

ابرویه‌های پوچ در هندسه لورنتسی و کاربردهای آن

سید محمدباقر کاشانی

چکیده. ابرویه‌های پوچ جایگاه ویژه‌ای در هندسه و فیزیک، به‌ویژه نظریه نسبیت، دارند. در این مقاله، توصیفی از ابرویه‌های پوچ فضا‌زمان و برخی کاربردهای آن‌ها در فیزیک به‌دست می‌دهیم، از جمله ویژگی‌های ریاضی سیاه‌چاله و افق پیشامد را بیان می‌کنیم و توصیف ریاضی از برخی فضا‌زمان‌های مهم در فیزیک، مانند فضا‌زمان‌های مجانبی تخت و مجانبی دوسیتز، به‌دست می‌دهیم و به قضیه مهم شکافنده پوچ اشاره می‌کنیم. همچنین، به‌کوتاهی زیرخمینه‌های پوچ خمینه‌های شبه‌ریمانی را بررسی خواهیم کرد.

۱ مقدمه

خمینه^۱ شیئی ریاضی با ساختاری هموار است، به عبارت دقیق‌تر، خمینه یک فضای توپولوژیک است که موضعاً با مجموعه‌های باز یک فضای مدل (اقلیدسی یا جز آن) هموارریخت است و بنابراین روی (و همچنین به‌توی) آن می‌توان نداشت هموار تعریف کرد. خمینه دراصل گسترش مفهوم خم و رویه در فضای \mathbb{R}^3 است. خمینه شبه‌ریمانی^۲ همبند $(M^n, g = \langle, \rangle)$ را فضا‌زمان^۳ می‌نامند اگر

برای هر $p \in M$ و $g \in \Gamma(T_p^\circ M)$ نداشت

$$g_p = \langle, \rangle_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$$

ضرب اسکالر لورنتسی، یعنی از نشانگان $(-, +, \dots, +)$ باشد؛ g_p نداشت \mathbb{R} -دوخطی،

عبارات و کلمات کلیدی: زیرخمینه، ابرویه پوچ، فضا‌فرم لورنتسی، خمینه شبه‌ریمانی، فضا‌زمان، نسبیت خاص و عام
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۶/۱۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۸/۱

^۱manifold ^۲pseudo Riemannian ^۳space-time

متقارن، و ناتباهیده است. بنابراین پایه $\{v_i\}_{i=1}^n$ برای $T_p M$ یافت می‌شود به طوری که

$$\langle v_i, v_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{i,j} \quad (1 \leq i, j \leq n), \quad \varepsilon_1 = -1, \quad \varepsilon_i = 1 \quad (i \geq 2).$$

همچنین M باید جهت‌دار زمانی باشد، یعنی میدان برداری هموار X بر M یافت شود طوری که برای هر $p \in M$

$$\langle X(p), X(p) \rangle_p < 0.$$

زیرخمینه (نشانه^۴ یا فروبرده شده^۵) S در فضا-زمان (M, g) را پوچ^۶ نامند اگر متریک القایی از M بر S تباهیده باشد، یعنی در هر نقطه $p \in S$ بردار $v \in T_p S$ $v \neq 0$ یافت شود طوری که

$$\langle v, w \rangle_p = 0 \quad (w \in T_p S).$$

در ادامه، متریک روی خمینه را با نمادهای $\langle \cdot, \cdot \rangle$ یا g نمایش می‌دهیم.

زیرخمینه‌های پوچ به صورت طبیعی در هندسه و فیزیک ظاهر می‌شوند. صورت طبیعی برای زیرخمینه پوچ در هندسه به شکل مخروط نوری^۷ است [۲۴، ص ۱۰۸-۱۰۹] با تعریف

$$\Lambda_p = \{v \in T_p M \mid \langle v, v \rangle = 0, v \neq 0\}.$$

(ابرویه) زیرخمینه‌های پوچ به ویژه در نظریه نسبیت عام^۸ جایگاه ویژه‌ای دارند، زیرا برخی از مهم‌ترین مفهوما در این نظریه به کمک زیرخمینه‌های پوچ فضا-زمان بیان (تحقق) ریاضی می‌یابد. برای نمونه، سقوط آزاد ذرات، با ژئودزیک‌های پوچ (یعنی خمی مانند γ که شتاب هندسی آن صفر است و $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$) نمایش داده می‌شود. همچنین بخش‌های هموار مرزهای بدون ترتیب زمانی^۹، مانند افق‌های رویداد^{۱۰} سیاه‌چاله‌ها و افق‌های فشرده کوشی^{۱۱} به صورت (ابرویه) زیرخمینه‌های پوچ ظاهر می‌شوند. گفتمانی است که رویه‌های فضاگونه^{۱۲} فروبرده شده در زیرخمینه‌های پوچ سه‌بعدی می‌تواند مدلی برای رویه سیاه‌چاله‌ها در افق رویدادشان باشد. سیاه‌چاله‌ها یکی از موضوع‌های پژوهشی مهم در فیزیک نظری و تجربی است. مشاهده‌های چندی از سیاه‌چاله‌ها در آزمایش‌های دوگانه پرتو X و در مرکز بیشتر کهکشان‌ها از جمله کهکشان خودمان وجود سیاه‌چاله‌ها را

^۸نظریه‌ای که ویژگی‌های جهان فیزیکی را به کمک فضا-زمان مدل‌سازی و بیان می‌کند؛ فصل ۱۲ از [۳۰] را ببینید.

^۴embedded ^۵immersed ^۶null ^۷light cone ^۹achronal boundary ^{۱۰}event horizons of black holes

^{۱۱}compact Cauchy horizons ^{۱۲}space like

در کیهان‌شناسی تأیید می‌کند. همچنین سیاه‌چاله‌ها یکی از مهم‌ترین هدف‌های آزمایش‌های مربوط به امواج گرانشی هستند. این آزمایش‌ها یکی از محرک‌های اصلی در تکامل نظری مفهوم سیاه‌چاله‌ها است و صورت‌بندی گوناگونی از آن‌ها را به دست می‌دهد.

کاربرد دیگر ابررویه‌های پوچ در بررسی پایان^{۱۳} فضا زمانِ مجانبی تخت^{۱۴} است. افزون‌بر این‌ها، رویه‌های فضاگونه فروروده‌شده در ابررویه‌های پوچ با نظریهٔ تکینگی^{۱۵} در نظریهٔ نسبیت عام پیوند دارد، زیرا رویه‌های فضاگونه در ابررویه‌های پوچ صورت‌های گوناگونی از رویه‌های به‌دام افتاده^{۱۶} هستند. رویهٔ به‌دام افتاده رویه‌ای است در دامنه‌ای از فضا زمان که میدان گرانشی در آن دامنه چنان نیرومند است که ژئودزیک‌های پوچ آیندهٔ سرچشمه‌گرفته از آن دامنه به هم (بسیار) نزدیک می‌شوند، پدیده‌ای که شکل‌گیری رُمبش گرانشی^{۱۷} و بروز تکینگی‌ها را نشان می‌دهد. سیگنال‌های تکانه‌ای^{۱۸} نورگون در نظریهٔ نسبیت عام، مانند هر مدلی در فیزیک نظری، مدل‌های ایده‌آل ریاضی برای بیان برخی پدیده‌های طبیعی است. این سیگنال‌ها در مدل‌سازی آنچه از سیاه‌چاله‌ها طی برخورد ذرات پراثرژی به وجود می‌آید نقشی مرکزی دارند. مدل فضا زمانِ چنین سیگنالی یک ابررویهٔ پوچ تکین است که تانسور خمیدگی ریمانی روی آن یک تکینگی نگاشت دلتای دیراک را نمایش می‌دهد؛ جزئیات بیشتر در [۳، فصل ۱]. همچنین از دیدگاه فیزیک می‌توان بین دسته‌ای از ابررویه‌های پوچ خمینه‌های لورنتسی و افق‌های کیلینگ^{۱۹} ارتباطی برقرار کرد. به بیان نادقیق، افق کیلینگ ابررویه‌ای پوچ است که میدان برداری پوچی که آن را تولید می‌کند می‌تواند به یک میدان برداری کیلینگ تبدیل شود. از نظر فیزیکی، افق کیلینگ K در فضا زمان چهار بُعدی (\bar{M}, \bar{g}) دارای نقشی مهم است: یک ذره بر K می‌تواند بی‌درنگ با سرعت نور در امتداد مولد پوچ حرکت کند و همچنان نسبت به محیط اطرافش در حال سکون باشد، زیرا از یک پارامتر مستوی برای پارامتری‌سازی ژئودزیک پوچ مولد آن (نسبت به ساختار یا هندسهٔ ذاتی \bar{M} و وضعیت ابررویهٔ پوچ یا هندسهٔ خارجی آن) می‌توان استفاده کرد؛ بخش چهارم از فصل پنجم در [۵] را ببینید. همچنین رده‌ای از ابررویه‌های پوچ در فضا زمان‌های الکترومغناطیس چهار بُعدی (یعنی فضا زمان چهار بُعدی همراه با میدان تانسوری الکترومغناطیس) ظاهر می‌شود از جمله ابررویه‌های پوچ ناوردای الکترومغناطیس در فضا زمان‌های همگن؛ فصل هشت از [۵] را ببینید.

مطالعهٔ ابررویه‌های پوچ موضوعی جالب، به‌روز، و مورد توجه در هندسه و فیزیک است؛

¹³end ¹⁴asymptotically flat ¹⁵singularity ¹⁶trapped surfaces ¹⁷gravitational collapse ¹⁸impulsive

¹⁹Wilhelm Karl Joseph Killing

برای نمونه [۱، ۲، ۳، ۹، ۱۰، ۲۵، ۲۹] را ببینید. گفتنی است بیشتر ابرویه‌های پوچ که در نسبیت عام پدیدار می‌شود از ردهٔ C^0 اند و در حالت کلی حتی از ردهٔ C^1 نیستند [۳۰]. در این مقاله برخی پیش‌نیازهای هندسی و فیزیکی لازم را می‌آوریم و نیز نگاهی گذرا به هندسهٔ زیرخمینه‌های (ابرویه‌های) پوچ می‌اندازیم.

۲ پیش‌نیازها

در این بخش مفاهیم لازم از هندسهٔ خمینه‌ها و نظریهٔ نسبیت را می‌آوریم. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند آگاهی بیشتری را در [۴، ۱۱، ۱۲، ۱۶، ۱۸، ۲۶، ۲۷، ۳۰] بیابد.

۱.۲ پیش‌نیازهای ریاضی

گفتیم منظور از فضا زمان عبارت است از خمینهٔ هموار و همبندی مانند M^n با متریک لورنتسی $g = \langle , \rangle$ (با نشانگان $(-, +, \dots, +)$) به انضمام یک میدان برداری $\chi(M)$ ^۲ زمان‌گون همه‌جا ناصفر $X \in \chi(M)$ ؛ در اینجا $\chi(M)$ گردایهٔ (فضای برداری حقیقی) همهٔ میدان‌های برداری هموار بر M را نشان می‌دهد.

