فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۲، شمارهٔ ۷۲ (بهار و تابستان ۱۴۰۲) صص. ۴۷ تا ۷۰

آشنایی با نظریهٔ نمایش گروه‌های متناهی و کاربردهای آن

محمدرضا درفشه

چکیده. نظریهٔ نمایش دارای کاربردهای مهمی در بررسی ساختار مجرد گروه‌های متناهی است. این نظریه را بیش از صد سال پیش فروبنیوس بنا نهاد و سپس برنساید، شور، و براوئر آن را بسط و گسترش دادند. در این مقاله سعی می‌کنیم ضمن توضیح قضیه‌های بنیادی این نظریه، کاربردهایی از آن را نیز بیاوریم.

۱ مقدمه

نظریهٔ اولیهٔ نمایش گروه‌های متناهی برحسب ماتریس‌ها با درایه‌های مختلط را عمدتاً فروبنیوس[1] بنا نهاد و بعداً شور[2] نتایج بنیادی و اساسی را به این نظریه افزود. بسیاری از نتایج مهم فروبنیوس را برنساید[3] کشف کرد و در کتاب معروفش [۴] به سال ۱۹۱۱ آورده است. استفادهٔ برنساید از نظریهٔ نمایش برای اثبات قضیه‌های مهم نظریهٔ گروه‌ها توجه بسیاری از متخصصان نظریه گروه‌ها را به خود جلب کرد.

نوتر[4] با تأکید بر مطالعهٔ نمایش مدولی یا فضای نمایش بر توسعه این نظریه تأثیر گذاشت. همچنین مطالعات وسیعی که براوئر[5] دربارهٔ نمایش پیمانه‌ای گروه‌ها انجام داد [۳] کاربردهای مهمی در نظریهٔ گروه‌ها پیدا کرد. برای مثال، فایت و تامپسن در [۷] برای اثبات حل‌پذیری گروه‌های مرتبهٔ فرد از نظریهٔ پیمانه‌ای گروه‌های متناهی استفاده کردند. هرجا حدسیه و یا قضیه‌ای دربارهٔ گروه‌های متناهی مطرح می‌شد و با روش‌های مجرد معمول پاسخ را پیدا نمی‌کردند سراغ نظریهٔ

عبارات و کلمات کلیدی: نمایش گروه، سرشت گروه، ابرسرشت، گروه مثلثی، گروه هورویتس
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۳/۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۷/۱۳

[1]F. G. Frobenius [2]I. Schur [3]W. Burnside [4]E. Noether [5]R. Brauer

doi: 10.30504/mct.2022.1288.1896

نمایش می‌رفتند و به‌سادگی پاسخ را می‌یافتند. برای مثال، این حدسیهٔ برنساید که مرتبهٔ هر گروه سادهٔ ناآبلی عددی زوج است و همچنین مسئلهٔ مربوط به گروه فروبنیوس و حل‌پذیری گروه‌هایی که مرتبهٔ آن‌ها توسط حداکثر دو عدد اول عاد می‌شود، به کمک نظریه نمایش به اثبات رسیدند. از طرف دیگر، نظریهٔ نمایش گروه انگیزهٔ قوی برای مطالعهٔ مدول‌ها روی حلقه‌های ناجابه‌جایی فراهم می‌آورد. همچنین این نظریه دارای کابردهایی در فیزیک، شیمی، مهندسی، و نظریهٔ اعداد است. ولی هدف اصلی نظریهٔ نمایش مطالعهٔ گروه‌ها با استفاده از عمل آن‌ها روی یک فضای برداری است. یا مطالعهٔ عمل گروه روی یک فضای برداری خواص کلی‌تری از آن گروه حاصل می‌گردد. مطالعهٔ نمایش ماتریسی گروه به‌طور طبیعی به آنالیز فوریه و مطالعهٔ توابع با مقادیر مختلط روی گروه‌ها منجر می‌شود که دارای کاربرد در شاخه‌های متعددی ازجمله مهندسی، نظریهٔ گراف، و احتمالات است. همچنین نمایش جایگشتی گروه، یعنی بررسی عمل گروه روی یک مجموعه، نیز به قضیه‌های مهم سیلو[6] منتهی می‌شود.

مفهوم و کاربرد اولیهٔ نظریهٔ نمایش در نظریهٔ اعداد ظاهر شد. در سال ۱۸۰۱ گاوس[7] در رسالهٔ خود از مفهوم نمایش یا سرشت گروه آبلی استفاده کرد. او می‌خواست به رده‌ای از صورت‌های درجهٔ دوم مقادیر عددی نسبت دهد. فرض کنید p عدد اول فردی باشد و a عددی صحیح با شرط $(a,p)=۱$. گوییم a یک ماندهٔ درجهٔ دوم به پیمانهٔ p است هرگاه هم‌نهشتی $x^۲ \equiv a (\mathrm{mod}\ p)$ دارای جواب باشد، درغیراین‌صورت می‌گوییم a یک ناماندهٔ درجهٔ دوم به پیمانهٔ p است. نظریهٔ مانده‌های درجهٔ دوم اولین مثال از کاربرد نظریهٔ نمایش است. تعریف‌های لازم را می‌آوریم. نماد لُژاندر[8] $(\frac{a}{p})$ چنین تعریف می‌شود که $(\frac{a}{p}) = ۱$ هرگاه a یک ماندهٔ درجهٔ دوم به پیمانهٔ p باشد درغیراین‌صورت $(\frac{a}{p}) = -۱$. در نظریهٔ مقدماتی اعداد ثابت می‌شود که اگر $(a,p)=(b,p)=۱$ آنگاه $(\frac{ab}{p}) = (\frac{a}{p})(\frac{b}{p})$. بنابراین با تعریف تابع $\chi : \mathbb{Z}_p^\times \longrightarrow \mathbb{C}$، که در آن $\mathbb{Z}_p^\times$ گروه ضربی $\mathbb{Z}_p$ است، می‌بینیم که $\chi(ab)=\chi(a)\chi(b)$ برای هر $a,b \in \mathbb{Z}_p^\times$. بنابراین χ یک همریختی است که آن را سرشت یا یک نمایش $\mathbb{Z}_p^\times$ می‌نامیم. مفهوم دیگری که در اینجا تعریف شده است مفهوم مجموع گاوسی است. فرض کنید χ یک سرشت (نمایش) گروه جمعی $\mathbb{Z}_p$ است، یعنی همریختی $\chi : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}$، و ψ یک سرشت گروه ضربی $\mathbb{Z}_p^\times$ است، یعنی همریختی

$$\psi : \mathbb{Z}_p^\times \longrightarrow \mathbb{C},$$

[6] P. L. M. Sylow [7] C. F. Gauss [8] A. M. Legendre

دراین‌صورت مجموع گاوسی چنین تعریف می‌شود $G(\chi, \psi) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_p^\times} \chi(x)\psi(x)$. این مجموع در نظریهٔ اعداد دارای کاربرد است و در بخش‌های بعد نشان خواهیم داد که $G(\chi, \psi)$ دراصل یک ابرسرشت (نمایش) است.

پس از این مقدمه، در بخش بعد مفاهیم اولیه نظریه نمایش را می‌آوریم و در بخش‌های دیگر کاربردهای مختلفی از این نظریه را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۲ مفاهیم اولیه

وقتی صحبت از نظریهٔ نمایش می‌کنیم باید به خاطر داشته باشیم که نظریهٔ نمایش چه ساختار جبری‌ای مد نظر است: نظریهٔ نمایش جبرها، نظریهٔ نمایش جبرهای لی، نظریهٔ نمایش نیم‌گروه‌ها، نظریهٔ نمایش گروه‌ها، نظریهٔ نمایش گروه‌های متناهی، و یا .... در این نوشتار منظور ما از نظریهٔ نمایشْ نظریهٔ نمایش گروه‌های متناهی است. هنگامی‌که در قرن نوزدهم مفهوم گروه ظاهر شد تعریف مجردی از آن هیچ‌گاه بیان نمی‌شد و مثلاً فقط گفته می‌شد «مجموعه‌ای با یک عمل دوتایی که شرکت‌پذیر است و ...» و به‌طورخاص یک گروه توسط گروه‌های جایگشتی و یا به‌عنوان تبدیلاتی که روی ریشه‌های چندجمله‌ای عمل می‌کردند تعریف می‌شد. اما پس از آنکه تعریف مجردی برای گروه ظاهر شد لازم آمد که گروه‌های شناخته‌شده با این تعریف مطابقت داده شوند.

در ابتدا یک تعریف کلی از نمایش گروه متناهی ارائه می‌دهیم؛ گرچه کتاب‌های متعددی دربارهٔ نظریهٔ نمایش گروه‌ها موجود است، خواننده را به یکی از قدیمی‌ترین و جامع‌ترین آن‌ها [۵] ارجاع می‌دهیم. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته باشد، یعنی مجموعه‌ای از اشیاء و ریخت بین آن‌ها که در شرایط معینی صدق می‌کند. برای شیء X از $\mathcal{C}$ منظور ما از $\mathbb{A}ut(X)$ مجموعهٔ تمام یک‌ریختی‌ها از X به X است که با عمل ترکیب توابع تشکیل گروه می‌دهد.

تعریف ۱.۲. یک نمایش برای گروه G در $\mathcal{C}$ عبارت است از هم‌ریختی $\rho : G \longrightarrow \mathbb{A}ut(X)$ که در آن X شیئی از $\mathcal{C}$ است.

