

نقش هری کستن در نظریه احتمال*

جفری آر. گریمت
ترجمه رامین کاظمی

چکیده. این مقاله مروری است بر آثار منتشرشده هری کستن در نظریه احتمال. توجه ما در این بررسی بیشتر بر آثار او در قدم‌زدن‌های تصادفی، فرایندهای شاخه‌ای، پرکولاسیون، و موضوعات مرتبط است.

۱ بررسی اجمالی

هری کستن در دوره طلایی نظریه احتمال از ۱۹۵۶ تا ۲۰۱۸ جایگاه ریاضی‌دان و شخصیتی برجسته را داشت. وقتی هری در ۲۴ سالگی فارغ‌التحصیل شد و در ۱۹۵۶ از هلند به ایالات متحده نقل مکان کرد بسیاری از زیربناهای اساسی علم احتمال مهیا بود. مفاهیم اصلی احتمال مدت‌ها بود که شناسایی شده بودند (ازجمله، قدم‌زدن‌های تصادفی، حرکت براونی، فرایندهای شاخه‌ای، و فرایندهای پواسون)، و ارتباط‌های بین «نظریه محض» و حوزه‌های مشابه از فیزیک گرفته تا دانش مالی ایجاد شده و توسعه یافته بودند. از سال ۱۹۵۶ به بعد طی حدود نیم‌قرن، یک نظریه یکدست و شسته‌رفته درباره احتمال به وجود آمده و احتمال به عنوان محل تلاقی شاخه‌هایی از علوم ریاضی شناخته شده بود. در این دوره تعداد کمی از ریاضی‌دانان به اندازه هری کستن نقش‌آفرین بوده‌اند.

هری، پس از دوران پرتلاطم کودکی (نگاه کنید به [۶۷])، نزد داوید وان دانتسیخ^۱ و یان عبارات و کلمات کلیدی: احتمال، قدم‌زدن تصادفی، فرایند شاخه‌ای، ماتریس تصادفی، انبوهش با پخش محدود، پرکولاسیون

نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۴/۲۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۵/۱۲

* Grimmett, G. R., Harry Kesten's work in probability theory, *Probab. Theory and Related Fields*, **181** (2021), 17-55.

¹David van Dantzig

هملریک^۱ در آمستردام ریاضیات خواند و همین‌جا بود که در سال ۱۹۵۵ در سخنرانی‌ای از مارک کاتس^۲ با عنوان «برخی جنبه‌های احتمالاتی نظریه پتانسیل» حضور یافت. به نظر می‌رسد که این دیدار تأثیر به‌سزایی داشته است، زیرا که هری در سال ۱۹۵۶ به دانشگاه گرنل می‌رود تا دانشجوی کاتس بشود. البته در موعد خودش هم آثار و فعالیت‌های هری، و همکاری‌های او از جمله دوستان مهاجرش فرانک اشپیتسر^۳ و یوگنی دینکن^۴، باعث تقویت جایگاه بخش ریاضی گرنل به‌عنوان یک مؤسسه پیشرو در سطح جهان در زمینه احتمال و جز آن شد. بسیاری جذب این گوشه دنج استثنائی در شمال شهر نیویورک می‌شدند، و در آنجا از آن‌ها با گرمی پذیرایی می‌شد و می‌توانستند در فعالیت‌های مختلفی در زمینه ریاضیات و فیزیک شرکت کنند.

مارک کاتس تأثیر ماندگاری بر هری داشت، و شایسته بود که هری با درگذشت کاتس در سال ۱۹۸۴ مقاله‌ای برای ارج‌گذاری به آثار او بنویسد، همان کاری که برای اشپیتسر در سال ۱۹۹۳ انجام داد (به $[K^{۹۲}, K^{۱۲۹}]$ مراجعه کنید). از قضا، اولین اثر کاتس مقارن با سال تولد هری، ۱۹۳۱، و آخرین اثر او نیز اندکی پس از انتشار یکی از بهترین نتایج هری، به سال ۱۹۸۰ مبنی بر اینکه احتمال بحرانی پرکولاسیون بند^۵ روی $\mathbb{Z}^2$ برابر با $\frac{1}{4}$ است، منتشر شده است.

افراد دیگری بر کار هری تأثیر داشتند، از جمله و به‌خصوص دوست و همکارش فرانک اشپیتسر، و، با فاصله بیشتر از او، جان همزلی^۶، که مقالات اولیه او در مورد قدم‌زدن‌های ازخودگریز^۷، پرکولاسیون، پرکولاسیون نخستین‌گذر، و خاصیت زیرجمعی‌بودن اغلب در مقالات خود هری نمایان است. هری در اینکه ریاضیات به قول همزلی «معطوف به مسائل ملموس»^۸ را نسبت به نوع «معطوف به نظریه‌های انتزاعی»^۹ آن ترجیح می‌داد با همزلی وجه مشترک داشت، و حل مسئله در کار علمی هر دوی آن‌ها بسیار پررنگ بود (رجوع کنید به [۷۱، ص ۱۱۳۲]).

بااینکه آثار هری عمدتاً در زمینه نظریه احتمال است، خبرگی‌های دیگر او به حوزه‌های نزدیک دیگری در ریاضیات، از جمله مباحثی در جبر، آنالیز، هندسه، و فیزیک آماری کشیده شده است. او، قبلاً تا پیش از ۱۹۶۰، نتایج مهمی درباره قدم‌زدن‌های تصادفی روی گروه‌ها، حاصل‌ضرب ماتریس‌های تصادفی، و جنبه‌هایی از آنچه ما «تقریب احتمالاتی دیوفانتی» می‌نامیم به دست آورده بود. این علائق طی دهه بعد گسترش یافت و قدم‌زدن‌های تصادفی و نظریه پتانسیل، فرایندهای پایدار و لوی^{۱۰}، قدم‌زدن‌های ازخودگریز، و فرایندهای شاخه‌ای را شامل شد و در دهه ۱۹۸۰

^۱Jan Hemelrijk ^۲Mark Kac ^۳Frank Spitzer ^۴Eugene Dynkin ^۵bond percolation ^۶John Hammersley

^۷self-avoiding walks ^۸implicated ^۹contemplative ^{۱۰}Lévy

قدم‌زدن‌های تصادفی در محیط‌های تصادفی و روابط بازگشتی تصادفی نیز به آن اضافه شد. سال ۱۹۸۰ که در آن هری برای پرکولاسیون بندی در شبکه مربعی ثابت می‌کند $p_c = \frac{1}{4}$ زندگی حرفه‌ای هری را دو قسمت می‌کند. تا پیش از آن، او عمدتاً روی قدم‌زدن‌های تصادفی و فرایندهای شاخه‌ای فعالیت داشت، و پس از آن علائقش به سمت فرایندهای ریاضی ناشی از فیزیک تغییر کرد. در آن‌ها برخی زمینه‌ها و اجزای مشترک قابل تشخیص است. برای مثال، زیرجمعی بودن ابتدا در مقاله‌ای در سال ۱۹۶۰ در مورد ماتریس‌های تصادفی، و بعداً در پرکولاسیون نخستین‌گذر و جریان‌های تصادفی ظاهر شد و در بین این دو هم قدم‌زدن‌های ازخودگریز. جراحی موضعی^۱ و برآوردهای نمایی^۲ فونونی بودند که او در زمینه‌هایی از آن‌ها استفاده کرده است.

او به مسائل سخت علاقه داشت و به عنوان یک مسئله‌حل‌کن قدر شهرتی پیدا کرده بود. وقت مواجه با مشکلات و مسائل فنی، بیشتر از طاقت همه کار می‌کرد، و شاید سال‌ها طول می‌کشید تا دیگران به او برسند. اثبات‌های «ظریف‌تر» دیگران بر تعدادی از آثار اصلی او سایه افکنده‌اند، هرچند با تغییر مفروضات مسئله، قدرت روش‌های اصلی او، چون «کاربردی‌ترند»، بیشتر مشخص می‌شوند. برای نوشتن این گزارش از کارهای هری باید تصمیمات خاصی اتخاذ می‌شد. از یک سو، یک گزارش مبتنی بر ترتیب زمانی به خواننده امکان می‌دهد تا سیر تحول موضوعات مورد علاقه هری، و به‌طور کلی، سیر تکامل نظریه احتمال، را ببیند؛ اما از سوی دیگر، ممکن است خوانندگان بسیاری آثار او در مورد دستگاه‌های مورد بررسی در فیزیک را قابل فهم‌تر بدانند تا آثار فنی‌تر او در مورد قدم‌زدن‌های تصادفی و نظایر آن‌ها. شیوه اتخاذشده در این مقاله این است که ابتدا نکاتی را که به نظرم در آثار هری برجسته است بیاورم (در بخش ۲) و بعد از آن مرور کامل‌تر و زمان‌بندی‌شده‌تری در بخش‌های ۳ تا ۷ آورده شود.

ممکن است در مواردی از ترتیب زمانی در نظر گرفته شده عدول کنیم. بر این اساس، کار را با قدم‌زدن‌های تصادفی در اشکال مختلف آن در بخش ۳ شروع می‌کنیم و به دنبال آن حاصل‌ضرب ماتریس‌های تصادفی، قدم‌زدن‌های ازخودگریز، و فرایندهای شاخه‌ای می‌آید؛ پس از آن پرکولاسیون کلاسیک و نخستین‌گذر، و بسیاری از مسائل مرتبط و مورد توجه هری مطرح می‌شود. برخی از نتایج متأخر را در بخش‌های اولیه جا داده‌ایم، که البته به علت ارائه گزارش‌های کوتاه خطر ایجاد اختلال در سیر زمانی در نظر گرفته‌شده را دارند. برخی از مقالات مهم را که نمی‌توان به‌آسانی در این ترتیب گنجانند به بخش آخر ۸ موکول کرده‌ایم.

¹local surgery ²exponential estimates

بر ناکامل بودن این گزارش شخصی اذعان داریم و بهانه آن نیز محدودیت اطلاعات نویسنده و صفحات در اختیار اوست. از کسانی که در اینجا ذکری از آثارشان نکرده‌ایم عذرخواهی می‌کنیم. باید از مقاله عالی [۵۰] به‌طور ویژه یاد کنیم که برای جشن‌نامه هری در سال ۱۹۹۹ [۱۹] نوشته شده و محل اتکای مقاله حاضر بوده است.

تمام کارهای هری در دسترس عموم نیست. علاوه‌بر دو مقاله او در وبگاه arxiv.org که هنوز منتشر نشده است، تعدادی مقاله وجود دارد که هری حجم آن‌ها را متناسب با میزان نوآوری آن‌ها نمی‌دانست. او این مقالات را در کثوی پایینی میز خود نگه داشت و ما هم تابع قضاوت او هستیم. درباره بعضی فعالیت‌های حرفه‌ای هری به‌غیر از تحقیقات او هم چیزی بگوییم. او علاوه‌بر عضویت در هیئت تحریریه تعدادی از مجلات (از جمله مجله ZfW)، مدیر اجرایی مجله آنالو آو پروبیلیتی از سال ۱۹۸۲-۱۹۸۴ بود، عملاً چهارمین دبیر با این عنوان از زمان آغاز به کار این مجله در سال ۱۹۷۲. همچنین عضو منتخب شورای مؤسسه آمار ریاضی از ۱۹۸۸ تا ۱۹۹۱ بود. جزئیات بیشتر از مشاغل حرفه‌ای او را می‌توان در [۶۷] یافت.

تأثیر هری کستن بر ریاضیات پدیده‌تر از مکتوبات برجسته او بود. او علاوه‌بر آن، شخصیتی بسیار محبوب و مورد احترام و همکار و خبرنگاری فوق‌العاده بود. تأثیر مثبتش، در جایگاه الگویی واقعی و دوست برای همکاران جوان‌تر، بر ارزش‌های فکری و انسانی جامعه احتمال‌دانان جزو بزرگ‌ترین میراث او است.

۲ مروری بر مهم‌ترین پژوهش‌های هری کستن

این بخش مشتمل بر گزارش‌های بسیار مختصری درباره مهم‌ترین بخش‌های آثار هری است بدون در نظر گرفتن ترتیب زمانی و موضوعی آن‌ها. می‌توانید با دنبال کردن ارجاع داده‌شده گزارش مفصل‌تر را برای هر مورد در بخش‌های ۳ تا ۸ پیدا کنید.

۱.۲ پرکولاسیون

احتمال بحرانی پرکولاسیون بندی روی $\mathbb{Z}^2$ (بخش ۷)

اثبات هری مینی‌بر این‌که برای پرکولاسیون بندی روی $\mathbb{Z}^2$ داریم $p_c = \frac{1}{4}$ نقطه عطفی در این موضوع بود. با این اثبات یک مسئله قدیمی معروف حل شد و تعدادی ایده جدید وارد موضوع شد. با این کار، نظریه پرکولاسیون همچون جریان کلیدی در نظریه احتمال درخشید و به بسط نظریه دستگاه‌های

بی‌نظم^۱ کمک کرد، موضوعی که هم‌اکنون بسیار مورد توجه است.

نابرابری وان دن برخ-کستن (بخش ۲.۷)

نابرابری‌های همبستگی کلید مطالعه دستگاه‌های برهم‌کنشی‌اند. نابرابری معروف FKG اهمیت ویژه‌ای دارد و بیان می‌کند که پیشامدهای صعودی دارای همبستگی مثبت‌اند (نسبت به اندازه‌های احتمال مناسب). «همبستگی منفی» معنایی مبهم‌تر از همبستگی مثبت دارد. شاید مهم‌ترین نابرابری همبستگی منفی برای اندازه‌های حاصل ضرب، نابرابری وان دن برخ^۲ و کستن به سال ۱۹۸۵ است. آن‌ها مفهوم «رخداد مجزا»ی پیشامدها را تعریف و نابرابری مربوط به آن را ثابت کردند. این نابرابری از زمان اثباتش بسیار مفید واقع شده است.

یکتایی خوشه نامتناهی (بخش ۳.۷)

یک فرایند پرکولاسیون زبربحرانی روی $\mathbb{Z}^d$ دارای چند خوشه باز نامتناهی است؟ آیزمن^۳، کستن، و نیومن^۴ نشان دادند که پاسخ به طور تقریباً حتمی برابر یک است. آن‌ها روش‌هایی را مطرح کردند که از همان ابتدا در جاهای دیگری هم مفید بوده‌اند، و راه را برای تعدادی از مقالات مهم دیگر در مورد دستگاه‌های بی‌نظم روی انواع گراف‌ها گشود. معلوم است که همیشه پاسخ برای گراف‌های میانگین‌پذیر یک است، اما وضعیت برای گراف‌های میانگین‌ناپذیر تنوع بیشتری دارد.

پرکولاسیون آغازین و زیرپخشندگی (بخش ۴.۷)

اعتقاد بر این است (و در بسیاری از ابعاد می‌دانیم) که پرکولاسیون بحرانی تنها دارای خوشه‌های باز متناهی است. از فیزیک این ایده سرچشمه گرفت که خوشه پرکولاسیون نامتناهی را که یک پرکولاسیون بحرانی «در تلاش برای تشکیل» آن است مطالعه کنند. هری تعبیری از این مفهوم در دو بُعد به دست آورد به این ترتیب که وجود یک اندازه احتمال را ثابت کرد که حد اندازه حاصل ضرب (بحرانی) است مشروط به اینکه مبدأ در یک خوشه فزاینده‌بزرگ قرار داشته باشد. او این حد را خوشه پرکولاسیون آغازین^۵ $\tilde{C}$ نامید.