چند نمونهٔ (استاندارد) از فضا زمان را می‌آوریم.

(۱) فضای برداری \mathbb{R}^n را به‌منزلهٔ خمینه‌ای هموار در نظر بگیرید. میدان‌های برداری $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(\mathbb{R}^n)$ را با دستور زیر تعریف کنید

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = (p, e_i) \in T_p \mathbb{R}^n \cong \{p\} \times \mathbb{R}^n \quad (p \in \mathbb{R}^n, 1 \leq i \leq n)$$

که در آن پایهٔ معمول فضای برداری \mathbb{R}^n است. اکنون متریک لورنتسی $g = \langle , \rangle$ را بر \mathbb{R}^n چنین در نظر بگیرید: به‌ازای هر $p \in \mathbb{R}^n$ و $1 \leq i, j \leq n$

$$\begin{aligned} g_p \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_1}(p) \right) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial x_1}(p) \right\rangle = \langle e_1, e_1 \rangle = -1, \\ g_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right\rangle = \langle e_i, e_i \rangle = +1, \quad i \geq 2, \\ g_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle = \langle e_i, e_j \rangle = 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

^۲ یعنی نگاشتی هموار از یک خمینهٔ هموار به کلاف مماس آن طوری که به هر نقطهٔ روی خمینه یک بردار مماس بر خمینه نسبت می‌دهد. کلاف مماس یک خمینه برابر اجتماع همهٔ صفحه‌های مماس بر خمینهٔ مورد نظر است، که خود دارای ساختاری هموار است.

در این صورت (\mathbb{R}^n, g) را با \mathbb{R}_1^n نمایش می‌دهند و آن را فضای مینکوفسکی^{۲۱} می‌نامند. فضای مینکوفسکی فضازمان استاندارد تخت (یعنی با خمیدگی برشی^{۲۲} صفر) است. میدان برداری زمان‌گون همه‌جا ناصفر روی آن عبارت است از $\frac{\partial}{\partial x_1} \in \chi(\mathbb{R}_1^n)$. در متون فیزیک، معمولاً، $\frac{\partial}{\partial x_1}$ را با $\frac{\partial}{\partial t}$ نمایش می‌دهند.

(۲) تعریف کنید $S_1^{n-1} = \{p \in \mathbb{R}_1^n \mid \langle p, p \rangle = +1\}$. از قضیه مقدار عادی^{۲۳} دیده می‌شود که S_1^{n-1} زیرخمینه هموار از \mathbb{R}^n با بُعد $(n-1)$ (و در نتیجه ابرویه) است. می‌توان دید که $(S_1^{n-1}, g|_{S_1^{n-1}}) \subset \mathbb{R}_1^n$ ابرویه لورنتسی \mathbb{R}_1^n و در نتیجه فضازمان است که به فضای دو سیت^{۲۴} معروف است و آن را با dS نشان می‌دهند. میدان برداری زمان‌گون سراسری روی آن $(\frac{\partial}{\partial u_1})^T$ است یعنی مؤلفه مماسی $\frac{\partial}{\partial u_1}|_{S_1^{n-1}}$ بر S_1^{n-1} با تعریف زیر

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^T(p) = \frac{\partial}{\partial u_1}(p) - \left\langle \frac{\partial}{\partial u_1}(p), p \right\rangle p \quad (p \in S_1^{n-1}).$$

S_1^{n-1} فضازمان (استاندارد) با خمیدگی برشی ثابت $+1$ است.

(۳) به صورت کلی، برای عدد طبیعی n و s با شرط $1 \leq s \leq n$ ، خمینه هموار \mathbb{R}^n با متریک زیر از نشانگان s را با \mathbb{R}_s^n نمایش می‌دهیم

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_i} \right\rangle &= -1 & (1 \leq i \leq s), \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial u_j}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right\rangle &= +1 & (s+1 \leq j \leq n), \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial u_l}, \frac{\partial}{\partial u_m} \right\rangle &= 0 & (1 \leq l, m \leq n, l \neq m). \end{aligned}$$

اکنون بنویسید $H_1^{n-1} = \{p \in \mathbb{R}_1^n \mid \langle p, p \rangle = -1\}$. مانند نمونه (۱) دیده می‌شود که H_1^{n-1} ابرویه \mathbb{R}_1^n و $(H_1^{n-1}, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{H_1^{n-1}})$ فضازمان (استاندارد) با خمیدگی برشی ثابت -1 است. از جمله میدان‌های برداری سراسری زمان‌گون (همه‌جا ناصفر) روی H_1^{n-1} ، $X \in \chi(H_1^{n-1})$ با این تعریف است:

$$X(p) = p_2 \frac{\partial}{\partial u_1}(p) - p_1 \frac{\partial}{\partial u_2}(p) \quad (p \in H_1^{n-1}, p = (p_1, \dots, p_n)),$$

در اینجا \circ ، $\langle X(p), p \rangle = 0$ ، یعنی $X(p) \in T_p H_1^{n-1}$ و به‌ازای هر $p \in H_1^{n-1}$ داریم $\langle X(p), X(p) \rangle < 0$. فضای H_1^{n-1} را فضای پادِ دو سیت^{۲۵} می‌نامند و آن را با AdS نمایش می‌دهند. می‌توان دید که با تقریب یک هموارریختی برای S_1^{n-1} و H_1^{n-1} داریم

$$S_1^{n-1} \cong \mathbb{R} \times S^{n-2}, \quad H_1^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-2} \times S^1.$$

مجموعه $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ کرهٔ واحد $(m-1)$ بُعدی است، یعنی

$$S^{m-1} = \{p = (p_1 \cdots p_m) \in \mathbb{R}^m \mid p \cdot p = \sum_{i=1}^m p_i^2 = 1\}.$$

توجه کنید که \mathbb{R}_1^n ، S_1^{n-1} و H_1^{n-1} ($n \geq 3$) فضا فرم‌های^{۲۶} استاندارد لورنتسی (یعنی خمینه لورنتسی همبند، ژئودزیکی کامل، و با خمیدگی برشی ثابت) نیز هستند.

سه فضازمان بالا فضازمان‌های مدل (استاندارد) در نسیت‌اند و دیگر فضازمان‌ها به کمک آن‌ها ساخته می‌شود.

در پایین، هندسهٔ ابرویه‌های پوچ در فضازمان را به‌کوتاهی معرفی می‌کنیم. مجموعه $M^n \rightarrow M^n$ را فضازمان بگیرد. منظور از یک ابرویه (هموار) پوچ در M زیرخمینه (هموار) نشانده‌شدهٔ S در M است که تحدید J به S تباهیده باشد، برای نمونه مخروط نوری در \mathbb{R}^n ابرویه پوچ است. چون نشانگان متریک g ، $(1, n-1)$ است، فضای پوچ در فضای مماس بر S در هر نقطهٔ $p \in S$ فضای برداری یک‌بُعدی است و بنابراین هر ابرویه پوچ در فضازمان یک میدان برداری هموار همه‌جا ناصفر پوچ آینده می‌پذیرد؛ فضای عمود بر K در $T_p M$ ، برای هر نقطه $p \in S$ همان فضای مماس بر S در p است، یعنی $K_p^\perp = T_p S$. بنابراین هر بردار مماس v بر S که با K موازی نباشد، فضاگونه است، یعنی $\langle v, v \rangle > 0$. همچنین خم‌های انتگرال^{۲۷} K با پارامتری‌سازی مجدد ژئودزیکی‌های پوچ‌اند. خم‌های انتگرال بیشین K را مولدهای ژئودزیکی پوچ می‌نامند. گفتنی است میدان برداری K ، با تقریب ضریب $f \in C^\infty(S)$ (همواره مثبت) یکتا است. اکنون دو تعریف لازم داریم.

^{۲۷} یعنی خم‌های γ که برای هر t در دامنهٔ آن داریم $\dot{\gamma}(t) = K(\gamma(t))$.

تعریف ۱.۲ ([۲۳]). زیرخمینه پوچ S در فضا زمان M را در نظر بگیرید. منظور از کلاف خطی پوچ^{۲۸} S مجموعه $\tilde{k} = \bigsqcup_{p \in S} (T_p S \cap T_p S^\perp)$ است؛ این مجموعه تنها زیرکلاف برداری TS و $T^\perp S$ با تارهای یک بُعدی پوچ است. می‌توان دید این کلاف برداری جهت‌پذیر است.

تعریف ۲.۲ ([۲۳]). S را مانند تعریف ۱.۲ بگیرید. S زیرخمینه پوچ ژئودزیک نامیده می‌شود اگر $\nabla_K K = fK$ که در آن $K \in \chi(S)$ میدان برداری همه‌جا ناصفر پوچ، f, ∇ هموردای $L - C$ روی M است (برای جزئیات تعریف فصل ۳ از [۳۰] را مطالعه کنید).

گفتنی است این تعریف به میدان برداری پوچ K بستگی ندارد؛ یعنی اگر $K' \in \chi(S)$ میدان برداری همه‌جا ناصفر پوچ دیگری بر S باشد، رابطه $\nabla_K K = fK$ نتیجه می‌دهد که $\nabla_{K'} K' = gK'$ وای وجود دارد که $g \in C^\infty(S)$.

