

طرح و حل مسئله

بنابر تصمیم هیئت تحریریه فرهنگ و اندیشه ریاضی، از این شماره به بعد، قسمتی از مجله را به طرح و حل مسائل اختصاص دادیم. مسائل طرح شده در این قسمت، متمرکز بر ریاضیات دوره کارشناسی است. امیدواریم مدرسان و ریاضیدانان کشور با معرفی این قسمت از مجله به دانشجویان دوره کارشناسی و تشویق آنها به تلاش برای حل مسائل، باعث به وجود آمدن جوی پویا و جنب و جوش علمی در بین جوانان که ریاضیدانان آینده کشور هستند، شوند.

از خوانندگان محترم دعوت می‌شود تا مسائل اصیل یا کمتر دیده شده برای طرح در این قسمت و همچنین حل مسائل این شماره را با ذکر شماره مسئله، با استفاده از قالب X_{HPersian}، از طریق سایت مجله ارسال کنند. به منظور ارزیابی مسائل پیشنهادی، ارسال راه حل کامل و ذکر مأخذ (در مورد آنهایی که کمتر دیده شده اند) ضروری است. یادآوری می‌شود که مسائل متداول مطرح در کتب درسی یا پاتوق‌های اینترنتی و مسائل طرح شده در قسمت مسائل مجلات دیگر، برای پیشنهاد مناسب نیستند. هیئت تحریریه در انتخاب و ویرایش مسائل آزاد است.



مسئله ۱.۶۶. نشان دهید که برای هر $x \neq 0$ داریم $\left| \frac{d^n}{dx^n} \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{n+1}$

مسئله ۲.۶۶. نشان دهید که اگر زاویه x برحسب درجه، گویا باشد و $\sin x$ نیز یک عدد گویا باشد، آنگاه $\sin x = 0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$.

مسئله ۳.۶۶. برای یک گروه G و $a \in G$ قرار می‌دهیم $U_a = \{gag^{-1} : g \in G\}$

(الف) نشان دهید که U_a ها پایه برای یک توپولوژی روی G تشکیل می‌دهند؛

(ب) نشان دهید این توپولوژی هاوسدرف است اگر و تنها اگر G آبلی باشد.

مسئله ۴.۶۶. فرض کنید $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ غیر همانی با درایه‌های حقیقی نامنفی باشد به طوری که مجموع درایه‌های هر سطر و هر ستون آن برابر با ۱ است. نشان دهید جایگشت غیرهمانی σ موجود است به طوری که $a_{i\sigma(i)} \neq 0$ برای هر i .

مسئله ۵.۶۶. فرض کنید $f(x) = a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی از درجه $2n$ باشد که متحد با صفر نیست و به ازای هر مقدار حقیقی x ، نامنفی است. نشان دهید چندجمله‌ای $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \dots + f^{(2n)}(x)$ نیز دارای همین ویژگی است.

مسئله ۶.۶۶. فرض کنید $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_k z^k$ (که $a_k \in \mathbb{R}$ برای هر k) یک تابع تحلیلی روی یک همسایگی باز حول 0 در \mathbb{C} است. نشان دهید یک تابع تام g موجود است به طوری که ضرایب بسط سری توانی $f(z)e^{g(z)}$ همگی گویا هستند.

مسئله ۷.۶۶. منظور از یک عملیات «درج و جمع» روی یک عدد در مبنای ۲، اضافه کردن تعدادی علامت + در بین ارقام آن و سپس جمع کردن عبارت حاصل (در مبنای ۲) است تا به یک عدد جدید برسیم. نشان دهید برای هر عدد صحیح مثبت (در مبنای ۲) با حداکثر دو عملیات «درج و جمع»، می‌توان به عدد ۱ رسید.

مسئله ۸.۶۶. نشان دهید اگر x و y دو عدد حقیقی و t و n دو عدد صحیح مثبت باشند به طوری که $t \leq n$ ، آن‌گاه

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (y - kx)^t = \begin{cases} 0 & t < n \\ n!x^n & t = n \end{cases}$$