او توانست ساختار برخال‌گونه $\tilde{C}$ را با استفاده از طرحی از دو ژن^۶ مبنی بر به حرکت درآوردن یک راه‌پیمای تصادفی نشان دهد. درحالی‌که نرمال‌سازی عادی یک قدم‌زدن تصادفی (X_n) روی $\mathbb{Z}^2$ به صورت $\sqrt{n}$ است، معلوم شد که برای قدم‌زدن (X_n) روی $\mathbb{Z}^2$ عدد $\epsilon > 0$ وجود دارد

^۱disordered system ^۲van den Berg ^۳M. Aizenman ^۴C. M. Newman ^۵incipient percolation cluster

^۶de Gennes

به طوری که $0 \rightarrow X_n^{-\frac{1}{2}+\epsilon} n$. دلیل رخ دادن این «زیرپخشندگی»^۱ این است که راهپیمای مذکور زمان زیادی را در فضاهای خالی $\tilde{C}$ می‌گذراند.

روابط مقیاس‌بندی در دو بُعد (بخش ۶.۷)

فهم فیزیکی کاملی از گذار فاز پرکولاسیون در دو بُعد داریم. چیزهای زیادی در این باره «معلوم» شده‌اند، اما حتی امروز هم نتایج نسبتاً کمی اثبات شده‌اند (به استثنای پرکولاسیون بستی^۲ روی شبکه مثلثی). انتظار بر این است که توابع در و نزدیک نقطه بحرانی p_c دارای تکنیکی‌های قانون توانی^۳ باشند، و «نماهای بحرانی» آن‌ها در روابط معروف به مقیاس‌بندی صدق کنند.

هری در سال ۱۹۸۷ گام بزرگی به سوی درک چنین نماها و روابطی برداشت. او با فرض وجود دو نما، وجود پنج شاخص دیگر و اعتبار روابط مقیاس‌بندی مربوط را ثابت کرد. او در این راه، «پیشامدهای بازویی»^۴ را، که در پژوهش‌های اخیر بسیار اهمیت یافته‌اند، تعریف کرد. این مقاله تأثیر زیادی بر نظریه بسیار دقیق گذار فاز پرکولاسیون در دو بُعد داشته است.

جریان‌های تصادفی (بخش ۷.۷)

«پرکولاسیون نخستین‌گذر» مطالعه میزان پخش مواد از میان یک محیط تصادفی است. هری مسئله مربوط به جریان حداکثری از طریق یک محیط که یال‌هایش ظرفیت تصادفی دارند را به طور اصولی مطالعه کرد. از طرفی، ثابت کرد که کنترل دقیق سطوح دوگان برای ابعاد سه به بالا لازم است.

۲.۲ قدم‌زدن‌های تصادفی

قدم‌زدن‌های تصادفی روی گروه‌ها (بخش ۲.۳)

هری در رساله بدیع دکترای خود به سال ۱۹۵۸ نظریه قدم‌زدن تصادفی روی گروه‌های گسسته شمارا را مطرح کرد. او ثابت کرد که احتمال بازگشت به نقطه شروع پس از $2n$ مرحله، رفتاری شبیه به λ^{2n} دارد که در آن λ شعاع طیفی است. علاوه‌براین، $\lambda = 1$ اگر و تنها اگر گروه میانگین‌پذیر باشد. این شرط برای میانگین‌پذیری به یکی از ابزارهای نظریه هندسی گروه‌ها تبدیل شده است، و زمینه‌ای که او بنیان نهاد تا به امروز همچنان فعال است.

¹subdiffusivity ²site percolation ³power-law ⁴arm events

قدم‌زدن تصادفی در یک محیط تصادفی (بخش ۵.۳)

در دوره کارشناسی مطالبی درباره قدم‌زدن‌های تصادفی روی $\mathbb{Z}$ گفته می‌شود، که وقتی $x \in \mathbb{Z}$ ، یک قدم به راست (یا چپ) با احتمال α (یا $\beta = 1 - \alpha$) برداشته می‌شود. اگر مقدار α در نقطه x یک متغیر تصادفی α_x باشد، موضوع بسیار پیچیده‌تر می‌شود. به نظر می‌رسد که رفتار درازمدت راه‌پیما به شدت تحت تأثیر دامنه‌های D از $\mathbb{Z}$ است که در آن $(\alpha_x : x \in D)$ ها برای کاهش سرعت آن تصمیم می‌گیرند. هری با کمک کازلوف^۱ و اشپیتسر یک نتیجه بسیار دقیق در مورد موقعیت راه‌پیما، برحسب κ ثابت کرد که در آن κ با عبارت $1 = \mathbb{E}((\beta_0/\alpha_0)^\kappa)$ داده می‌شود.

انبوهش با پخش محدود (بخش ۶.۳)

این مدل معروف برای انبوهش در برابر بسیاری از تلاش‌ها برای ساختن نظریه‌ای دقیق مقاومت کرده است. ذرات شناور در اولین نقطه برخورد به یک چندسازه^۲ تجمع می‌کنند. شیه‌سازی‌ها مؤید این باورند که رشد این ذرات درخت‌گونه^۳ و برخالی است. هری در سال ۱۹۸۷ یکی از محدود نتایج دقیق در این باره را ثابت کرد: (در دو بُعد) رشد شعاع چندسازه مذکور سریع‌تر از $n^{\frac{1}{2}}$ نیست.

۳.۲ فرایندهای شاخه‌ای و $L \log L$ (بخش ۶)

هری عاشق شرط‌های لازم و کافی بود، که نمونه‌هایش در برجسته‌ترین آثار او در مورد فرایندهای شاخه‌ای است. فرایند شاخه‌ای زبربحرانی (Z_n) را با یک پیش‌ساز^۴ و میانگین اندازه خانواده $\mu \geq 1$ در نظر بگیرید. حد $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n / \mu^n$ بنابر همگرایی مارتینگلی وجود دارد. هری با کمک استیگم^۵ شرط لازم و کافی را برای تساوی $\mathbb{E}(W) = 1$ پیدا کرد: $\mathbb{E}(Z_1 \log^+ Z_1) < \infty$. تقریباً در همان زمان، او با کمک نه^۶ و اشپیتسر شرایط لازم و کافی را برای برقراری قوانین یاگلو^۷ و کولموگوروف^۸ درباره فرایندهای شاخه‌ای بحرانی اثبات کرد.

۴.۲ حاصل ضرب ماتریس‌های تصادفی (و اسکالرها) (بخش ۴)

هری در نخستین مقالاتش با فورستنبرگ^۹ در سال ۱۹۶۰، رفتار حدی حاصل ضرب‌های جزئی Y_n از یک دنباله مانا و ارگودیک (M_n) از ماتریس‌های تصادفی را بررسی کرد. به‌ویژه آن‌ها ثابت کردند که حد $n^{-1} \log ||Y_n||$ وجود دارد، و علاوه بر این تحت مفروضات مناسب یک قضیه حدی

¹Kozlov ²composite ³dendritic ⁴progenitor ⁵Bernt P. Stigum ⁶Peter E. Ney ⁷I. M. Yaglom

⁸Kolmogorov ⁹H. Furstenberg

مرکزی در این باره وجود دارد.

هری سال‌ها بعد معادلهٔ بازگشتی تصادفی $Y_n = M_n Y_{n-1} + Q_n$ و همچنین حالت به‌ظاهر ساده‌تری که Y متغیر تصادفی اسکالر است و Y و Q توزیع‌های یکسانی دارند را مطالعه کرد. برهان او مبنی بر اینکه Y نوعاً دُم‌سنگین است، تأثیر زیادی در زمینه‌های متعدد احتمالات کاربردی، آمار، و ریاضیات مالی داشته است.

۵.۲ قدم‌زدن‌های ازخودگریز (بخش ۵)

در مورد تعداد قدم‌زدن‌های ازخودگریز n گامی روی شبکهٔ $\mathcal{L}$ ، χ_n ، با نقطهٔ شروع مشخص، چه می‌توان گفت؟ شمردن این گونه قدم‌زدن‌ها پیچیدگی خاصی دارد و به دست آوردن رابطهٔ مجانبی برای χ_n چالشی است. رابطهٔ $\chi_n^{1/n} \rightarrow \kappa$ شناخته‌شده است که در آن κ مقدار ثابت همبندی وابسته به شبکهٔ $\mathcal{L}$ است. وقتی $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^d$ ، هری قضیهٔ ظریف‌تری برحسب حد خارج‌قسمتی $\chi_{n+2}/\chi_n \rightarrow \kappa^2$ را اثبات کرد، و با این‌کار یک «قضیهٔ الگو» را مطرح ساخت که تأثیر ماندگاری در این زمینهٔ چالش‌برانگیز و شهودی داشته است.

۶.۲ نقاط قطبی فرایندهای لوی (بخش ۳.۳)

گیریم (X_t) یک فرایند لوی d بُعدی باشد و احتمال اصابت را برای هر $r \in \mathbb{R}^d$ به‌صورت $h(r) = \mathbb{P}(X_t = r, t > 0)$ تعریف کنید. نقطهٔ r قطبی نامیده می‌شود هرگاه $h(r) = 0$. در دههٔ ۱۹۶۰ شناسایی نقاط قطبی به یک مسئلهٔ مهم تبدیل شد. هری مجموعهٔ نقاط قطبی در یک بُعد را مشخص کرد و ثابت کرد که (تحت شرایط مناسب) قطبی‌بودن در دو بُعد یا بالاتر پدیده‌ای عادی است.

۷.۲ تقریب احتمالاتی دیوفانتی (بخش ۱۰.۸)

هری ظاهراً با الهام از نخستین همکاری‌هایش با مارک کاتس، در حدود سال ۱۹۶۰ مقالات متعددی در مورد تقریب دیوفانتی نوشت که در آنها اغلب از فنون و روش‌های نظریهٔ احتمال استفاده کرده است. شناخته‌شده‌ترین کار او مقاله‌ای است که زمینه را برای نظریهٔ جدیدتر مجموعه‌های باقی‌ماندهٔ کران‌دار فراهم می‌کند. فرض کنید $\{x\} = x - [x]$ جزء کسری عدد حقیقی x باشد. برای $0 \leq a < b \leq 1$ و $b - a < 1$ فرض کنید $S_n(x)$ تعداد اعداد صحیح $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ با شرط $\{kx\} \in [a, b)$ باشد. هری با اثبات اینکه $S_n(x) - n(b - a)$ برحسب n کران‌دار

است اگر و تنها اگر برای عدد صحیح j ، $\{jx\} = a - b$ به سؤالی از اردوش و شوش^۱ پاسخ داد.

۳ قدم زدن تصادفی

۱.۳ قدم زدن تصادفی

از دیدگاهی محض گراممکن است نظریه احتمال چیزی جز نظریه اندازه متناهی به انضمام امید ریاضی شرطی نباشد. مفهوم «استقلال» و نفی آن «وابستگی» مفهوم بنیادی در این نظریه است. همان طور که کاتس در [۸۴] می نویسد: «این مفهوم [استقلال آماری] از نظریه احتمال سرچشمه گرفته است و مدت ها بر سر آن ابهام بود و به همین دلیل در اینکه یک مفهوم اصیل ریاضی باشد شک داشتند». استقلال از نظر تاریخی به عنوان مبنایی برای ضرب احتمالات در نظر گرفته می شد و به نظر می رسد اشتاین هاوس^۲ (شاگرد هیلبرت و استاد راهنمای باناخ^۳ و کاتس) تعریف آشنای استقلال را برای یک خانواده شمارا از متغیرهای تصادفی تعریف کرد (طبق آنچه کاتس در [۸۳] بیان کرده است)؛ همچنین به $[K9]$ (ص ۱۱۰۴) مراجعه کنید.

قدم زدن تصادفی نظریه ای درباره مجموعه های جزئی دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع (به اختصار، iid) است. چنین مجموعه های جزئی ای به عنوان یک فرایند در نظر گرفته و به طور مناسب اندیس گذاری می شوند و عموماً توجه به جنبه های هندسی این فرایند است. مسلماً قدم زدن تصادفی بنیادی ترین فرایند احتمالاتی است. کتاب های [۹۳، ۹۴] منابع جدید در این باره هستند.

۲.۳ قدم زدن تصادفی روی گروه ها

با توجه به اوضاع و احوال آمدن هری به گرنل، عجیب نیست که رساله دکترای هری با قدم زدن تصادفی، البته در زمینه بدیع گروه ها، مرتبط بود. او در آن رساله ۳۵ صفحه ای اش به سال ۱۹۵۸ [K۷] (که به صورت [K۱۱] منتشر شد) نظریه قدم زدن تصادفی در گروه ها را مطرح کرد که هنوز بعد از گذشت ۶۰ سال موضوعی مورد توجه است.

در نظریه قدم زدن تصادفی معمولی جهش ها روی گروه های آبدلی جمعی $\mathbb{Z}^d$ یا $\mathbb{R}^d$ صورت می گیرد. در حالت کلی، فرض کنید G یک گروه (جمعی) شمارا و $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ یک مجموعه مولد برای گروه G و $P = (p_1, p_2, \dots)$ برداری اکیداً مثبت با مجموع $\frac{1}{p}$ باشد. سه تایی

^۱Peter Szűs ^۲Hugo Steinhaus ^۳Banach

(G, A, P) باعث ایجاد یک قدم‌زدن تصادفی $(X_n : n \geq 0)$ روی G می‌شود، که وقتی $g \in G$ ، در گام بعدی با احتمال p_i (برای هر i) به $g \pm a_i$ تغییر وضعیت می‌دهد. هری رابطه بین طیف ماتریس تغییر وضعیت M (به عنوان عملگری روی $l^2(G)$) و ویژگی‌های گروه G را بررسی کرد. شعاع طیفی M ، $\lambda(G, A, P)$ ، سوپریم $|\lambda|$ روی تمام ویژه‌مقادیر λ از عملگر M است. عنصر صفر G را با 0 و توزیع X با شرط $X_0 = x$ را با $\mathbb{P}_x$ نمایش دهید.

قضیه ۱.۳ ([K۱۱]). (الف) شعاع طیفی $\lambda(G, A, P)$ برابر ویژه‌مقدار ماکسیمال M است.

$$(ب) \text{ داریم } \lambda(G, A, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(X_{2n} = 0)^{1/(2n)}.$$

(ج) برقراری رابطه $\lambda(G, A, P) = 1$ فقط به ساختار گروه G به معنای زیر وابسته است.

رابطه $\lambda(G, A, P) = 1$ برقرار است اگر و تنها اگر برای مجموعه مولد B و مجموعه

$$\lambda(G, B, Q) = 1 \text{ اکیداً مثبت } Q \text{ داشته باشیم}$$

وقتی مقدار مشترک مذکور در قسمت (ج) در رابطه $\lambda(G, A, P) = 1$ صدق کند، می‌نویسند

$$\lambda(G) = 1. \text{ معیار زیر برای میانگین‌پذیری یکی از نتایج اساسی در نظریه هندسی گروه‌ها است.}$$

قضیه ۲.۳ ([K۹]). گروه G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $\lambda(G) = 1$.

کستن و اشیپتسر در کار مشترکی بعد از این [K۳۱] به هسته‌های پتانسیل برای قدم‌زدن تصادفی روی گروه‌های آبلی شمارای نامتناهی توجه کردند. آن‌ها معیاری برای وضعیت‌های بازگشتی ارائه و یک نظریه پتانسیلی بنا کردند. هری در مقاله‌ای در همایش برکلی [K۳۷] تعدادی از مسائل حل‌نشده مرتبط با این موضوع را گردآوری کرد، از جمله مسئله‌ای که به «حدس کستن» معروف شد: توسیع‌های متناهی $\{0\}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}^2$ تنها گروه‌های بازگشتی‌اند. این حدس مشهور را بالاخره واروپولوس^۱ [۱۱۸] در سال ۱۹۸۶ ثابت کرد (نگاه کنید به [۷۲]).