اگر S زیرخمینه پوچ ژئودزیک در M باشد، آنگاه هر مولد پوچ در S را می‌توان به صورت یک ژئودزیک پوچ پارامتری‌سازی کرد. باید دانست هر زیرخمینه پوچ فضا زمان لزوماً زیرخمینه پوچ ژئودزیک نیست. حالا $K \in \chi(S)$ را همان میدان برداری همه‌جا ناصفر و پوچ بگیرید. چون K بر S عمود است، نگاشت پوچ و اینتگراتن^{۲۹} (عملگر شکل)، فرم بنیادی دوم پوچ، و نظایر آن برای S (نسبت به K) همانند ابرویه‌های فضاگونه یا ابرویه‌ها در خمینه‌های ریمانی تعریف می‌شود (جزئیات در [۳۰] آمده است). برای این کار، رابطه هم‌ارزی \sim را روی بردارهای مماس بر S چنین تعریف کنید: برای بردارهای $X, X' \in T_p S$

$$X \sim X' (X = X' \bmod K_p) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}) X' - X = \lambda K_p.$$

رده هم‌ارزی X نسبت به \sim را با \bar{X} نمایش بدهید. به سادگی دیده می‌شود که اگر $X \sim X'$ و $Y \sim Y'$ آنگاه $\langle X, Y \rangle = \langle X', Y' \rangle$ و $\langle \nabla_{X'} K, Y' \rangle = \langle \nabla_X K, Y \rangle$. بنابراین می‌توان از مؤلفه‌ها در امتداد K چشم‌پوشی کرد. از این رو، به جای فضای مماس بر S ($T_p S$ در نقطه p) با فضای برداری خارج قسمتی $\{\bar{X} | X \in T_p S\} = \frac{T_p S}{K_p}$ و به جای کلاف مماس TS با کلاف برداری $\frac{TS}{K} = \bigsqcup_{p \in S} \left(\frac{T_p S}{K_p} \right)$ کار می‌کنیم. رتبه کلاف برداری $\frac{TS}{K}$ ، $(n-2)$ است. این کلاف برداری (با تقریب یکرختی کلافا) به گزینش میدان برداری پوچ K بستگی ندارد. روی کلاف برداری $\frac{TS}{K}$ به کمک متریک $\langle \cdot, \cdot \rangle$ متریک معین مثبت h را چنین تعریف می‌کنند: برای هر $p \in S$ تعریف

²⁸ null line bundle ²⁹Weingarten

کنید

$$h_p : \frac{T_p S}{K} \times \frac{T_p S}{K_p} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_p(\bar{X}, \bar{Y}) := \langle X, Y \rangle_p \quad (X, Y \in T_p S).$$

بنابر آنچه گفته شد h خوش تعریف است و به سادگی دیده می‌شود که معین مثبت است، یعنی

$$h_p(\bar{X}, \bar{X}) > 0 \quad (\bar{X} \in \frac{T_p S}{K_p}, \bar{X} \neq 0).$$

تعریف ۳.۲. نگاشت پوچ و اینگارتن S (نسبت به K)، $b = b_K$ ، در هر نقطه $p \in S$ ، نگاشت

$$\text{خطی } b : \frac{T_p S}{K_p} \rightarrow \frac{T_p S}{K_p} \text{ است که برای هر } X \in T_p S \text{، } b(\bar{X}) := \overline{\nabla_X K},$$

محاسبه‌ای معمول نشان می‌دهد که

$$h(b(\bar{X}), \bar{Y}) = \langle \nabla_X K, Y \rangle = \langle X, \nabla_Y K \rangle = h(\bar{X}, b(\bar{Y})).$$

پس b نسبت به h خودالحاق، و بنابراین قطری‌شدنی است و همه مقادیرهای ویژه آن حقیقی‌اند. اکنون فرم بنیادی دوم پوچ S (نسبت به K)، $B = B_K$ ، فرم دوخطی وابسته به b به کمک h است، یعنی برای هر $p \in S$ داریم

$$B_p : \frac{T_p S}{K_p} \times \frac{T_p S}{K_p} \rightarrow \mathbb{R}, \quad B_p(\bar{X}, \bar{Y}) := h(b(\bar{X}), \bar{Y}) = \langle \nabla_X K, Y \rangle.$$

چون b خودالحاق است، B متقارن است. S کلاً ژئودزیک^{۳۰} نامیده می‌شود اگر برای هر $p \in S$ ، $B \equiv 0$. از اینجا نتیجه می‌شود که هر ژئودزیک M که در آغاز به ابرویه کلاً ژئودزیک S مماس باشد در S می‌ماند. برای نمونه، ابرصفحه‌های پوچ در فضای مینکوفسکی و افق‌های رویداد در فضا زمان شوارتس‌شیلد^{۳۱} کلاً ژئودزیک است.

خیمیدگی میانگین پوچ را می‌توان به کمک نگاشت پوچ و اینگارتن همانند زیرخیمینه‌های ریمانی

تعریف کرد.

تعریف ۴.۲. خیمیدگی میانگین پوچ S (نسبت به K) نگاشت عددی هموار $\theta \in C^\infty(S)$ با

تعریف $\theta = \text{tr}(b)$ است.

³⁰totally geodesic ³¹Schwarzschild

اگر $\{v_i\}_{i=1}^{n-2}$ بردارهایی در $T_p S$ باشند که نسبت به $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ یک فضای گونیه و دوبه‌دو بر هم عمود باشند، آنگاه $\{\bar{v}_i\}_{i=1}^{n-2}$ یک پایه متعامد یک (نسبت به h) برای فضای برداری $\frac{T_p S}{K_p}$ است، بنابراین در $p \in S$ داریم

$$\theta = \text{tr}(b) = \sum_{i=1}^{n-2} h(b(\bar{v}_i), \bar{v}_i) = \sum_{i=1}^{n-2} \langle \nabla_{v_i} K, v_i \rangle. \quad (1.2)$$

میزان واگرایی مولدهای پوچ S را می‌توان از روی خمیدگی میانگین پوچ به‌دست آورد. اگر Σ تقاطع ابرویهٔ $P \subset M$ با S باشد که بر S سره‌قاطع^{۳۲} است، یعنی K در هیچ نقطه‌ای از Σ بر P مماس نیست، آنگاه، بنابر نظریهٔ تراگردی، Σ زیرخمینهٔ فضاگونهٔ $(n-2)$ بُعدی M در S و بر K عمود است. از رابطهٔ (۱.۲) و تعریف دیورژانس میدان برداری داریم $\text{div} \Sigma K = \theta | \Sigma$. پس $\theta | \Sigma$ دیورژانس (میزان واگرایی) مولدهای پوچ S را نسبت به Σ به‌دست می‌دهد. مخروط پوچ آینده، $S = \partial I^+(p) - \{p\}$ ، (مخروط پوچ گذشته، $S' = \partial I^-(p) - \{p\}$) در فضای مینکوفسکی دارای خمیدگی میانگین پوچ مثبت، $\theta > 0$ ، (دارای خمیدگی میانگین پوچ منفی، $\theta < 0$) است؛ تعریف ۱۸.۲ را ببینید.

اکنون معادلهٔ بسیار مهم رای چوداری^{۳۳} را مطرح می‌کنیم. اگر $\eta : (a, b) \rightarrow M$ یک مولد ژئودزیک پوچ S و پارامتری‌سازی شده (مستوی) آینده‌سو باشد و برای هر $s \in (a, b)$ نگاشت

$$b(s) = b_{\eta'(s)} : \frac{T_p S}{\eta'(s)} \rightarrow \frac{T_p S}{\eta'(s)}$$

نگاشت واینگارتن S در نقطهٔ $\eta(s)$ نسبت به بردار پوچ $\eta'(s) = K_{\eta(s)}$ باشد، آن وقت خانوادهٔ تک‌پارامتری نگاشت‌های واینگارتن $(a, b) \ni s \mapsto b(s)$ در معادلهٔ ریکاتی

$$b' + b^2 + R = 0 \quad (2.2)$$

صدق می‌کند؛ نماد $(\cdot)'$ ، به معنای مشتق‌گیری هموردا در راستای $\eta'(s)$ است (فصل ۳ از [۳۰]) را ببینید. اگر $X = X(s)$ میدان برداری مماس بر S در امتداد η باشد، b' چنین تعریف می‌شود

$$b'(\bar{X}) = b(\bar{X})' - b(\bar{X}'). \quad (3.2)$$

همچنین منظور از R در معادله (۲.۲) خودریختی زیر است

$$R : \frac{T_{\eta(s)}S}{\eta'(s)} \rightarrow \frac{T_{\eta(s)}S}{\eta'(s)}, \quad R(\bar{X}) := \overline{R(X, \eta'(s)) \eta'(s)}$$

و نگاشت $\chi^3(M) \ni (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$ تانسور خمیدگی ریمانی M است، یعنی

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

اکنون با گرفتن اثر از طرفین رابطه (۲.۲) معادله زیر برای مشتق خمیدگی میانگین پوچ $\theta = \theta(s)$ در امتداد η به دست می‌آید

$$\theta' = -\text{Ric}(\eta', \eta') - \sigma^2 - \frac{1}{n-2} \theta^2 \quad (۴.۲)$$

که در آن σ عدد بُرینش^{۳۴} اثر توان دوم قسمت بی‌اثر^{۳۵} b است، یعنی داریم $\sigma = \text{tr}(b - \frac{\text{tr}(b)}{n-2} \text{id}_{n-2})^2$

معادله (۴.۲) مشهور به معادله رای چوداری در نظریه نسبیت است. این معادله اثر خمیدگی ریچی^{۳۶} فضا زمان را بر خمیدگی میانگین پوچ ابرویه پوچ نشان می‌دهد. معادله رای چوداری نتیجه‌ای بنیادی برای توصیف حرکت بسته‌های مادی در یک دامنه کوچک به دست می‌دهد. همچنین این معادله ابزار مهمی برای اثبات قضیه‌های تکینگی پنروز-هاوکینگ در نظریه نسبیت عام است. همچنین این معادله تأییدی بر این انتظار شهودی است که گرانش یک نیروی جاذب جهانی بین هر دو بسته ماده-انرژی در نظریه نسبیت عام (همانند نظریه نیوتنی گرانش) است؛ [۷] و [۲۱] را ببینید. بنابراین با شگرد جایگزینی کلاف برداری $\frac{TS}{K}$ به جای کلاف مماس TS می‌توان از ابزارهای هندسه ابرویه‌های ریمانی برای شناسایی هندسه S بهره برد.

اکنون فضا زمان مجانبی تخت را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۲. فضا زمان M را مجانبی تخت نامند اگر برای هر $\varepsilon > 0$ زیرگردایه فشرده C در M یافت شود به طوری که قدرمطلق خمیدگی برشی (به بیان فیزیکی، مقدار میدان گرانشی) در هر نقطه از $M - C$ از ε کمتر باشد.

بنابراین در فاصله‌های دور، نمی‌توان هندسه M را از هندسه فضا زمان مینکوفسکی تمییز داد. به‌ویژه در نسبیت عام، فضا زمان مجانبی تخت فضا زمانی است که در آن مقدار میدان گرانشی، و

³⁴shear scalar ³⁵trace less ³⁶Gregorio Ricci-Curbastro

هر ماده یا میدان‌های دیگری که ممکن است در فضا زمان یافت شود، در فاصله‌های دور (از بخشی از M) چشم‌پوشیدنی است. یک نمونه ساده از فضا زمان مجانبی تخت فضای شوارتس شیلد است. فضا زمان با متریک کر^{۳۷} نیز مجانبی تخت است. فضا زمان دو سیتز-شوارتس شیلد مجانبی ساده است ولی مجانبی تخت نیست. خانواده بزرگ دیگری از فضا زمان‌های مجانبی تخت فضا زمان‌ها با متریک وایل^{۳۸} و گسترش‌های دورانی آن‌ها است.