اگر رستهٔ $\mathcal{C}$ را رستهٔ Set، که اشیاء آن مجموعه و ریخت‌های موجود در آن توابع بین مجموعه‌ها است، درنظر بگیریم دراین‌صورت ρ را یک نمایش جایگشتی برای G می‌نامیم؛ با این کار گروه G توسط هم‌ریختی به داخل گروه جایگشتی برده شده است. اگر $\mathcal{C}$ رستهٔ Vect باشد، که اشیاء آن فضاهای برداری روی میدان F و ریخت‌های آن تبدیلات خطی روی فضاهای برداری است، آن‌وقت

ρ را نمایش G توسط تبدیلات خطی می‌نامیم. اگر $\mathcal{C}$ رستهٔ vect باشد، که اشیاء آن فضاهای برداری با بُعد متناهی و ریخت‌های آن تبدیلات خطی بین فضاهای برداری (یعنی ماتریس‌ها با درایه‌هایی در میدان F) باشد، آن‌وقت ρ نمایش ماتریسی گروه G نامیده می‌شود. همان‌طورکه گفتیم در اینجا منظور ما از گروه، گروه متناهی است و منظور از نمایش گروه، نمایش ماتریسی آن است. بنابراین، اگر V فضای برداری با بُعد n روی میدان F فرض شود آنگاه $\mathbb{A}ut(V) = GL(V,F)$ گروه ماتریس‌های وارون‌پذیر از مرتبهٔ $n \times n$ با درایه‌هایی در F است.

فرض کنید V یک فضای برداری از بُعد n روی میدان F باشد و

$$\rho : G \longrightarrow GL(V,F)$$

یک نمایش برای G باشد در این‌صورت n را درجهٔ آن نمایش می‌نامیم. می‌توان به V ساختار مدولی روی حلقهٔ گروهی FG داد. چون عناصر FG قابل نمایش به‌صورت $\sum\limits_{g\in G} a_g g$ هستند پس برای عضو $g \in G$ و هر $v \in V$ می‌توان تعریف کرد $gv = T(g)v$. به‌این‌ترتیب می‌توان دید که V یک FGـ‌مدول چپ است. برعکس، اگر V یک FGـ‌مدول چپ باشد می‌توان با استفاده از آن یک نمایش برای گروه G ساخت، که نمایش تأمین‌شده توسط V نامیده می‌شود. بنابراین همان‌گونه‌که نوتر بیان کرده است می‌توان ساختار FGـ‌مدول‌ها را مطالعه کرد. دراین‌حالت V را فضای نمایش تأمین‌کنندهٔ ρ می‌نامیم. اگر G گروه آبلی نباشد، FG حلقهٔ ناجابه‌جایی است و بنابراین V مدولی روی حلقهٔ ناجابه‌جایی است. بدین‌ترتیب می‌توان مفاهیمی نظیر تحویل‌ناپذیری یا کاملاً تحویل‌ناپذیری نمایش را برای مدول‌ها تعریف کرد.

تعریف ۲.۲. یک FGـ‌مدول V را ساده (تحویل‌ناپذیر) می‌نامیم هرگاه $V \neq ۰$ و ۰ و V تنها FGـ‌زیرمدول‌های V باشند، درغیراین‌صورت V را تحویل‌پذیر می‌نامیم. نمایش تأمین‌شدهٔ ρ توسط V را تحویل‌ناپذیر یا تحویل‌پذیر می‌نامیم هرگاه V آن خاصیت را داشته باشد. FGـ‌مدول V را نیم‌ساده یا کاملاً تحویل‌پذیر می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر FGـ‌زیرمدول U از V، FGـ‌زیر مدول W وجود داشته باشد به‌طوری‌که $V = U \oplus W$.

از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر V نیم‌ساده باشد آنگاه $V = \bigoplus \sum\limits_{i=۱}^{k} V_i$ که در آن V_iها FGـ‌مدول‌های ساده‌اند.

قضیه ۳.۲ (ماشکه[9]). \اگر $\mathrm{char}F \nmid |G|$ \آنگاه جبر گروهی FG نیم‌ساده \است.

---
[9] H. Maschke

اثبات قضیه بالا را می‌توان در کتاب‌های نظریهٔ نمایش گروه‌ها، مثلاً [۵]، یافت.

مثال ۴.۲. فرض کنید p عددی اول باشد و گروه دوری $G = \langle a \mid a^p = 1 \rangle$ را درنظر بگیرید. تعریف می‌کنیم $F = \mathbb{Z}_p$. فرض کنید V فضای برداری دوبُعدی روی F با پایهٔ $\{v_1, v_2\}$ است. نگاشت $\rho : G \longrightarrow GL(V, F)$ با ضابطهٔ $\rho(a^i)v_1 = v_1$ و $\rho(a^i)v_2 = iv_1 + v_2$ یک هم‌ریختی، و درنتیجه نمایشی برای G است. روشن است که $U = \langle v_1 \rangle$ یک FG–زیرمدول V است ولی FG–زیرمدول W از V وجود ندارد به‌طوری‌که $V = U \oplus W$.

بنابراین درحالتی‌که $\mathrm{char}F \mid |G|$، جبر گروهی FG الزاماً نیم‌ساده نیست و در این حالت مسیر قضیه‌های نظریهٔ نمایش گروه‌های متناهی تغییر می‌کند. درحالتی‌که $\mathrm{char}F \mid |G|$ نمایش ρ را پیمانه‌ای می‌نامیم و در این حالت نظریهٔ نمایش را نظریهٔ نمایش پیمانه‌ای گروه G می‌نامیم. اما در حالتی که $\mathrm{char}F \nmid |G|$ نمایش ρ را یک نمایش معمولی برای G می‌نامیم و نظریهٔ نمایش را نظریهٔ نمایش معمولی می‌نامیم. در این مقاله به نمایش معمولی گروه G می‌پردازیم و برای اینکه خواص مهم نمایش در اختیار ما باشد فرض می‌کنیم $F = \mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط است.

یکی از نتایج مهم قضیهٔ ماشکه چنین است.

قضیه ۵.۲. فرض کنید $\mathrm{char}F \nmid |G|$، دراین‌صورت

(۱) اگر $\rho : G \longrightarrow GL(V, F)$ نمایشی ماتریسی برای G باشد، آنگاه ماتریس وارون‌پذیر P وجود دارد به‌طوری‌که

$$P^{-1}\rho(g)P = \mathrm{diag}(D_1(g), \ldots, D_k(g)) \qquad (g \in G)$$

که در آن D_iها نمایش ماتریسی وارون‌پذیر برای G هستند.

(۲) اگر G گروهی آبلی و F به‌طور جبری بسته باشد (مثلاً وقتی $F = \mathbb{C}$)، آنگاه

$$P^{-1}\rho(g)P = \mathrm{diag}(\lambda_1(g), \ldots, \lambda_k(g))$$

که در آن $\lambda_i \in \mathrm{Hom}(G, F^{\times})$.

لم ۶.۲ (شور). فرض کنید V و W هردو $\mathbb{C}G$–مدول‌های تحویل‌ناپذیرند، در این صورت

(۱) اگر $\rho\colon V \longrightarrow W$ یک $\mathbb{C}G$–هم‌ریختی ناصفر باشد، آنگاه ρ یک $\mathbb{C}G$–یک‌ریختی است.

(۲) اگر $\rho\colon V \longrightarrow V$ یک $\mathbb{C}G$-یک‌ریختی باشد، آنگاه ρ مضرب اسکالری یک‌ریختی همانی است.

یکی از نتایج مهم لم شور اطلاعاتی است که در مورد نمایش‌های گروه آبلی متناهی در اختیار می‌گذارد. اگر G یک گروه آبلی متناهی باشد و V یک $\mathbb{C}G$-مدول تحویل‌ناپذیر، آنگاه برای $x \in G$ و هر $g \in G$ داریم $xgv = gxv$. بنابراین درون‌ریختی $V \longrightarrow V$ با ضابطهٔ $v \longmapsto xv$ یک $\mathbb{C}G$- هم‌ریختی است. بنابر لم شور این درون‌ریختی برابر مضرب اسکالری هم‌ریختی همانی 1_V است، و بنابراین به‌ازای تمامی $v \in V$ داریم $xv = \lambda_x v$. به‌این‌ترتیب ثابت می‌شود که هر زیرفضای V یک $\mathbb{C}G$- مدول است، و چون V تحویل‌ناپذیر فرض شده است، نتیجه می‌گیریم $\dim V = 1$، یعنی هر نمایش تحویل‌ناپذیر برای گروه آبلی از درجهٔ یک است.

قضیه ۷.۲. گیریم G گروهی متناهی با hتا ردهٔ تزویج $K_1, \dots, K_h$ باشد و $\overline{K_i} = \sum\limits_{g\in K_i} g$.
دراین‌صورت

(۱) $\mathbb{C}G \cong \bigoplus \sum\limits_{i=1}^{h} \mathrm{Mat}_{n_i}$ که در آن Mat_{n_i} حلقهٔ ماتریس‌های $n_i \times n_i$ روی $\mathbb{C}$ است.

(۲) $\{\overline{K}_1, \overline{K}_2, \dots, \overline{K}_h\}$ تشکیل پایه‌ای برای فضای برداری $Z(\mathbb{C}G)$ (مرکز جبر گروهی) می‌دهد.

(۳) تعداد نمایش‌های تحویل‌ناپذیر نایکریخت روی $\mathbb{C}$ با تعداد رده‌های تزویج G برابر است.

اگر بُعد فضاهای برداری در دو طرف رابطهٔ موجود در قسمت (۱) از قضیهٔ بالا را حساب کنیم به دست می‌آوریم

$$|G| = \sum_{i=1}^{h} n_i^2.$$

اگر G گروه آبلی فرض شود آنگاه G دارای $|G|$ ردهٔ تزویج است، و از برابری بالا نتیجه می‌گیریم که برای هر $1 \le i \le h$ داریم $n_i = 1$. پس هر نمایش تحویل‌ناپذیر برای گروه آبلی از درجهٔ یک است.

