فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۲، شمارهٔ ۷۲ (بهار و تابستان ۱۴۰۲) صص. ۹۷ تا ۱۱۰

مروری بر حدس اوسلَندر–رَیتن و برخی حدس‌های مرتبط با آن

حسین اشراقی

چکیده. در این مقاله به بررسی برخی از مهم‌ترین حدس‌های هومولوژیک و ارتباط ایجابی بین آن‌ها می‌پردازیم. چارچوب مورد استفاده برای طرح این حدس‌ها جبرهای متناهی‌بُعد روی یک میدان است. حدس اوسلَندر–رَیتن، حدس بُعد نهایی، حدس (تعمیم‌یافتهٔ) ناکایاما، و حدس پوچی را مطرح می‌کنیم و ارتباط متقابل آن‌ها را بررسی خواهیم کرد. تأکید نوشتهٔ حاضر بر حدس اوسلَندر–رَیتن است و ازاین‌رو ارتباط منطقی بین این حدس و سایر حدس‌های اشاره‌شده مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۱ مقدمه

ازآنجایی‌که حلقه‌های مورد بحث ما ردهٔ خاصی از جبرهای آرتینی‌اند اجازه دهید با یادآوری تعریف آن‌ها و چند تعریف مورد نیاز دیگر شروع کنیم. فرض کنید R یک حلقهٔ آرتینی جابه‌جایی باشد. منظور از یک R–جبر آرتینی، حلقه‌ای یکه‌دار مانند Λ به‌انضمام یک همریختی حلقه‌ای مانند $\varphi : R \to \Lambda$ است به‌طوری‌که نگارهٔ φ، $\mathrm{Im}(\varphi)$، مشمول در مرکز Λ باشد و Λ از طریق φ به یک R–مدول متناهی‌مولد تبدیل شود. در حالت خاص که $R = k$ یک میدان است، k–جبر آرتینی Λ را یک جبر متناهی‌بُعد می‌نامیم.

نظریهٔ نمایش k–جبر متناهی‌بُعد Λ، به‌بیانی‌ساده، مطالعه و رده‌بندی تمام Λ–مدول‌های تجزیه‌ناپذیرِ متناهی‌مولد است. یادآوری می‌کنیم که Λ–مدول M تجزیه‌ناپذیر است هرگاه نتوان آن را به‌صورت مجموع مستقیم دو زیرمدول ناصفرِ سره از M تجزیه کرد. با توجه به اینکه ردهٔ تمام Λ–مدول‌های چپ (راست) متناهی‌مولد، $\mathrm{mod}\,\Lambda$ ($\Lambda\,\mathrm{mod}$)، یک ردهٔ کرول–اشمیت است، یافتن چنین

عبارات و کلمات کلیدی: جبر متناهی‌بُعد، حدس اوسلَندر–رَیتن، حدس ناکایاما، حدس بُعدمتناهی
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۲/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۹/۲۹

doi: 10.30504/mct.2022.1285.1894

رده‌بندی‌هایی، درواقع، به‌معنای درک کامل ساختار هومولوژیک این رسته‌ها است. به یاد بیاورید که در یک رستهٔ کرول–اشمیت هر شی به‌صورتی یکتا، در حد یکریختی، به‌صورت جمع مستقیمی از اشیا با حلقه درون‌ریختی‌های موضعی قابل بیان است.

نظریهٔ نمایش جبرهای متناهی‌بُعد در دههٔ ۷۰ میلادی توسط موریس اوسلَندر[1] و ایدون رَیتن[2] بنیان‌گذاری گردید و کتاب مشترک این دو با اسمالو[3][۶] را می‌توان اولین متن آموزشی جامع در این زمینه دانست. البته متون معتبر دیگری به‌مرور طی دهه‌های اخیر به نگارش درآمده‌اند که از آن میان می‌توان به [۳] اشاره کرد. یکی از قابلیت‌های ذاتی نظریهٔ نمایش جبرها ارتباط آن با سایر شاخه‌های جبر مانند جبر جابه‌جایی [۲۲]، هندسه جبری [۱۶]، و نظریهٔ نمایش گروه‌ها [۸] است. طی دو دههٔ اخیر با ابداع رسته‌های خوشه‌ای توسط فُمین[4] و زیلی‌وینسکی[5] کاربردهای عمیقی از نظریهٔ نمایش جبرها در حیطه‌هایی از فیزیک نظری نیز به دست آمده است [۱۳].

هم‌زمان با پیشرفت نظریهٔ نمایشِ جبرهای متناهی‌بُعد حدس‌های مختلفی در این حوزه مطرح شد. چون فنون جبر هومولوژی [مانستگی] همواره یکی از ابزارهای اساسی در نظریهٔ نمایش جبرها بوده است این حدس‌ها غالباً در چارچوب جبر هومولوژی بیان شده‌اند. گرچه سرچشمهٔ برخی از این حدس‌ها پژوهش‌های پیشین در نظریهٔ عمومی مدول‌ها است، بااین‌حال، ظهور جدی آن‌ها در نظریهٔ نمایشِ جبرهای متناهی‌بُعد بوده است. شاید یکی از عمده‌ترین دلایل این موضوع کشف ارتباط‌های منطقی بین این حدس‌ها در حیطهٔ جبرهای متناهی‌بُعد است.

در این مقاله به معرفی و مطالعهٔ برخی از مهم‌ترین حدس‌های هومولوژیک در نظریهٔ نمایش جبرها می‌پردازیم. همان‌طورکه عنوان مقاله نشان می‌دهد، حدس مشهور اوسلَندر–رَیتن به‌طور ویژه مورد توجه ما است. به این منظور، مناسب است پژوهش‌های مهم ناکایاما[6] در زمینهٔ تحلیل تام جبرهای (شبه)فروبنیوس[7] مورد توجه قرار گیرد [۲۴، ۲۵]. یادآوری می‌کنیم که جبر متناهی‌بُعد Λ شبه‌فروبنیوس نامیده می‌شود هرگاه Λ به‌عنوان Λ–مدول یک‌طرفه تزریقی باشد. برای چنین جبری رستهٔ Λ–مدول‌های تصویری و تزریقی منطبق می‌شوند [۶]. بنابه گفتهٔ ناکایاما در مقالهٔ اخیر، تحقیقاتش در زمینهٔ تحلیل تام جبرهای شبه‌فروبنیوسی وی را به حدسی مهم سوق داد که بعداً به حدس ناکایاما معروف شد.