در سال‌های اخیر قدم‌زدن‌های تصادفی روی گروه‌ها توجه زیادی را به خود جلب کرده است؛

[۱۲۳] را ببینید. برای مطالعه گروه‌های متناهی بجاست که فصل نوشته‌شده توسط سالوف-کوست^۲

[۱۰۷] در مجموعه مقالات [K۱۷۷] تدوین شده توسط هری را ذکر کنیم.

۳.۳ نظریه کلی قدم‌زدن تصادفی

دهه ۱۹۶۰ دوره‌ای پر بار برای نظریه قدم‌زدن تصادفی بود، و در سال ۱۹۶۴ همین دوره چاپ اول

^۱Nicholas Varopoulos ^۲Laurent Saloff-Coste

کتاب مهم اشپیتر [۱۱۳] منتشر شد. هری در همین سال‌ها تعدادی مقاله مهم نوشت که چهارتای آن‌ها درباره قضایای حدی نسبت است.

قضیه ۳.۳. فرض کنید X یک قدم‌زدن تصادفی تحویل‌ناپذیر روی $\mathbb{Z}^d$ باشد که در آن $d \geq 1$. فرض کنید $\circ = X_\circ$ و T زمان اولین بازگشت X به $\circ$ باشد.

(الف) $[K27]$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ، احتمال‌های $r_n = \mathbb{P}_\circ(T > n)$ وقتی $n \rightarrow \infty$ در شرط $r_{n+1}/r_n \rightarrow 1$ صدق می‌کنند.

(ب) $[K22]$ به علاوه، حد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_x(T > n)}{\mathbb{P}_\circ(T > n)} = \delta_{\circ, x} + a(x)$$

برای $x \in \mathbb{Z}^d$ وجود دارد که در آن $a(x)$ هسته پتانسیل است

$$a(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} [\mathbb{P}_\circ(X_n = \circ) - \mathbb{P}_x(X_n = \circ)] < \infty.$$

قسمت (الف) قسمت کلیدی اثبات (ب) است و آن را کستن، اورنستاین^۱، و اشپیتر اثبات کردند. هدف اصلی $[K27]$ تعمیم قسمت (ب) از تعداد ملاقات X به یک زیرمجموعه متناهی دلخواه Ω از $\mathbb{Z}^d$ بود، یعنی بیان عبارتی برای حد نسبت $\mathbb{P}_x(n, r, \Omega) / \mathbb{P}_\circ(T > n)$ وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، که در آن صورت کسر بیانگر احتمال این است که X دقیقاً r بار Ω را تا زمان n ملاقات کند. این مقدار برابر نسبت مجموع‌هایی است و اساساً می‌توان نتایج ظریف‌تری را با بررسی نسبت‌های بعضی از جمله‌ها به صورت جداگانه به دست آورد. این موضوع را هری به‌تنهایی در $[K26]$ پیگیری کرده است. در آنجا این حکم که $f_n^{(r)} := \mathbb{P}_\circ(n, r, \{\circ\}) - \mathbb{P}_\circ(n-1, r, \{\circ\})$ (برای زنجیرهای نادره‌ای، متقارن، بازگشتی) در شرط

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n^{(r)}}{f_n^{(1)}} = r \quad (r = 2, 3, \dots)$$

صدق می‌کند به صورت حدس مطرح شده بود و اثبات آن تا ظاهر شدن $[K46]$ طول کشید.

هری در سال ۱۹۶۰ در دانشگاه عبری شروع کرد به مطالعه روی فرایندهای α -پایدار X تا بازه‌های زمانی‌ای را که در طی آن $X_t > \circ$ بررسی کند. او برای تعداد چنین بازه‌هایی $N(\epsilon)$ با

¹D. Ornstein

طول بزرگتر از ϵ یک رابطهٔ مجانبی به دست آورد، و ملاحظه کرد که نتایجش برای $\alpha \neq 1$ با نتایج چانگ و کاتس [۳۳] از جهت عوض شدن علامت در مجموع‌هایی از متغیرهای iid با توزیع پایدار مطابقت دارد. این موضوع منجر به مکاتباتی با چانگ و کاتس در مورد اعتبار ادعاهای آن‌ها در حالت $\alpha = 1$ شد (به [K۹۲، ص ۱۱۱۹] مراجعه کنید). هری نتایج خود را در [K۲۵] منتشر کرد.

هری در دو مقالهٔ مرتبط باهم [K۱۵, K۱۶] نتایج قبلی اشپیتر و استون^۱ [۱۱۴] را گسترش داد که در مورد میانگین تعداد ملاقات‌ها در یک قدم‌زدن تصادفی روی $\mathbb{Z}$ بود برای یک وضعیت مفروض قبل از خروج از یک بازهٔ کران دار مشخص. او عمدتاً به قدم‌زدن‌های تصادفی با جهش‌های α -پایدار توجه پیدا کرده بود. این کار به‌طور طبیعی به انتشار دو مقالهٔ دیگر انجامید؛ در اولین مقاله، [K۳۰]، با استفاده از یک قانون لگاریتم مکرر برای تعداد بازدیدها در یک قدم‌زدن تصادفی برای وضعیت پربازدید آن به سؤالی از اردوش پاسخ داد. هری در مقالهٔ بعدی [K۳۹] ثابت کرد که، اگر میانگین تعداد ملاقات‌ها از یک بازهٔ مفروض I تا زمان n به‌صورت $n^{1-1/\alpha}$ با شرط $\alpha \in (1, 2]$ رشد کند، آنگاه جهش‌ها به دامنهٔ رُباش^۲ یک قانون مقارن α -پایدار تعلق دارند. این حکم به سؤال اشپیتر دربارهٔ عکس نتیجه‌ای از دارلینگ و کاتس در [۴۰] پاسخ می‌داد.

فرض کنید X یک فرایند لوی بُعدی باشد، یعنی یک فرایند تصادفی که مقادیری در $\mathbb{R}^d$ با نمونه‌های مستقل مانا اتخاذ می‌کند. نتایج اعلام شده در [K۴۰] و اثبات شده در رسالهٔ [K۴۲] پاسخ هری به این سؤال‌اند: چه وقت احتمال اصابت $(\exists t > 0, h(r) = P(X_t = r))$ در شرط $h(r) > 0$ صدق می‌کند؟ او در پاسخ برای حالتی که $d = 1$ هفت حالت را مشخص کرده است و به‌علاوه معیاری (قضیهٔ ۴.۳) را برای حکم $h(r) = 0$ برای هر $r \in \mathbb{R}$ بیان کرده است، و در عین حال هشدار داده است که «در اکثر کاربردهای عملی، به‌کارگیری این معیار مشکل خواهد بود ...». حالت‌های $d \geq 2$ هنوز هم بسیار پیچیده‌ترند. منشأ قضیهٔ او برای $d = 1$ سؤالی از چانگ بود در مورد جواب‌های یک معادلهٔ پیچشی.

از گسترهٔ نتایج آن مقاله یکی را برگزیده و نقل می‌کنیم. نقطهٔ $r \in \mathbb{R}^d$ قطبی نامیده می‌شود اگر $h(r) = 0$ ، مجموعهٔ نقاط قطبی را با $\mathcal{P}$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۴.۳ ([K۴۲]). فرض کنید X یک فرایند لوی یک‌بُعدی باشد ولی یک فرایند پواسون

^۱Charles Joel Stone ^۲attraction

مرگب نباشد. در این صورت $\mathcal{P} = \mathbb{R}$ اگر و تنها اگر نمای مشخصه Ψ برای فرایند X در شرط

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Re\left(\frac{1}{1 + \Psi(u)}\right) du = \infty$$

صدق کند که در آن $\Re(z)$ جزء حقیقی z است.

برتانیول^۱ مدت کوتاهی پس از انتشار این مقاله، استدلال احتمالاتی بسیار ظریف و قدرتمندی پیدا کرد و اثبات ساده‌تری برای نتایج [هری] به دست آورد» (نقل قسمتی از مرور و معرفی هری بر مقاله برتانیول [۲۰]). از میان منابع جدید درباره فرایندهای لوی، به کتاب‌های [۹۲، ۴۵، ۱۸] اکتفا می‌کنیم. هری در سال ۱۹۷۱ سخنرانی‌ای از سلسله سخنرانی‌های ریتس^۲ در مؤسسه آمار ریاضی ایراد کرد. او در مقاله مستخرج از این سخنرانی [K۵۱] سه جنبه از نظریه مجموعه S_n از n متغیر تصادفی مستقل X_i را بررسی کرد؛ (۱) پراکنش توابع توزیع و تمرکز، (۲) قضایای حد نسبت و هسته‌های پتانسیل، (۳) مجموعه نقاط انباشتگی S_n/γ_n برای $\gamma = (\gamma_n)$ مناسب، برای حالتی که X_i ها iid باشند. وجود عبارت «بدون شرایط گشتاوری» (و حذف «هم‌توزیعی») در عنوان آن مقاله نمونه‌ای از عادت ریشه‌دار او برای رسیدن به نتایج کلی است، اما او در برابر وسوسه بعد بالاتر از یک مقاومت می‌کرد. بخش‌های (۱) و (۲) بررسی مهمی درباره نظریه توزیعی پیشین هری و دیگران از جمله [K۴۱] و قضایای حد نسبت است که در بالا ذکر شد.

بخش (۳)ی [K۵۱] مربوط است به نظریه «قوی» S_n/γ_n . تعریف کنید

$$A(S, \gamma) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{\overline{S_n/\gamma_n : n \geq m}\}.$$

برای هر تابع توزیع مفروض F از X_i ، یک زیرمجموعه بسته قطعی $B(F, \gamma)$ از خط حقیقی گسترش‌یافته $\mathbb{R}$ وجود دارد چنان‌که به‌طور تقریباً حتمی خواهیم داشت $A(S, \gamma) = B(F, \gamma)$. قانون قوی اعداد بزرگ و قانون لگاریتم مکرر را می‌توان به‌نوعی تعیین $B(F, \gamma)$ برای $\gamma_n = n$ و $\gamma_n = \sqrt{2n \log \log n}$ تحت شرایط مناسب دانست. هری مقاله خود را با یک قانون بسیار کلی از لگاریتم مکرر برای مجموعه‌های یک دنباله iid مشروط به شرط لازم و کافی به پایان می‌برد و آن این است که توزیع مشترک آن‌ها، F ، در دامنه رُباش جزئی قانون نرمال قرار گیرد.

قضیه ۵.۳ ([K۴۳، K۵۱]). (الف) اگر $B(F, (n))$ شامل دو نقطه یا بیشتر باشد، آنگاه شامل

$-\infty$ و $+\infty$ است.

(ب) برای هر زیرمجموعه بسته B از $\bar{\mathbb{R}}$ که $\{-\infty, +\infty\}$ را در بر داشته باشد، F ای وجود دارد به طوری که $B(F, (n)) = B$.

هری سؤالی درباره مجموعه $B(F, (n^\alpha))$ مطرح می‌کند و بعداً در کار مشترکی با اریکسون^۱ به آن می‌پردازد. فرض کنید $B_s(F, (n^\alpha))$ مجموعه‌ای از $b \in \bar{\mathbb{R}}$ ها باشد به طوری که دنباله‌ای غیرتصادفی مثل n_k وجود داشته باشد که وقتی $k \rightarrow \infty$ تقریباً حتمی در شرط $S_{n_k}/n_k^\alpha \rightarrow b$ صدق کند. بررسی رابطه بین $B(F, (n^\alpha))$ و زیرمجموعه آن $B_s(F, (n^\alpha))$ مرکب از «حدهای قوی» جالب توجه است.

قضیه ۶.۳ ($[K53]$). (الف) فرض کنید $\frac{1}{p}, \alpha > 1, \alpha \neq 1$ و $B_s(F, (n^\alpha)) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ در این صورت $B_s(F, (n^\alpha)) \cap \mathbb{R}$ برابر با یکی از مجموعه‌های $(-\infty, 0]$ ، $[0, \infty)$ ، و $\mathbb{R}$ است و هریک از این سه امکان می‌تواند اتفاق بیفتد.

(ب) فرض کنید $\alpha = 1$. برای هر زیرمجموعه بسته B از $\bar{\mathbb{R}}$ ای وجود دارد به طوری که $B_s(F, (n)) = B$.

بعداً هری حدس اریکسون $[54]$ را اثبات کرد که بیان می‌کرد هر قدم‌زدن تصادفی d بُعدی کلی دست‌کم به همان سرعت یک قدم‌زدن تصادفی متقارن ساده واگرا است.

قضیه ۷.۳ ($[K64]$). فرض کنید (X_i) یک دنباله از متغیرهای تصادفی $\mathbb{Z}^d$ -مقدار iid باشد که تکیه‌گاه آن‌ها مشمول در هیچ ابرصفحه‌ای نیست و $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. همچنین، فرض کنید تابع $(0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ ψ به گونه‌ای باشد که وقتی $t \rightarrow \infty$ داشته باشیم $\psi(t)/t^{\frac{1}{d}} \rightarrow 0$ و (S_n^*) یک قدم‌زدن تصادفی متقارن ساده روی $\mathbb{Z}^d$ باشد. اگر وقتی $n \rightarrow \infty$ داشته باشیم (به طور تقریباً حتمی) $\frac{|S_n^*|}{\psi(n)} \rightarrow \infty$ ، آنگاه وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم (به طور تقریباً حتمی) $\frac{|S_n|}{\psi(n)} \rightarrow \infty$.

هری در کار مشترکی با دورت^۲ و لولر^۳، زیر لوای قمار، رفتار درازمدت قدم‌زدن (S_n) در $\mathbb{Z}$ با گام‌های مستقل (X_i) را بررسی کرد؛ در اینجا هر گام می‌تواند یکی از اعضای مجموعه متناهی $\mathcal{D}$ مرکب از توزیع‌ها با میانگین صفر باشد. آن‌ها در پاسخ به سؤالی از اسپاتارو^۴ ثابت کردند که هریک از حالات زیر ممکن است رخ دهد: (۱) $\mathbb{P}(S_n \rightarrow \infty) = 1$ ، یا (۲) $\mathbb{P}(S_n \rightarrow -\infty) = 1$ ، یا (۳) نوسان‌های گذرا بین مقادیر $\pm\infty$ وجود دارد. شرط (۱) با $1 \rightarrow \mathbb{P}(S_n > 0)$ معادل است، و

¹K. Bruce Erickson ²R. Durrett ³G. Lawler ⁴Aurel Spătaru

همچنین است برای (۲). اینک فرض کنید $\mathcal{D} = \{F_1, F_2\}$ که در آن F_i دارای واریانس نامتناهی اما گشتاور q_i ام متناهی است و $q_i \in (1, 2)$. وقتی $q_1 + q_2 > 3$ ، توزیع‌های (X_i) را هرطور انتخاب کنیم، به‌طور هم‌زمان داریم $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n < \circ) > \circ$ و $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n > \circ) > \circ$.

۴.۳ هری و قدم‌زدن تصادفی بعد از سال ۱۹۹۲

توجه هری، بعد از حل مسئلهٔ پرکولاسیون روی $\mathbb{Z}^2$ در سال ۱۹۸۰ (به قضیهٔ ۱.۷ مراجعه کنید)، به سمت پرکولاسیون و حوزه‌های مرتبط با آن جلب شد. او در اقامتی که در استرالیا در سال ۱۹۹۰ داشت به مسائل قدیمی‌تری توجه کرد و بین سال‌های ۱۹۹۲ تا ۲۰۰۴ ده مقاله با همکاری راس ملر^۱ در مورد قدم‌زدن‌های تصادفی منتشر کرد. این آثار قدری فنی‌اند و صورت کامل نتایج آن‌ها (از جمله حالت‌های همگرایی به‌کار رفته) را در اینجا نمی‌آوریم.