۳ سرشت

اگر ρ نمایشی از درجهٔ n برای گروه G روی میدان F باشد آنگاه به هر عضو g از گروه G ماتریسی $n \times n$ با درایه‌هایی در F وابسته می‌شود، یعنی هر عضو $g \in G$ با n^2 عضو از F متناظر می‌شود.

اما می‌توان تابعی از G به F تعریف کرد که به هر عضو از G فقط یک عضو از F را متناظر کند که حاوی اطلاعات مهمی از G باشد، چنین تابعی سرشت[۱۰] نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۳. فرض کنید G گروه و F یک میدان باشد.

(۱) تابع $f : G \longrightarrow F$ یک تابع رده‌ای نامیده می‌شود هرگاه f روی رده‌های تزویج ثابت باشد. مجموعهٔ تمام توابع رده‌ای از G به F را با $Cf(G, F)$ نمایش می‌دهیم که به‌روشنی یک فضای برداری روی F است.

(۲) اگر $\rho : G \longrightarrow GL(V, F)$ نمایشی برای G باشد آنگاه تابع $\chi : G \longrightarrow F$ با ضابطهٔ $\chi(g) = \mathrm{tr}\rho(g)$ یک سرشت تأمین‌شده توسط نمایش ρ نامیده می‌شود و $\chi(1) = \mathrm{tr}\rho(1) = \dim V$ درجهٔ χ نامیده می‌شود. روشن است که χ روی رده‌های تزویج ثابت است و بنابراین یک تابع رده‌ای است.

سرشت χ را تحویل‌ناپذیر نامیم هرگاه نمایش تأمین‌کنندهٔ آن تحویل‌ناپذیر باشد. سرشت χ را یک سرشت صادق نامیم هرگاه نمایش تأمین‌کنندهٔ آن، ρ، تابعی صادق (یک‌به‌یک) باشد؛ در حالت $F = \mathbb{C}$ تعداد سرشت‌های تحویل‌ناپذیرِ G مساوی تعداد نمایش‌های تحویل‌ناپذیر آن است. تابع $\chi : G \longrightarrow F$ با ضابطهٔ $\chi(g) = 1$ (برای هر $g \in G$) یک سرشت برای G است که آن را سرشت بدیهی می‌نامیم. $\chi(g)$ عددی مختلط است (حتی می‌توان دید که عدد صحیح جبری است).

فرض کنید K_1، …، K_h رده‌های تزویج G باشد و $K_1 = \{1\}$. همچنین g_1، …، g_h را به‌ترتیب نماینده‌های این رده‌ها در نظر بگیرید. تعداد سرشت‌های تحویل‌ناپذیرِ G مساوی با h است که آن‌ها را $\chi_1 = 1$، …، χ_h می‌نامیم.

تعریف ۲.۳. ماتریس از مرتبهٔ $h \times h$ را که درایهٔ (i, j)اُم آن برابر $\chi_i(g_j)$ است جدول سرشت G می‌نامیم.

جدول سرشت G در جدول ۱ آمده است. در سطر اول این جدول مقدار $|C_G(g_j)|$ که مرتبهٔ مرکزساز عنصر g_i است نوشته می‌شود؛ اندازهٔ رده‌های تزویج g_j برابر است با $\frac{|G|}{|C_G(g_j)|}$. این جدول حاوی اطلاعات مهمی دربارهٔ گروه G است.

قضیه ۳.۳ (روابط تعامد). تعامد سطری و ستونی جدول سرشت چنین است:

---
[10] character

(۱) تعامد سطری:

$$\sum_{k=1}^{h}\frac{\chi_i(g_k)\overline{\chi_j(g_k)}}{|C_G(g_k)|}=\delta_{ij}$$

(۲) تعامد ستونی:

$$\sum_{i=1}^{h}\chi_i(g_j)\overline{\chi_i(g_k)}=\delta_{jk}|C_G(g_j)|$$

چون مقدار هر سرشت روی رده‌های تزویج ثابت است پس تعامد سطری را می‌توان به‌صورت

$$\sum_{k=1}^{h}\frac{\chi_i(g_k)\overline{\chi_j(g_k)}}{|C_G(g_j)|}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & \text{درغیراین‌صورت}\end{cases}$$

و تعامد ستونی را با استفاده از جدول ۱ به‌صورت زیر خلاصه کرد

$$\sum_{i=1}^{h}\chi_i(g_j)\overline{\chi_i(g_k)}=\begin{cases}|C_G(g_j)| & j=k\\ 0 & \text{درغیراین‌صورت}\end{cases}$$

از جملهٔ نتایج تعامد سطری این است که $\sum\chi_i(1)^2=|G|$، یعنی مجموع مربعات درجهٔ سرشت‌ها مساوی مرتبهٔ گروه G است.

مجموعهٔ سرشت‌های گروه G را با $\mathrm{char}(G)$ و مجموعهٔ سرشت‌های تحویل‌ناپذیر آن را با $\mathrm{Irr}(G)$ نمایش می‌دهیم. حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع دو سرشت χ و φ از G را می‌توان به‌صورت

$$(\chi+\varphi)(g)=\chi(g)+\varphi(g),\quad (\chi\varphi)(g)=\chi(g)\varphi(g)\qquad (g\in G)$$

جدول ۱. جدول سرشت G

	$\|C_G(g_1)\|$ g_1	$\|C_G(g_2)\|$ g_2	$\cdots$	$\|C_G(g_j)\|$ g_j	$\cdots$	$\|C_G(g_h)\|$ g_h
χ_1	$\chi_1(g_1)$	$\chi_1(g_2)$	$\cdots$	$\chi_1(g_j)$	$\cdots$	$\chi_1(g_h)$
χ_2	$\chi_2(g_1)$	$\chi_2(g_2)$	$\cdots$	$\chi_2(g_j)$	$\cdots$	$\chi_2(g_h)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
χ_i	$\chi_i(g_1)$	$\chi_i(g_2)$	$\cdots$	$\chi_i(g_j)$	$\cdots$	$\chi_i(g_h)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
χ_h	$\chi_h(g_1)$	$\chi_h(g_2)$	$\cdots$	$\chi_h(g_j)$	$\cdots$	$\chi_h(g_h)$

تعریف کرد. با در نظر گرفتن نمایش تأمین‌کنندهٔ χ و φ و حاصل‌ضرب تانسوری آن‌ها می‌توان دید که $\chi\varphi$ نیز یک سرشت است و با در نظر گرفتن جمع مستقیم نمایش‌های تأمین‌کنندهٔ χ و φ دیده می‌شود که $\chi + \varphi$ نیز یک سرشت است. سرشت‌های $\chi^۲$ و ۲χ به‌طور مشابه تعریف می‌شوند. حاصل‌ضرب داخلی دو سرشت مختلط χ و φ به‌صورت

$$(\chi, \varphi) = \frac{۱}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\varphi(g)}$$

تعریف می‌شود. با استفاده از روابط تعامد سطری می‌توان دید که اگر χ و φ تحویل‌ناپذیر باشند آنگاه $\delta_{ij} = (\chi, \varphi)$، یعنی اگر $\chi = \varphi$ آنگاه $(\chi, \chi) = ۱$ و درغیراین‌صورت $(\chi, \varphi) = ۰$. بنابراین $\mathrm{Irr}(G)$ پایهٔ یکامتعامدی برای فضای برداری $Cf(G, \mathbb{C})$ است. درحالتی‌که سرشت χ به‌صورت $\sum_{i=۱}^{k} n_i\chi_i$ نوشته شود که در آن χ_iها تحویل‌ناپذیرند و $n_i \in \mathbb{N}$، آن‌وقت χ_i را یک مؤسس χ می‌نامیم. دراین‌حالت داریم $(\chi, \chi_i) = n_i$.

تعریف ۴.۳. فرض کنید G گروه و F میدان باشد. اگر FG را به‌عنوان یک FGـمدول چپ (راست) درنظر بگیریم، نمایش حاصل را نمایش منظم چپ (راست) G، یا به‌طور خلاصه، نمایش منظم G، و سرشت حاصل را سرشت منظم می‌نامیم.

اگر χ سرشت منظم G فرض شود به‌راحتی می‌توان دید که برای $g \in G$ مقدار $\chi(g)$ برابر است با تعداد عناصر G که توسط g ثابت نگه داشته می‌شود و این تعداد وقتی $g = ۱$ برابر است با $|G|$ و وقتی $g \neq ۱$ برابر با صفر است. پس داریم

$$\chi(g) = \begin{cases} |G| & g = ۱ \\ ۰ & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

به‌این‌رتیب، وقتی χ_i یک سرشت تحویل‌ناپذیر مختلط از G باشد،

$$(\chi, \chi_i) = \frac{۱}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\overline{\chi(g)} = \chi_i(۱).$$

درنتیجه $\chi = \sum_{i=۱}^{h}\chi_i(۱)\chi_i$. درواقع، هر سرشت تحویل‌ناپذیر یک مؤسس سرشت منظم است.

دیدیم که هر گروهی دارای سرشت بدیهی است که درجه‌اش یک است. هر سرشت از درجهٔ یک برای گروه G را یک سرشت خطی می‌نامیم. تعداد سرشت‌های خطی گروه G روی $\mathbb{C}$ از قضیهٔ زیر به دست می‌آید.

قضیه ۵.۳. تعداد سرشت‌های خطی گروه G برابر است با $|\frac{G}{G'}|$.

از قضیهٔ بالا معلوم می‌شود که اگر G گروهی آبلی باشد، $G' = 1$ و بنابراین سرشت‌های خطی G برابر $|G|$ است، یعنی همهٔ سرشت‌های G از درجهٔ یک‌اند. اگر χ یک سرشت خطی باشد آنگاه $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ و برای هر $g, h \in G$ داریم $\chi(gh) = \chi(g)\chi(h)$. دراین‌حالت، اگر به‌ازای xای در G داشته باشیم $\chi(x) = 0$ آن‌وقت

$$\chi(1) = \chi(xx^{-1}) = \chi(x)\chi(x^{-1}) = 0,$$

یعنی $\chi(1) = 0$ ، که از آن نتیجه می‌شود χ باید هم‌ریختی صفرباشد که تناقض است. بنابراین $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ و درنتیجه χ یک نمایش گروه آبلی G نیز است و این تنها حالتی است که سرشت و نمایش با هم برابرند.