[1]Maurice Auslander [2]Idun Reiten [3]Sverre Olaf Smalø [4]Sergey Fomin [5]Andrei Zelevinsky [6]Tadashi Nakayama [7]Frobenius

حدس ناکایاما اگر همهٔ مدول‌های E^i در تحلیلِ تزریقی[8] مینیمالِ

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \cdots$$

از k–جبر متناهی‌بُعد Λ تصویری باشند، آنگاه Λ شبه‌فروبنیوسی است.

اوسلَندر و رَیتن حدس ناکایاما را در سال ۱۹۷۵ در [۵] تعمیم دادند:

حدس تعمیم‌یافتهٔ ناکایاما تحلیل تزریقی مینیمال

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \cdots$$

برای k–جبر متناهی‌بُعد Λ را در نظر بگیرید. دراین‌صورت، هر Λ–مدول تزریقی تجزیه‌ناپذیر متناهی‌مولد جمع‌وند مستقیمی از حداقل یکی از E^iها است.

بعداً اوسلَندر و رَیتن صورت‌های دیگری از این حدس را بیان کردند. به‌ویژه، آن‌ها ثابت کردند که حدس تعمیم‌یافتهٔ ناکایاما برای تمام k–جبرهای متناهی‌بُعد Λ معادل با گزارهٔ زیر است.

گزاره ۱.۱. فرض کنید M یک Λ–مدول متناهی‌مولد باشد که به‌ازای هر $i \geq 1$ داشته باشیم $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, M \bigoplus \Lambda) = 0$. دراین‌صورت M تصویری است.

این گزاره همان حدس اوسلَندر–رَیتن است که تاکنون تلاش‌های بسیاری برای اثبات آن صورت گرفته است. درستی این حدس در حالت‌های خاص بسیاری گواهی بر درستی آن در کلی‌ترین حالت ممکن است؛ هرچند تاکنون تلاش‌ها در این زمینه بی‌نتیجه بوده است.

بعد از این مقدمه، در بخش ۲ مروری بر حدس اوسلَندر–رَیتن می‌کنیم و رده‌هایی از جبرهای متناهی‌بُعد را که این حدس برای آن‌ها اثبات شده است معرفی می‌کنیم. همان‌طورکه پیش‌تر اشاره شد، بررسی حدس‌های هومولوژیک دیگر که با حدس اوسلَندر–رَیتن پیوندهای منطقی دارند نیز از اهمیت خاصی برخوردار است. به همین دلیل بخش‌های ۳، ۴، و ۵ به‌ترتیب به ارائه حدس بُعد نهایی، حدس ناکایاما و صورت تعمیم‌یافتهٔ آن، و حدس پوچی می‌پردازیم.

علاوه‌بر نمادهایی که پیش از این معرفی شد، نمادها و قراردادهای زیر نیز در سراسر مقاله به کار می‌روند. برای k–جبر متناهی‌بُعد Λ، $\Lambda\,\mathrm{Mod}$ $(\mathrm{Mod}\,\Lambda)$ نشان‌دهندهٔ ردهٔ تمام Λ–مدول‌های چپ (راست) است. منظور ما از مدول همواره یک مدول چپ مانند M بر حلقهٔ مشخصِ A است و

[8] injective resolution

درصورت لزوم با نماد $_AM$ نموده می‌شود. اگر منظور مدول راست باشد به آن تصریح خواهیم کرد و درصورت لزوم آن را با M_A نشان می‌دهیم. همچنان‌که پیش‌تر گفته شد، نماد $\Lambda\,\mathrm{mod}$ $(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ رستهٔ Λ–مدول‌های راست (چپ) متناهی‌مولد را نشان می‌دهد. به‌علاوه، نمادهای $\mathrm{pd}_\Lambda(M)$ و $\mathrm{id}_\Lambda(M)$ به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ بُعد تصویری و بُعد تزریقی Λ–مدول M است. برای k–جبر متناهی‌بُعد Λ، تابعگون دوگانی استاندارد D، به‌صورت $D : \Lambda\,\mathrm{mod} \to \mathrm{mod}\,\Lambda$، $D(-) := \mathrm{Hom}_k(-, k)$، تعریف می‌شود و خواص آن را می‌توان در [۶] و [۳] یافت. همهٔ حلقه‌ها را یکه‌دار فرض می‌گیریم. کتاب [۲۶] مباحث مورد نیاز از جبر هومولوژی را در بر دارد. در [۱] می‌توان مطالبی دربارهٔ نظریهٔ رسته‌ها و جبر هومولوژی یافت.

۲ حدس اوسلَندر–رَیتن

هم‌زمان با حدس اوسلَندر–رَیتن، مطالعهٔ جبرهایی که این حدس برای آن‌ها درست است نیز آغاز شد. حاصل پژوهش‌های اولیه یافتن مدول‌هایی با شرایطی قوی‌تر از مفروضات حدس اوسلَندر–رَیتن بود. به‌ویژه، رده‌ای از مدول‌ها، موسوم به نهایتاً بسته[۹]، در این زمینه ظاهر شد.

فرض کنید Λ یک k–جبر متناهی‌بُعد باشد. به‌منظور تعریف مدول‌های نهایتاً بسته یادآوری می‌کنیم که در یک تحلیل تصویری

$$\mathcal{P} : \cdots P_۲ \xrightarrow{d_۲} P_۱ \xrightarrow{d_۱} P_۰ \xrightarrow{d_۰} M \longrightarrow ۰$$

از Λ–مدول M، هستهٔ همریختی d_n، $K_{n+۱} = \ker(d_n)$، $(n+۱)$اُمین یوغ[۱۰] مدول M در این تجزیه نامیده می‌شود. می‌توان ثابت که اگر $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ دو تحلیل تصویری از M باشند آنگاه برای هر n، Λ–مدول‌های تصویری Q_n و Q'_n وجود دارند به‌طوری‌که $K_n \bigoplus Q_n \simeq K'_n \bigoplus Q'_n$ [۲۶]. همچنین تحلیل تصویری $\mathcal{P}$ برای M را مینیمال گوییم هرگاه توسط پوشش‌های تصویری متوالی ساخته شده باشد [۶]. چون پوشش تصویری Λ–مدول M در حد یکریختی یکتاست، تحلیل تصویری مینیمال M نیز در حد یکریختی همبافت‌ها[۱۱] یکتا است. Λ–مدول متناهی‌مولد M نهایتاً بسته نامیده می‌شود هرگاه در تحلیل تصویری مینیمالِ M، یوغ K_n چنان یافت شود که هریک از جمع‌وندهای تجزیه‌ناپذیر[۱۲] آن در حداقل یک یوغ مانند K_m، $m < n$، ظاهر شده باشد. این‌گونه مدول‌ها را اولین‌بار جانس[۱۳] در سال ۱۹۶۱ تعریف کرد [۲۰]. قضیهٔ زیر را اوسلَندر و رَیتن در

[9] ultimately closed [10] yoke [11] complex [12] indecomposable [13] James P. Jans

[۵] اثبات کردند.