فرض کنید (X_i) دنباله‌ای iid با مجموع جزئی $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ باشد. برای $n \geq 1$ مفروض، فرض کنید $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \dots \geq X_{(n)}$ معرف آماده‌های ترتیبی (نزولی) از زیردنبالهٔ $(X_i : i = 1, 2, \dots, n)$ ، و $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ زیردنبالهٔ مقادیر قدرمطلق با ترتیب مجدد (ترتیب نزولی) باشد. برای $n, 1, 2, \dots, r$ ، مجموع‌های پیراسته به‌صورت

$$^{(r)}S_n = S_n - X_{(1)} - \dots - X_{(r)}, \quad ^{(r)}\bar{S}_n = S_n - X^{(1)} - \dots - X^{(r)}$$

تعریف می‌شود، و به دو طریق درجهٔ تسلط مجموع کلی S_n را نسبت به جمع‌وندها نشان می‌دهند. استفاده از مجموع پیراسته برای عدد ثابت r «پیرایش سبک» نام دارد. مقاله [K۱۲۴] شرایط لازم و کافی برای مجموع‌های سبک پیراسته دارد تا روابط $^{(r)}S_n/X_{(r)} \rightarrow \infty$ و $^{(r)}\bar{S}_n/|X^{(r)}| \rightarrow \infty$ وقتی $n \rightarrow \infty$ برقرار شود. کستن و ملر در [K۱۵۰] درستی حدهای $S_n \rightarrow \infty$ و $S_n/n \rightarrow \infty$ را بررسی و شرایطی به دست آورده‌اند که تحت آن‌ها، با قبول نمادگذاری قضیهٔ ۶.۳، داریم $\infty \in B_s(F, 1)$ و (یا) $\infty \in B_s(F, n)$. آن‌ها در [K۱۷۶] به تأثیر پیرایش روی صورت تعمیم‌یافتهٔ قانون‌های لگارتم مکرر پرداخته‌اند.

کستن و ملر در [K۱۳۵, K۱۴۰] شرایط لازم و کافی را برای برقراری $^{(r)}S_n/C_n \rightarrow \pm\infty$ و $^{(r)}\bar{S}_n/C_n \rightarrow \pm\infty$ وقتی $n \rightarrow \infty$ و C_n ناتصادفی است ارائه کردند. البته این نتایج به‌کار قبلی هری در مورد حدهای قوی نسبت S_n/γ_n مربوط می‌شود؛ قضیه‌های ۵.۳ و ۶.۳ را ببینید.

^۱Ross Maller

برای مثال، نتایج آن‌ها بیانگر این مطلب است که $\mathbb{P}(S_n > 0) \rightarrow 1$ اگر و تنها اگر S_n در احتمال به ∞ میل کند؛ این حکم مورد توجه دیوانگان قمار با جیب‌های گشاد است. گشتاورهای زمان اولین ورود و آخرین خروج از بازه $(-\infty, x]$ در $[K147]$ بررسی شده است و مرتبه‌های بزرگی چنین گشتاورهایی برای $x \rightarrow \infty$ تعیین شده‌اند. «پایداری» زمان‌های خروج از یک نوار یا نیم‌صفحه از $\mathbb{R}^2$ و ارتباط‌های احتمالی آن با مبحث تحلیل‌های دنباله‌ای در $[K158]$ مطالعه شده است.

در دو مقاله $[K154, K155]$ نسبت S_n/n^κ وقتی $n \rightarrow \infty$ بررسی شده است. فرض کنید $\mathbb{P}(S_n \rightarrow \infty) = 1$ و $\kappa \geq 0$ و $\kappa \neq 1$ برای $\kappa > 1$ فرض کنید $\mathbb{E}(|X_1|^{1/\kappa}) = \infty$. در این صورت، احتمال اینکه S وقتی $a \rightarrow \infty$ قبل از عبور از $y = -ax^\kappa$ از خم $y = ax^\kappa$ عبور کند به ۱ میل می‌کند. این گزاره شهودی ساده را نمی‌توان به راحتی اثبات کرد، و در اصل، برای $\kappa = 1$ نادرست است. در مقاله $[K155]$ نتایج گفته‌شده را به برقراری دو حد $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n/n^\kappa = \infty$ و $\limsup_{n \rightarrow \infty} |S_n|/n^\kappa = \infty$ به مفهوم تقریباً حتمی مرتبط کرده‌اند و شرایط لازم و کافی برای آن‌ها به دست داده شده است.

منظور از دامنه تغییرات R_n برای یک قدم‌زدن تصادفی تعداد نقاط متمایز ملاقات‌شده تا گام n است. هامانا^۱ و کستن $[K166, K169]$ برای دامنه قدم‌زدن تصادفی روی $\mathbb{Z}^d$ وقتی $d \geq 1$ یک نوع اصل انحراف بزرگ را اثبات کردند. در اینجا زیرجمعی بودن دنباله (R_n) به کار می‌آید، و برای اولین بار است که معلوم می‌شود اثبات حالت $d = 1$ دشوارتر از همه است. برخی نتایج خاص و حدس‌هایی برای دامنه قدم‌زدن تصادفی روی گراف کیلی در $[K181]$ ارائه شده است.

۵.۳ قدم‌زدن تصادفی در محیط تصادفی

قدم‌زدن‌های تصادفی معمولاً روی $\mathbb{Z}$ (یا $\mathbb{Z}^d$) یا به‌طور کلی روی $\mathbb{R}^d$ به‌ازای $d \geq 1$ ای در نظر گرفته می‌شوند. گروه‌ها زمینه کلی‌تری برای آن‌ها فراهم می‌کنند مثل بخش ۲.۳، اخیراً هم توجه زیادی به قدم‌زدن‌های تصادفی روی گراف‌های همبند جلب شده است. در همه این زمینه‌ها، گراف زیربنائی G ثابت است و تصادفی بودن فقط ناظر بر قدم‌زدن است، و فرایند متعاقب آن یک زنجیره مارکوف تشکیل می‌دهد. اگر محیط نیز تصادفی باشد، وضعیت بسیار پیچیده‌تر است. در چنین حالتی، مکان راه‌پیمای دیگر یک زنجیره مارکوف نیست و عموماً زیردامنه‌هایی از محیط وجود دارد

¹Yuji Hamana

که قدم‌زدن در آن‌ها به‌طور غیرعادی اتفاق می‌افتد. چنین فرایندی «قدم‌زدن تصادفی در محیط تصادفی» (RWRE)^۱ نامیده می‌شود.

در خط یک‌بُعدی $\mathbb{Z}$ ، قدم‌زدن تصادفی در محیط تصادفی ساده به این صورت است: (۱) نمونه‌گیری از متغیرهای تصادفی برای هر بَست، که احتمال‌های تغییر وضعیت (چپ یا راست؟) را هنگام رسیدن راه‌پیما به هر بَست بیان می‌کند، و (۲) انجام قدم‌زدن تصادفی (یا به‌طور دقیق‌تر، یک زنجیره مارکوف) با احتمال‌های داده‌شده تغییر وضعیت. قدم‌زدن تصادفی در محیط تصادفی یک زنجیره مارکوف است به شرطی که محیط احتمال‌های تغییر وضعیت معین باشد، اما خودش مارکوفی نیست زیرا، مادامی‌که راه‌پیما حرکت می‌کند در مورد محیط تصادفی اطلاعات کسب می‌کند. فرض کنید $A = \{\alpha_x : x = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid با مقادیری در بازه $[0, 1]$ باشد و $\beta_x = 1 - \alpha_x$ به شرط معلوم بودن A ، فرض کنید $X = (X_n)$ یک قدم‌زدن تصادفی روی $\mathbb{Z}$ باشد که، در وضعیت x با احتمال α_x (β_x) یک قدم به سمت راست (چپ) حرکت می‌کند.

بنویسید $\rho = \beta_0 / \alpha_0$. فرض کنید $\kappa \in (0, \infty)$ ای وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathbb{E} \log \rho < 0, \quad \mathbb{E}(\rho^\kappa) = 1, \quad \mathbb{E}(\rho^\kappa \log^+ \rho) < \infty,$$

و به‌علاوه $\log \rho$ غیرحسابی باشد. کستن، کازلوف، و اشپیتسر در سال ۱۹۷۵ قضیه زیر را علاوه بر مطالب دیگر اثبات کردند.

قضیه ۸.۳ ($[K56]$). ثابت‌های A_κ ، $B_i > 0$ ، و قوانین پایدار L_κ با شاخص κ وجود

دارند به‌طوری‌که وقتی $n \rightarrow \infty$ روابط زیر برای $x \in \mathbb{R}$ های مناسب برقرارند.

(الف) اگر $\kappa < 1$ ، آنگاه $\mathbb{P}(X_n \leq xn^\kappa) \rightarrow 1 - L_\kappa(x^{-1/\kappa})$.

(ب) اگر $\kappa = 1$ ، آنگاه برای $\delta_n \sim n/(A_1 \log n)$ های مناسب داریم

$$\mathbb{P}(X_n - \delta_n \leq xn/(\log n)^2) \rightarrow 1 - L_1(-xA_1^2).$$

(ج) اگر $1 < \kappa < 2$ ، آنگاه $\mathbb{P}(X_n - (n/A_\kappa) \leq xn^{1/\kappa}) \rightarrow 1 - L_\kappa(-xA_\kappa^{1+1/\kappa})$.

(د) اگر $\kappa = 2$ ، آنگاه $\mathbb{P}(X_n - (n/A_2) \leq x(n \log n)^{1/2} B_1 A_2^{-3/2}) \rightarrow \Phi(x)$.

^۱ random walk in random environment

(ه) اگر $\kappa > 2$ ، آنگاه $\mathbb{P}(X_n - (n/B_2) \leq xn^{\frac{1}{2}} B_2 B_3^{-2/2}) \rightarrow \Phi(x)$

در اینجا، وقتی $\kappa < 1$ ، L_κ روی $[0, \infty)$ متمرکز است، و وقتی $\kappa > 1$ دارای میانگین صفر است. تابع توزیع نرمال استاندارد با Φ نشان داده شده است.

در حالت خاص، وقتی $\kappa < 1$ ، X_n دارای مرتبه n^κ است. پیچیدگی‌های قضیه اصلی [K56] در بالا آمده‌اند تا عزم و توانایی هری را در حل یک مسئله نمایان سازد. سینیایی^۱ در حالت بحرانی (بازگشتی)، وقتی ρ از طرف ۰ و ۱ کران دار است، و علاوه بر آن در روابط

$$\mathbb{E} \log \rho = 0, \quad \sigma^2 = \mathbb{E}[(\log \rho)^2] \in (0, \infty)$$

صدق کند [۱۱۱] نشان داد که تحت اندازه نوردی $\mathbb{P}^2$ داریم $\sigma^2 X_n / (\log n)^2 \Rightarrow L$ که در آن L تابعی از فرایند استاندارد وینر است. هری توانست تابع چگالی L را محاسبه کند (به [۶۱] مراجعه کنید).

قضیه ۹.۳ ([K۹۳]). متغیر تصادفی L دارای تابع چگالی زیر است

$$\frac{d}{dx} \mathbb{P}(L \leq x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\left(-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{8} |x|\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

هری در [K۶۲] دوباره به موضوع قدم‌زدن تصادفی در محیط تصادفی رو می‌کند و نشان می‌دهد، تحت شرط $\mathbb{E}\rho < 1$ ، محیط از دید راه‌پیمای دارای توزیع حدی است. برای حالت $\mathbb{E}\rho = 1$ نیز نتایج جزئی با اثبات‌هایی «محفوظ نزد نویسنده» بیان شده است.

موارد بالا را می‌توان کارهای اولیه در نظریه (RWRE) و حوزه مرتبط با آن به اسم همگن‌سازی عملگرهای دیفرانسیلی با ضرایب تصادفی محسوب کرد. قدم‌زدن تصادفی در محیط تصادفی در ابعاد بالاتر به فنون مختلفی نیاز دارد و پیشرفت عمده‌ای به دست بریکمون و کوپپاین [۲۱] و افراد دیگری حاصل شده است (همچنین به مراجع مقاله [۱۱۶] مراجعه کنید).

انواع مختلفی از مسائل (RWRE) وجود دارد. یکی از این گونه‌ها زمانی پیش می‌آید که قدم‌زدن روی یک گراف تصادفی، مانند یک درخت یا بخشی از یک شبکه، باشد؛ کار هری در این زمینه‌ها در قضیه‌های ۳.۶، ۶.۷، و ۷.۷ خلاصه شده‌اند. در دستگاه‌های دیگر، تحول محیط نسبت به زمان طوری است که به مسیر قدم‌زدن تصادفی بستگی دارد. در مدل قدم‌زدن تصادفی با

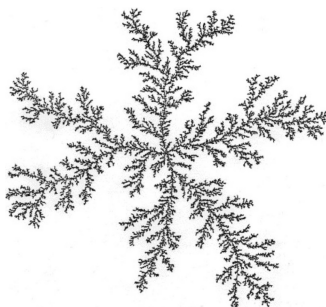
^۱Yakov G. Sinai ^۲annealed measure

یال‌های تقویت‌شده عبور از هر یال با احتمالی وابسته به وزن آن صورت می‌گیرد و این وزن با عبور از آن یال افزایش می‌یابد. هری با همکاری دورت و لیمیک [K۱۶۸] نشان داد که قدم‌زدن «یک‌بار تقویت‌شده» در [۴۱] روی یک درخت از نوع گذرا است، و فاصله راه‌پیما از نقطه شروع به‌طور خطی نسبت به زمان افزایش می‌یابد. این مدل از همان زمان مورد توجه قرار گرفته است، و برای نتایج جدید در این باره خواننده را به [۳۴] ارجاع می‌دهیم.

و در پایان، دن هولاند، سی‌دوراویچس، و کستن [K۱۹۲] یک دستگاه مرکب از دو نوع ذره را روی $\mathbb{Z}^d$ مطالعه کردند که در آن توزیع پرش یک ۲-نوع ذره به وجود یا عدم وجود ۱-نوع ذره بستگی دارد. گرچه نتایج بالا برای فضا زمان گسسته‌اند، دو مقاله مشترک هری با پاپانی‌کولانو [K۶۸, K۷۵] در سال‌های ۱۹۷۹ تا ۱۹۸۰ متوجه موضوع پخش در یک محیط تصادفی پیوسته‌اند. آن‌ها در مدلی برای پخش متلاطم معادله دیفرانسیل تصادفی $\dot{x}(t) = v + \epsilon F(x(t))$ را در نظر گرفتند که در آن $v \neq 0$ برداری ثابت و F یک فرایند مانا با میانگین صفر است و صادق در یک شرط همواری. نتیجه اصلی آن‌ها این است که خاصیت پخشندگی، وقتی $\epsilon \downarrow 0$ ، حدی است. شتاب تصادفی، و معادله $\ddot{x}(t) = \epsilon F(x, \dot{x})$ برای بُعد $d \geq 3$ موضوع [K۷۵] است که در آن ثابت می‌کنند وقتی $\epsilon \downarrow 0$ تابع x به یک فرایند پخش همگرا می‌شود.

۶.۳ انبوهش با پخش محدود

انبوهش^۱ با پخش محدود یک مدل تصادفی است که باور بر این است که رشد درخت‌گونه و همبستگی‌های قانون توانی را از خود نشان می‌دهد، موضوعی که ویتن و ساندن [۱۲۲] آن را برای حجم‌های متناهی مطرح کردند (شکل ۱ را ببینید).