فضا زمان شوارتس شیلد ساده‌ترین مدل نسیتی جهان با یک ستاره است. این ستاره را ایستا و کروی متقارن^{۳۹} و تنها سرچشمه گرانش برای فضا زمان در نظر می‌گیرند. این مدل را می‌توان برای هر دامنه در اطراف شیئی نجومی، که تقریباً این شرط‌ها را برآورده کند، به کار برد. برای نمونه در مورد خورشید، مدلی برای منظومه شمسی به دست می‌دهد که از دقیق‌ترین مدل‌های نیوتنی هم بهتر است. شوارتس شیلد این فضا زمان را در سال ۱۹۱۶، اندکی پس از پدیدار شدن نظریه نسبیت عام، یافت. در آغاز، بخش بیرونی این مدل از نظر فیزیکی مهم به نظر می‌رسید. با وجود این، اکنون نیمه فراموش شده (نیمه درونی) در کنار نیمه بیرونی، ساده‌ترین مدل از سیاه‌چاله است.

تعریف ۶.۲ ([۳۰]). فرض کنید $m > 0$. در tr -نیم صفحه $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ مجهز به متریک $h dt^2 + h^{-1} dr^2$ که در آن $h(r) = 1 - \frac{2m}{r}$ ، دامنه‌های $r > 2m$ و $0 < r < 2m$ را به ترتیب با P_I و P_{II} نمایش می‌دهیم. اگر $F = S^2$ کره واحد دو بُعدی باشد، حاصل ضرب تاب دار^{۴۰} $N = P_I \times_r S^2$ ، فضا زمان بیرونی شوارتس شیلد، و $B = P_{II} \times S^2$ ، سیاه‌چاله شوارتس شیلد از جرم m نامیده می‌شوند. اگر متریک M را با g_M و متریک S^2 را با g_F نشان دهیم، در این صورت متریک N به صورت $g = \pi^* g_M + (r \circ \pi)^* g_F$ در می‌آید که در آن

$$\sigma : M \times F \rightarrow F, (x, v) \mapsto v, \quad \pi : M \times F \rightarrow M, (x, v) \mapsto x.$$

برای آگاهی بیشتر، فصل ۱۳ از [۳۰] را ببینید. با این تعریف از سیاه‌چاله، مرز توپولوژیکی B (در فضای $M \times S^2$) افق رویداد است.

اکنون فضای مجانبی ساده را تعریف می‌کنیم. فضا زمان M را مجانبی ساده نامند اگر دارای فشرده‌سازی همدیس^{۴۱} \tilde{M} باشد به طوری که هر ژئودزیک پوچ در M دارای نقطه‌های پایانی آینده و گذشته بر مرز \tilde{M} باشد. چون این تعریف اجازه رخداد سیاه‌چاله را نمی‌دهد، معمولاً آن را با

³⁷Roy Patrick Kerr ³⁸Hermann Klaus Hugo Weyl ³⁹spherically symmetric ⁴⁰warped product

⁴¹conformal compactification

مفهوم مجانبی ساده ضعیف جایگزین می‌کنند. فضا زمان N را مجانبی ساده ضعیف نامند اگر N دارای مجموعه باز $U \subset N$ باشد به طوری که U با بازی از مرز \tilde{N} طولیا باشد؛ \tilde{N} فشرده سازی همدیس یک خمینه مجانبی ساده است. گفتنی است M مجانبی تخت است اگر مجانبی ساده ضعیف و مجانبی تهی باشد، یعنی تانسور خمیدگی ریچی M در یک همسایگی از مرز \tilde{M} صفر باشد. اکنون تعریف دقیق مفهوم مجانبی ساده آورده می‌شود.

تعریف ۷.۲ ([۵]). فضا زمان (M, g) (که M خمینه مرزدار است) مجانبی ساده نامیده می‌شود اگر فضا زمان (\hat{M}, \hat{g}) و نشانده $\hat{M} : M \rightarrow \hat{M}$ و نگاشت عددی Ω (دست کم از رده C^3) بر \hat{M} یافت شود با این شرط که

(الف) $\partial M - \hat{M}$ با M همدیس (یعنی متریک $\hat{g}|_{\hat{M}-\partial M}$ ضرب تابعی ناصفری از g) باشد و $\hat{g}|_M = \Omega^2 g$

(ب) Ω بر $\partial M - \hat{M}$ مثبت و بر ∂M صفر باشد و $d\Omega \neq 0$ ؛

(ج) هر ژئودزیک پوچ در \hat{M} دو نقطه پایانی از ∂M را داشته باشد.

گفتنی است فضا زمان دوسیتر-شوارتس شیلد مجانبی ساده است ولی مجانبی تخت نیست.

اکنون مفهوم پایان خمینه را بیان می‌کنیم. به لحاظ شهودی، یک پایان (فضای توپولوژیک X)

عبارت است از یک مؤلفه از بی‌کران X .

تعریف ۸.۲. منظور از پایان خمینه (فضای توپولوژیک) M حد مستقیم $\lim_{K \rightarrow A} C(M-K)$ است که روی زیرگردایه‌های فشرده دلخواه A از M گرفته می‌شود و $C(M-A)$ نشان دهنده گردایه مؤلفه‌های $M-A$ است و نگاشت $C(M-A) \rightarrow C(M-A')$ برای زیرگردایه‌های فشرده $A' \subset A$ از طریق نگاشت شمول $M-A \hookrightarrow M-A'$ به دست می‌آید.

برای بیان اصل مهم ماکسیمم برای ابرویه‌های پوچ به دو مفهوم دیگر نیاز داریم.

تعریف ۹.۲ ([۱۶]). فضا زمان M و دو ابرویه پوچ $S_1, S_2 \subset M$ متقاطع در $p \in M$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم S_2 در سمت آینده (گذشته) S_1 است اگر برای همسایگی U از p در M ، که در آن S_1 بسته و بدون ترتیب زمانی است، داشته باشیم $S_2 \cap U \subset J^+(S_1 \cap U, U)$ ؛ تعریف ۱۸.۲ را ببینید.

تعریف ۱۰.۲ ([۱۸]). S را C° ابرروی پوچ آینده و $p \in S$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم ابرروی هموار پوچ W یک ابرروی تکیه‌گاه گذشته S در p است اگر $p \in W$ و W در نزدیکی p در گذشته S باشد.

تعریف ۱۱.۲ ([۱۸]). S را C° ابرروی پوچ آینده در فضا زمان M بگیرید. می‌گوییم S دارای خمیدگی میانگین پوچ $\theta \geq 0$ به معنای تکیه‌گاه است، اگر برای هر $p \in S$ و هر $\varepsilon > 0$ ، ابرروی هموار (دست‌کم از رده C^2) پوچ $W_{p,\varepsilon}$ یافت شود به طوری که
(الف) $W_{p,\varepsilon}$ ابرروی تکیه‌گاه گذشته S در p باشد؛
(ب) خمیدگی میانگین پوچ $W_{p,\varepsilon}$ در p رابطه $\theta_{p,\varepsilon} \geq 0$ را برآورده کند.

اکنون اصل ماکسیم را برای ابرویه‌های پوچ بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۲ ([۱۸]). S_1 و S_2 را دو ابرروی هموار پوچ در فضا زمان M در نظر بگیرید. اگر
(الف) S_1, S_2 را در نقطه $p \in M$ قطع کند و S_2 در نقطه p در سمت آینده p باشد؛
(ب) خمیدگی میانگین پوچ θ_1 از S_1 و θ_2 از S_2 در رابطه $\theta_1 \leq 0 \leq \theta_2$ صدق کند،
آنگاه S_1 و S_2 در نزدیکی p باهم برابرند و این ابرروی پوچ مشترک دارای خمیدگی میانگین پوچ برابر صفر است، یعنی $\theta = \theta_1 = \theta_2$.

قضیه ۱۳.۲ ([۱۸]). S_1 را C° ابرروی پوچ آینده و S_2 را C° ابرروی پوچ گذشته در فضا زمان M بگیرید. اگر

(الف) S_1 و S_2 در نقطه $p \in M$ متقاطع باشند و S_2 در نزدیکی p در سمت آینده S باشد؛
(ب) S_1 و S_2 دارای خمیدگی‌های میانگین پوچ $\theta_1 \leq 0 \leq \theta_2$ ، به معنای تکیه‌گاهی باشند،
آنگاه S_1 و S_2 در نزدیکی p باهم برابرند و تشکیل یک ابرروی پوچ هموار با خمیدگی میانگین پوچ صفر می‌دهند، یعنی $\theta = 0$.

۲.۲ پیش‌نیازهای فیزیکی

در این بخش مفاهیمی را می‌آوریم که رنگ‌وبوی فیزیکی دارند.

تعریف ۱۴.۲ (گردایه بدون ترتیب زمانی). زیرگردایه‌ای از فضا زمان M را که هیچ دو نقطه آن را نمی‌توان با یک خم زمان‌گونه γ (یعنی خمی با شرط $\langle \gamma', \gamma' \rangle < 0$) به هم پیوست گردایه بدون ترتیب زمانی می‌نامند.

برای نمونه، در \mathbb{R}^n هر ابررویۀ زمان ثابت (t) ، بدون ترتیب زمانی است. هر زیرگردایه و بستار هر گردایه بدون ترتیب زمانی، بدون ترتیب زمانی است.

تعریف ۱۵.۲ ([۲۳]). زیرخمینه S از فضا زمان M موضعی بدون ترتیب زمانی نامیده می‌شود اگر $p \in S$ دارای همسایگی V در M چنان باشد که هیچ دو نقطه از $S \cap V$ با خمی زمان‌گونه در V به هم نپیوندند.

تعریف ۱۶.۲ ([۱۶]). منظور از یک C° ابررویۀ نازمان‌گونه در فضا زمان M یک ابررویۀ توپولوژیک S در M است که موضعی بدون ترتیب زمانی است.

بنابراین برای هر نقطه $p \in S$ همسایگی به اندازه کافی کوچک U از p در M یافت می‌شود که $S \cap U$ در U بسته و بدون ترتیب زمانی است و برای هر $q \in U - S$ یا داریم $q \in I^+(S \cap U, U)$ یا $q \in I^-(S \cap U, U)$.

تعریف ۱۷.۲. منظور از یک C° ابررویۀ پوچ آینده در M ابررویۀ نازمان‌گونه S در M است که برای هر $p \in S$ و هر همسایگی U از p در M ، با شرط بدون ترتیب زمانی بودن S ، نقطه $p \neq q \in S$ یافت شود به طوری که $q \in J^+(p, U)$. هر C° ابررویۀ پوچ آینده یک ابررویۀ توپولوژیک موضعی بدون ترتیب زمانی S از M است که با ژئودزیک‌های پوچ آینده، خط‌ساخته ناگسترده‌ی ^{۴۲} می‌شود. به طریق مشابه C° ابررویۀ پوچ گذشته تعریف می‌شود.

نمادهای I^+ ، I^- ، J^+ ، و J^- چنین تعریف می‌شوند:

تعریف ۱۸.۲. فضا زمان $(M, g = \langle, \rangle)$ را در نظر بگیرید. منظور از مرز بدون ترتیب زمانی، گردایه‌ای با نماد $\partial I^+(A) \sqcup \partial I^-(A)$ وابسته به زیرگردایه $A \subset M$ است به طوری که $I^+(A) = \bigcup_{p \in A} I^+(p)$ و در آن $I^+(p)$ (آینده زمان‌گونه p) گردایه همه نقطه‌های $q \in M$ است که از p به q بتوان خم زمان‌گونه آینده‌سوی γ در M را یافت.