قضیه ۱.۲. فرض کنید Λ-مدولِ متناهی‌مولدِ M مولدی برای ردهٔ $\Lambda \bmod$ باشد و به‌ازای هر $i \geq ۱$، $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, M) = ۰$. اگر M نهایتاً بسته باشد، آنگاه M تصویری است.

یادآوری می‌کنیم که Λ-مدول متناهی‌مولدِ M مولدی برای $\Lambda \bmod$ است هرگاه به‌ازای هر Λ-مدول متناهی‌مولد N یک Λ-همریختی پوشای $M^{(n)} \longrightarrow N$ به‌ازای $n \geq ۱$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $M^{(n)}$ معرّف جمع مستقیم n رونوشت از M باشد. به‌سادگی می‌توان دید که برای Λ-مدول مولدِ M رابطهٔ $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, M) = ۰$ مستلزم آن است که $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, \Lambda) = ۰$. بنابراین، شرایط قضیهٔ ۱.۲ را می‌توان با $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, M \bigoplus \Lambda) = ۰$ (به‌ازای $i \geq ۱$) جایگزین کرد. ازاین‌رو، قضیهٔ ۱.۲ حدس اوسلَندر–رَیتن را برای ردهٔ مدول‌های نهایتاً بسته روی جبر متناهی‌بُعد Λ تأیید می‌کند.

یکی از مهم‌ترین انواع جبرهای متناهی‌بُعد که در شرایط قضیهٔ اخیر صدق می‌کنند جبرها با نوع نمایش متناهی‌اند[۱۴]. بنابر تعریف، جبر Λ دارای نوع نمایش متناهی است هرگاه تعداد رده‌های یکریختی Λ-مدول‌های تجزیه‌ناپذیرِ متناهی‌مولد متناهی باشد. این نوع جبرها در بخش‌های مختلفی از نظریهٔ نمایش جبرها فراوان ظاهر می‌شوند و تا حد زیادی مورد مطالعه قرارگرفته‌اند و رده‌بندی‌هایی نیز برای آن‌ها پیدا شده است. اطلاعات بیشتر در فصل هفتم از [۳] و فصل ششم از [۶] آمده است.

اگر Λ دارای نوع نمایش متناهی باشد آنگاه هر Λ-مدول متناهی‌مولدِ M نهایتاً بسته است. درواقع، اگر به‌ازای هر n، جمعوند مستقیم تجزیه‌ناپذیری از یوغ K_n وجود داشته باشد که در هیچ‌یک از یوغ‌های قبلی به‌صورت جمعوند مستقیم ظاهر نشود، آنگاه به تعداد نامتناهی Λ-مدول تجزیه‌ناپذیر متناهی‌مولدِ دوبه‌دو نایکریخت ایجاد خواهد شد. پس نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱.۲ به‌صورت زیر در می‌آید.

نتیجه ۲.۲. هر جبر متناهی‌بُعد Λ از نوع نمایش متناهی در حدس اوسلَندر–رَیتن صدق می‌کند.

دستهٔ دیگری از جبرهای متناهی‌بُعد که شرط قضیهٔ ۱.۲ را برآورده می‌کند جبرهای Λ با شرط $\operatorname{rad}^۲(\Lambda) = ۰$ هستند؛ نماد $\operatorname{rad}(\Lambda)$ رادیکال جِیکوبسون[۱۵] حلقهٔ Λ را نشان می‌دهد. این‌گونه

[14] representation–finite [15] Jacobson

جبرها از جنبه‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند (فصل دهم از [۶] را ملاحظه کنید.) چون هر مدول روی جبر Λ با ویژگی $\operatorname{rad}^{2}(\Lambda) = 0$ که در شرایط حدس اوسلَندر–رَیتن صدق کند نهایتاً بسته است، پس می‌توان نتیجه گرفت که این جبرها نیز در حدس اوسلَندر–رَیتن صدق می‌کنند.

نتیجه ۳.۲. فرض کنید Λ جبری متناهی‌بُعد با ویژگی $\operatorname{rad}^{2}(\Lambda) = 0$ است. دراین‌صورت حدس اوسلَندر–رَیتن برای Λ صادق است.

هُشینو[16] با الهام از این نتیجه در [۱۷] جبرهای Λ با ویژگی $\operatorname{rad}^{3}(\Lambda) = 0$ را بررسی کرد و نشان داد که هر جبر متقارن Λ با ویژگی $\operatorname{rad}^{3}(\Lambda) = 0$ در حدس اوسلَندر–رَیتن صدق می‌کند. برهان هُشینو دراصل متضمّن این مطلب است که هر مدول متناهی‌مولد M روی جبری با ویژگی‌های اشاره‌شده آزاد است اگر $\operatorname{Ext}^{1}_{\Lambda}(M, M) = 0$. جبر Λ متقارن نامیده می‌شود هرگاه یکریختی $\Lambda \simeq D(\Lambda)$ از Λ–مدول‌های دوطرفه وجود داشته باشد. در اینجا $D(-)$ نشان‌دهندهٔ دوگانی استاندارد جبر Λ است [۶].

حدس اوسلَندر–رَیتن در حیطهٔ حلقه‌های جابه‌جایی نیز به‌طور وسیعی مورد توجه قرار گرفته است. هرچند احتمالاً در این شرایط پیوندهای منطقی آن با برخی حدس‌های هومولوژیک دیگر گسسته یا تضعیف می‌گردد، همچنان اهمیت خود را حفظ خواهد کرد (برای اطلاع از مفاهیم مورد نیاز از جبر جابه‌جایی دو کتاب [۲۲، ۹] را توصیه می‌کنیم).

اولین‌بار، اوسلندر و همکارانش به بررسی حدس فوق در مورد حلقه‌های جابه‌جایی و نوتری پرداختند. به‌ویژه، آن‌ها قضیهٔ مهم زیر را اثبات کردند [۴].

قضیه ۴.۲. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی با بُعد سراسری متناهی و $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_t)$ R–رشته‌ای منظم باشد. دراین‌صورت حلقهٔ خارج‌قسمتی $S = \frac{R}{\langle \underline{x} \rangle}$ در حدس اوسلَندر–رَیتن صدق می‌کند.