حالا چند مطلبی را که از جدول سرشت یک گروه می‌توان به دست آورد شرح می‌دهیم. اگر ρ نمایش گروهی مانند G باشد که سرشت χ را تأمین می‌کند آنگاه ثابت می‌شود که $x \in \ker\rho$ اگر و تنها اگر $\chi(x) = \chi(1)$. در اینجا هستهٔ χ چنین تعریف می‌شود

$$\ker\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}.$$

روشن است که $\ker\chi$ یک زیرگروه نرمال از G است. اگر $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$ آنگاه می‌توان $N_i = \ker\chi_i$ را با مشاهدهٔ جدول سرشت معیّن کرد.

قضیه ۶.۳. هر زیرگروه نرمال G برابر اشتراکی از $N_i = \ker\chi_i$ها است که در آن $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$.

با استفاده از این قضیه و جست‌وجوی جدول سرشت G می‌توان تمام زیرگروه‌های نرمال G را به دست آورد.

فرض کنید K_1، ...، K_h رده‌های تزویج گروه G باشند. بنابر تعامد ستونی جدول سرشت داریم

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(g)\overline{\chi(g)} = |C_G(g)|.$$

اگر $x_i \in K_i$، با استفاده از فرمول معروفی در نظریهٔ گروه‌ها داریم

$$|K_i| = [G : C_G(x_i)] = \frac{|G|}{\sum\limits_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} |\chi(x_i)|^2}$$

و درنتیجه می‌توان با استفاده از جدول سرشت گروه اندازهٔ هر ردهٔ تزویج را محاسبه کرد. ویک نکتهٔ دیگر اینکه گروه G ساده است اگر و تنها اگر به‌ازای هر سرشت نابدیهی χ داشته باشیم $\ker\chi = ۱$. بنابراین ساده‌بودن G نیز با استفاده از جدول سرشت به دست می‌آید.

تعریف ۷.۳. فرض کنید χ سرشتی از گروه G باشد. مرکز χ را با نماد $Z(\chi)$ نمایش می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم

$$Z(\chi) = \{g \in G : |\chi(g)| = \chi(۱)\}.$$

مجموعهٔ $Z(\chi)$ زیرگروه نرمالی از G است و می‌توان آن را از روی جدول سرشت G به دست آورد. می‌توان ثابت کرد که مرکز G برابر اشتراکی از $Z(\chi)$ها است، یعنی

$$Z(G) = \bigcap\{Z(\chi) : \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}.$$

بنابراین $Z(G)$ نیز توسط جدول سرشت G قابل محاسبه است.

همچنین با استفاده از جدول سرشت می‌توان به این سؤال که آیا Gگروه پوچ‌توان است؟ جواب داد. این‌کار را می‌توان ابتدا با یافتن $Z(G)$ و سپس یافتن جدول سرشت $\frac{G}{Z(G)}$ انجام داد. با تکرار این کار مرکز $\frac{G}{Z(G)}$ را می‌یابیم و به‌این‌ترتیب دنباله‌ای از زیرگروه‌های G را می‌یابیم که تشکیل سری مرکزی بالایی G می‌دهد. در آخر توجه می‌کنیم که G پوچ‌توان است اگر و تنها اگر این سری به G ختم گردد. لازم است بدانیم که اگر N زیرگروه نرمالی از G باشد، آنگاه سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه $\frac{G}{N}$ همان سرشت‌های تحویل‌ناپذیر Gاند که N در هستهٔ آن‌ها قرار دارد.

با استفاده از جدول سرشت می‌توان زیرگروه جابه‌جاگر G را نیز پیدا کرد، زیراکه داریم

$$G' = \bigcap\{\ker\chi : \chi \in \mathrm{Irr}(G), \chi(۱) = ۱\}.$$

و آخرین مطلب قابل ذکر از کاربردهای جدول سرشت تعیین حل‌پذیری گروه G است.

تعریف ۸.۳. گروه G متناهی حل‌پذیر است هرگاه دارای زنجیر

$$۱ = M_۰ \trianglelefteq M_۱ \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq M_n = G$$

از زیرگروه‌های نرمال G باشد به‌طوری‌که برای هر $n \leq ۱$ که توانی از عدد اول است داشته باشیم $[M_i : M_{i-۱}]$.

با توجه به اینکه مرتبهٔ هر M_i را با استفاده از جدول سرشت G می توان محاسبه کرد پس نتیجه می‌گیریم که جدول سرشت G می‌تواند حل‌پذیری G را نیز معیّن کند.

در آخر این بخش دو کاربرد دیگر از سرشت‌ها را می‌آوریم که جنبهٔ تاریخی دارند.

قضیه ۹.۳ (برنساید). فرض کنید $|G| = p^a q^b$، که در آن p و q اعداد اول‌اند، دراین‌صورت G گروهی حل‌پذیر است.

برای قضیهٔ بعد به تعریفی نیاز داریم.

تعریف ۱۰.۳. فرض کنید G گروه باشد و $1 \neq H \leq G$. همچنین، فرض کنید برای هر $g \in G \setminus H$ داشته باشیم $H \cap H^g = 1$. دراین‌صورت H یک مکمل فروبنیوس در G نامیده می‌شود. گروهی که دارای مکمل فروبنیوس باشد گروه فروبنیوس نام دارد.

قضیه ۱۱.۳. فرض کنید G یک گروه فروبنیوس با مکمل H باشد. دراین‌صورت زیرگروه $N \trianglelefteq G$ وجود دارد به‌طوری‌که $G = HN$ و $H \cap N = 1$.

دو قضیهٔ بالا در مراحل اولیهٔ ابداع نظریهٔ سرشت به اثبات رسیدند و در اثبات هر دوی آن‌ها از نظریهٔ سرشت استفاده شده است و تاکنون هیچ اثباتی بدون استفاده از این نظریه دیده نشده است.

۴ مولد گروه

در مورد گروه متناهی G یک سؤال مهم و اساسی این است که چگونه زیرمجموعه‌ای از G با کمترین عضو می‌توان یافت که G را تولید کند. سؤال مهم دیگر این است که عضو مفروضی از گروه آیا جابه‌جاگر است یا نه. در برخی موارد می‌توان با استفاده از نظریهٔ سرشت به این دو سؤال جواب داد. پیش از انجام این کار یک رابطهٔ مهم بین سرشت‌های گروه اثبات می‌کنیم.

فرض کنید G گروهی با رده‌های تزویج K_1، ...، K_h و سرشت‌های تحویل‌ناپذیر χ_1، ...، χ_h باشد. به‌ازای $1 \leq i \leq h$ تعریف می‌کنیم $\overline{K_i} = \sum\limits_{g \in K_i} g$. پیش از این دیدیم که $\overline{K_1}$، ...، $\overline{K_h}$ پایه‌ای برای فضای برداری $Z(FG)$ است، و بنابراین

$$\overline{K_i} \cdot \overline{K_j} = \sum_{k=1}^{h} c_{ijk} \overline{K_k};$$

اسکالرهای c_{ijk} را ثابت‌های جبری می‌نامند. اسکالرهای c_{ijk} دارای تعبیر خاصی هستند: تعداد

زوج‌های $(x,y)\in K_i\times K_j$ که برای $z\in K_k$ ثابتی داشته باشیم $xy=z$. با استفاده از نظریه سرشت می‌توان c_{ijk} را وقتی $F=\mathbb{C}$ محاسبه کرد [۹].

قضیه ۱.۴. در گروه G اسکالرهای c_{ijk} از دستور زیر به دست می‌آیند

$$c_{ijk}=\frac{|K_i||K_j|}{|G|}\sum_{\ell=۱}^{h}\frac{\chi_\ell(g_i)\chi_\ell(g_j)\overline{\chi_\ell(g_k)}}{\chi_\ell(۱)}.$$

قضیه ۲.۴. عنصر $g\in G$ جابه‌جاگر است اگر و تنها اگر $\sum_{i=۱}^{h}\frac{\overline{\chi_i(g)}}{\chi_i(۱)}\neq ۰$.

اکنون گروه متناوب $\mathbb{A}_۵$ را در نظر می‌گیریم. جدول سرشت این گروه در جدول ۲ آمده است؛ به [۹] مراجعه کنید.

جدول ۲. جدول سرشت گروه $\mathbb{A}_۵$

$\lvert C_{\mathbb{A}_۵}(x)\rvert$	۶۰	۴	۳	۵	۵
x	۱	(۱۲)(۳۴)	(۱۲۳)	(۱۲۳۴۵)	(۱۳۵۲۴)
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۴	۰	۱	-۱	-۱
$\chi_۳$	۵	۱	-۱	۰	۰
$\chi_۴$	۳	-۱	۰	$\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$	$\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$
$\chi_۵$	۳	-۱	۰	$\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$	$\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$

در سطر اول جدول ۲ اندازهٔ مرکزسازهای عناصر و در سطر دوم نمایندهٔ رده‌های تزویج نوشته شده است. روشن است که اندازهٔ رده‌های تزویج K حاوی x از تساوی $|K|=\frac{|G|}{|C_G(x)|}$ به دست می‌آید.

اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم که $\mathbb{A}_۵$ توسط دو عضو از مرتبه‌های ۲ و ۳، با حاصل‌ضرب از مرتبهٔ ۵، تولید می‌شود. در اینجا $K_۲$ را ردهٔ تزویج عناصر مرتبهٔ ۲ شامل (۱۲)(۳۴) و $K_۳$ را نمایندهٔ ردهٔ تزویج عناصر مرتبهٔ ۳ شامل (۱۲۳)، و $K_۵$ را نمایندهٔ ردهٔ تزویج عناصر مرتبهٔ ۵ شامل (۱۲۳۴۵) درنظر می‌گیریم. برای $z=(۱۲۳۴۵)$ با استفاده از قضیهٔ ۱.۴ داریم

$$\begin{aligned}|\{(x,y)\in K_۲\times K_۳\mid xy=z\}|&=\frac{۱۵\times ۲۰}{۶۰}\sum_{\ell=۱}^{۵}\frac{\chi_\ell((۱۲)(۳۴))\chi_\ell(۱۲۳)\overline{\chi_\ell(۱۲۳۴۵)}}{\chi_\ell(۱)}\\&=۵(۱+۰+۰+۰+۰)=۵\neq ۰\end{aligned}$$

و نتیجه می‌گیریم که در $\mathbb{A}_5$ عضو x از مرتبهٔ ۲ و y از مرتبهٔ ۳ وجود دارد به‌طوری‌که xy از مرتبهٔ ۵ باشد. مرتبهٔ زیرگروه $H = \langle x, y\rangle$ از $\mathbb{A}_5$ حداقل برابر ۳۰ است و چون مرتبهٔ $\mathbb{A}_5$ مساوی ۶۰ است و هیچ زیرگروهی از مرتبهٔ ۳۰ ندارد (زیرا $\mathbb{A}_5$ گروهی ساده است) پس $\mathbb{A}_5 = \langle x, y\rangle$. یعنی $\mathbb{A}_5$ یک (۲,۳,۵)ـ‌گروه است. به یاد بیاورید که در حالت کلی یک (۲,۳,۵)ـ‌گروه چنین تعریف می‌شود

$$G = \langle x, y : x^2 = y^3 = (xy)^5 = 1\rangle.$$

پس $\mathbb{A}_5$ دراصل تصویر هم‌ریخت چنین Gای است.

تعریف ۳.۴. گروه G را یک (m, n, ℓ)ـ‌گروه و یا یک گروه مثلثی می‌نامیم هرگاه G تصویر هم‌ریخت گروه با نمایش آزاد زیر باشد

$$G = \langle x, y : x^m = y^n = (xy)^\ell = 1\rangle.$$

یک ردهٔ مهم دیگر از (m, n, ℓ)ـ‌گروه‌ها $(2, 3, 7)$ـ‌گروه‌ها هستند که گروه‌های هورویتس[11] نامیده می‌شوند. این گروه‌ها به‌علّت کاربردشان در هندسهٔ ریمانی و هذلولوی از اهمیت ویژه‌ای برخور دارند و پژوهش دربارهٔ این گروه‌ها هنوز هم ادامه دارد. از جمله در [۱۵] ثابت شده است که گروه هیولا، که بزرگ‌ترین گروه سادهٔ پراکنده است، از نوع هورویتس است. برای دیدن تاریخچهٔ مختصری از پژوهش‌ها دربارهٔ گروه‌های هورویتس خواننده را به [۱۵] و منابع ذکر شده در آن ارجاع می‌دهیم.

کوچک‌ترین گروه هورویتس از نظر رتبه، گروه $\mathrm{PSL}_2(7)$ است. جدول سرشت این گروه در [۹] آمده است که آن را در جدول ۳ می‌آوریم.

جدول ۳. جدول سرشت گروه $\mathrm{PSL}_2(7)$

$\lvert C_{PSL_2(7)}(x)\rvert$	۱۶۸	۸	۴	۳	۷	۷
x	۱	۲	۴	۳	۷۱	۷۲
χ_1	۱	۱	۱	۱	۱	۱
χ_2	۶	۲	۰	۰	-1	-1
χ_3	۸	۰	۰	-1	۱	۱
χ_4	۷	-1	-1	۱	۰	۰
χ_5	۳	-1	۱	۰	$\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$
χ_6	۳	-1	۱	۰	$\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$	$\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$

[11] A. Hurwitz

در سطر اول جدول ۳ مرتبهٔ مرکزسازهای اعضای رده‌های تزویج نوشته شده است و در سطر دوم نیز نمایندهٔ هر ردهٔ تزویج به‌همراه مرتبهٔ آن آمده است. دیده می‌شود که $\mathrm{PSL}_۲(۷)$ دارای یک ردهٔ تزویج از عناصر مرتبهٔ ۲، با نام $K_۲$، و یک ردهٔ تزویج از عناصر با مرتبهٔ ۳، با نام $K_۳$، است. یکی از رده‌های تزویج عناصر با مرتبهٔ ۷، یعنی ۷۱، را با $K_۷$ نمایش می‌دهیم. با استفاده از قضیهٔ ۱.۴ برای $z \in K_۷$ داریم

$$\begin{aligned}|\{(x,y) \in K_۲ \times K_۳ \mid xy = z\}| &= \frac{۲۱ \times ۵۶}{۱۶۸}\sum_{\ell=۱}^{۶}\frac{\chi_\ell(x)\chi_\ell(y)\chi_\ell(z)}{\chi_\ell(۱)} \\ &= ۷(۱ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰ + ۰) = ۷ \neq ۰.\end{aligned}$$

پس عنصر x از مرتبهٔ ۲ و y از مرتبهٔ ۳ در $\mathrm{PSL}_۲(۷)$ وجود دارند به‌طوری‌که xy از مرتبهٔ ۷ باشد. تعریف کنید $H = \langle x, y\rangle$ که زیرگروهی از $\mathrm{PSL}_۲(۷)$ و مرتبهٔ آن مضربی از $۴۲ = ۷ \times ۳ \times ۲$ است. داریم $[\mathrm{PSL}_۲(۷) : H] \leq ۴$ که با توجه به ساده و ناآبلی بودن $\mathrm{PSL}_۲(۷)$ نتیجه می‌شود که $H = \mathrm{PSL}_۲(۷)$ گروهی $(۲,۳,۷)$ـ‌مثلثی است.

در مورد اینکه چه وقت عضوی در گروه جابه‌جاگر است نیز چند پژوهش انجام شده است. ابتدا یک تعریف می‌آوریم.

تعریف ۴.۴. فرض کنید $x, y \in G$. عضو $[x,y] = x^{-۱}y^{-۱}xy$ را یک جابه‌جاگر و زیرگروه تولیدشده توسط همهٔ $[x,y]$ها را زیرگروه جابه‌جاگر (مشتق) می‌نامند و آن را با G' نمایش می‌دهند.

در سال ۱۹۵۱، اوره در [۱۳] حدسیه‌ای مطرح کرد به این مضمون که هر عضو از یک گروه سادهٔ ناآبلی، جابه‌جاگر است. این حدسیه در [۱۱] با استفاده از نظریهٔ سرشت، خصوصاً با استفاده از رابطهٔ گفته‌شده در قضیهٔ ۲.۴ و قضیهٔ رده‌بندی گروه‌های ساده، ثابت شد. اما پژوهش‌ها متوجه گروه‌های غیرساده شد و خصوصاً مسئلهٔ جابه‌جاگر بودن یک عضو مفرض. برای مثال، گروه $\mathrm{GL}_۲(۳)$ از مرتبهٔ ۴۸ را در نظر بگیرید. جدول سرشت این گروه را از [۹] در جدول ۴ آورده‌ایم.

حال با محاسبهٔ عبارت گفته‌شده در قضیهٔ ۲.۴ برای هر عضو G می‌بینیم که این عبارت برای عضو با مرتبهٔ ۲ با مرکزساز ۴ و دو عضو آخر در جدول ۴ برابر صفر است، و درنتیجه این اعضا نمی‌توانند جابه‌جاگر باشند، ولی سایر اعضا جابه‌جاگرند.

جدول ۴. جدول سرشت گروه $\mathrm{GL}_2(3)$

$C_{GL_2(3)}(x)$	۴۸	۴۸	۴	۶	۸	۶	۸	۸
x	۱	۲	۲	۳	۴	۶	8_1	8_1
χ_1	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
χ_2	۱	۱	-1	۱	۱	۱	-1	-1
χ_3	۲	۲	۰	-1	۲	-1	۰	۰
χ_4	۳	۳	۱	۰	-1	۰	-1	-1
χ_5	۳	۳	-1	۰	-1	۰	۱	۱
χ_6	۲	-2	۰	-1	۰	۱	$i\sqrt{2}$	$-i\sqrt{2}$
χ_7	۲	-2	۰	-1	۰	۱	$-i\sqrt{2}$	$i\sqrt{2}$
χ_8	۴	-4	۰	۱	۰	-1	۰	۰

۵ نمایش و سرشت جایگشتی

عمل گروه بر یک مجموعه یک ابزار مفید برای یافتن یک سرشت تحویل‌ناپذیر از گروه است و یکی از کاربردهای مهم از سرشت جایگشتی یافتن تعداد گراف‌های بدون برچسب است. ابتدا یک تعریف.

تعریف ۱.۵. فرض کنید G یک گروه است. مجموعهٔ متناهی Ω یک Gـمجموعه نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $\omega \in \Omega$ و $g \in G$ بتوان عنصر $\omega g \in \Omega$ را طوری نسبت داد که شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) برای هر $\omega \in \Omega$ و $g_1, g_2 \in G$ داشته باشیم $(\omega g_1)g_2 = \omega(g_1 g_2)$؛

(۲) برای هر $\omega \in \Omega$، $\omega 1 = \omega$.

وقتی Ω یک Gـمجموعه باشد، $\{\omega g \mid g \in G\}$ را یک Gـمدار با نمایندهٔ ω می‌نامیم و تجزیهٔ یکتایی به‌صورت $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$ برای Ω به Gـمدارهای مجزا وجود دارد. درحالتی‌که فقط یک مدار وجود داشته باشد، یعنی $n = 1$، می‌گوییم G روی Ω به‌صورت انتقالی عمل می‌کند.