در این تعریف، علامت ∂ نشان‌دهنده مرز توپولوژیکی است. مفهوم (گذشته) آینده‌سو در تعریف $I^+(p)$ آمده است. همانند تعریف ۱۸.۲، $J^+(A) = \bigcup_{p \in A} J^+(p)$ و $J^+(p)$ مانند $I^+(p)$ با جانسانی واژه علی (با این تعریف که $\leq \langle \gamma', \gamma' \rangle$) به جای زمان‌گونه به دست می‌آید؛ $J^-(p)$

⁴²non-developable ruled

و $J^-(A) = \bigcup J^-(p)$ از $J^+(p)$ و $J^+(A)$ با جانشانی واژه گذشته به جای آینده به دست می‌آید.

اکنون دو مفهوم مهم قوی علی^{۴۳} و سراسری هذلولوی^{۴۴} را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۹.۲ ([۱۸]). فضای زمان M در $p \in M$ را قوی علی می‌نامند اگر همسایگی به اندازه کافی کوچک U از p یافت شود که هر خم علی γ که آغازش در U است از U بیرون برود به U بازنگردد. M قوی علی نامیده می‌شود اگر در هر نقطه‌اش قوی علی باشد. فضای زمان M سراسری هذلولوی نامیده می‌شود اگر

(الف) M قوی علی باشد؛

(ب) گردایه‌های $J^+(p) \cap J^-(p)$ برای هر $p, q \in M$ فشرده باشد.

نمونه (استاندارد) برای این مفهوم‌ها (نمادها) در \mathbb{R}_1^4 چنین است: $I^+(p)$ همان مخروط زمانی آینده^{۴۵} p است، یعنی

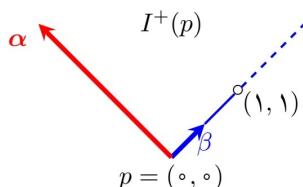
$$I^+(p) = \{q \in \mathbb{R}_1^4 \mid \vec{pq} \text{ بردار زمان گونه آینده سو است}\}$$

و

$$J^+(p) = \{p\} \cup \{q \in \mathbb{R}_1^4 \mid \vec{pq} \text{ بردار علی آینده سو است}\}$$

که در آن \vec{pq} بردار سرعت آغازین یکتاژئودزیک در \mathbb{R}_1^4 از p به q است. بنابراین، $I^+(p)$ مجموعه‌ای باز با بستار $J^+(p)$ است و $J^+(p) = \overline{I^+(p)} \cup \{p\}$.

برای خمینه لورنتسی $M = S_1^1 \times \mathbb{R}$ داریم $I^+(p) = J^+(p) = S_1^1 \times \mathbb{R}$ برای خمینه لورنتسی $\{(\cdot, \cdot)\} - \{(1, 1)\}$ و $N = \mathbb{R}_1^2$ و $p = (\cdot, \cdot)$ مخروط مینکوفسکی است و $J^+(p)$ برابر اجتماع $I^+(p)$ با دو شعاع ژئودزیک با α و β مطابق با شکل پایین است. به‌ویژه، $J^+(p)$ زیرگردایه سرهای از بستار $I^+(p)$ است.



⁴³ strongly causal ⁴⁴ globally hyperbolic

زیرگردایه F از فضا زمان M را گردایه آینده نامند اگر $I^+(F) \subset F$. برای نمونه، برای هر زیرگردایه $B \subset M$ ، $J^+(B)$ گردایه آینده است. اگر F گردایه آینده باشد، مکمل آن گردایه گذشته است مرز (ناهایی) یک گردایه آینده یک ابرویه توپولوژیک بدون ترتیب زمانی و بسته است [۳۰]. اکنون آینده و گذشته را در یک فضا زمان تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۰.۲ ([۳۰]). M را فضا زمان دلخواه بگیرد. برای هر $p \in M$ ، گردایه بردارهای زمان‌گونه در $T_p M$ را با τ نمایش دهید. برای هر بردار $u \in \tau$ ، مخروط زمانی مثبت (آینده) $T_p M$ به صورت $C(u) = \{v \in \tau \mid \langle u, v \rangle < 0\}$ و مخروط زمانی منفی (گذشته) $T_p M$ به صورت $-C(u) = C(-u) = \{v \in \tau \mid \langle u, v \rangle > 0\}$ تعریف می‌شود و داریم $\tau = C(u) \sqcup (-C(u))$.

به جای مخروط زمانی می‌توان از مخروط علی $\bar{C}(u)$ نیز بهره برد؛ در اصل برای $u \in \tau$ می‌توان تعریف کرد

$$\bar{C}(u) = \{v \in T_p M \mid \langle v, v \rangle \leq 0, \langle u, v \rangle < 0\} \quad (\text{مخروط علی آینده}),$$

$$-\bar{C}(u) = \{v \in T_p M \mid \langle v, v \rangle \leq 0, \langle u, v \rangle > 0\} \quad (\text{مخروط علی گذشته}).$$

اکنون تعبیر فیزیکی برای سیاه‌چاله و افق رویداد می‌آوریم. سیاه‌چاله دامنه‌ای از فضا زمان است که در آن گرانش چنان نیرومند است که هیچ چیز (نه ذره مادی و نه حتی یک پرتو الکترومغناطیس مانند نور) نمی‌تواند از درون آن بگریزد [۳۰]. نظریه نسبیت عام پیش‌بینی می‌کند که یک جرم به اندازه کافی فشرده می‌تواند فضا زمان را دگر دیس^{۴۵} کند تا یک سیاه‌چاله تشکیل شود. تنها شرط این است که اندازه فیزیکی آن جرم فشرده شده به اندازه کافی کوچک (جسم درون افق رویداد) باشد. برای نمونه اگر جرم خورشید از منظومه شمسی در کره‌ای با قطر کمتر از ۲٫۵ کیلومتر جای گیرد سیاه‌چاله‌ای تشکیل می‌شود. اگرچه سیاه‌چاله اثر بسیاری بر سرنوشت و رویداد هر آنچه به آن وارد می‌شود دارد، ولی خود سیاه‌چاله هیچ ویژگی موضعی مشخصی ندارد. سیاه‌چاله مانند یک جسم سیاه ایده‌آل رفتار می‌کند زیرا هیچ نوری از خود باز نمی‌تاباند.

مرز سیاه‌چاله که از آن هیچ چیز (حتی نور) نمی‌گریزد افق رویداد نامیده می‌شود. علت این نامگذاری آن است که نمی‌توان هیچ رویدادی را در درون آن مرز مشاهده کرد. آن مرز افقی است

⁴⁵deform

که فراتر از آن را نمی‌توان دید. بنابراین افق رویداد، دراصل، تکینگی در مرکز سیاه‌چاله را پنهان می‌کند. انگارهٔ سانسورکیهانی در این خصوص بیانگر آن است که همهٔ تکینگی‌ها با افق رویداد پنهان می‌شوند و برقرار نبودن قانون‌های فیزیک در سیاه‌چاله مشاهده نمی‌شود.

اکنون سراغ تعریف رویهٔ کوشی می‌رویم.

تعریف ۲۱.۲ ([۱۹]). رویهٔ کوشی در فضا-زمان دلخواه M عبارت است از یک C^0 ابر رویهٔ بدون ترتیب زمانی مانند S در M که هر خم علی ناگستردنی γ (یعنی خمی با دامنهٔ ماکسیمال و شرط $\langle \gamma', \gamma' \rangle \leq 0$) را قطع کند.

رویه‌های کوشی را می‌توان به کمک دامنهٔ وابستگی نیز مشخص کرد. هر دو رویهٔ کوشی در M با هم همسان‌ریخت‌اند [۳۰]. زیرگردایهٔ بدون ترتیب زمانی $S \subset M$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ وابستگی آیندهٔ S گردایهٔ $D^+(S)$ مرکب از همهٔ نقطه‌های $p \in M$ است که هر خم علی ناگستردنی گذشته‌گذرنده از p ، S را قطع کند. از نظر فیزیکی، $D^+(S)$ بخشی از فضا-زمان آینده‌سوی S است که از S پیش‌بینی‌پذیر است. افق کوشی آیندهٔ S ، $H^+(S)$ مرز آیندهٔ $D^+(S)$ است، یعنی $H^+(S) = \overline{D^+(S)} - I^-(D^+(S))$ ؛ به بیان فیزیکی، $H^+(S)$ حد آیندهٔ بخشی از فضا-زمان است که از S پیش‌بینی‌پذیر است. دامنهٔ وابستگی گذشته، $D^-(S)$ ، و افق کوشی گذشته، $H^-(S)$ ، همانند بالا با جانشانی مناسب به دست می‌آید. بگیرید $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$ و $H(S) = H^+(S) \cup H^-(S)$ آنگاه $\partial D(S) = H(S)$ ، و می‌توان دید گردایهٔ بدون ترتیب زمانی S ، برای M رویهٔ کوشی است اگر و تنها اگر $H(S) = \emptyset$ [۱۸].

اکنون به گرانش و رُمبش گرانشی می‌پردازیم. گرانش نیروی جهانی جاذبه (کشش) است که بین همهٔ مواد عمل می‌کند. این نیرو ضعیف‌ترین نیروی شناخته‌شده در جهان است، بنابراین هیچ نقشی در تعیین ویژگی‌های درونی ماده ندارد. از سوی دیگر، با عملش (یعنی کشش بین مواد) مسیر اجسام در منظومهٔ خورشیدی و جاهای دیگر در جهان و همچنین ساختار و تکامل ستاره‌ها و تبدیل آن‌ها به کهکشان و همهٔ کیهان را کنترل می‌کند. سقوط (افتادن) آزاد حرکتی است که تنها تحت اثر گرانش است. مسیر افتادن آزاد یک ذره در فضا-زمان ژئودزیک است. اثر گرانشی تنها این نیست که خمیدگی ژئودزیک‌ها را سبب شود بلکه باعث خمیدگی فضا-زمانی که ژئودزیک‌ها در آن هستند نیز می‌شود. از این رو در فیزیک خمیدگی و گرانش یکی گرفته می‌شود؛ برای آگاهی بیشتر [۲۶] را ببینید.

منظور از رُمبش گرانشی انقباض یک شی نجومی است بر اثر گرانش خود شی که باعث جمع شدن ماده به سوی مرکز گرانش می‌شود. رُمبش گرانشی فرایندی بنیادی برای شکل‌گیری ساختارها در جهان است؛ برای آگاهی بیشتر [۱۴] را ببینید.