شکل ۰۱. شبیه‌سازی یک انبوهش دو بُعدی با پخش محدود

^۱ aggregation

اکنون نتایج هری را در مورد مدل انبوهش با پخش محدود برای یک خوشه در حال رشد روی شبکه $\mathbb{Z}^d$ با شرط $d \geq 2$ بیان می‌کنیم.

فرض کنید A_0 مبدأ $\mathbb{Z}^d$ باشد. به‌لحاظ شهودی، رشد به شرح زیر صورت می‌گیرد. به شرط معلوم بودن مجموعه A_n ، با شروع یک قدم‌زدن تصادفی «در بی‌نهایت» و توقف آن هنگامی که به نقطه‌ای در مجاورت A_n رسید و سپس اضافه کردن آن نقطه به A_n مجموعه A_{n+1} به‌دست می‌آید. مفهوم «رهاشدن در بی‌نهایت»^۱ را می‌توان به این معنی دانست که از نقطه x شروع کنیم و سپس $|x|$ را به بی‌نهایت میل دهیم. وقتی $d = 2$ ، این قدم‌زدن تصادفی با احتمال ۱ به A_n اصابت می‌کند، درحالی‌که برای $d \geq 3$ احتمال حدی اصابت به A_n صفر است. در حالت اخیر، شرط را اصابت به A_n قرار می‌هیم و با میل دادن $|x|$ به ∞ به حد مذکور می‌رسیم. این روش را می‌توان با استفاده از اندازه هارمونیک به طور صوری بیان کرد ([K۹۷, K۱۱۹]).

شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای [۱۲۲] و پژوهش‌های دیگر نشان می‌دهد که A_n مثل یک مجموعه برخال رشد می‌کند با بازوهای که در سراسر فضا گسترش می‌یابند و آغوشش تمایل دارد که ذره ورودی را با اینکه از مبدأ دور است به دام بیندازد. یکی از راه‌های اندازه‌گیری این اثر به کار بردن شعاع A_n است با تعریف $\text{rad}(A_n) = \max\{|a| : a \in A_n\}$ ، و باور بر این است که $\text{rad}(A_n)$ به صورت n^α رشد می‌کند که در آن α عددی ثابت است. از نابرابری هم‌محیطی نتیجه می‌گیریم که α ای وجود دارد که $1 \leq \alpha \leq d^{-1}$.

قضیه ۱۰.۳ ([K۹۸, K۱۱۳]). ثابت $C = C(d)$ وجود دارد به‌طوری‌که نامساوی زیر به مفهوم نهایتاً تقریباً حتمی برقرار است

$$\text{rad}(A_n) \leq \begin{cases} Cn^{2/(d+1)} & d \geq 2, d \neq 3 \\ C(n \log n)^{1/2} & d = 3. \end{cases}$$

کران گفته‌شده در حالت $d = 3$ را لولر به‌صورت $\text{rad}(A_n) \leq Cn^{1/2}(\log n)^{1/4}$ بهبود داده است [۹۳، قضیه ۲۰۶۰۱]. با توجه به این موضوع، نتایج قضیه ۱۰.۳ (به سال ۱۹۹۰) بهترین نتایج دقیقی است که تاکنون برای انبوهش با پخش محدود در $\mathbb{Z}^d$ پیدا شده است. فعلاً هیچ کران پایینی نابدیهی برای α در دست نداریم.

^۱release at infinity

از شبیه‌سازی‌ها چنین بر می‌آید که $\text{rad}(A_n) \sim Cn^\alpha$ که در آن «اندازه» $1/\alpha$ در رابطه

$$\frac{1}{\alpha} \approx \begin{cases} \frac{1}{d} & d = 2 \\ \frac{d^2 + 1}{d + 1} & d \text{ بزرگ باشد} \end{cases}$$

صدق می‌کند. برای مثال، [۱۱۹] را ببینید.

۷.۳ قدم‌زدن تصادفی در چشم‌انداز تصادفی

به نظر می‌رسد قدم‌زدن تصادفی در چشم‌انداز تصادفی^۱ را کستن و اشیپتسر [K۶۹] مطرح کردند. فرض کنید $\{\xi(x) : x \in \mathbb{Z}\}$ متغیرهای تصادفی iid و $W_n = \sum_{i=1}^n \xi(S_i)$ چشم‌انداز تجمعی یک قدم‌زدن تصادفی مستقل (S_n) باشد. فرایند (W_n) ، وقتی به‌طور مناسب نرمال‌شده باشد، با این فرض که $\xi(x)$ و قدم‌های X_i متعلق به دامنه‌های رُباش قوانین پایدار باشند، به فرایندی خودمشابه همگرا می‌شود.

بسیاری، از جمله کاستلین [۸۷] و کین و دِن هولاندر [۸۸]، نظریهٔ ارگودیک فرایندهای چشم‌انداز را که توسط قدم‌زدن تصادفی تدریجاً نظاره می‌شوند بسط دادند.

در یک مسئلهٔ قدم‌زدن تصادفی در چشم‌انداز تصادفی که اخیراً مطرح شده است فرض شده است که فقط دو چشم‌انداز ممکن ξ, ξ' روی گراف G وجود دارد. آیا یک راه‌پیمای تصادفی روی $G = (V, E)$ با مشاهدهٔ پیاپی چشم‌انداز موضعی آن می‌تواند تصمیم بگیرد که کدام یک از این دو چشم‌انداز درست است؟ در تفسیر تصادفی این سؤال مجموعهٔ چشم‌اندازها به‌صورت $\Xi(k) = \{0, 1, \dots, k\}^V$ و یک چشم‌انداز تصادفی $\eta \in \Xi$ براساس اندازهٔ حاصل‌ضرب یکنواخت روی $\Xi(k)$ انتخاب می‌شود. مفهوم «تمایز بین چشم‌اندازها» نیاز به تعریف دارد، و وقتی تعریف شد، به قضیهٔ زیر از بنیامینی و کستن می‌رسیم.

قضیه ۱۱.۳. (الف) [K۱۴۲] برای $G = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2$ ، $k = 1$ ، و هر چشم‌انداز ثابت $\xi \in \Xi(1)$ ، تقریباً هر η قابل تشخیص از ξ است.

(ب) [K۱۴۴] فرض کنید $G = \mathbb{Z}$ و $\hat{\xi}$ با تغییر مقدار $\xi(0)$ در مبدأ از چشم‌انداز $\xi \in \Xi(k)$ به دست آید. اگر $k \geq 5$ آنگاه تقریباً برای هر $\eta \in \Xi(k)$ ، همچنین η و $\hat{\eta}$ قابل تشخیص‌اند.

این مسئله زیبا در جهت‌های مختلفی پیشرفت‌های زیادی کرده است که بخشی از آن متعلق

^۱ random walk in random scenery (RWRS)

به هنری ماتسینگر، یکی از دانشجویان سابق دکترای هری، است. برای دیدن منابع مربوط به این موضوع [۹۸] را توصیه می‌کنیم.

۴ حاصل ضرب ماتریس‌های تصادفی

هری کستن و هیلل فورستنبرگ سال تحصیلی ۱۹۵۸-۱۹۵۹ در دانشگاه پرینستون مربی بودند و همانجا به کارهای بلمن در آن زمان علاقه‌مند شدند. بلمن در مقاله [۱۵]، یکی از ۱۹ اثر فهرست‌شده بلمن در سال ۱۹۵۴ در پایگاه MathSciNet، نتایجی برای رفتار مجانبی حاصل ضرب n ماتریس تصادفی مستقل از مرتبه 2×2 ارائه کرده بود. فورستنبرگ و کستن توانستند این نتایج را به میزان قابل توجهی در مقاله‌ای که اکنون معروف است گسترش دهند؛ مقاله‌ای که بلمن آن را «دشوار و مبتکرانه» وصف کرده است.

قضیه ۱۰۴ ([K۱۳]). فرض کنید $M_1, M_2, \dots$ دنباله ارگودیک مانایی از ماتریس‌های تصادفی $d \times d$ باشد به طوری که $\mathbb{E} \log^+ \|M_1\| < \infty$. در این صورت، $Y_n = M_n M_{n-1} \cdots M_1$ رابطه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Y_n\| = E$ (به معنای تقریباً حتمی) صدق می‌کند که در آن داریم $E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log \|Y_n\|)$.

در اینجا $\|A\|$ نرم سطری ماتریس $A = (a_{ij})$ است، یعنی $\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$. یک قضیه حد مرکزی نیز تحت شرایط مناسب روی M_n برقرار است.

آن‌ها در این بررسی از ویژگی زیرجمعی استفاده کرده‌اند، اما پیش‌گویی چیزی به اسم نظریه فرایندهای تصادفی زیرجمعی را (بخش ۷.۷ را ببینید) نکرده بودند، نظریه‌ای که بعداً برهان‌های کوتاهی برای برخی از نتایج آن‌ها به دست داد. قضیه ارگودیک ضربی اسلِدک [۱۰۳] را که چندین سال بعد از آن مطرح شد می‌توان به‌نوعی تعمیم نتایج [K۱۳] در نظر گرفت.

هری در مقاله [K۵۲] رابطه بازگشتی تصادفی $Y_n = M_n Y_{n-1} + Q_n$ را مطالعه کرد، که در آن (M_n, Q_n) زوج‌های مستقل و هم‌توزیع از ماتریس‌های $d \times d$ ، و Y_n بردارهای d تایی‌اند. او اشاره می‌کند که چنین معادلاتی در زمینه‌های مختلفی از جمله قدم‌زدن تصادفی در محیط‌های تصادفی، فرایندهای شاخه‌ای در یک محیط تصادفی، نظریه کنترل، و مدل‌هایی برای تکامل و توارث فرهنگی رخ می‌دهند. کلید این مطالعه، بررسی رفتار حاصل ضرب‌های $M_1 M_2 \cdots M_n$ است. نتایج او ارتباطاتی با قوانین پایدار و نظریه جدیدی برای حاصل ضرب ماتریس‌های تصادفی دارد. نزدیک

موضوع اصلی آن مقاله (وقتی $d = 1$)، معادله تصادفی $Y \stackrel{d}{=} MY + Q$ قرار داد، و این نتیجه که چنین Y ای می‌تواند دُم‌سنگین باشد. آن مقاله باعث ایجاد توجه بسیاری به احتمال، آمار، و ریاضیات مالی شد، به قول نویسندگان [۲۳]: «مقاله تحسین برانگیز کستن باعث شد چندین نسل از پژوهشگران روی موضوعات بسیار نزدیکی کار کنند».

بعد از آن، کستن و اشپیتسر [K۸۵] در پژوهشی، که انگیزه آن فرایند گعده [پوتلاچ]^۱ بود، همگرایی ضعیف حاصل ضرب‌های ماتریس‌های تصادفی نامنفی مستقل را بررسی کردند، به‌ویژه شرایطی را به دست آوردند که تحت آن حاصل ضرب، بدون نرمال‌سازی، به حدی که ماتریس صفر نیست به‌طور ضعیف همگرا می‌شود.

۵ قدم‌زدن‌های ازخودگریز

قدم‌زدن ازخودگریز روی یک گراف مسیری است که در آن از هیچ رأسی بیش از یک‌بار عبور نشده است. قدم‌زدن‌های ازخودگریز را اور [۱۰۲] به‌صورت یک مدل ساده برای بسیار بلندزنجیر مطرح کرد (کتاب [۵۶] را ببینید)، و مسئله شمارش آن‌ها روی یک گراف مشخص مسئله ترکیبیاتی مهمی با پیامدهایی هم در ریاضیات و هم در فیزیک است.

فرض کنید $\mathbb{Z}^d$ مشبکه ابرمکعبی d بُعدی با شرط $d \geq 2$ ، و χ_n تعداد قدم‌زدن‌های ازخودگریز n گامی باشد که از مبدأ شروع می‌شوند. مسئله اصلی در شمارش این تعداد بیان رفتار مجانبی χ_n است وقتی $n \rightarrow \infty$ ، و همچنین تعیین شعاع یک قدم‌زدن ازخودگریز «نوعی» به‌طول n . هَمَرزلی و مورتِن در مقاله وزین [۷۳] از ویژگی زیرجمعی استفاده کردند و نشان دادند که «ثابت اتصال» $\kappa = \kappa(\mathbb{Z}^d)$ از رابطه $\frac{1}{n} \log \chi_n \rightarrow \log \kappa$ وقتی $n \rightarrow \infty$ تعیین می‌شود و این یعنی $\chi_n = \kappa^{n(1+o(1))}$.

قدم‌زدن‌های ازخودگریز در دشواری شهرت پیدا کرده‌اند، و علی‌رغم پیشرفت‌هایی که طی ۵۰ سال و بیشتر حاصل شده است هنوز چیزهای زیادی از آن‌ها نمی‌دانیم. برای مثال، با وجود قضیه حد نسبت منسوب به هری به سال ۱۹۶۳، اثبات اینکه $\chi_{n+1}/\chi_n \rightarrow \kappa$ وقتی $n \rightarrow \infty$ همچنان یک مسئله حل نشده است.

قضیه ۱.۵. فرض کنید $d \geq 2$.

(الف) [K۲۴] تعداد قدم‌زدن‌های ازخودگریز n گامی χ_n روی $\mathbb{Z}^d$ با شروع از مبدأ، برای ثابتی

^۱potlatch

مانند A در شرط $\left| \frac{\chi_{n+2}}{\chi_n} - \kappa \right| \leq An^{-\frac{1}{4}}$ صدق می‌کند.
 (ب) $[K28]$ برای ثابتی مانند B ، داریم $\chi_n \leq \kappa^n \exp(Bn^{\frac{2}{d+2}} \log n)$.

قسمت (الف) با استفاده از یک جراحی اثبات شد که در آن بخشی از قدم‌زدن از خودگزیز با بخشی دیگر جایگزین شد؛ علت ظاهر شدن عدد ۲ این است که $\mathbb{Z}^d$ دوبخشی است و تعدد بخش‌های یک طول در این جراحی حفظ می‌شود. هری در این اثبات روشی ارائه کرد که اکنون آن را «قضیه الگوی کستن» می‌نامند و از همان زمان در بسیاری از زمینه‌ها بسیار سودمند بوده است. این قضیه حاکی از این است که هر پیکربندی از k قدم متوالی که بتواند بیش از یک‌بار در یک قدم‌زدن از خودگزیز n گامی ظاهر شود، باید حداقل an بار، به‌ازای $a > 0$ ، در همه قدم‌زدن‌های از خودگزیز به‌جز آن‌هایی که «به‌طور نمایی کم» اتفاق می‌افتند، رخ دهد.

علی‌رغم اینکه به‌سادگی از زیرجمعی‌بودن نتیجه می‌شود که $\chi_n \geq \kappa^n$ ، یافتن کران‌های بالا روی χ_n مشکل‌تر است. قبلاً همرزلی و ولش [۷۴] ثابت کرده بودند که برای هر $d \geq 2$ ، $\chi_n \leq \kappa^n \exp(Bn^{\frac{1}{d}})$ و قسمت (ب) قضیه ۱.۵ صورت بهبودیافته این حکم است برای $d \geq 3$. تا قبل از انتشار [۴۷] در سال ۲۰۱۸ که یک توان بهبودیافته از مرتبه $n^{\frac{1}{d}-\epsilon}$ به دست داد، نابرابری همرزلی-ولش بهترین نابرابری در حالت $d = 2$ بود. هارا و اسلید [۷۷، ۷۸] در سال ۱۹۹۲ بسط توری‌مانند^۱ برای قدم‌زدن‌های از خودگزیز پیدا کردند که برای $d \geq 5$ نتیجه می‌داد $\chi_n \sim C\kappa^n$. قسمت (ب) در قضیه بالا، برای $d = 3, 4$ ، همچنان بهترین کران بالا است. همان‌طور که در [۹۷، ص ۶۹] آمده است، هری قسمت (ب) را بیان کرده است، اما او در [K28] فقط وجود کران ضعیف‌تری را اثبات کرد زیرا که امیدوار بود دیگران نابرابری دقیق‌تر و بهتری پیدا کنند.