تعریف ۲.۵. فرض کنید $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ یک Gـمجموعه و F میدانی دلخواه باشد. فضای برداری $V(\Omega) = \mathrm{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ با تعریف $gv_i = v_{(i)g^{-1}}$ یک FGـمدول چپ است که آن را نمایش جایگشتی G روی Ω می‌نامیم. سرشت این نمایش را با χ نمایش می‌دهیم

و تعریف می‌کنیم

$$\chi(g) = |\{\omega \in \Omega \ : \omega g = \omega\}|;$$

یعنی سرشت برابر است با تعداد عناصر Ω که تحت g ثابت نگه داشته می‌شوند.

قضیهٔ زیر با استفاده از خواص گروه جایگشتی به‌راحتی قابل اثبات است. در این قضیه فرض می‌کنیم که $F = \mathbb{C}$.

قضیه ۳.۵. گیریم G یک گروه جایگشتی روی Ω و χ سرشت جایگشتی این عمل باشد. دراین‌صورت

(۱) اگر t تعداد مدارهای G باشد آنگاه

$$t = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g).$$

(۲) اگر Ω_1، ...، Ω_t مدارهای G روی Ω باشند و $\Omega = \bigcup_{i=1}^{t}\Omega_i$ آنگاه $\chi = \sum_{i=1}^{t}\chi_i$ که در آن χ_i (به‌ازای $1 \leq i \leq t$) سرشت جایگشتی حاصل از عمل G بر Ω_i است.

(۳) اگر Ω یک G-مجموعه انتقالی و برای $\omega \in \Omega$ تعداد مدارهای G_ω روی Ω مساوی r باشد آنگاه $r = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)^2$.

از قضیهٔ ۳.۵ چنین بر می‌آید که اگر عمل G بر Ω انتقالی باشد دراین‌صورت $t = 1$، و درنتیجه $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = 1$. اما حاصل‌ضرب داخلی χ و سرشت همانی برابر است با

$$(\chi, 1) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g),$$

و درنتیجه $(\chi, 1) = 1$. پس سرشت همانی یک مؤسس سرشت جایگشتی است. اگر تعداد مدارهای G_ω روی Ω مساوی ۲ باشد، یعنی $r = 2$، آن‌وقت

$$2 = r = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)^2 = (\chi, \chi).$$

اما χ سرشت همانی ۱ را به‌عنوان مؤسس در بردارد پس نتیجه می‌گیریم که $\chi = 1 + \varphi$؛ در اینجا φ یک سرشت تحویل‌ناپذیر از G است.

به‌عنوان کاربردی از سرشت جایگشتی، فرمولی برای تعداد گراف‌های سادهٔ بدون برچسب با n رأس پیدا می‌کنیم. برای مثال، اگر $n = 2$ آنگاه گراف‌های با برچسب عبارت‌اند از:

یعنی چهار گراف برچسب‌دار با ۲ رأس وجود دارد. اما اگر گراف‌های بدون برچسب را در نظر بگیریم فقط تا ۲ گراف وجود دارد:

پس می‌توان ثابت کرد که تعداد گراف‌های برچسب‌دار روی n حرف برابر است با $۲^{\binom{n}{۲}}$. فرض کنید Δ مجموعهٔ n رأس گراف باشد. هر گراف با مجموعهٔ یال‌هایش Σ کاملاً معین می‌شود؛ یال یک زیرمجموعهٔ دو عضوی از Δ است. چون Δ دارای $\binom{n}{۲}$ زیرمجموعهٔ دو عضوی است پس $۲^{\binom{n}{۲}}$ انتخاب برای Σ وجود دارد و این عدد برابر تعداد گراف‌های برچسب‌دار روی n رأس است.

اکنون می‌خواهیم تعداد گراف‌های سادهٔ بدون برچسب با n رأس را پیدا کنیم. فرض کنید $\Delta^{\{۲\}}$ مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های ۲ عضوی در Δ باشد و $\Gamma = \{۰, ۱\}$. تابع $\phi : \Delta^{\{۲\}} \longrightarrow \Gamma$ را چنین تعریف می‌کنیم: اگر $\{a, b\} \subseteq \Delta$ و a به b متصل باشد $\phi(\{a, b\}) = ۱$، درغیراین‌صورت $\phi(\{a, b\}) = ۰$. مجموعهٔ چنین توابعی را با $\mathrm{Func}(\Delta^{\{۲\}}, \Gamma)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین مجموعهٔ گراف‌های بدون برچسب روی رئوس Δ با مجموعهٔ $\mathrm{Func}(\Delta^{\{۲\}}, \Gamma)$ یکی خواهد بود. اینک گروه متقارن روی Δ، یعنی $\mathbb{S}_\Delta$، روی $\Delta^{\{۲\}}$ و به تبع آن روی $\mathrm{Func}(\Delta^{\{۲\}}, \Gamma)$ عمل می‌کند. دو گراف روی Δ را گراف بدون برچسب متمایز در نظر می‌گیریم اگر توابع متناظر آن‌ها در مدار یکسانی از G قرار داشته باشند. برای ادامهٔ کار به قضیهٔ کلی زیر نیاز داریم که از قسمت اول قضیهٔ ۳.۵ نتیجه می‌شود.

قضیه ۴.۵. فرض کنید Δ و Γ مجموعه‌های ناتهی و G گروه متناهی باشد که روی Δ عمل می‌کند. برای $x \in G$ به‌عنوان جایگشتی از Δ فرض کنید تعداد دورها در تجزیهٔ دوری x مساوی $c(x)$ باشد. دراین‌صورت، تعداد مدارهای G در عمل روی $\mathrm{Func}(\Delta, \Gamma)$ برابر است با

$$\frac{۱}{|G|}\sum_{x\in G}|\Gamma|^{c(x)}.$$

به یاد داشته باشید که $\mathrm{Func}(\Delta, \Gamma)$ مجموعهٔ توابع از Δ به Γ است و G روی $\mathrm{Func}(\Delta, \Gamma)$ با قانون زیر عمل می‌کند:

$$x\phi(\alpha) = \phi(x\alpha) \qquad (x \in G, \alpha \in \Delta, \phi \in \mathrm{Func}(\Delta, \Gamma)).$$

بنابراین $\mathrm{Func}(\Delta, \Gamma)$ نیز یک G-مجموعه است. با این توضیحات، تعداد گراف‌های بدون برچسب روی n حرف را می‌توان از قضیهٔ زیر به دست آورد.

قضیه ۵.۵. تعداد گراف‌های بدون برچسب روی n حرف برابر است با $\frac{۱}{n!}\sum\limits_{x\in\mathbb{S}_\Delta} ۲^{c(x)}$.

۶ ابرسرشت

نظریهٔ ابرسرشت[12] گروه‌های متناهی در [۶] مطرح شد. این نظریه تعمیم نظریهٔ سرشت‌های تحویل‌ناپذیر معمولی است. در نظریهٔ ابرسرشت، سرشت‌ها نقش سرشت‌های تحویل‌ناپذیر را ایفا می‌کنند و نقش رده‌های تزویج به اجتماع رده‌های تزویج داده می‌شود.

تعریف ۱.۶. زوج $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ یک نظریهٔ ابرسرشت برای گروه G نامیده می‌شود اگر
(۱) $\mathcal{X}$ یک افراز $\mathrm{Irr}(G)$ باشد؛
(۲) $\mathcal{K}$ یک افراز G باشد؛
(۳) $|\mathcal{X}| = |\mathcal{K}|$؛
(۴) به‌ازای هر $X \in \mathcal{X}$ سرشت χ_X وجود داشته باشد به‌طوری‌که تمام مؤسس‌های آن در X واقع باشند و روی هر $K \in \mathcal{K}$ عددی ثابت باشد.

در تعریف بالا، χ_X یک ابرسرشت و اعضای $\mathcal{K}$ ابررده نامیده می‌شوند. مجموعهٔ نظیر ابرسرشت‌های گروه G را با $\sup(G)$ نمایش می‌دهیم. برای $X \subseteq \mathrm{Irr}(G)$ تعریف می‌کنیم $\sigma_X = \sum\limits_{\psi\in X}\psi(۱)\psi$. در [۶] ثابت شده است که $\{۱\} \in \mathcal{K}$، $\{۱_G\} \in \mathcal{X}$ که در آن ۱_G سرشت بدیهی G است، و برای هر $X \in \mathcal{X}$ ابرسرشت χ_X باید مضرب اسکالری σ_X باشد؛ برای سادگی کار می‌نویسیم $\chi_X = \sigma_X$.