۳ هندسه ابرویه‌های پوچ

در این بخش برخی از ویژگی‌های مهم هندسی فضا زمان‌ها و ابرویه‌های پوچ آن‌ها را ذکر می‌کنیم. گزاره ۱۰.۳ ([۲۳]). زیرکلاف خطی پوچ \tilde{K} وابسته به زیرخمینه پوچ S در فضا زمان M جهت‌پذیر است.

چون \tilde{K} زیرکلاف خطی پوچ یکتای TS (و $T^\perp S$) است، برش همه‌جا ناصفر ξ از \tilde{K} یک میدان برداری مماس پوچ بر S است که با تقریب یک پارامتری‌سازی مجدد یکتا است.

گزاره ۲.۳ ([۲۳]). هر ابرویه و رویه پوچ S در فضا زمان جهت‌پذیر M جهت‌پذیر است.

اثبات. $X \in \chi(M)$ را میدان برداری زمان‌گونه واحد آینده‌سو و ω را عنصر حجم M بگیرید. اگر $\xi \in \chi(S)$ میدان برداری پوچ بر S باشد با شرط $\langle \xi, X \rangle = -1$ ، چون S پوچ است پس X بر S تراگرد است و بنابراین یک $i_X \omega$ $(n-1)$ -فرم همه‌جا ناصفر بر ابرویه S و $i_N \circ i_X \omega$ یک $(n-2)$ -فرم همه‌جا ناصفر بر رویه S است که در آن $N = X - \xi$ میدان برداری فضاگونه تراگرد بر S است. \square

گزاره ۳.۳ ([۲۳]). S را ابرویه پوچ فشرده یا رویه پوچ فشرده در فضا زمان M بگیرید. آنگاه مشخصه اویلر S صفر است.

گزاره ۴.۳ ([۲۳]). S را زیرخمینه پوچ از فضا زمان جهت‌پذیر M و H را ابرویه‌ای فضاگونه در S بگیرید که هر مولد پوچ H دقیقاً در یک نقطه S را قطع کند. آنگاه S با $H \times \mathbb{R}$ هموارریخت است. اگر S ساده‌همبند باشد، آنگاه H نیز ساده‌همبند است.

اثبات. $\xi \in \chi(S)$ را میدان برداری پوچ کامل بگیرید. اگر Φ شار سراسری ξ باشد، آنگاه نگاشت $h : H \times \mathbb{R} \rightarrow S$ با تعریف $h(p, t) = \Phi_{t,p}$ هموارریختی خواسته شده است. حکم پایانی از ساده‌همبندی S و هموارریختی h به دست می‌آید

$$\{e\} = \pi_1(S) \cong \pi_1(H \times \mathbb{R}) \cong \pi_1(H) \times \pi_1(\mathbb{R}) \cong \pi_1(H). \quad \square$$

خانواده مهمی از ابررویه‌های پوچ با نام ابررویه‌های پوچ گردشی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۳ ([۲۷]). G را زیرگروهی از گروه لی طولپایی‌های \mathbb{R}_1^{n+2} ، $\text{iso}(\mathbb{R}_1^{n+2})$ ، بگیرید که خط l در \mathbb{R}_1^{n+2} را نقطه‌وار ثابت نگه می‌دارد. $\Pi \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ را زیرفضای مستوی ۲ بُعدی بردارنده l و خمی مثل γ که l را قطع نمی‌کند در نظر بگیرید. اگر برای هر $x \in \gamma$ مدار x ، یعنی $\{gx | g \in G\} = G \cdot x$ ، از نقص بُعد ۲ در \mathbb{R}_1^{n+2} باشد، آنگاه مدار γ تحت عمل G ، یعنی $G \cdot \gamma = \{g \cdot x | g \in G, x \in \gamma\}$ را ابررویه گردشی تولیدشده توسط γ می‌نامند.

توجه کنید که

$$\text{iso}(\mathbb{R}_1^{n+2}) = \{f | f : \mathbb{R}^{n+2} \xrightarrow{\text{هموارریختی}} \mathbb{R}^{n+2}, \langle Tfx, Tfy \rangle = \langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n+2} x_i y_i, x, y \in \mathbb{R}^{n+2}, x = (x_1, \dots, x_{n+2}), y = (y_1, \dots, y_{n+2}), T\} \cong O_1(n+2) \times \mathbb{R}^{n+2}.$$

\times نماد ضرب نیم‌مستقیم است. اگر دو عضو دلخواه $O_1(n+2) \times \mathbb{R}^{n+2}$ را با $T_x a$ و $T_y b$ نشان دهیم که در آن $a, b \in O_1(n+2)$ و $x, y \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ برای $v \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ داریم

$$T_x a(v) = av + x, \quad T_x a \circ T_y b = T_{ay+xa} b, \quad (T_x a)^{-1} = T_{-(ax)} a^{-1}.$$

قضیه ۶.۳ ([۲۷]). ابررویه گردشی پوچ $M \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ را در نظر بگیرید. در این صورت M مجموعه‌ای باز در یکی از ابررویه‌های زیر است.

(الف) مخروط نوری Λ^{n+1} ؛

(ب) استوانه‌ای بر یک مخروط نوری Λ^n ، $\Lambda^n \subset V \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ ، $V \cong \mathbb{R}^{n+1}$ ؛

(ج) ابرصفحه پوچ.

گزاره ۷.۳ ([۳۰]). M را فضازمان دلخواه بگیرید. اگر $p \in M$ و $q \in J^+(p) - I^+(p)$ ، آنگاه برای هر $p \in M$ هر خم علی آینده‌سو از p به q با یک پارامتری‌سازی مجدد ژئودزیک پوچ است.

اثبات. بنابر تعریف $J^+(p)$ و گزاره ۴۶ در [۳۰] ژئودزیک علی γ بین p و q یافت می‌شود. اگر این ژئودزیک پوچ نباشد، بین p و q خم زمان‌گونه یافت می‌شود، و این برخلاف فرض است که $q \notin I^+(p)$. \square

در گزاره زیر ویژگی مهمی از مرز بدون ترتیب زمانی بیان می‌شود.

گزاره ۸.۳ ([۱۸، ۱۶]). M را فضازمان و $A \subset M$ را زیرگردایه بسته بگیرید. مرز بدون ترتیب زمانی $\partial I^+(A)$ به شرط ناتهی بودن یک C° ابرویه بدون ترتیب زمانی است. همچنین بخش پوچ این ابرویه، با ژئودزیک‌های پوچ خط‌ساخته ناگسترده می‌شود.

اثبات. نقطه $p \in \partial I^+(A)$ را بگیرید، می‌بینیم که p بر یک ژئودزیک پوچ γ در $\partial I^+(A)$ قرار دارد به طوری که γ یا یک نقطه پایانی گذشته بر A دارد یا در M گذشته‌ناگسترده است. دنباله $p_n \subset I^+(A)$ را بگیرید که در آن $p_n \rightarrow p$. خم γ_n را خم زمان‌گونه گذشته‌سو از p_n به نقطه‌ای از A بگیرید. بدون از دست دادن کلیت، می‌توان گفت دنباله $\{\gamma_n\}$ به یک ژئودزیک پوچ گذشته‌سوی γ در $\partial I^+(A)$ با آغاز در p می‌گراید. چون هر γ_n در $M - A$ گذشته‌ناگسترده است، پس γ نیز چنین است. بنابراین یا γ در A نقطه پایانی دارد یا در M گذشته‌ناگسترده است. \square

در گزاره‌ای که می‌آید، ویژگی‌های مهم فضازمان سراسری هذلولوی بیان می‌شود.

گزاره ۹.۳ ([۱۸]). (۱) فضازمان M سراسری هذلولوی است اگر و تنها اگر M رویه کوشی داشته باشد.

(۲) اگر S برای فضازمان سراسری هذلولوی M رویه کوشی باشد، آنگاه M با $\mathbb{R} \times S$ همسان ریخت است.

(۳) اگر S_1 و S_2 در فضازمان سراسری هذلولوی M رویه‌های کوشی باشند، آنگاه S_1 با S_2 همسان ریخت است.

(۴) اگر S ابرویه بدون ترتیب زمانی و فشرده در فضازمان سراسری هذلولوی M باشد، آنگاه S برای M رویه کوشی است.

گزاره زیر کاربردی معمول از معادله رای چوداری است.

گزاره ۱۰.۳ ([۱۸]). M را فضازمانی بگیرید با این شرط که برای هر بردار پوچ X داریم $\text{Ric}_M(X, X) \geq 0$. اگر S ابرویه‌ای پوچ در M باشد که مولدهای پوچش آینده‌ژئودزیک کامل باشد، آنگاه S دارای خمیدگی میانگین پوچ نامنفی است، $\theta \geq 0$.

اثبات. با برهان خلف حکم را ثابت می‌کنیم. اگر در نقطه $p \in S$ داشته باشیم $\theta < 0$ ، $\eta(s)$ را مولد پوچ S گذرنده از $p = \eta(0)$ در نظر می‌گیریم. اگر $b(s) = b_{\eta'(s)}$ و $\theta = \text{tr}(b)$ آنگاه

$\theta(s) < 0$ ، بنابراین معادله‌ی رای چوداری و محدودیت بر Ric_M داریم $\frac{d\theta}{ds} \leq -\frac{1}{n-1}\theta^2$ ، بنابراین برای هر $s > 0$ داریم $\theta(s) < 0$. با بخش کردن هر دو سوی این معادله بر θ^2 به دست می‌آید $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\theta}\right) \geq \frac{1}{n-1}$. پس $\frac{1}{\theta} \rightarrow 0$ ، به بیان دیگر، $\theta \rightarrow -\infty$ در زمان باپایان و این با همواربودن θ ناسازگار است. \square

۴ قضیه‌ی شکافنده‌ی پوچ

در دهه ۱۹۸۰ پرسش وجود خط در فضا زمان متأثر از هندسه‌ی ریمانی مطرح شد. در خمینه‌ی ریمانی خط عبارت است از یک ژئودزیک ماکسیمم کامل (یعنی با قلمرو \mathbb{R}) که هر تکه‌اش دارای طول مینیمم باشد. اما در فضا زمان خط زمان‌گونه، یک ژئودزیک زمان‌گونه‌ی کامل (تعریف شده بر \mathbb{R}) است که هر تکه‌اش نسبت به همه‌ی خط‌های علی (یعنی با تندی نامشبت) بین دو سر آن تکه دارای طول ماکسیمم باشد. قضیه‌ی کلاسیک شکافنده‌ی چیگر-گرومول [۸] صلیبی^{۴۶} خمینه‌های ریمانی همبند کامل با خمیدگی ریچی نامنفی و دربردارنده‌ی خط را توصیف می‌کند. خمینه‌ی ریمانی کامل با خمیدگی ریچی اکیداً مثبت هیچ خطی در بر ندارد. قضیه‌ی چیگر-گرومول بیانگر آن است که هر خمینه‌ی ریمانی همبند کامل M از خمیدگی ریچی نامنفی و دربردارنده‌ی خط، با حاصل ضرب \mathbb{R} در یک خمینه‌ی ریمانی کامل مانند S ، طولپا است. گلووی این قضیه را برای حالت لورنتسی به صورت زیر بیان کرده است.

