقهٔ درونی نوشتم، سعی کردم بودجه‌های معقولی را برنامه‌ریزی کنم و فرمهای درخواست را پر کنم. نتیجه داد، شهرت و استانداردهای بالای تارسکی و کلین و راسر باعث شد که نتیجه دهد ـ اما من آن را شروع کردم و زمانی که نتیجه داد، به خود بالیدم و خوشحال بودم. تابستانی عالی در ایتاکا در سال ۱۹۵۷ بود. حدود ۷۵ یا ۸۰ نفر در دورهٔ تابستانی شرکت کردند، از آن جمله مایکل رابین[2] (که دربارهٔ اتوماتون‌های متناهی صحبت کرد)، هاسکل کاری[3] (که دربارهٔ منطق ترکیبیاتی سخنرانی کرد –مگر می‌شد چیزی غیر از این باشد؟)، گئورگ کرایسل[4] (تفسیرگودل از حساب هِیتینگ[5]) و مارتین دیویس[6] و هیلاری پاتنم[7] (که دربارهٔ کار مشترکشان روی مسئلهٔ دهم هیلبرت گزارش ارائه کردند). من در مورد جبرهای چندتایه صحبت کردم (به غیر از این چه؟)، و خلاصه‌ای اجمالی از سخنرانی‌ام در مجلد مجموعهٔ مقالات دورهٔ تابستانی، درواقع تنها مطلب چاپ‌شدهٔ من است، که در آن برخی از سرنخ‌های فنی خودم از امیدها و آرزوهایم دربارهٔ جبر پئانو را ارائه کرده‌ام.

این مجلد مجموعهٔ مقالات با «آهنگ بدرقه» به پایان رسیده است:

اگر در این اندیشه‌ای که مقاله‌ات توخالی‌ست،
چارهٔ کار در استفاده از حساب تابعی مرتبهٔ اول است،
این بعداً مبدل به منطق می‌شود،
و توگویی با جادو،
آن مطلب بدیهی به عنوان معجزه ستایش می‌شود.

محمدقاسم وحیدی اصل:دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: m-vahidi@sbu.ac.ir

---

[1]Rosser [2]Michael Rabin [3]Haskell Curry [4]Georg Kreisel [5]Heyting [6]Martin Davis [7]Hilary Putnam

Farhang va Andishe-ye Riyazi
Volume 41, Number 71, Fall/Winter 2022, Pages 223–248
doi: 10.30504/mct.2023.357

I Want to be a Mathematician

P. Halmos
Translated by M. Q. Vahidi-Asl[1]

Shahid Beheshti University, Iran

Abstract. This is a translation of some parts of Chapter 10-11 in *I Want to be a Mathematician* (1985), by Paul R. Halmos.

Keywords: Halmos, teaching and research of mathematics in Uruguay, formal logic, Boolean algebra
Article history: Recieved 7 January 2023; Accepted 6 February 2023

[1]m-vahidi@sbu.ac.ir

ISSN 1022-6443/