نظریه قدم‌زدن‌های از خودگزیز روی مشبکه‌های دو بُعدی یکی از موضوعات مهم پژوهش‌های جاری است. دومینیل-کوپان و اسمیرنوف [۴۹] این حدس دیرینه را اثبات کردند که ثابت اتصال مشبکه شش‌ضلعی $\mathbb{H}$ در رابطه $\kappa(\mathbb{H}) = \sqrt{2} + \sqrt{2}$ صدق می‌کند، و ارتباطی دقیق بین قدم‌زدن‌های از خودگزیز دو بُعدی و ناوردایی همدیس ارائه کردند. اثبات این مطلب که، با تغییر مقیاس مناسب، یک قدم‌زدن از خودگزیز تصادفی یکنواخت n گامی در $\mathbb{H}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ به $\text{SLE}_{\frac{8}{3}}$ همگرا است، مسئله حل‌نشده معروفی است.

¹lace expansion

۶ فرایندهای شاخه‌ای

فرایند شاخه‌ای (یا آن‌طور که هری در سال‌های آخر دوست داشت بگوید، فرایند بینمه-گالتون-واتسون^۱) مهم‌ترین مدل تصادفی برای رشد جمعیت است. در این مدل هر فرد دارای خانواده‌ای متشکل از فرزندان است، و اندازه‌های خانواده‌ها به‌طور مستقل از یک توزیع پیروی می‌کند. فرایندهای شاخه‌ای در بسیاری از زمینه‌های کاربردی مورد استفاده قرار گرفته‌اند و همچنان منشأ مسائل ریاضی شگفت‌انگیزی هستند.

فرض کنید Z_n اندازه نسل n ام یک فرایند شاخه‌ای باشد، $Z_0 = 1$ ، و $\mu = \mathbb{E}(Z_1) < \infty$ ، به راحتی مشاهده می‌شود که $\mathbb{E}(Z_n) = \mu^n$ ، از این رو، μ را می‌توان میانگین نرخ رشد جمعیت در نظر گرفت. اثبات این حکم که فرایند Z تقریباً به‌طور حتم منقرض می‌شود؛ به این معنی که برای n های بزرگ، اگر $\mu < 1$ آنگاه $Z_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ ، و اگر $\mu > 1$ ، صفر نیست تمرینی در دوره کارشناسی (منسوب به کریستنسن و استفنسن به سال ۱۹۳۰ است، [۲] را ببینید) است. در حالت دوم، احتمال انقراض η به راحتی محاسبه می‌شود. این حالت‌ها و مطالب متعدد دیگری در کتاب تأثیرگذار هریس [۸۰] در سال ۱۹۶۳ توضیح داده شده است. آن کتاب شرحی از فرایندهای «چندنوعی» با بیش از یک نوع فرد را نیز دارد.

هری مقاله‌های مهمی در مورد فرایندهای شاخه‌ای نوشت. شاید مبسوط‌ترین کار شناخته‌شده او مقاله [K۳۴] باشد، یکی از سه کار مشترک با استیگم که در رابطه با فرایندهای شاخه‌ای چندنوعی است و در حدود سال ۱۹۶۶ نوشته شده است [K۳۳, K۳۴, K۳۸]. آن‌ها کار لوینسون [۹۵] در مورد همگرایی فرایندهای شاخه‌ای چندنوعی زبربحرانی را بسط دادند و شرایط لازم و کافی روی میانگین مارتینگل متناظر $W_n = Z_n / \mu^n$ را ارائه کردند. این شرط حتی برای فرایندهای صرفاً یک‌نوعی نیز تازه بود و همین شکل ساده‌اش را بیان خواهیم کرد.

قضیه ۱.۶ ([K۳۴]). فرض کنید $Z = (Z_n)$ فرایندی شاخه‌ای با شرط $Z_0 = 1$ و $\mu := \mathbb{E}(Z_1) > 1$ باشد. حد تقریباً حتمی $W = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ در شرط $\mathbb{E}(W) = 1$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر $\mathbb{E}(Z_1 \log^+ Z_1) < \infty$. تحت این شرط، W دارای یک اتم با اندازه η در ۰ است و روی بازه $(0, \infty)$ مطلقاً پیوسته است.

قبلاً این نتایج تحت شرط وجود گشتاور دوم ثابت شده بودند، و به گفته نویسندگان [K۳۴]

^۱Bienaymé-Galton-Watson

یافتن شرط $\mathbb{E}(Z_1 \log^+ Z_1) < \infty$ تنها نکتهٔ بدیع کار آن‌ها است. بحث جالبی دربارهٔ این مطالب و نتایج بیشتری در این باره در [۹۶] آمده است.

قضایای مشهور کولموگوروف [۹۰] و یاگلوم [۱۲۴] سرعت انقراض یک فرایند شاخه‌ای بحرانی (وقتی $\mu = 1$) و حد ضعیف آن را به شرط عدم انقراض به دست می‌دهند. هری با کمک نه و اشپیتسر، با استفاده از ابزارهای «مرسوم»، شرط گشتاور سوم کولموگوروف و یاگلوم را به شرط لازم و کافی روی گشتاور دوم تقلیل داد.

قضیه ۲.۶ ([K۳۲]). فرض کنید $Z = (Z_n)$ فرایندی شاخه‌ای با شرط $Z_0 = 1$ و $\mu := \mathbb{E}(Z_1) = 1$ باشد. اگر $\sigma^2 := \text{var}(Z_1) < \infty$ در $\sigma^2 < \infty$ صدق کند، آنگاه وقتی $n \rightarrow \infty$

$$n\mathbb{P}(Z_n > \circ) \rightarrow \frac{2}{\sigma^2}, \quad \mathbb{P}(Z_n > nx \mid Z_n > \circ) \rightarrow e^{-2x/\sigma^2}.$$

خوشهٔ پرکولاسیون نامتناهی آغازین $\tilde{C}$ زیرگرافی همبند از $\mathbb{Z}^2$ با ویژگی‌های برخال‌گونه است. یک راه درک هندسهٔ $\tilde{C}$ مطالعهٔ واریانس قدم‌زدن تصادفی روی آن است، و به‌ویژه نشان‌دادن اینکه زیربخشی است (بخش ۴.۷ را ببینید). شاید هری برای تدارک حل این مسئله است که در مقالهٔ خود [K۹۴] شرحی از قدم‌زدن تصادفی روی شجرهٔ خانوادگی یک فرایند شاخه‌ای بحرانی مشروط به عدم انقراض را آورده است. نتایج او چنین‌اند.

قضیه ۳.۶ ([K۹۴]). فرض کنید Z یک فرایند شاخه‌ای بحرانی باشد که در شرط $Z_0 = 1$ و $\infty > \text{var}(Z_1) > 0$ صدق می‌کند، و T یک درخت ریشه‌دار با قانون Z و مشروط به عدم انقراض باشد. فرض کنید $X = (X_n)$ یک قدم‌زدن تصادفی روی T و $\mathbb{P}$ اندازهٔ احتمال نوردی متناظر با X باشد. در این صورت، ارتفاع $h(X_n)$ به‌گونه‌ای است که $n^{-\frac{1}{2}}h(X_n)$ به‌طور ضعیف (تحت $\mathbb{P}$) به توزیعی بدون جرم در $\circ$ همگرا است.

بیان حکم بالا برای اندازهٔ سردایشی^۱ مسئله‌ای حل‌نشده است. هری متناظر با آن یک اصل ناوردایی را بدون اثبات در [K۹۴] بیان کرده است و نوشته است: «ما در این زمان فقط یک اثبات خیلی طولانی از [۰.۰] داریم و بنابراین خود را به نتیجهٔ ضعیف‌تر زیر محدود می‌کنیم ...». در حالت فرایند شاخه‌ای بحرانی، مشروط به عدم انقراض، مقیاس‌دهی با ضرب $n^{\frac{1}{2}}$ با حدس الکساندر-اورباخ مطابقت دارد [۵].

^۱quenched

هری در چندین مقاله کار خود را روی خانواده درختی T وابسته به یک فرایند شاخه‌ای بحرانی ادامه داد؛ از جمله $[K۶۳]$ درباره حرکت براونی شاخه‌ای، $[K۱۳۴]$ درباره کاربردی در آب‌شناسی حوضه رودخانه. کستن و پیتل $[K۱۴۸]$ یک رابطه مجانبی برای توزیع توأم ارتفاع و تعداد برگ‌های T اثبات کردند.

هری با کمک دورت و ویمایر در $[K۱۱۶]$ خانواده درختی T_n از یک فرایند شاخه‌ای را، مشروط به اینکه اندازه کل برابر n باشد، مطالعه کرد. هدف از این کار تعیین چگونگی رشد ارتفاع وزن‌دار T_n بود در حالتی که به یال‌های T_n وزن‌های iid منسوب شده باشند. آن‌ها روشی را کشف کردند که طبق آن پاسخ به این سؤال به قانون توانی توزیع وزن بستگی داشت. هری دوباره در $[K۱۳۸]$ به این فرایند یال وزن‌دار توجه کرد و آن را به عنوان یک قدم‌زدن تصادفی شاخه‌ای بحرانی در نظر گرفت که در آن رأس w با وزن یال متناظر $\langle v, w \rangle$ جانشین والدش به اسم v می‌شود. فرض کنید M_n ماکسیمم جانشینی نسل n ام باشد. اگر وزن یال‌ها میانگین صفر داشته باشد، مشروط به عدم انقراض در زمان β_n ، که در آن $\beta \in (0, \infty)$ ، آنگاه دنباله $M_n^{-\frac{1}{2}}$ نسبت به توزیع همگرا می‌شود. این موضوع با نتایج آلدس^۱ درباره درخت تصادفی پیوستار و نتایج لوگال^۲ درباره مار براونی ارتباط دارد.

هری در $[K۵۰]$ یک مدل احتمالاتی برای «جهش تخمی بدون انتخاب در یک جایگاه ژن» در زمینه توارث جمعیت را بررسی کرد. او، تحت فرضی کاملاً فنی، یک قضیه همگرایی برای این مدل را اثبات کرد که تعمیمی برای قضیه حدی اصلی برای فرایندهای شاخه‌ای زیر بحرانی است. معلوم شد که برآوردهای مربوط به هندسه یک فرایند شاخه‌ای نکته مهم در آثار هری با گریمت درباره مقاومت الکتریکی گراف‌های کامل اند $([K۸۲, K۱۶۵])$. او در $[K۱۰۹]$ به منظور استخراج ویژگی‌های تصویرهای مجموعه‌های تصادفی کانتور روابط مجانبی مفصلی برای یک فرایند شاخه‌ای زیر بحرانی با انواع نامتناهی شمارا به دست آورد.

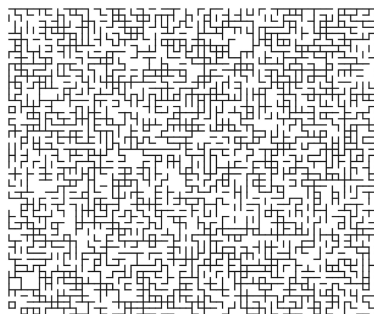
۷ نظریه پرکولاسیون

۱۰.۷ احتمال بحرانی در دو بُعد

فرایند پرکولاسیون مدلی متعارف است برای یک محیط بی‌نظم. برای ملموس کردن بحث، شبکه ابرمکعبی d بُعدی $\mathbb{Z}^d$ را با شرط $d \geq 2$ در نظر بگیرید و فرض کنید $p \in [0, 1]$. یک یال $\mathbb{Z}^d$ را

^۱Aldous ^۲Le Gall

با احتمال p باز و درغیراین صورت آن را بسته می‌نامیم، یال‌های مختلف حالت‌های مستقل دارند. در مورد هندسه زیرگراف القا شده توسط یال‌های باز (مانند شکل ۲) چه می‌توان گفت، و به‌ویژه برای چه مقادیری از p این گراف دارای یک خوشه نامتناهی است؟



شکل ۲. شبیه‌سازی پرکولاسیون بندی روی $\mathbb{Z}^2$ به ازای $p = 0.51$

همان‌طور که هری در پیشگفتار [K۸۰] بیان کرده است، پرکولاسیون هم منبعی از مسائل جالب و هم یکی از موضوع‌های اصلی در نظریه گذارهای فاز در فیزیک است. نظریه ریاضی پرکولاسیون از کار برودبنت و هم‌رزلی [۲۲] درخصوص پدیده پخش از طریق یک محیط تصادفی، مثل مدلی برای انتقال ذرات از میان یک ماسک صورت، سرچشمه گرفته است. نظریه پرکولاسیون در حال حاضر ابزاری کلیدی ریاضیات در بررسی دستگاه‌های برهم‌کنشی و بستری برای آزمایش تکنیک‌های جدید است. نظریه پرکولاسیون دو بُعدی به‌ویژه در نظریه هندسه مسطحه تصادفی، که هم‌اکنون نظریه‌ای مورد توجه است، نقشی بارز داشته است. احتمال پرکولاسیون تابعی با تعریف

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(\text{قرار گیرد})$$

است و احتمال بحرانی به صورت

$$p_c(\mathbb{Z}^d) = \sup\{p : \theta(p) = 0\}$$

تعریف می‌شود. نکته مهم این است که وقتی $d \geq 2$ ، $0 < p_c(\mathbb{Z}^d) < 1$ (برای شرحی کلی از پرکولاسیون [۶۲] را ببینید). مسئله طبیعی محاسبه دقیق $p_c(\mathbb{Z}^d)$ ، برای $d \geq 3$ ، مسئله‌ای سرکش است. با این‌همه، حالت $d = 2$ بسیار خاص است، زیرا به دلیل ویژگی خوددوگانی شبکه مربعی، حدس معروف $p_c(\mathbb{Z}^2) = \frac{1}{2}$ تقویت می‌شود. هری در سال ۱۹۸۰ این موضوع را اثبات کرد.

قضیه ۱۰۷. $([K^{70}])$. احتمال بحرانی پرکولاسیون بندی روی شبکه مربعی برابر است با $\frac{1}{2}$. $p_c(\mathbb{Z}^2) = \frac{1}{2}$.

تاریخ حدس $\frac{1}{2}$ $p_c(\mathbb{Z}^2) = \frac{1}{2}$ حداقل به سال ۱۹۶۰ می‌رسد. در آن سال، هریس [۷۹] ثابت کرد که $\theta(\frac{1}{2}) = 0$ و از آنجا با استفاده از یک استدلال هندسی هوشمندانه و نابرابری همبستگی مثبت نشان داد $\frac{1}{2} \leq p_c(\mathbb{Z}^2)$ ، هر دوی این استدلال‌ها دارای اهمیت ماندگاری هستند. شبیه‌سازی‌های عددی که هم‌رزلی انجام داد مقدار مورد نظر را اکیداً کمتر از $\frac{1}{2}$ نشان می‌داد (او می‌گفت: «چه مدرک بهتری برای $\frac{1}{2} = p_c(\mathbb{Z}^2)$ می‌تواند وجود داشته باشد»). مقالات مهمی از روسو^۱ و سیمور^۲ و ولش وجود داشت که هری را به مقاله مشهورش [K^{۷۰}] سوق داد، مقاله‌ای که او در آن ایده «آستانه دقیق» را کمی‌سازی کرد و براساس آن اثباتی برای قضیه ۱۰۷ به دست آورد. از آن زمان به بعد، مفهوم مرتبط «تأثیر» را کان، کلای، و لینیال [۸۵]، تالاگران [۱۱۷]، و اخلاف آن‌ها مستقلاً در حالت‌های کلی به صورت اصولی تعریف کردند.