قضیه ۱۰۴ ([۱۹، ۱۸]). (M, g) را فضا زمان همبند سراسری هذلولوی بگیرید که برای هر بردار زمان‌گونه X ، $\text{Ric}_M(X, X) \geq 0$. اگر M خط زمان‌گونه‌ی γ را بپذیرد، در این صورت M با $(\mathbb{R} \times S, -dt^2 \oplus h)$ طولپا است که در آن (S, h) خمینه‌ی ریمانی کامل است و عامل $(\mathbb{R}, -dt^2)$ با γ نمایش داده می‌شود.

در اینجا صورتی از قضیه‌ی شکافنده برای فضا زمان‌هایی که خط پوچ می‌پذیرند به دست داده می‌شود. خط پوچ در فضا زمان یک ژئودزیک پوچ کامل (تعریف شده بر \mathbb{R}) است که سراسری بدون ترتیب زمانی است، یعنی هیچ دو نقطه‌ی آن با یک خم زمان‌گونه به هم نمی‌پیوندند، بنابراین هر تکه از خط پوچ نسبت به تابع طول کمان لورنتسی دارای طول ماکسیمم است.

قضیه ۲۰۴ ([۱۹]). M را فضا زمان پوچ ژئودزیک کامل بگیرید با این شرط که برای هر بردار زمان‌گونه X ، $\text{Ric}(X, X) \geq 0$. اگر M خط پوچ η را بپذیرد، آنگاه η در یک ابرروییه هموار سره نشانده‌شده پوچ تمام ژئودزیک بدون ترتیب زمانی مانند S قرار دارد.

ساده‌ترین نمونه برای قضیه ۲.۴ فضای مینکوفسکی است. هر خط پوچ l در فضای مینکوفسکی در یک ابرصفحه پوچ یکتا قرار دارد.

اثبات. برای سادگی کار، M را قوی علی بگیرید. مرزهای بدون ترتیب زمانی $S_+ = \partial I^+(\eta)$ و $S_- = \partial I^-(\eta)$ در M ، C° ابرویه‌های بدون ترتیب زمانی و بسته‌اند. چون η نیز بدون ترتیب زمانی است، S_+ و S_- ، η را در بردارند. برای سادگی کار S_+ و S_- را همبند بگیرید، با به کار بردن اصل ماکسیمم می‌توان دید S_+ و S_- برابرند و تشکیل یک ابرویه هموار پوچ تمام‌ژئودزیک می‌دهند، یعنی S_+ و S_- در نزدیکی $p \in S_- \cap S_+$ یکی‌اند و اجتماعشان $S_+ \cup S_-$ ابرویه هموار پوچ تمام‌ژئودزیک است. \square

اکنون فضا زمان مجانبی دو سیتز معرفی و برخی ویژگی‌های سراسری آن بیان می‌شود.

تعریف ۳.۴ ([۱۹]). فضا زمان (M, g) مجانبی دو سیتز نامیده می‌شود اگر فضا زمان مرزدار

(\tilde{M}, \tilde{g}) و نگاشت $\Omega \in C^\infty(\tilde{M})$ یافت شود به طوری که

(الف) M درون \tilde{M} باشد (به مفهوم خمینه‌ها) $M = \text{int} \tilde{M}$ ، بنابراین $\tilde{M} = M \cup \partial \tilde{M}$ ؛

(ب) $\tilde{g}|_M = \Omega^\flat g$ طوری که Ω بر M مثبت و بر ∂M صفر باشد و $d\Omega \neq 0$ ؛

(ج) $\partial \tilde{M}$ فضاگونه باشد.

در تعریف بالا، به صورت ضمنی، مفهوم بی‌پایانی همدیس^{۴۷} به کار رفته است. با این مفهوم فضا زمان‌های لورنتسی استاندارد، فضای مینکوفسکی، فضاهای دو سیتز، و یاد دو سیتز در فضای موسوم به عالم ایستای اینشتین، $(\mathbb{R} \times S^n, -du^\flat + dw^\flat)$ ، به طور همدیس نشانده می‌شوند. فضای دو سیتز بر حسب مختص‌های موضعی می‌تواند به صورت

$$M = \mathbb{R} \times S^n, \quad ds^\flat = -dt^\flat + \cos h^\flat t d\omega^\flat$$

بیان شود. با استفاده از تبدیل $u = \tan^{-1}(e^t) - \frac{\pi}{4}$ را به صورت $ds^\flat = -\frac{\pi}{4} < u < \frac{\pi}{4}$ درآورد. بنابراین فضای دو سیتز به روی دامنه $\frac{\pi}{4} < u < \frac{\pi}{4}$ در عالم ایستای اینشتین به طور همدیس نشانده می‌شود. در حالت کلی، $\mathcal{J} = \partial \tilde{M}$ چنین تجزیه می‌شود: $\mathcal{J} = \mathcal{J}^+ \sqcup \mathcal{J}^-$ که در آن $\mathcal{J}^+ \subset I^+(M, M)$ و $\mathcal{J}^- \subset I^-(M, M)$. $\mathcal{J}^+ \neq \emptyset$ بی‌پایانی همدیس آینده و \mathcal{J}^- بی‌پایانی همدیس گذشته است و $\mathcal{J}^+ \neq \emptyset$.

⁴⁷ conformal infinity

در تعریف بالا، برای فضا زمان M مجموعه $\mathcal{J}^- = \emptyset$ (آینده $(\mathcal{J}^+ = \emptyset)$ گذشته) مجانبی دو سیترا نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۴ ([۱۹]). فضا زمان مجانبی دو سیترا M مجانبی ساده نامیده می‌شود اگر هر ژئودزیک پوچ ناگستردنی در M دارای یک نقطه پایانی آینده بر \mathcal{J}^+ و یک نقطه پایانی گذشته بر \mathcal{J}^- باشد. بنابراین فضا زمان، مجانبی ساده است اگر هر ژئودزیک پوچ در آینده و گذشته بی انتها گسترش یابد. فضا زمان دو سیترا-شوارتس شیلد که نمایانگر یک سیاه چاله شوارتس شیلد در یک فضا زمان دو سیترا زمینه است، نمونه جالبی از فضا زمان است که مجانبی دو سیترا است ولی مجانبی ساده نیست. ژئودزیک‌های پوچی که به این سیاه چاله وارد می‌شوند نمی‌توانند بی انتها گسترش یابند. مفهوم مجانبی ساده و ساختار علی، چنان که در گزاره زیر می‌آید، با هم مرتبط اند.

گزاره ۵.۴ ([۱۹]). M را فضا زمان مجانبی دو سیترا آینده با بی پایانی همدیس آینده \mathcal{J}^+ بگیرید.

(۱) اگر M مجانبی ساده آینده باشد، آنگاه M سراسری هذلولوی است.

(۲) اگر M سراسری هذلولوی و \mathcal{J}^+ فشرده باشد، آنگاه M مجانبی ساده آینده است.

در هریک از دو حالت بالا، رویه کوشی M با \mathcal{J}^+ همسان ریخت است.

اثبات. می‌توانیم $M \cup \mathcal{J}^+$ را گسترش بدهیم و فضا زمان بدون مرز M' را طوری بسازیم که $H^+(\mathcal{J}^+, M') = \emptyset$.

(۱) می‌بینیم M' سراسری هذلولوی است پس M نیز چنین است. نشان داده می‌شود که \mathcal{J}^+ برای M' رویه کوشی است. چون بنابر طرز ساخت M' ، $H^+(\mathcal{J}^+, M') = \emptyset$ پس کافی است نشان داده شود که $H^-(\mathcal{J}^+, M') = \emptyset$. اگر $H^-(\mathcal{J}^+, M') \neq \emptyset$ ژئودزیک پوچ η در $H^-(\mathcal{J}^+, M')$ چنان یافت می‌شود که در M' ناگستردنی آینده است. بنابر مجانبی ساده بودن M ، η باید \mathcal{J}^+ را قطع کند و بنابراین وارد $I^+(\mathcal{J}^+, M')$ شود که با بدون ترتیب زمانی بودن \mathcal{J}^+ در تناقض است. پس M' و در نتیجه M سراسری هذلولوی است.

(۲) چون هر رویه کوشی برای M' نیز رویه کوشی است، پس M' سراسری هذلولوی است، در نتیجه \mathcal{J}^+ برای M' سراسری هذلولوی است، بنابراین هر ژئودزیک پوچ ناگستردنی آینده در M' با آغاز در M ، \mathcal{J}^+ را قطع می‌کند، در نتیجه M مجانبی ساده آینده است. با آنچه گفته شد می‌توان نشان داد هر رویه کوشی M با \mathcal{J}^+ همسان ریخت است.

قضیه بعد صلبی فضازمان‌های مجانبی دو سیت در بُعد ۴ را نشان می‌دهد.

قضیه ۶.۴ ([۱۹، ۱۸]). (M^4, g) را فضازمان دو سیت و مجانبی ساده بگیرید با این شرط که $R_{ij} = \lambda g_{i,j}$ ، $\lambda = \frac{2\Lambda}{3} > 0$ ، Λ ثابت کیهانی است، مؤلفه (i, j) از تانسور ریچی است. اگر M خط پوچ بپذیرد، آنگاه M با فضای دو سیت طولیا است.

اثبات. چون M فضای اینشتین است، نشان داده می‌شود M همدیس تخت است (یعنی با فضای تخت - خمینه‌ای با خمیدگی برشی صفر - همدیس است، یعنی $g = fg_L$ که در آن $f > 0$ بر M و g_L متریک \mathbb{R}^4 است) و از اینجا نتیجه گرفته می‌شود که M دارای خمیدگی ثابت مثبت است. همچنین می‌توان دید که M ژئودزیک کامل و ساده‌همبند است، پس بنابر گزاره ۲۳.۸ در [۳۰]، M با فضای دو سیت طولیا است. \square

در قضیه زیر توپولوژی فضازمان‌های مجانبی دو سیت توصیف می‌شود.

قضیه ۷.۴ ([۱۹]). برای $n \geq 2$ فضازمان مجانبی دو سیت (آینده یا گذشته سو) M^{n+1} را در نظر بگیرید با این شرط که برای هر بردار زمان‌گونه X داشته باشیم $\text{Ric}_M(X, X) \geq 0$. اگر M مجانبی ساده آینده یا گذشته باشد، M سراسری هذلولوی است و هر رویه کوشی M فشرده یا دارای گروه بنیادی متناهی است.