یادآوری می‌کنیم که منظور از بُعد سراسری حلقهٔ A مقدار زیر است

$$\mathrm{gld(A) = Sup\{pd_A(M) : M \in A\,Mod\}}.$$

در سال ۲۰۰۴، هانیک و همکارانش برقراری حدس اوسلَندر–رَیتن را برای حلقه‌های جابه‌جاییِ

[16] Mitsuo Hoshino

نوتریِ موضعی $(R,\mathfrak{m})$ با شرط $\mathfrak{m}^{۳}=۰$ اثبات کردند [۱۹]. بررسی حدس اوسلَندر–رَیتن برای حلقه‌های جابه‌جایی با مقالهٔ [۲۷] در مورد حلقه‌های گورنستاین[17] ادامه یافت. حلقهٔ جابه‌جایی و موضعی $(R,\mathfrak{m})$ را گورنستاین نامیم هرگاه نوتری باشد و $\mathrm{id}_R(R)<\infty$.

قضیه ۵.۲ ([۲۷]). فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای گورنشتاین با شرط $\mathrm{Codim}(R)\leq ۴$ باشد. دراین‌صورت حدس اوسلَندر–رَیتن برای R درست است.

به یاد بیاورید که اگر $\mathrm{edim}(R)$ معرّف تعداد اعضای یک مجموعهٔ مولد مینیمال برای $\mathfrak{m}$ باشد آنگاه $\dim(R)\leq \mathrm{edim}(R)$ و $\mathrm{Codim}(R)=\mathrm{edim}(R)-\dim(R)$؛ این کمیت همواره خوش‌تعریف است و هم‌بُعد حلقهٔ R نامیده می‌شود.

مطلب حائز اهمیت دیگر در مورد حلقه‌های گورنستاین این است که درستی حدس اوسلَندر–رَیتن برای این حلقه‌ها به درستی آن برای حلقه‌های گورنستاین با بُعد کرول حداکثر ۱ بستگی دارد [۲]. مطالعهٔ حدس اوسلَندر–رَیتن برای حلقه‌های غیرگورنستاین یکی از زمینه‌های پژوهشی سال‌های اخیر بوده است. در بین این‌ها، یکی از نامزدهای اصلی، حلقه‌های کوهن–مکولی[18] هستند. حلقهٔ جابه‌جایی، موضعی، و نوتری $(R,\mathfrak{m})$ کوهن–مکولی نامیده می‌شود هرگاه بُعد کرول R با طول R–رشتهٔ منظم ماکسیمالی مشمول در $\mathfrak{m}$ برابر باشد. طول تمام R–رشته‌های منظم ماکسیمالِ مشمول در $\mathfrak{m}$ کمیتی ثابت است که معمولاً با نماد $\mathrm{depth(R)}$ نشان داده می‌شود. حلقه‌های گورنستاین درواقع نوع خاصی از حلقه‌های کوهن–مکولی‌اند. بااین‌حال، حلقه‌های کوهن–مکولیِ غیرگورنستاینی به‌آسانی یافت می‌شوند.

برای حلقهٔ جابه‌جایی، موضعی، و نوتری $(R,\mathfrak{m})$ با بُعد کرول d، یک دستگاه از پارامترهای R رشته‌ای از اعضای $\mathfrak{m}$ مانند $\underline{x}=(x_۱,x_۲,\ldots,x_d)$ است به‌طوری‌که $\mathfrak{m}$، ایده‌آل اول مینیمال شامل ایده‌آل تولیدشده توسط این رشته، $\langle\underline{x}\rangle$، باشد. همچنین ایده‌آل I از R را یک ایده‌آل پارامتری گوییم هرگاه مجموعهٔ مولد آن، بخشی از دستگاهی از پارامترهای R باشد.

قضیه ۶.۲ ([۲۱]). فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای کوهن–مکولی و I ایده‌آلی پارامتری از R باشد. دراین‌صورت حدس اوسلَندر–رَیتن برای R برقرار است اگر و تنها اگر برای حلقهٔ $\frac{R}{I}$ برقرار باشد.

اهمیت این قضیه در این واقعیت نهفته است که احتمالاً می‌تواند زمینه‌ساز به‌کارگیری فرآیندهای کاهشی برای اثبات حدس اوسلَندر–رَیتن در حلقه‌های کوهن–مکولی باشد.

[17] Gorenstein [18] Cohen-Macaulay

اخیراً، جایگزینی جبرهای آرتینی با انواع حلقه‌های نوتری در حدس اوسلَندر-رَیتن به حالت ناجابه‌جایی نیز تسرّی یافته است. برای مرور برخی از پژوهش‌های انجام‌شده در این زمینه نخست برخی مفاهیم اساسی از جبر هومولوژیک نسبی را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید S حلقه‌ای دلخواه باشد. S-مدول M را گورنستاین تصویری نامیم هرگاه همبافت دقیقی از S-مدول‌های تصویری مانند $\mathcal{P}: \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} P_{-1} \longrightarrow \cdots$ یافت شود به‌طوری‌که به‌ازای هر S-مدول تصویری Q، همبافت $\mathrm{Hom}_S(\mathcal{P}, Q)$ دقیق بوده و $M = \ker(d_0)$. مدول‌های گورنستاین تزریقی به‌صورت دوگان تعریف می‌شوند. این مفاهیم اولین‌بار در دههٔ ۹۰ میلادی در [۱۱، ۱۰] تعریف شدند. پس از تعریف این مفاهیم افق‌های پژوهشی جدید گشوده شد که شرح بیشتری از آن را در [۱۲] و مراجع آن می‌توان دید.

اینک فرض کنید R یک حلقه (نه لزوماً جابه‌جایی) گورنستاین باشد؛ یعنی R نوتری چپ و راست باشد، $\mathrm{id}(R_R) < \infty$، و $\mathrm{id}({}_RR)$. اگر M یک R-مدول گورنستاینِ تصویریِ متناهی‌مولد باشد آنگاه به‌ازای $i \geq 1$ داریم $\mathrm{Ext}^i_R(M, R) = 0$. با توجه به این موضوع، حدس اوسلَندر-رَیتن برای حلقه‌های گورنستاین (و همچنین جبرهای متناهی‌بُعد گورنستاین) به این صورت بیان می‌شود: فرض کنید M یک مدول گورنستاین، تصویری، و متناهی‌مولد روی حلقهٔ گورنستاین Λ (یا جبر متناهی‌بُعد گورنستاین Λ) باشد. اگر برای $i \geq 1$ داشته باشیم $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, M) = 0$ آنگاه M تصویری است.