اثر بعدی هری [K^{۸۰}] اثری قابل توجه در مورد پرکولاسیون در دو بُعد است که بدون اکراه برای ریاضی‌دانان در نظر گرفته شده بود. دو اثر [K^{۷۰}, K^{۸۰}] به پرکولاسیون اعتبار بالایی بخشیدند و باعث آغاز دوره‌ای از فعالیت مستمر، ابتدا برای دو بُعد و سپس ابعاد کلی‌تر، شدند. محاسبه دقیق یادشده در قضیه ۱۰۷ بعدها به پرکولاسیون روی خانواده‌ای بزرگ از گراف‌های هم‌شعاع^۳ [۶۹]، یعنی گراف‌های نشانده‌شده در $\mathbb{R}^2$ که هر وجه آن به واسطه قرارگرفتن در دایره‌ای محیطی^۴ با شعاع معین محذب است، گسترش یافته است. بعداً چنین مقادیر دقیقی را به نقاط بحرانی مدل‌های تصادفی-خوشه‌ای روی گراف‌های هم‌شعاع تعمیم دادند [۴۸].

۲.۷ رخداد مجزا و نابرابری وان دن برخ-کستن

نابرابری‌های همبستگی نقش بسیار مهمی در نظریه دستگاه‌های بی‌نظم در ریاضیات و فیزیک دارند. مهم‌ترین نمونه از چنین نابرابری‌هایی برای پرکولاسیون، نابرابری معروف (هریس-)FKG است که نشان می‌دهد پیشامدهای صعودی به‌طور مثبت به یکدیگر مربوط‌اند. وان دن برخ، هنگام بررسی جهت عکس یک نابرابری، حدسی را مطرح کرد و آن را مشترکاً با هری اثبات کرد.

فرض کنید $|E| < \infty$ و $\Omega = \{0, 1\}^E$ مجهز به اندازه حاصل‌ضربی $\mathbb{P}$ باشد. فرض کنید A و B پیشامدهای صعودی در فضای حاصل‌ضرب متناهی $(\Omega, \mathbb{P})$ باشند. برای $\omega \in \Omega$ و $F \subseteq E$ ، فرض کنید ω_F بیانگر پیکربندی‌ای باشد که برابر ω روی F است و در جاهای دیگر

¹Russo ²Seymour ³isradial ⁴circumcircle

برابر صفر است. پیشامد رخداد مجزای $A \circ B$ به صورت

$$A \circ B = \{\omega \in \{0, 1\}^E : \omega_F \in A \text{ و } \omega_{E \setminus F} \in B \text{ که به طوری که } F \subseteq E \text{ وجود دارد}\}$$

تعریف می شود.

قضیه ۲.۷ ([K۸۷]). برای پیشامدهای صعودی $A, B \subseteq \Omega$ ، $\mathbb{P}(A \circ B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

این «نابرابری BK» یک نتیجه ظریف و وسوسه انگیز با کاربردهای سودمند متعدد است. ریمیر [۱۰۵] این نابرابری را بدون فرض صعودی بودن پیشامدها تعمیم داده است. وان دن برخ و یوناسون صورتی از قضیه ۲.۷ را اثبات کردند [۱۶] که در آن به جای $\mathbb{P}$ یک اندازه یکنواخت روی زیرمجموعه های E با عدد اصلی ثابت مفروضی گذاشته شده است.

۳.۷ یکتایی خوشه نامتناهی

وقتی $p > p_c$ ، به طور تقریباً حتمی حداقل یک خوشه باز نامتناهی وجود دارد، اما چندان؟ این مسئله یکتایی را هری در کاری مشترک با آیزنمان و نیومن پاسخ داد. اثبات آن بسیار کلی است، اما در اینجا قضیه را فقط برای مدل پرکولاسیون بندی روی $\mathbb{Z}^d$ بیان می کنیم.

قضیه ۳.۷ ([K۹۵]). پرکولاسیون بندی روی $\mathbb{Z}^d$ با شرط $d \geq 2$ و $p \in [0, 1]$ در نظر بگیرید. تعداد N تا از خوشه های باز نامتناهی در شرط $\mathbb{P}_p(N = 0) = 1$ یا $\mathbb{P}_p(N = 1) = 1$ صدق می کند.

استدلال ظریف برتون و کین [۲۴] خیلی زود مقاله [K۹۵] را از دور خارج کرد، اما این مقاله همچنان به عنوان مرجعی مهم در برآوردهای کمی، مثلاً، برای کران پایین درباره نمای «دوبازویی» در [۲۸]، پا برجاست.

همچنین هری روی یکتایی مدل های بلندمدت روی زیرگراف های $\mathbb{Z}^d$ تحقیق کرده است. او و دورت، برای $d = 1$ ، در [K۱۱۱] محاسبات خاصی از [۱۱۰] را که در آن بست های i و j با احتمال $p(i, j)$ به هم متصل اند و p تابعی همگن از مرتبه ۱- است، تعمیم دادند. در پرکولاسیون بلندمدت (و از نظر فضایی همگن)، فرض کنید $p : \mathbb{Z}^d \rightarrow [0, 1]$ متقارن باشد. یک یال بی سو بین بست های i و j با احتمال $p(j - i)$ قرار می گیرد. چه وقت گراف تصادفی بعدی، تقریباً به طور حتم، همبند است؟ بنابر نتایج گرمیت، کین، و مارستراند [۶۶] شرط لازم و کافی این است که $\sum_z p(z) = \infty$ تحت یک فرض معمول تحویل ناپذیری روی تکیه گاه (p) . استدلال به کار برده شده در آنجا برای زیرفضاهایی

به شکل $\mathbb{Z}^{d-e} \times \mathbb{Z}_+^e$ با شرط $e \geq 1$ با شکست مواجه می‌شود، و همچنین به نظر نمی‌رسد روش‌های [K۹۵] و [۲۴، ۸۶] برای $d \geq 2$ و $e \geq 1$ را بتوان به کار گرفت. هری در [K۱۲۲] نشان داده است که یک شرط مجموع‌پذیری مشابه هم لازم و هم کافی است.

۴.۷ وضعیت آغازین و قدم‌زدن تصادفی

گرچه هریس [۷۹] ثابت کرده است وقتی $d = 2$ داریم $\theta(\frac{1}{p}) = 0$ ، اثبات اینکه برای هر $d \geq 3$ ، $\theta(p_c(\mathbb{Z}^d)) = 0$ تاکنون تسلیم هیچ‌کس نشده است (در حال حاضر جواب را برای $d \geq 11$ ، با استفاده از صورت بهبودیافته بسط توری مانند مذکور در [۷۶]، می‌دانیم [۵۵]). در بین فیزیکدانان این نظر که یک خوشه دو بُعدی بزرگ وقتی $p = \frac{1}{p}$ «تقریباً نامتناهی» است طرفدارانی داشت. پاسخ هری به این حدس و گمان، یک جفت قضیه حدی بود.

قضیه ۴.۷ ([K۹۰]). پرکولاسیون بندی روی $\mathbb{Z}^2$ را در نظر بگیرید و فرض کنید C بیانگر یک خوشه باز شامل مبدأ^۰ باشد. دو اندازه احتمال شرطی زیر به دهای یکسان ν همگرایند:

(۱) $\mathbb{P}_{\frac{1}{p}}(\cdot | K_n)$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ، که در آن K_n بیانگر این پیشامد است که $\cdot$ از راه یک مسیر باز به نقطه‌ای از شبکه با فاصله n از $\cdot$ متصل است.

(۲) C نامتناهی است $\mathbb{P}_p(\cdot | C)$ وقتی $p \downarrow \frac{1}{p}$.

اندازه ν (و خوشه باز $\tilde{C}$ در مبدأ نسبت به اندازه ν) خوشه نامتناهی آغازین نامیده می‌شود. هرچند ماهیت برخالی $\tilde{C}$ هنوز به درستی درک نشده است، هری بُعد جرمی^۱ آن را برحسب $\mathbb{P}$ -احتمال π_n ای به دست آورد که برای آن مبدأ به نیم فضای $\mathbb{Z} \times (n, \infty)$ متصل است.

قضیه ۵.۷ ([K۹۰]). وقتی $\epsilon \downarrow 0$ ، به طور یکنواخت نسبت به n داریم

$$\nu\left(\epsilon < \frac{|\tilde{C} \cap B_n|}{n^2 \pi_n} < \frac{1}{\epsilon}\right) \rightarrow 1,$$

که در آن $B_n = [-n, n]^2$.

قضیه ۵.۷ با اثبات نابرابری‌های $C_1 n^{-\frac{1}{2} + \eta_1} \leq \pi_n \leq C_2 n^{-\eta_2}$ ، به ازای $\eta_i > 0$ ، در [K۹۰] تکمیل می‌شود. اندازه‌های خوشه‌های باز بزرگ B_n را بورگس، چیس، کستن، و اسپنسر

^۱ mass dimension

در [K۱۶۳] مطالعه کرده‌اند؛ آن‌ها این کار را برای بازه‌ای از مقادیر p نزدیک به نقطه بحرانی p_c انجام داده‌اند و نتایج مشابهی برای $3 \leq d \leq 6$ تحت مفروضات بسیاری به دست آورده‌اند. دو ژن در [۴۲] به منظور کشف هندسه مجموعه‌های تصادفی استعارهٔ مورچهٔ تصادفی را مطرح کرده است. هری، در دنبالهٔ مقالهٔ بالا، قدم‌زدن تصادفی $(X_n : n \geq 0)$ را که از مبدأ شروع می‌شود روی خوشهٔ نامتناهی آغازین $\tilde{C}$ مطالعه کرده است.

قضیه ۶.۷ ([K۹۴]). برای مقداری مانند $\epsilon > 0$ قدم‌زدن $(n^{-\frac{1}{2}+\epsilon} X_n : n \geq 0)$ تنگ^۱ است.

به‌طور خاص، $\epsilon > 0$ ای وجود دارد به‌طوری‌که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $n^{-\frac{1}{2}+\epsilon} X_n \rightarrow 0$ از آنجایی‌که یک فرایند پخش به‌صورت $n^{\frac{1}{2}}$ رشد می‌کند، زیرپخشندگی X را می‌توان نتیجه گرفت. نتایج مفصل‌تری مرتبط با قدم‌زدن تصادفی روی شجره‌نامهٔ یک فرایند شاخه‌ای بحرانی مشروط به عدم انقراض موجود است؛ [K۹۴] و قضیهٔ ۳.۶ را ببینید.

از وقتی مقالهٔ هری روی $\mathbb{Z}^2$ منتشر شد موضوع خوشهٔ نامتناهی آغازین و قدم‌زدن تصادفی روی آن‌ها توجه زیادی را در زمینه‌های مختلف به خود جلب کرده است. برای مثال، به کتاب [۸۱] و منابع موجود در آن مراجعه کنید. الکساندر و اورباخ [۵] در حدس مشهوری پیش‌بینی کرده‌اند که برای قدم‌زدن تصادفی X روی خوشهٔ نامتناهی آغازین $\mathbb{Z}^d$ (اگر وجود داشته باشد)، وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم $\mathbb{P}(X_{2n} = 0) \approx n^{-\frac{1}{2}}$. باور بر این است که این احتمال، وقتی $d \geq 6$ ، برقرار است، اما تاکنون فقط برای d های بزرگ، که امروزه به‌معنای $d \geq 11$ ، ثابت شده است (توسط کوزما و ناخمیاس) (نگاه کنید به [۹۱] و [۵۵, ۸۱]).

استعارهٔ «مورچه در هزارتوی» دو ژن با قدم‌زدن تصادفی روی خوشهٔ پرکولاسیون (زبر بحرانی) باز نامتناهی نیز ارتباط دارد، و نمونه‌ای ملموس از یک قدم‌زدن تصادفی در محیط تصادفی غیربیضوی به دست می‌دهد. هری با گریمت و ژانگ نتیجه ابتدایی زیر را در این زمینه ثابت کرد.

قضیه ۷.۷ ([K۱۲۷]). فرض کنید $d \geq 2$ و $p > p_c(\mathbb{Z}^d)$. قدم‌زدن تصادفی روی خوشهٔ باز نامتناهی یکتای به‌طور تقریباً حتمی بازگشتی است اگر و تنها اگر $d = 2$.

برآوردهای دقیقی از آن زمان برای احتمال‌های تغییر وضعیت و نظریهٔ حد مرکزی این قدم‌زدن تصادفی به‌دست آمده است، برای کارهای اخیر در این زمینه مقاله‌های [۶, ۱۰] را ببینید.

¹tight

۵.۷ پرکولاسیون زیربحرانی

اندازه خوشه‌ای در مبدأ $|C|$ وقتی $p < p_c$ دارای دُمی با میرایی‌نمایی در فاز زیربحرانی است. وقتی $p > p_c$ وضعیت متفاوت است، زیرا توزیع $|C|$ تا حدودی توسط اندازه سطح آن کنترل می‌شود. از نابرابری هم‌محیطی یک توزیع نمایی کشیده‌شده برای این مورد به دست می‌آید. اثباتی از آیزنمان، دُلین، و سویار [۱] وجود داشت که نشان می‌داد برای مقداری مانند $\beta(p) > 0$ داریم $\mathbb{P}_p(|C| = n) \geq e^{-\beta n^{(d-1)/d}}$ کستن و ژانگ [K۱۱۴] با روش بلوکی جدیدی، که از همان زمان مفید واقع شده است، مکمل این نابرابری را نشان دادند.

قضیه ۸.۷ ([K۱۱۴]). فرض کنید $d \geq 3$ و $1 < p < p_c(\mathbb{Z}^d)$. تابع‌های β و γ با مقادیری در بازه $(0, \infty)$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$e^{-\beta n^{(d-1)/d}} \leq \mathbb{P}_p(|C| = n) \leq e^{-\gamma n^{(d-1)/d}} \quad (n \geq 1).$$

در [K۱۱۴] برای $d \geq 3$ فقط کران بالایی یادشده را برای p که بیشتر از مقدار مشخص p_{slab} است به دست آورده‌اند، اثبات کلی برای $p > p_c$ زمانی حاصل شد که گریمت و مارستراند حد تختالی^۱ $p_c = p_{\text{slab}}$ را در [۷۰] اثبات کردند. بعداً الکساندر، چیس، و چیس در [۴] رابطه مجانبی دقیق و ساختار وولف مربوط را برای $d = 2$ و سرف [۲۶، ۲۷] حالت چالش برانگیزتر $d = 3$ را اثبات کردند. اخیراً ثابت شده است که ساختار کستن-ژانگ [K۱۱۴] در اثبات تحلیلی بودن احتمال پرکولاسیون θ در ابعاد $d \geq 3$ نقش مهمی دارد؛ [۶۰] را ببینید.

۶.۷ نظریه مقیاس‌بندی

احتمال بحرانی p_c نقطه‌ای از تکینگی را نشان می‌دهد که فاز زیربحرانی (حالتی که در آن همه خوشه‌های باز منتهایند) را از فاز زیربحرانی (حالتی که در آن یک خوشه باز نامتناهی وجود دارد) جدا می‌کند. تکینگی در p_c شباهت زیادی با گذارهای فاز در فیزیک آماری دارد.