دو نظریهٔ ابرسرشت برای گروه G، موسوم به نظریه‌های بدیهی، وجود دارد:

$$M(G) = (\{۱_G\}, \{\mathrm{Irr}(G) - \{۱_G\}\}; \{۱\}, \{G - \{۱\}\}), \qquad (۱)$$

$$m(G) = (\bigcup_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \{\{\chi\}\}; \bigcup_{x\in G}\{\{x\}\}) \qquad (۲)$$

در (۲) ابرسرشت همان سرشت‌های تحویل‌ناپذیر معمولی و عناصر G ابررده‌اند و در (۱) ابرسرشت‌ها

[12] supercharacter

عبارت‌اند از ۱_G و $\rho - ۱_G$، که ρ سرشت منظم G است، و ابرردها عبارت‌اند از $\{۱\}$ و $G - \{۱\}$. نظریهٔ (۱) بزرگ‌ترین و (۲) کوچک‌ترین نظریهٔ ابرسرشت Gاند به مفهومی که در ادامه تعریف می‌شود. مجموعهٔ ابرسرشت‌ها (ابرردها) در نظریهٔ ابرسرشت‌های G تشکیل شبکه می‌دهد. درحالت‌کلی، اگر S مجموعه‌ای باشد آنگاه مجموعهٔ تمام افرازهای S را با $P(S)$ نمایش می‌دهیم که یک شبکه تحت رابطهٔ ترتیب جزئی $\leq$ است:

$$\mathcal{K} \leq \mathcal{L} \iff \text{هر قسمت از } \mathcal{K} \text{ زیرمجموعه‌ای از یک قسمت از } \mathcal{L} \text{ باشد.}$$

از طرفی $\sup(G)$ با رابطهٔ $\preceq$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب است:

$$(\mathcal{X}, \mathcal{K}) \preceq (\mathcal{Y}, \mathcal{L}) \iff \mathcal{X} \leq \mathcal{Y} \quad \text{یا} \quad \mathcal{K} \leq \mathcal{L}.$$

در اینجا دو مثال از نظریهٔ ابرسرشت $\mathbb{A}_۵$ و $\mathrm{PSL}_۲(۷)$ را می‌آوریم؛ جدول سرشت آن‌ها را قبلاً دیدیم. در جدول ۲ سرشت‌های تحویل‌ناپذیر $\mathbb{A}_۵$ داده شده است. می‌توان بررسی کرد که آنچه در زیر نوشته می‌شود یک نظریهٔ ابرسرشت برای $\mathbb{A}_۵$ است.

$$\mathcal{X} = \{\{\chi_۱\}, \{\chi_۲\}, \{\chi_۳\}, \{\chi_۴, \chi_۵\}\},$$
$$\mathcal{K} = \{\{۱\}, \{\mathrm{class}(۱۲)(۳۴)\}, \{\mathrm{class}(۱۲۳)\}, \{\mathrm{class}(۱۲۳۴۵), \mathrm{class}(۱۳۵۲۴)\}\}$$

در اینجا $\sigma = ۳\chi_۴ + ۳\chi_۵$ ابرسرشت متناظر است. در مورد $\mathrm{PSL}_۲(۷)$ با نگاهی به جدول ۳ داریم

$$\mathcal{X} = \{\{\chi_۱\}, \{\chi_۲\}, \{\chi_۳\}, \{\chi_۴\}, \{\chi_۵, \chi_۶\}\},$$
$$\mathcal{K} = \{\{۱\}, \{\mathrm{class}(۲)\}, \{\mathrm{class}(۴)\}, \{\mathrm{class}(۳)\}, \{\mathrm{class}(۷_۱), \mathrm{class}(۷_۲)\}\}$$

چند روش برای ساختن نظریهٔ ابرسرشت برای یک گروه وجود دارد که در اینجا به دوتا از آن‌ها اشاره می‌کنیم. فرض کنید $A \leq \mathbb{A}ut(G)$. می‌دانیم A روی $\mathrm{Irr}(G)$ و $\mathrm{Con}(G)$ (رده‌های تزویج گروه G) عمل می‌کند و تعداد مدارهای آن روی هردو مجموعه برابر است [۹]. سرشت جایگشتی حاصل از این اعمال برابرند و مدارهای عمل روی این مجموعه‌ها نظریهٔ ابرسرشت $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ را برای G می‌سازد که اعضای $\mathcal{X}$ مدارهای A روی $\mathrm{Irr}(G)$ و اعضای $\mathcal{K}$ مدارهای A روی G است. این نوع نظریهٔ ابرسرشت را خودریخت می‌نامیم. یک مثال از نظریهٔ ابرسرشت خودریخت مربوط به گروه دوری از مرتبهٔ p است (p عددی اول است).

روش دیگر برای ساختن نظریهٔ ابرسرشت گروه استفاده از خودریختی‌های میدان دایره‌بری است. فرض کنید $|G| = n$ و ξ ریشهٔ nاُم اولیه‌ای از ۱ باشد. می‌دانیم که مقادیر جدول سرشت G همگی در میدان دایره‌بری $\mathbb{Q}(\xi)$ قرار دارند. فرض کنید $A \leq \mathbb{A}ut(\mathbb{Q}(\xi))$، دراین‌صورت اگر $\sigma \in \mathbb{A}ut(\mathbb{Q}(\xi))$ داریم $\sigma(\xi) = \xi^m$ که در آن $(m,n) = ۱$. به‌سادگی می‌توان دید که همهٔ خودریختی‌های $\mathbb{Q}(\xi)$ به‌صورت بالا هستند و σ ردهٔ تزویج شامل g را به ردهٔ تزویج شامل g^m تبدیل می‌کند. اینک فرض کنید $\mathcal{X}$ مجموعهٔ تمام مدارهای A روی $\mathrm{Irr}(G)$ و $\mathcal{K}$ اجتماعی از مدارهای A روی $\mathrm{Con}(G)$ باشد، دراین‌صورت $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ یک نظریهٔ ابرسرشت برای G است.

فرض کنید $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ یک نظریهٔ ابرسرشت برای گروه G، $\mathcal{X} = \{X_۱, \ldots, X_k\}$ افرازی برای $\mathcal{X}$، و $\mathcal{K} = \{K_۱, \ldots, K_k\}$ افرازی برای $\mathcal{K}$ باشد. ابرسرشت‌های متناظر را با

$$\sigma_i = \sum_{\chi \in X_i} \chi(۱)\chi \qquad (۱ \leq i \leq k)$$

نمایش می‌دهیم. جدول ابرسرشت G متناظر با $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ در جدول ۵ آمده است.

جدول ۵. جدول ابرسرشت G

	$K_۱$	$K_۲$	$\ldots$	K_k
$\sigma_۱$	$\sigma_۱(K_۱)$	$\sigma_۱(K_۲)$	$\ldots$	$\sigma_۱(K_k)$
$\sigma_۲$	$\sigma_۲(K_۱)$	$\sigma_۲(K_۲)$	$\ldots$	$\sigma_۲(K_k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
σ_i	$\sigma_i(K_۱)$	$\sigma_i(K_۲)$	$\ldots$	$\sigma_i(K_k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
σ_k	$\sigma_k(K_۱)$	$\sigma_k(K_۲)$	$\ldots$	$\sigma_k(K_k)$

روابط تعامدی بین σ_iها برقرار است ازجمله

$$\frac{۱}{|G|}\sum_{l=۱}^{k}|K_l|\sigma_i(K_l)\overline{\sigma_j(K_l)} = \delta_{ij}\sum_{\chi \in X_i}\chi(۱)^۲.$$

در نظریهٔ اعداد مجموع‌هایی نظیر مجموع رامانوجان[۱۳]، مجموع گاوس، و مجموع هایلبرون[۱۴] وجود دارند که از اهمیت خاصی برخوردارند. اکنون شرح می‌دهیم که چگونه این مجموع‌ها نوعی ابرسرشت‌اند.

[13] S. Ramanujan [14] H. Heilbronn

ابتدا به مجموع رامانوجان می‌پردازیم. این مجموع به‌صورت

$$C_n(x) = \sum_{\substack{j=۱ \\ (j,n)=۱}}^{n} e(\frac{jx}{n})$$

تعریف می‌شود که در آن $n \geq ۱$ و $e(x) = \exp(۲\pi ix)$. غیراز کاربردهای مهم این مجموع در نظریهٔ اعداد، شاید مهم‌ترین کاربرد آن در اثبات ویناگرادف[15] برای این قضیه باشد که هر عدد فرد به‌حد کافی بزرگ مساوی مجموع سه عدد اول است [۱۲]. در اینجا ثابت می‌کنیم که مجموع رامانوجان دراصل یک ابرسرشت است.

گروه جمعی $\mathbb{Z}_n$ را درنظر می‌گیریم. همان‌طورکه قبلاً توضیح دادیم هر زیرگروه $A \leq \mathbb{A}ut(G)$ یک نظریهٔ ابرسرشت $(\mathcal{X}_A, \mathcal{K}_A)$ برای G می‌سازد. به‌طور دقیق‌تر، گوییم A روی $\mathrm{Irr}(\mathbb{Z}_n)$ و همچنین $\mathrm{Con}(\mathbb{Z}_n)$ عمل می‌کند و درنتیجه بنابر لم براوئر [۹] مدارهای A روی $\mathrm{Irr}(\mathbb{Z}_n)$ همان $\mathcal{X}_A$ است و همچنین مدارهایش روی $\mathbb{Z}_n$ عبارت‌اند از $\mathcal{K}_A$. فرض کنید $\alpha(n)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های n است و $d_۱$، $d_۲$، ...، $d_{\alpha(n)}$ تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت n باشند. می‌دانیم $\mathbb{A}ut(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n^\times$. گروه ضربی $\mathbb{Z}_n$ متشکل از $۱ \leq m < n$ است که در آن $(m,n) = ۱$.

چون $\mathbb{Z}_n$ گروه آبلی است، پس تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر آن، $\chi_۱$، $\chi_۲$، ...، χ_n، خطی‌اند و ضابطهٔ آن‌ها به‌صورت $\chi_a(x) = e(\frac{ax}{n})$ به‌ازای هر $۱ \leq a \leq n$ است. خودریختی‌های $\mathbb{Z}_n$ را با ψ_u نمایش می‌دهیم که در آن $u \in \mathbb{Z}_n^\times$ و به‌ازای هر $b \in \mathbb{Z}_n$، $\psi_u(b) = ub$. مشاهده می‌شود که عضو $u \in \mathbb{Z}_n^\times$ وجود دارد به‌طوری‌که $\psi_u(b) = c$ اگر و تنها اگر $(b,n) = (c,n) = ۱$. با توجه به تساوی $\chi_a \circ \psi_u = \chi_{au}$ دیده می‌شود که تحت عمل $\mathbb{A}ut(\mathbb{Z}_n)$ روی $\mathrm{Irr}(\mathbb{Z}_n)$ مدارهای X_i، $۱ \leq i \leq \alpha(n)$، به دست می‌آیند که در آن $X_i = \{\chi_a : (a,n) = \frac{n}{d_i}\}$ و اندازهٔ هریک از آن‌ها برابر $\varphi(d_i)$ است. اکنون می‌توان مقدار هر ابرسرشت را پیدا کرد:

$$\sigma_i(x) = \sum_{x \in X_i} \chi(x) = \sum_{\substack{j=۱ \\ (j,n)=n/d_i}}^{n} e(\frac{jx}{n}) = \sum_{\substack{k=۱ \\ (k,d_i)=۱}}^{d_i} e(\frac{kx}{d_i}) = c_{d_i}(x).$$

به‌این‌ترتیب، مجموع رامانوجان $c_{d_i}(x)$ یک ابرسرشت است. برای تکمیل بحث، مدارهای $\mathbb{A}ut(\mathbb{Z}_n)$ روی $\mathbb{Z}_n$ را می‌یابیم. این مدارها را K_i می‌نامیم و به‌ازای هر $۱ \leq i \leq \alpha(n)$ به‌صورت زیرند

$$K_i = \{a \in \mathbb{Z}_n : (a,n) = n/d_i\}.$$

[15] I. Vinogradov

اندازهٔ هریک از آن‌ها برابر با $\varphi(d_i)$ است.