شایان ذکر است که حدس بالا درحالتی‌که Λ گورنستاین نباشد نیز بررسی شده است و معمولاً آن را حدس گورنستاین تصویری می‌نامند.

۳ حدس بُعد نهایی

در این بخش به بررسی حدس بُعد نهایی، که یکی از حدس‌های هومولوژیک مرتبط با حدس اوسلَندر-رَیتن است، می‌پردازیم. فرض کنید Λ جبری متناهی‌بُعد بر میدان k باشد. ابعاد نهایی بزرگ و کوچک Λ به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\mathrm{Findim}(\Lambda) = \mathrm{Sup}\{\mathrm{pd}_\Lambda(\mathrm{X}) : \mathrm{X} \in \Lambda\,\mathrm{Mod}, \mathrm{pd}_\Lambda(\mathrm{X}) < \infty\},$$

$$\mathrm{findim}(\Lambda) = \mathrm{Sup}\{\mathrm{pd}_\Lambda(\mathrm{X}) : \mathrm{X} \in \Lambda\,\mathrm{mod}, \mathrm{pd}_\Lambda(\mathrm{X}) < \infty\}.$$

ممکن است چنین به نظر آید که میزان پیچیدگی هومولوژیک رستهٔ مدولی $\Lambda\mathrm{Mod}$ متناسب با بزرگی

بُعد سراسری Λ، $\mathrm{gld}(\Lambda)$، است و مقادیر بزرگ‌تر از $\mathrm{gld}(\Lambda)$ به‌معنای پیچیدگی بیشتر در رستهٔ مذکور است. با مثالی نشان می‌دهیم که این موضوع درحالت‌کلی ممکن است درست نباشد. از نظریهٔ جبر جابه‌جایی به خاطر آورید که حلقهٔ جابه‌جایی، موضعی، و نوتری $(R, \mathfrak{m})$ منظم نامیده می‌شود هرگاه $\dim(R) = \mathrm{edim(R)}$.

مثال ۱.۳. برای میدان k، k–جبر متناهی‌بُعد $\Lambda = \frac{k[x]}{\langle x^{۲}\rangle}$ را درنظر بگیرید. به‌سادگی دیده می‌شود Λ منظم نیست و درنتیجه $\mathrm{gld}(\Lambda) = \infty$.

همان‌طورکه مثال ۱.۳ نشان می‌دهد رستهٔ $\Lambda\mathrm{Mod}$ می‌تواند درعین‌سادگی و ملموس‌بودن دارای بُعد سراسری نامتناهی باشد. این موضوع که می‌توان آن را نوعی کاستی برای مفهوم بُعد سراسری تعبیر کرد، انگیزهٔ اصلی معرفی ابعاد نهایی برای رستهٔ $\Lambda\mathrm{Mod}$ است. در مثال ۱.۳ دیده می‌شود که $\mathrm{findim}(\Lambda) = \mathrm{Findim}(\Lambda) = 0$ و این موضوع با ساختار هومولوژیک سادهٔ رستهٔ $\Lambda\mathrm{Mod}$ سازگارتر به نظر می‌رسد.

بَس در سال ۱۹۶۰ حدس بُعد نهایی (ح.ب.ن.) را به‌صورت زیر بیان کرد [۷]:

فرض کنید Λ یک جبر متناهی‌بُعد بر میدان k باشد. دراین‌صورت

(ح.ب.ن–۱) $\mathrm{findim}(\Lambda) = \mathrm{Findim}(\Lambda)$؛

(ح.ب.ن–۲) $\mathrm{findim}(\Lambda) < \infty$.

نادرستی ح.ب.ن–۱ در سال ۱۹۹۲ در [۱۸] ثابت شد. در آنجا نشان داده شده است که برای هر $n \geq ۲$ جبر متناهی‌بُعد Λ را می‌توان یافت که $\mathrm{findim}(\Lambda) = n$ و $\mathrm{Findim}(\Lambda) = n + ۱$. توجه کنید که $\mathrm{findim}(\Lambda) = ۰$ معادل با $\mathrm{Findim}(\Lambda) = ۰$ است. این مطلب از برهان‌های بَس در [۷] به دست می‌آید.

در این مقاله هر جا صحبت از حدس بُعد نهایی می‌کنیم منظور ما همان ح.ب.ن–۲ است. یافتن جبرهایی که این حدس برای آن‌ها درست باشد یکی از زمینه‌های پژوهشی طی دهه‌های اخیر بوده است. با آنکه پژوهش‌های دامنه‌داری در این زمینه در حال انجام است، درستی این حدس در حالت کلی همچنان مسئله‌ای حل نشده است. در پایان این بخش به بیان ارتباط منطقی بین حدس اوسلَندر–رَیتن و حدس بُعد نهایی می‌پردازیم. این ارتباط به‌صورت زیر است.

قضیه ۲.۳. اگر برای تمام k- جبرهای متناهی‌بُعد Λ داشته باشیم $\mathrm{findim}(\Lambda) < \infty$، آنگاه برای تمام چنین جبرهایی حدس اوسلَندر–رَیتن برقرار است.

نویسنده تاکنون اثبات مستقیم و سرراستی برای این قضیه در منابع نیافته است؛ اما با درنظر گرفتن حدس تعمیم‌یافتهٔ ناکایاما، که در ابتدای مقاله اشاره شد، می‌توان قضیهٔ فوق را ترکیبی از دو استلزام «حدس تعمیم‌یافتهٔ ناکایاما $\Longleftarrow$ حدس بُعد نهایی» و «حدس اوسلَندر–رَیتن $\Longleftarrow$ حدس تعمیم‌یافتهٔ ناکایاما» دانست. این موضوع انگیزهٔ اصلی نگارش بخش‌های بعدی مقاله است که در آن‌ها دو قضیهٔ اخیر را بیشتر مورد توجه قرار می‌دهیم.

۴ حدس ناکایاما و تعمیم آن

در این بخش به مطالعهٔ حدس ناکایاما و تعمیم آن پرداخته و ارتباط آن را با حدس اوسلَندر–رَیتن و همچنین حدس بُعد نهایی بررسی می‌کنیم. در [۲۸، ۲۳] رده‌هایی از جبرهای متناهی‌بُعد که این حدس برای آن‌ها برقرار است مورد بررسی قرار گرفته است. این حدس را اوسلَندر و رَیتن در [۵] به‌صورت زیر تعمیم داده‌اند:

حدس تعمیم‌یافتهٔ ناکایاما فرض کنید $S \neq 0$ یک Λ–مدول ساده باشد. دراین‌صورت عدد $i \geq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(S,\Lambda) \neq 0$.