ملاحظه ۸.۴ ([۱۹]). (۱) برای $n = 3$ می‌توان دید رویه‌های کوشی M ، ۳-کره‌های هوموتوپی

(و در نتیجه بنابر انگاره - اکنون قضیه - پوانکاره) با S^3 هموارریخت‌اند.

(۲) قضیه اخیر را می‌توان این چنین از نو بیان کرد. اگر M فضازمان مجانبی دو سیت با شرط

$\text{Ric}_M(X, X) \geq 0$ برای هر بردار زمان‌گونه X باشد و دارای رویه‌های کوشی فشرده با

گروه بنیادی نامتناهی باشد، M نمی‌تواند مجانبی ساده آینده یا گذشته باشد.

سپاسگزاری نویسنده از داوران محترم این مقاله برای پیشنهادهای ارزنده ایشان که بازبینی

مقاله را در پی داشت و نیز از آقای رضا یغمائیان برای تایپ مقاله صمیمانه سپاسگزاری می‌کند.

مراجع

- [1] Atindogbé, C., Mbiakop, T. K., Normalized null hypersurfaces in Lorentzian manifolds admitting conformal vector fields, *Differ. Geom. Dyn. Syst.*, **23** (2021), 104576.
- [2] Atindogbé, C., Gutiérrez, M., Hounnonkpe, R., Olea, B., Contact structures on null hypersurfaces, *J. Geom. Phys.*, **178** (2022), 104576.
- [3] Barrabes, C., Hogan, P. A., *Singular Null Hypersurfaces in General Relativity*, World Scientific, Singapore, 2004.
- [4] Beem, J. K., Ehrlich, P. E., Easley, K. L., *Global Lorentzian Geometry*, 2nd ed., Pure and Applied Math., vol. 202, Marcel Dekker, New York, 1996
- [5] Bejancu, A., Duggal, K. L., *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Springer, Dordrecht, 1996
- [6] Bernal, A. N., On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem, *Comm. Math. Phys.*, **243** (2003), 461-470.
- [7] Carroll, S. M., *Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, New York, 2004
- [8] Cheeger, J., Gromoll, D., The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature, *J. Differential Geom.*, **6**(1) (1971), 119-128.
- [9] Czimek, S., Graf, O., The canonical foliation on null hypersurfaces in low regularity (16 Sep 2019), available at [arXiv: 1909.07345](https://arxiv.org/abs/1909.07345), V1.
- [10] Dey, S., Majhi, B. R., Kinematics and dynamics of null hypersurfaces in the Einstein-Cartan spacetime and related thermodynamic interpretation (25 Feb 2022), available at [arXiv: 2201.01131](https://arxiv.org/abs/2201.01131), V2.
- [11] d'Inverno, R., *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [12] Carmo, M. do, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New York, 1976.
- [13] Ellis, G. F. R., Hawking, S. W., *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [14] Eppelbaum, L., Kutasov, I., Pilchin, A., *Applied Geothermics*, Springer, Berlin, 2014.
- [15] Galloway, G. J., Some results on Cauchy surface criteria in Lorentzian geometry, *Illinois J. Math.*, **29**(1985), 1-10.
- [16] Galloway, G. J., The Lorentzian splitting theorem without the completeness assumption, *J. Differential Geom.*, **29** (1989), 272-389.
- [17] Galloway, G. J., Maximum Principles for Null Hypersurfaces and Null Splitting Theorems, *Ann. Henri Poincaré*, **1** (2000), 543-567.
- [18] Galloway, G. J., Some global results for asymptotically simple space-times , in *The Conformal Structure of Space-Time*, Lecture Notes in Physics, vol. 604, Springer, Berlin, 2002. 51-60.
- [19] Galloway, G. J., Null geometry and the Einstein equations, in *The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields*, Birkhäuser, Basel, 2004, 379-400.
- [20] Geroch, R., Domain of dependence, *J. Math. Phys.*, **II** (1970).
- [21] Guillemin, V., Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice-Hall, New York, 1974
- [22] Gupta, S., Kar, S., The Raychaudhuri equations: A brief review, *Pramana- J. Phys.*, **69** (2007), 49-76.
- [23] Kupeli, D., On null submanifolds in spacetimes, *Geom. Dedicata*, **23** (1987), 33-51.
- [24] Lawson, H. B., Minimal Varieties in Real and Complex Geometry, *Seminaire de Mathematiques*, Issue 57, Presses de l'Université de Montréal, 1974.
- [25] Ménéadore, K., Chen's Ricci inequalities and topological obstructions on null hypersurfaces of a Lorentzian manifold, *J. Inequal. Appl.*, **126** (2018), 1-27.

- [26] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A., *Gravitation*, Princeton University Press, Princeton, 1973.
- [27] Navarro, M., On the geometry of null hypersurfaces in Minkowski space, *J. Geom. Phys.*, **75** (2014), 199-212.
- [28] Navarro, M., Palmas, O., Solis, D. A., Null hypersurfaces in generalized Robertson–Walker spacetimes, *J. Geom. Phys.*, **106**(2016), 256-267.
- [29] Ndayirukiye, D., Nibaruta, G., Karimumuryango, M., Nibirantiza, A., Algebraicity of Induced Riemannian Curvature Tensor on Lightlike Warped Product Manifolds, *J. Appl. Math. Phys.*, **7**(2019), 3132-3139.
- [30] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.
- [31] Penrose, R., *Techniques Differential Topology in Relativity*, Regional Conference Series in Appl. Math., vol. 7, SIAM, 1972.
- [32] Wald, R. M., *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.

سید محمدباقر کاشانی: دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده علوم ریاضی
 رایانامه: kashanim@modares.ac.ir

Null Hypersurfaces in Lorentzian Geometry and Their Applications

S. M. B. Kashani¹

Faculty of Mathematical Sciences, Tarbiat Modares University, Iran

Abstract. In this expository paper, a description of null hypersurfaces in space forms and some of their applications have been given. Such hypersurfaces are of special interest in geometry and physics. Among other results of the paper, geometric properties of black holes, event horizons, the important Cheeger–Gromoll splitting theorem and some famous space-forms such as asymptotically flat/de Sitter space forms have been stated and considered. Finally, null submanifolds in pseudo-Riemannian manifolds have been described shortly.

Keywords: submanifold, null hypersurface, Lorentz space form, pseudo-Riemannian manifold, space-time, special and general relativity

Article history: Received 10 September 2022; Accepted 23 October 2022

Article type: survey

References

- [1] Atindogbé, C., Mbiakop, T. K., Normalized null hypersurfaces in Lorentzian manifolds admitting conformal vector fields, *Differ. Geom. Dyn. Syst.*, **23** (2021), 104576.
- [2] Atindogbé, C., Gutiérrez, M., Hounnonkpe, R., Olea, B., Contact structures on null hypersurfaces, *J. Geom. Phys.*, **178** (2022), 104576.
- [3] Barrabes, C., Hogan, P. A., *Singular Null Hypersurfaces in General Relativity*, World Scientific, Singapore, 2004.
- [4] Beem, J. K., Ehrlich, P. E., Easley, K. L., *Global Lorentzian Geometry*, 2nd ed., Pure and Applied Math., vol. 202, Marcel Dekker, New York, 1996

¹kashanim@modares.ac.ir

- [5] Bejancu, A., Duggal, K. L., *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Springer, Dordrecht, 1996
- [6] Bernal, A. N., On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem, *Comm. Math. Phys.*, **243** (2003), 461-470.
- [7] Carroll, S. M., *Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, New York, 2004
- [8] Cheeger, J., Gromoll, D., The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature, *J. Differential Geom.*, **6**(1) (1971), 119-128.
- [9] Czimek, S., Graf, O., The canonical foliation on null hypersurfaces in low regularity (16 Sep 2019), available at [arXiv: 1909.07345](https://arxiv.org/abs/1909.07345), V1.
- [10] Dey, S., Majhi, B. R., Kinematics and dynamics of null hypersurfaces in the Einstein-Cartan spacetime and related thermodynamic interpretation (25 Feb 2022), available at [arXiv: 2201.01131](https://arxiv.org/abs/2201.01131), V2.
- [11] d'Inverno, R., *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [12] Carmo, M. do, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New York, 1976.
- [13] Ellis, G. F. R., Hawking, S. W., *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [14] Eppelbaum, L., Kutasov, I., Pilchin, A., *Applied Geothermics*, Springer, Berlin, 2014.
- [15] Galloway, G. J., Some results on Cauchy surface criteria in Lorentzian geometry, *Illinois J. Math.*, **29**(1985), 1-10.
- [16] Galloway, G. J., The Lorentzian splitting theorem without the completeness assumption, *J. Differential Geom.*, **29** (1989), 272-389.
- [17] Galloway, G. J., Maximum Principles for Null Hypersurfaces and Null Splitting Theorems, *Ann. Henri Poincaré*, **1** (2000), 543-567.
- [18] Galloway, G. J., Some global results for asymptotically simple space-times , in *The Conformal Structure of Space-Time*, Lecture Notes in Physics, vol. 604, Springer, Berlin, 2002. 51-60.
- [19] Galloway, G. J., Null geometry and the Einstein equations, in *The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields*, Birkhäuser, Basel, 2004, 379-400.
- [20] Geroch, R., Domain of dependence, *J. Math. Phys.*, **II** (1970).
- [21] Guillemin, V., Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice-Hall, New York, 1974
- [22] Gupta, S., Kar, S., The Raychaudhuri equations: A brief review, *Pramana- J. Phys.*, **69** (2007), 49-76.
- [23] Kupeli, D., On null submanifolds in spacetimes, *Geom. Dedicata*, **23** (1987), 33-51.
- [24] Lawson, H. B., Minimal Varieties in Real and Complex Geometry, *Seminaire de Mathematiques*, Issue 57, Presses de l'Université de Montréal, 1974.
- [25] Ménédore, K., Chen's Ricci inequalities and topological obstructions on null hypersurfaces of a Lorentzian manifold, *J. Inequal. Appl.*, **126** (2018), 1-27.
- [26] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A., *Gravitation*, Princeton University Press, Princeton, 1973.
- [27] Navarro, M., On the geometry of null hypersurfaces in Minkowski space, *J. Geom. Phys.*, **75** (2014), 199-212.
- [28] Navarro, M., Palmas, O., Solis, D. A., Null hypersurfaces in generalized Robertson–Walker spacetimes, *J. Geom. Phys.*, **106**(2016), 256-267.
- [29] Ndayirukiye, D., Nibaruta, G., Karimumuryango, M., Nibirantiza, A., Algebraicity of Induced Riemannian Curvature Tensor on Lightlike Warped Product Manifolds, *J. Appl. Math. Phys.*, **7**(2019), 3132-3139.
- [30] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.
- [31] Penrose, R., *Techniques Differential Topology in Relativity*, Regional Conference Series in Appl. Math., vol. 7, SIAM, 1972.

[32] Wald, R. M., *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.