اینک مجموع گاوسی را شرح می‌دهیم. گروه جمعی $\mathbb{Z}_p$ (p عدد اول فرد) را در نظر می‌گیریم. فرض کنید g مولدی برای $\mathbb{Z}_p$ باشد و تعریف کنید $\Gamma = \langle g^2 \rangle$ که زیرگروهی از $\mathbb{Z}_p^\times$ از مرتبهٔ $\frac{p-1}{2}$ است. عمل Γ روی G را ضرب از سمت چپ در نظر می‌گیریم که منجر به سه مدار (ابررده) $\{0\}$، Γ، و $g\Gamma$ می‌شود. اگر ابرسرشت‌ها را به‌ترتیب σ_1، σ_2، و σ_3 بنامیم جدول ۶ به دست می‌آید.

جدول ۶. جدول ابرسرشت $\mathbb{Z}_p$

	$\{0\}$	Γ	$g\Gamma$
σ_1	1	1	1
σ_2	$\frac{p-1}{2}$	η_0	η_1
σ_3	$\frac{p-1}{2}$	η_1	η_0

در این جدول $\eta_0 = \sum\limits_{h\in\Gamma} e(\frac{h}{p})$ و $\eta_1 = \sum\limits_{h\in\Gamma} e(\frac{gh}{p})$ که همان مجموع‌های معمولی گاوسی از درجهٔ دوند که به‌صورت ابرسرشت ظاهر شده‌اند. مجموع معمولی گاوسی از درجهٔ دو دارای نمایش دیگری به‌شکل $G(\chi,\psi) = \sum\limits_{a=1}^{p-1} (\frac{a}{p})\xi^a$ — با ضابطهٔ $\chi(a) = \xi^a$ که $\chi : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}$ است که در آن $a \in \mathbb{Z}_p$ و ξ یک ریشهٔ اولیهٔ pاُم ۱ در $\mathbb{C}$ است، که یک سرشت از گروه جمعی $\mathbb{Z}_p$ است. تابع $\psi : \mathbb{Z}_p^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطهٔ $\psi(a) = (\frac{a}{p})$، به‌ازای $a \in \mathbb{Z}_p$، یک سرشت از گروه ضربی $\mathbb{Z}_p^\times$ است. پس $G(\chi,\psi) = \sum\limits_{a=1}^{p-1} (\frac{a}{p})\xi^a$، که همان مجموع گاوسی از درجهٔ دو است که قبلاً به‌صورت ابرسرشت ظاهر شد.

از کاربردهای مجموع گاوسی یکی اثباتی برای قانون تقابل مربعی است که گاوس آن را در نوزده سالگی ثابت کرد. در [۲] نزدیک به سی اثبات شناخته‌شده از این قانون گردآوری شده است؛ برای نمونه [۱] را ببینید. جالب است بدانیم که اثباتی از این قانون، کاملاً مبتنی‌بر نظریهٔ سرشت‌ها، در [۱۰] آمده است و در آن از جدول سرشت گروه $\mathrm{PSL}_2(q)$ استفاده شده است.

در پایان، به مجموع هایلبرون می‌پردازیم. این مجموع به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$H_p(a) = \sum_{l=1}^{p-1} e(\frac{al^p}{p^2})$$

که در آن p یک عدد اول فرد و a عدد صحیح مثبتی است. برای اثبات اینکه $H_p(a)$ یک ابرسرشت است، عمل $A = \{1^p, 2^p, \dots, (p-1)^p\} \leq \mathbb{Z}_{p^2}^\times$ را روی گروه جمعی در نظر می‌گیریم و

مدارهای آن را روی $\mathbb{Z}_p$ و $\mathrm{Irr}(\mathbb{Z}_p)$ می‌یابیم. نتیجه می‌شود که $H_p(a)$ یک ابرسرشت است [۸]. در حین نگارش این مقاله نویسنده به فکر ساختن ابرسرشتی شبیه مجموع هایلبرون افتاد؛ نک [۱۴]. این ابرسرشت به‌صورت

$$D_p(a) = \sum_{l=1}^{p-1} e(\frac{al^p}{p^3})$$

است که از عمل زیرگروه معینی از $\mathbb{Z}_{p^3}^{\times}$ روی گروه جمعی $\mathbb{Z}_{p^3}$ به دست می‌آید. جزئیات بیشتر در [۱۴] آمده است.

مراجع

[۱] درفشه، محمدرضا، اثباتی برای قانون تقابل مربعی گاوس، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ **۷۱** (۱۴۰۱)، ۶۳-۷۲.

[2] Baumgart, O., *The Quadratic Reciprocity Law: A Collection of Classical Proofs* (edited and translated by F. Lemmermeyr), Birkhäuser, Cham, 2015.

[3] Brauer, R., Nesbitt, C., *On the Modular Representations of Finite Groups*, University of Toronto Studies, Math. Series, vol. 4, 1936.

[4] Burnside, W., *Theory of Groups of Finite Order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1911.

[5] Curtis, W. C., Reiner, I., *Representation Theory of Finite Groups and Associated Algebras*, Wiley interscience, New York, 1962.

[6] Diaconis, P., Isaacs, I. M., Supercharacters and superclasses for algebra groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **360** (2008), 2359-2392.

[7] Feit, W., Thompson, J. G., Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 775-1029.

[8] Garcia, S. R., Lutz, B., A supercharacter approach to Heilbronn sums, *J. Number Theory*, **186** (2018), 1-15.

[9] Huppert, B., *Character Theory of Finite Groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 1998.

[10] Jacobson, N., *Basic Algebra II*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980.

[11] Liebeck, M. W., O' Brien, E. A., Shalev, A., Tiep, P. H., Ore conjecture, *J. Eur. Math. Soc.*, **12** (2010), 939-1008.

[12] Nathanson, M. B., *Additive Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[13] Ore, O., Some remarks on commutators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 307-314.

[14] Saydi, H., Darafsheh, M. R., Heilbronn-like sums and their properties, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, **27** (2021), 104-112.

[15] Wilson, R. A., The monster is a Hurwitz group, *J. Group Theory*, **4** (2001), 367-374.

محمدرضا درفشه: دانشگاه تهران، دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

رایانامه: darafsheh@ut.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 42, Number 72, Spring/Summer 2023, Pages 47–70
doi: 10.30504/mct.2022.1288.1896

On the Representation Theory of Finite Groups

M. R. Darafsheh[1]

School of Mathematics, Statistics and Computer Science, University of Tehran, Iran

Abstract. The representation theory of finite groups has important applications in investigating the structure of abstract finite groups.This theory was developed by Frobenus more than 100 years ago and later studied by Burnside, Schur, and Brauer. In this article we try to explain fundamental theorems of this theory and mention a few applications.

Keywords: representation of finite groups, characters, supercharacters, triangle groups, Hurwitz groups
Article history: Recieved 26 May 2022; Accepted 5 October 2022
Article type: review

References

[1] Baumgart, O., *The Quadratic Reciprocity Law: A Collection of Classical Proofs* (edited and translated by F. Lemmermeyr), Birkhäuser, Cham, 2015.

[2] Brauer, R., Nesbitt, C., *On the Modular Representations of Finite Groups*, University of Toronto Studies, Math. Series, vol. 4, 1936.

[3] Burnside, W., *Theory of Groups of Finite Order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1911.

[4] Curtis, W. C., Reiner, I., *Representation Theory of Finite Groups and Associated Algebras*, Wiley interscience, New York, 1962.

[5] Darafsheh, M. R., A proof of the Gauss quadratic reciprocity law, *Mathematical Culture and Thought*, 71 (2022), 63–72. [in Persian]

[6] Diaconis, P., Isaacs, I. M., Supercharacters and superclasses for algebra groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **360** (2008), 2359-2392.

[1] darafsheh@ut.ac.ir

[7] Feit, W., Thompson, J. G., Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 775-1029.
[8] Garcia, S. R., Lutz, B., A supercharacter approach to Heilbronn sums, *J. Number Theory*, **186** (2018), 1-15.
[9] Huppert, B., *Character Theory of Finite Groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 1998.
[10] Jacobson, N., *Basic Algebra II*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980.
[11] Liebeck, M. W., O' Brien, E. A., Shalev, A., Tiep, P. H., Ore conjecture, *J. Eur. Math. Soc.*, **12** (2010), 939-1008.
[12] Nathanson, M. B., *Additive Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1996.
[13] Ore, O., Some remarks on commutators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 307-314.
[14] Saydi, H., Darafsheh, M. R., Heilbronn-like sums and their properties, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, **27** (2021), 104-112.
[15] Wilson, R. A., The monster is a Hurwitz group, *J. Group Theory*, **4** (2001), 367-374.