برای بررسی اینکه حدس ناکایاما نتیجه‌ای از حدس تعمیم‌یافتهٔ ناکایاما است، فرض کنید تمام E^iها در تحلیل تزریقی مینیمالِ

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

تصویری باشند و Q را Λ–مدولی تجزیه‌ناپذیرِ تزریقیِ متناهی‌مولد در نظر بگیرید. دراین‌صورت Λ–مدول سادهٔ S چنان یافت می‌شود که $Q = E(S)$ [۳]. در اینجا $E(S)$ نشان‌دهندهٔ پوش تزریقی S است. بنابر فرض، $i \geq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(S,\Lambda) \neq 0$. مطابق تعریف $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(S,\Lambda)$ یکریخت با iاُمین هومولوژی همبافتِ

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(S,E^0) \xrightarrow{d^{0*}} \mathrm{Hom}_\Lambda(S,E^1) \xrightarrow{d^{1*}} \mathrm{Hom}_\Lambda(S,E^2) \xrightarrow{d^{2*}} \cdots$$

است. بنابراین Λ–همریختی $f \in \ker(d^{i*}) \setminus \mathrm{Im}(d^{i-1*})$ (با قرارداد $d^{-1}=0$) وجود دارد. به‌ویژه، $f \neq 0$. اما ساده‌بودن S تکریختی‌بودن f را ایجاب می‌کند و درنتیجه $S \subseteq E^i$. حال چون E^i تزریقی است، $E(S) = Q$ جمع‌وند مستقیمی از E^i، و درنتیجه تصویری است. چون هر Λ–مدول تزریقیِ متناهی‌مولد یکریخت با مجموع مستقیمی از Λ–مدول‌های تزریقیِ تجزیه‌ناپذیرِ

متناهی‌مولد است، از اینجا نتیجه می‌شود که تمام Λ–مدول‌های تزریقیِ متناهی‌مولد تصویری‌اند. به‌ویژه $D(\Lambda_\Lambda)$ نیز تصویری است. با توجه به ویژگی‌های تابعگون دوگانی استاندارد D، این گفته مستلزم تزریقی‌بودن Λ_Λ یعنی شبه‌فروبنیوس‌بودن آن است.

این استدلال نشان می‌دهد که بیان فوق از حدس تعمیم‌یافتهٔ ناکایاما معادل با صورتی از آن است که پیش‌تر اشاره شد. مطالعهٔ ارتباط حدس‌های بالا با حدس اوسلَندر–رَیتن و حدس بُعد نهایی را با گزارهٔ زیر آغاز می‌کنیم.

گزاره ۱.۴ ([۲۸]). فرض کنید Λ یک k-جبر متناهی‌بُعد باشد و $\operatorname{findim}(\Lambda) < \infty$. دراین‌صورت حدس ناکایاما برای Λ برقرار است.

درستی این گزاره را نشان می‌دهیم. تحلیل تزریقی مینیمالِ Λ را به‌صورت

$$\circ \longrightarrow {}_\Lambda\Lambda \longrightarrow E^\circ \xrightarrow{f^\circ} E^\backprime \xrightarrow{f^\backprime} \cdots$$

در نظر بگیرید که در آن هر E^i، Λ–مدولی تصویری متناهی‌مولد است. پس به‌ازای هر $i \geq ۱$، $\ker(f^i)$ دارای یک تحلیل تصویری به‌صورت زیر است

$$\circ \longrightarrow {}_\Lambda\Lambda \longrightarrow E^\circ \longrightarrow E^۱ \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{i-۱} \longrightarrow \ker(f^i) \longrightarrow \circ.$$

بنابراین $\operatorname{pd}_\Lambda(\ker(f^i)) < \infty$. اما $d := \operatorname{findim}(\Lambda) < \infty$ و $\ker(f^i)$ زیرمدولی متناهی‌مولد از E^i است. پس $\operatorname{pd}_\Lambda(\ker(f^i)) \leq d$ و به‌ویژه $\operatorname{pd}_\Lambda(\ker(f^{d+۱})) \leq d$. حالا از دنبالهٔ دقیق

$$\circ \longrightarrow {}_\Lambda\Lambda \longrightarrow E^\circ \xrightarrow{f^\circ} E^۱ \xrightarrow{f^۱} E^۲ \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{d-۱} \xrightarrow{f^{d-۱}} E^d \longrightarrow \ker(f^{d+۱}) \to \circ$$

نتیجه می‌شود که $\operatorname{pd}_\Lambda(\ker(f^۱)) = \circ$ و بنابراین $\operatorname{Im}(f^\circ) = \ker(f^۱)$، Λ–مدولی تصویری است. اکنون دنبالهٔ دقیق $\circ \longrightarrow {}_\Lambda\Lambda \longrightarrow E^\circ \longrightarrow \operatorname{Im}(f^\circ) \longrightarrow \circ$ شکافته‌شده و ${}_\Lambda\Lambda$ به‌عنوان جمع‌وند مستقیمی از E° تزریقی خواهد بود.

در پایان بخش گذشته اشاره کردیم که استنتاج حدس اوسلَندر–رَیتن از حدس بُعد نهایی از طریق حدس تعمیم‌یافتهٔ ناکایاما انجام می‌پذیرد. برای این کار بیان دو قضیهٔ زیر ضروری است.

قضیه ۲.۴ ([۵]). حدس اوسلَندر–رَیتن برای تمام k-جبرهای متناهی‌بُعد برقرار است اگر و تنها اگر حدس تعمیم‌یافتهٔ ناکایاما در مورد تمام k-جبرهای متناهی‌بُعد برقرار باشد.

این قضیه پیوند مهم بین حدس تعمیم‌یافتهٔ ناکایاما و حدس اوسلَندر-رَیتن را روشن می‌سازد.

قضیه ۳.۴ ([۱۵]). برقراری حدس بُعد نهایی برای k-جبر متناهی‌بُعد Λ، برقراری حدس تعمیم یافتهٔ ناکایاما را برای Λ تضمین می‌کند.

اکنون قضیهٔ ۲.۳ را می‌توان نتیجه‌ای از دو قضیهٔ ۲.۴ و ۳.۴ در نظر گرفت. مسیر اثبات گفته‌شده در [۱۵] از حدس میانی دیگری، به نام حدس پوچی، می‌گذرد که در بخش آینده در مورد آن سخن خواهیم گفت.

۵ حدس پوچی

همان‌طورکه در پایان بخش قبل اشاره شد، برقراری حدس بُعد نهایی برای k-جبرهای متناهی‌بُعد درستی حدس تعمیم‌یافتهٔ ناکایاما را برای آن‌ها ایجاب می‌کند و روش به کار رفته در [۱۵] برای اثبات این رابطه مبتنی‌بر حدس هومولوژیک دیگری موسوم به حدس پوچی است. در این بخش به بیان این حدس و ارتباط آن با سایر حدس‌های هومولوژیک در نظریهٔ نمایش جبرها می‌پردازیم.

در ابتدا، بیان برخی از مقدمات ضروری است؛ نگاه کنید به [۱۴، ۲۹]. فرض کنید $\mathcal{C}(\Lambda)$ نشان‌دهندهٔ رستهٔ تمام همبافت‌ها از Λ-مدول‌ها باشد. رستهٔ هوموتوپی [هم‌جایی] Λ، $\mathbb{K}(\Lambda)$، رسته‌ای است که اشیای آن تمام همبافت‌های دلخواه از Λ-مدول‌ها، یعنی همان اشیای $\mathcal{C}(\Lambda)$، هستند و به‌ازای هر دو همبافت $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ در $\mathbb{K}(\Lambda)$، $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\Lambda)}(\mathbf{C},\mathbf{D})$، مجموعهٔ کلاس‌های هم‌ارزی نگاشت‌های زنجیره‌ای $\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ تحت رابطهٔ هوموتوپ‌بودن $\sim$ می‌باشد. به زبان نمادها،

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\Lambda)}(\mathbf{C},\mathbf{D}) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\Lambda)}(\mathbf{C},\mathbf{D})/\sim.$$

فرض کنید $\mathrm{inj}(\Lambda)$ زیررسته‌ای از $\mathrm{mod}\Lambda$ باشد که شامل مدول‌های تزریقی است. دراین‌صورت، $\mathbb{K}(\mathrm{inj}\Lambda)$ رستهٔ هوموتوپی ناشی از این رسته خواهد بود. همچنین $\mathbb{K}^b(\Lambda)$ را رستهٔ هوموتوپی ناشی از همبافت‌های کران‌دار از Λ-مدول‌ها و $\mathbb{K}^b(\mathrm{inj}\Lambda)$ را زیررسته‌ای از $\mathbb{K}^b(\Lambda)$ که توسط همبافت‌های کران‌دار از Λ-مدول‌های تزریقی ایجاد شده است در نظر بگیرید. به‌علاوه، متعامد راست $\mathbb{K}^b(\mathrm{inj}\Lambda)$ در $\mathbb{K}^b(\Lambda)$ را به‌صورت

$$\mathbb{K}^b(\mathrm{inj}\Lambda)^{\perp} = \{\mathbf{X}\in\mathbb{K}^b(\Lambda) \mid \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}(\Lambda)}(\mathbf{U},\mathbf{X}) = \circ, \forall\, \mathbf{U}\in\mathbb{K}^b(\mathrm{inj}\Lambda)\}$$

تعریف کنید.

اینک می‌توان حدس پوچی را به‌صورت زیر بیان کرد.

حدس پوچی برای k–جبر متناهی‌بُعد Λ، $\mathbb{K}^b(\mathrm{inj}\Lambda)^{\perp} = 0$.

این حدس را نخستین‌بار هاپل در سال ۱۹۹۰ طی سخنرانی‌اش در زمینهٔ نظریهٔ نمایش جبرها در دانشگاه شربروک بیان کرد. او سپس این حدس را به‌طور دقیق‌تری در [۱۵] مورد بحث قرار داد و ارتباط آن را با سایر حدس‌های هومولوژیک در زمینهٔ نظریهٔ نمایش جبرها مطالعه کرد. به‌ویژه، او قضیهٔ زیر را که از اهمیت خاصی برخوردار است ثابت کرد.

قضیه ۱.۵. اگر $\mathrm{findim}(\Lambda) < \infty$ آنگاه $\mathbb{K}^b(\mathrm{inj}\Lambda)^{\perp} = 0$.

قضیهٔ ۱.۵ نشان می‌دهد که برقراری حدس بُعد نهایی، مستلزم برقراری حدس پوچی برای جبر Λ است. ازسوی‌دیگر، هاپل در [۱۵] قضیهٔ زیر را اثبات کرده است.

قضیه ۲.۵. فرض کنید حدس پوچی برای k–جبر متناهی‌بُعد Λ برقرار باشد. دراین‌صورت برای هر Λ–مدول ناصفر دلخواه X عدد $i \geq ۰$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $\mathrm{Ext}^i_{\Lambda}(X, \Lambda) \neq ۰$.

پس اگر حدس پوچی برای Λ درست باشد، آنگاه صورتی قوی‌تر از حدس تعمیم‌یافتهٔ ناکایاما در مورد Λ برقرار خواهد بود. ازاین‌رو، قضیهٔ ۳.۴ را می‌توان نتیجه‌ای از دو قضیهٔ ۱.۵ و ۲.۵ در نظر گرفت. وانگهی، چون بنابر قضیهٔ ۲.۴ برقراری حدس اوسلَندر–رَیتن برای تمام k–جبرهای متناهی‌بُعد معادل با برقراری حدس تعمیم‌یافتهٔ ناکایاما برای تمام k–جبرهای متناهی‌بُعد است می‌توان قضیهٔ زیر را بیان کرد.

قضیه ۳.۵. اگر برای تمام k–جبرهای متناهی‌بُعد Λ داشته باشیم $\mathbb{K}^b(\mathrm{inj}\Lambda)^{\perp} = 0$، آنگاه برای تمام چنین جبرهایی حدس اوسلَندر–رَیتن برقرار است.

مراجع

[۱] جعفری، امیر؛ یاسمی، سیامک، نظریهٔ رسته‌ها: هدف یا ابزار، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ **۷۱** (۱۴۰۱)، ۴۷-۶۱.

[2] Araya, T., The Auslander-Reiten conjecture for Gorensetin rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137** (2009), 1941-1944.

[3] Assem, I., Simson, D., Skowroński, A., *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[4] Auslander, M., Ding, S., Solberg, O., Liftings and weak liftings of modules, *J. Algebra*, **156** (1993), 273-317.

[5] Auslander, M., Reiten, I., On a generalized version of the Nakayam conjecture, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **52** (1975), 69-74.
[6] Auslander, M., Reiten, I. Smalø, S. O., *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
[7] Bass, H., Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), 466-488.
[8] Benson, D.J., *Representations and Cohomology*, vol. I., Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
[9] Bruns, W., Herzog, J., *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
[10] Enochs, E., Jenda, O. M. G., On Gorenstein injective modules, *Comm. Algebra*, **21** (1993), 3489-3501.
[11] Enochs, E., Jenda, O. M. G., Gorensetin injective and projective modules, *Math. Z.*, **220** (1995), 611-633.
[12] Enochs, E., Jenda, O. M. G., *Relative Homological Algebra*, De Gruyter, Berlin, 2000.
[13] Fomin, S., Zelevinsky, A., Cluster algebras, I. Foundation, *J. Amer. Math. Soc.*, **15** (2002), 497-529.
[14] Happel, D., *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
[15] Happel, D., On Gorenstein algebras, in *Representation Theory of Finite Groups and Finite Dimensional Algebras*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991, 389-404.
[16] Hartshorne, R., *Residues and Duality*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
[17] Hoshino, M., Modules wihout self-extensions and Nakayama's conjecture, *Arch. Math.*, **43** (1984), 494-500.
[18] Huisgen B. Z., Homological domino effects and the first finitistic dimension conjecture, *Invent. Math.*, **108** (1992), 369-383.
[19] Huneke, C., Leuschke, G. J., On a conjecture of Auslander and Reiten, *J. Algebra*, **275** (2004), 781-790.
[20] Jans, J. P., Some generalizations of finite projective dimension, *Illinois J. Math.*, **5** (1961), 334-344.
[21] Kumashiro, S., The Auslander-Reiten conjecture for certain non-Gorensetin Cohen-Macaulay rings, available at `arXiv:2209.12718`.
[22] Leuschke, G. J., Wiegand, R., *Cohen-Macaulay Representations*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2012.
[23] Mueller, B. J., The classification of algebras by dominant dimension, *Canad. J. Math.*, **20** (1968), 398-409.
[24] Nakayama, T., On the complete cohomology theory of Frobenius algebras, *Osaka Math. J.*, **9** (1957), 165-187.
[25] Nakayama, T., On algebras with complete homology, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **22** (1958), 300-307.
[26] Rotman, J. J., *An Introduction to Homological Algebra*, 2nd ed., Springer, Berlin, 2009.
[27] Sega, M., Vanishing of cohomology over Gorenstein rings of small codimension, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131** (2003), 2313-2323.
[28] Tachikawa, H., On dominant dimensions of QF-3 algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **112** (1964), 249-266.
[29] Weibel, C. A., *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

حسین اشراقی: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه ریاضی محض
رایانامه: `eshraghi@kashanu.ac.ir`

Mathematical Culture and Thought
Volume 42, Number 72, Spring/Summer 2023, Pages 97–110
doi: 10.30504/mct.2022.1285.1894

An Overview of the Auslander-Reiten Conjecture and Some Related Conjectures

H. Eshraghi[1]

Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Kashan, Iran

Abstract. This paper deals with some of the most important and longstanding homological conjectures. The framework which is of interest to us is that of a finite dimensional algebra over a field. Auslander-Reiten conjecture, finitistic dimension conjecture, (Generalized) Nakayama conjecture, and vanishing conjecture are discussed in separate sections and the interaction between them is studied. As declared by the title, the current paper will put an emphasis on the Auslander-Reiten conjecture.

Keywords: finite-dimensional algebras, Auslander-Reiten conjecture, Nakayama conjecture, finitistic dimension conjecture
Article history: Recieved 20 May 2022; Accepted 20 December 2022
Article type: review

References

[1] Araya, T., The Auslander-Reiten conjecture for Gorensetin rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137** (2009), 1941-1944.

[2] Assem, I., Simson, D., Skowroński, A., *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[3] Auslander, M., Ding, S., Solberg, O., Liftings and weak liftings of modules, *J. Algebra*, **156** (1993), 273-317.

[4] Auslander, M., Reiten, I., On a generalized version of the Nakayam conjecture, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **52** (1975), 69-74.

[5] Auslander, M., Reiten, I. Smalø, S. O., *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[1] eshraghi@kashanu.ac.ir

[6] Bass, H., Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), 466-488.
[7] Benson, D.J., *Representations and Cohomology*, vol. I., Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
[8] Bruns, W., Herzog, J., *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
[9] Enochs, E., Jenda, O. M. G., On Gorenstein injective modules, *Comm. Algebra*, **21** (1993), 3489-3501.
[10] Enochs, E., Jenda, O. M. G., Gorensetin injective and projective modules, *Math. Z.*, **220** (1995), 611-633.
[11] Enochs, E., Jenda, O. M. G., *Relative Homological Algebra*, De Gruyter, Berlin, 2000.
[12] Fomin, S., Zelevinsky, A., Cluster algebras, I. Foundation, *J. Amer. Math. Soc.*, **15** (2002), 497-529.
[13] Happel, D., *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
[14] Happel, D., On Gorenstein algebras, in *Representation Theory of Finite Groups and Finite Dimensional Algebras*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991, 389-404.
[15] Hartshorne, R., *Residues and Duality*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
[16] Hoshino, M., Modules wihout self-extensions and Nakayama's conjecture, *Arch. Math.*, **43** (1984), 494-500.
[17] Huisgen B. Z., Homological domino effects and the first finitistic dimension conjecture, *Invent. Math.*, **108** (1992), 369-383.
[18] Huneke, C., Leuschke, G. J., On a conjecture of Auslander and Reiten, *J. Algebra*, **275** (2004), 781-790.
[19] Jafari, A., Yassemi, S.,Theory of categories; Object or tool , *Mathematical Culture and Thought*, 71 (2022), 47–61. [in Persian]
[20] Jans, J. P., Some generalizations of finite projective dimension, *Illinois J. Math.*, **5** (1961), 334-344.
[21] Kumashiro, S., The Auslander-Reiten conjecture for certain non-Gorensetin Cohen-Macaulay rings, available at `arXiv:2209.12718`.
[22] Leuschke, G. J., Wiegand, R., *Cohen-Macaulay Representations*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2012.
[23] Mueller, B. J., The classification of algebras by dominant dimension, *Canad. J. Math.*, **20** (1968), 398-409.
[24] Nakayama, T., On the complete cohomology theory of Frobenius algebras, *Osaka Math. J.*, **9** (1957), 165-187.
[25] Nakayama, T., On algebras with complete homology, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **22** (1958), 300-307.
[26] Rotman, J. J., *An Introduction to Homological Algebra*, 2nd ed., Springer, Berlin, 2009.
[27] Sega, M., Vanishing of cohomology over Gorenstein rings of small codimension, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131** (2003), 2313-2323.
[28] Tachikawa, H., On dominant dimensions of QF-3 algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **112** (1964), 249-266.
[29] Weibel, C. A., *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.