فرض کنید C خوشه‌ای باز حاوی مبدأ را نشان دهد. بنابر نظریه مقیاس‌بندی، تابع‌های کلان نظیر احتمال پرکولاسیون $\theta(p) = \mathbb{P}_p(|C| = \infty)$ و میانگین اندازه خوشه $\chi(p) = \mathbb{E}_p|C|$ تکینگی‌هایی در p_c به شکل $|p - p_c|$ دارند که توان مناسبی از آن‌ها را «نمای بحرانی» می‌نامند. به‌طور کلی، باور بر این است که وقتی $p \downarrow p_c$ ، $\chi(p) \approx (p - p_c)^{-\gamma}$ و $\theta(p) \approx (p - p_c)^\beta$.

^۱slab

وقتی $p \rightarrow p_c$ ، $\kappa(p) \approx |p - p_c|^{-\nu}$ و $\kappa'''(p) \approx |p - p_c|^{-1-\alpha}$ ، که در آن $\kappa(p)$ میانگین تعداد خوشه‌ها در هر بست و $\xi(p)$ طول همبستگی است. همچنین برای $k \geq 1$ ، وقتی $p \rightarrow p_c$ ،

$$\frac{\mathbb{E}_p(|C|^{k+1}; |C| < \infty)}{\mathbb{E}_p(|C|^k; |C| < \infty)} \approx |p - p_c|^{-\Delta},$$

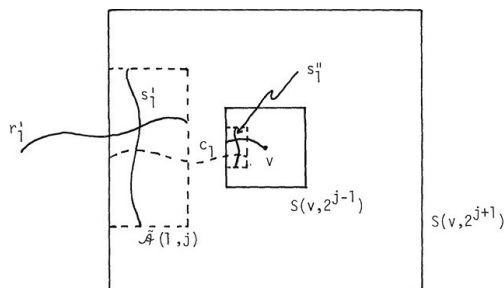
که در آن رابطهٔ مجانبی $\approx$ باید به صورت لگاریتمی تفسیر شود (شاید رابطهٔ مجانبی قوی‌تری نیز برقرار باشد).

به نحو مشابه، وقتی $p = p_c$ ، انتظار بر این است که چندین متغیر تصادفی مرتبط با خوشهٔ باز در مبدأ دارای دُم‌های قانون توانی باشند. به‌طور مشخص‌تر، وقتی $n, |x| \rightarrow \infty$ ،

$$\mathbb{P}_{p_c}(|C| = n) \approx n^{-1-1/\delta}, \quad \mathbb{P}_{p_c}(\text{rad}(C) = n) \approx n^{-1-1/\rho}$$

$$\mathbb{P}_{p_c}(\circ \leftrightarrow x) \approx |x|^{2-d-\eta}.$$

مجموعهٔ نماهای بحرانی (از جمله هشت موردی که در بالا یاد شد) ماهیت تکنیکی را توصیف می‌کنند و ظاهراً «جهان‌شمول» اند زیرا مقادیر آن‌ها به بُعد d وابسته است ولی به انتخاب شبکهٔ وابسته نیست. به‌علاوه، انتظار بر این است که نماهای بحرانی در «روابط مقیاس‌بندی» رایج در فیزیک آماری صدق کنند. تقریباً اثبات هریک از موارد بالا در ابعاد کلی مسئله‌ای حل‌نشده است. برای حالت $d = 2$ پیشرفت فوق‌العاده (اما ناقصی) در جهت اثبات احکام بالا صورت گرفته است. کار هری بخش کلیدی این برنامه بوده است. مقالهٔ [K۷۷] به بیان پیشرفت اولیهٔ مطالعهٔ دقیق (نا)همواری تابع‌های کلان می‌پردازد. شاید [K۱۰۲] مهم‌ترین مقالهٔ هری در این زمینه بود که دربارهٔ روابط مقیاس‌بندی است (شکل ۳ را ببینید).



شکل ۳. نمونه‌ای از شکل پرکولاسیون، برگرفته از مقالهٔ هری [K۱۰۲] دربارهٔ نظریهٔ مقیاس‌بندی

قضیه ۹.۷ ($[K^{۱۰۱}, K^{۱۰۲}]$). فرض کنید $d = ۲$. اگر حدهای δ و ν وجود داشته باشند، آنگاه

$$\beta = \frac{2\nu}{\delta+1}, \quad \gamma = 2\nu \frac{\delta-1}{\delta+1}, \quad \Delta = 2\nu \frac{\delta}{\delta+1}, \quad \eta = \frac{4}{\delta+1}, \quad 2\rho = \delta+1.$$

این روابط در این شکل کلی و بدون ذکر جزئیات ممکن است تا حدودی بیهوده به نظر برسند. روشی برای مرتبط کردن پرکولاسیون نزدیک بحرانی و بحرانی زیربنای این روابط را می‌سازد که مبنای آن تعدادی برآوردهای هندسی پیچیده احتمالاتی است (که تا حدودی در [۱۰۰] شکل اصولی گرفته است). این روش‌ها، همراه با خود قضیه ۹.۷، بخش مهمی از اثبات مقادیر دقیق نماهای بحرانی برای پرکولاسیون بستی روی مشبکه مثلثی $\mathbb{T}$ هستند:

$$\beta = \frac{5}{36}, \quad \delta = \frac{91}{5}, \quad \gamma = \frac{43}{18}, \quad \eta = \frac{5}{24}, \quad \nu = \frac{4}{3}.$$

این احکام و مطالب فراوان دیگری در طی ۲۰ سال گذشته توسط اسمیرنوف، اشرام، لولر، ورنر، و دیگران اثبات شده‌اند (برای مثال، [۱۲۰] را ببینید). اثبات وجود نماهای بحرانی (برای پرکولاسیون بستی روی $\mathbb{T}$) تا ابداع فرایندهای SLE توسط اشرام [۱۰۸] به تعویق افتاد. اسمیرنوف فرمول کاردی^۱ را اثبات کرد و ناوردایی همدیس را روشن ساخت (نگاه کنید به [۲۵، ۱۱۲])؛ و سرانجام، تیم لولر، اشرام، و ورنر نظریه SLE و برخی دستگاه‌های مشبکه‌ای مرتبط را بنا کردند (برای مثال، [۱۰۹] را ببینید).

تأثیر مقالات هری [$K^{۱۰۱}, K^{۱۰۲}$] در پرکولاسیون دو بُعدی و دستگاه‌های «پرکولاسیون شدگی»^۲ مرتبط از جمله مدل‌هایی مانند پرکولاسیون پویا، بدون تغییر^۳، و تهاجمی بسیار زیاد بوده است؛ برای مثال [۱۷، ۳۹، ۵۸] را ببینید.

۷.۷ پرکولاسیون نخستین‌گذر

در این مدل پرکولاسیون وابسته به زمان روی $\mathbb{Z}^d$ به یال‌ها «مختصات زمانی» نامنفی مستقلی تخصیص داده می‌شود که به عنوان زمان لازم برای گذر از یال تعبیر می‌شود. در اینجا مسئله مورد بحث ناحیه‌ای است که در یک زمان معین از مبدأ به آن می‌رسیم. این فرایند را هم‌رزلی و وِلش [۷۵] در سال ۱۹۶۵ مطرح کردند. آن‌ها ثابت کردند که تحت شرایطی خاص، زمان نخستین‌گذر $a_{\circ, n}$ از مبدأ به نقطه $(\circ, \circ, \dots, \circ)$ برای مقدار «ثابت زمانی» μ در رابطه $\mu \rightarrow a_{\circ, n}/n$ صدق می‌کند.

¹John L. Cardy ²percolative ³frozen

آن‌ها با این کار مفهوم زیرجمعی بودن تصادفی را تعریف کردند و صورتی از قضیه ارگودیک زیرجمعی را اثبات کردند. خاصیت زیرجمعی بودن به صورت یک روش مهم در احتمالات و ترکیبیات در آمد و موضوعی دائمی در آثار هری بود. درواقع، این روش برهانی زیبا برای بخشی از نتیجه‌ای مشترک از او با فورستنبرگ، قضیه ۱۰۴، روی حاصل ضرب ماتریس‌های تصادفی به دست می‌دهد.

هری و همکارانش تعدادی مسئله مهم در پرکولاسیون نخستین‌گذر را مطرح کردند و پاسخ دادند و در سلسله‌ای از مقالات در طی تقریباً ۲۰ سال تعداد دیگری را مطرح کردند. او چندین ویژگی اساسی ثابت زمانی را در دو بُعد، از جمله مثبت بودن و پیوستگی، اثبات کرد. فرض کنید U قانون مختصات زمانی، و $\mu(U) = \mu$ ثابت زمانی باشد.

قضیه ۱۰۷. پرکولاسیون نخستین‌گذر روی $\mathbb{Z}^2$ را در نظر بگیرید.

(الف) $[K173]$ اگر $\frac{1}{p} < U(0) < 1$ آنگاه $\mu(U) > 0$.

(ب) $[K176]$ اگر $U_k \Rightarrow U$ به معنای همگرایی ضعیف باشد آنگاه $\mu(U_k) \rightarrow \mu(U)$.

(ج) $[K132]$ گیریم U_1 و U_2 اندازه‌های احتمالی روی بازه $[0, \infty)$ با میانگین‌های متناهی باشند به طوری که U_2 «سودمند» است. اگر $U_1 \leq_{st} U_2$ اما $U_1 \neq U_2$ ، آنگاه $\mu(U_1) < \mu(U_2)$.

در مورد قسمت (الف)، اگر $\frac{1}{p} < U(0)$ ، آنگاه بی‌درنگ داریم $\mu(U) = 0$. وقتی $U(0) = \frac{1}{p}$ ، مسائل ظریف‌ترند، اما با این حال $\mu(U) = 0$ ، و علاوه بر این، کستن و ژانگ $[K152]$ یک قضیه حد مرکزی برای دنباله $(a_{0,n})$ را، وقتی به طور مناسب نرمال شود، با استفاده از نظریه حد مرکزی مارتینگلی اثبات کردند. دیگران از جمله $[8, 37, 38]$ این کار را ادامه داده‌اند.

قسمت (ب) که کاری مشترک با کاکس بود، تازه در سال ۲۰۱۷ به دست گر، مارشان، پروکاتچیا، و تر $[59]$ به $\mathbb{Z}^d$ با $d \geq 3$ تعمیم یافت. برای توضیح شرط «سودمندی» در قسمت (پ)، خواننده به مقاله اصلی ارجاع داده می‌شود. اما به طور خاص منظور این است که $\mu(U_2) > 0$. ترتیب تصادفی با $\leq_{st}$ نشان داده شده است.

همچنین باید به مقاله $[K130]$ اشاره کرد که به مسئله نرخ همگرایی $a_{0,n}/n$ و درجه ناهمواری مرز ناحیه به دست آمده از مبدأ تا زمان n می‌پردازد. نظریه مقیاس بندی چنین ناهمواری‌ای یک مسئله مهم حل نشده است که از آن زمان مورد توجه قرار گرفته است (نگاه کنید به $[30, 36]$ ، $[K188]$). به طور کلی، به دست آوردن کران‌های پایین مناسب برای یک فرایند تصادفی زیرجمعی مسئله‌ای

دشوار است (به نظرات مربوط در [۸، ص ۱۴۰] مراجعه کنید).

برآوردهای نمایی و استدلال‌های جعبه‌ای موضوعات معمول آثار هری بودند، و در قضیه انحراف بزرگ او برای زمان‌های نخستین‌گذر اهمیت یافتند.

قضیه ۱۱.۷ ([K۸۱]). پرکولاسیون نخستین‌گذر روی $\mathbb{Z}^d$ با شرط $d \geq 2$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\epsilon > 0$.

(الف) اگر U دارای واریانس متناهی باشد، آنگاه $A, B > 0$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\mathbb{P}(a_{n,\epsilon} < n(\mu - \epsilon)) \leq Ae^{-Bn} \quad (n \geq 1).$$

(ب) اگر برای $\gamma > 0$ ، $\int e^{\gamma x} U(dx) < \infty$ ، آنگاه $C, D > 0$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\mathbb{P}(a_{n,\epsilon} > n(\mu + \epsilon)) \leq Ce^{-Dn} \quad (n \geq 1).$$

بررسی دقیق‌تر نشان می‌دهد که انحرافات بزرگ در قسمت (ب) می‌تواند به‌صورت نمایی برحسب n^d کاهش یابد، درحالی‌که مرتبه انحرافات پایین که در بالا داده شده است معمولاً درست است. تضاد بین انحرافات بزرگ پایین و بالا برای تابع‌های زیرجمعی از زمان کار هری توجه زیادی را به خود جلب کرده است. برای مثال، [۳۲، ۳۵] را ببینید.

قضیه ۱۱.۷ در نظریه شبکه‌های الکتریکی تصادفی و در پخش ثابت در یک محیط تصادفی کاربرد دارد. این ارتباط هری را به مطالعه نسبتاً اصولی از مسئله «جریان تصادفی» سوق داد: در مورد جریان ماکسیمال از میان یک مکعب $\mathbb{Z}^d$ با ظرفیت‌های تصادفی تخصیص داده‌شده به یال‌ها چه می‌توان گفت؟ روشن‌تر بگوییم، جعبه $A_{n,k} = [0, n] \times [0, k]^2$ در $\mathbb{Z}^3$ را با کف $B_{n,k} = \{0\} \times [0, k]^2$ و سقف $T_{n,k} = \{n\} \times [0, k]^2$ در نظر بگیرید. به یال‌های e از $A_{n,k}$ ظرفیت‌های iid $C(e) \geq 0$ تخصیص داده می‌شود. فرض کنید $\Phi_{n,k}$ جریان ماکسیمال از $B_{n,k}$ به $T_{n,k}$ در داخل $A_{n,k}$ باشد مشروط به اینکه مقدار قدرمطلق جریان در امتداد هر e بزرگ‌تر از $C(e)$ نباشد. قضیه زیر نمونه‌ای از نتایج هری در این زمینه است.

قضیه ۱۲.۷ ([K۸۸, K۱۰۳]). فرض کنید وقتی $k \rightarrow \infty$ ، $n = n(k) \rightarrow \infty$ طوری‌که برای $\delta > 0$ ، $k^{-1+\delta} \log n \rightarrow 0$ ، در این صورت، $p_0 > 0$ ای وجود دارد به‌طوری‌که اگر $\mathbb{P}(C = 0) < p_0$ و برای مقداری مانند $\gamma > 0$ داشته باشیم $\mathbb{E}(e^{\gamma C}) < \infty$ ، آنگاه حد

$$\nu = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} \Phi_{n,k}$$

به طور تقریباً حتمی وجود دارد و در L^1 است. همچنین $\nu \in (0, \infty)$.

در اثبات این قضیه برخی مشکلات هندسی نکته دار در مورد ترکیبیات و توپولوژی سطوح دوگانه در $\mathbb{R}^3$ پیش می آید. اخیراً ژانگ [۱۲۵] شرط مربوط به p_0 را حذف کرده است، او ثابت کرد که حد ν اکیداً مثبت است اگر و تنها اگر $1 - p_c(\mathbb{Z}^d) < \mathbb{P}(C = \infty)$. مسئله انحرافات بزرگ پایین از $\Phi_{n,k}$ را روسینیول و تیر [۱۰۶] و سرف و تیر [۲۹] حل کرده اند. خواننده را برای نتایج اخیر درباره پرکولاسیون و پرکولاسیون نخستین گذر به [K۱۸۸] و [۹] ارجاع می دهیم.

۸.۷ پرکولاسیون کلمه

مسئله «پرکولاسیون کلمه» از کار دِکین [۴۳] درباره درخت ها سرچشمه گرفته است و بنیامینی و کستن آن را به صورت تعمیمی از پرکولاسیون بستی و نوعی از آن به نام پرکولاسیون AB بسط دادند. کار را با مدل پرکولاسیون بستی روی یک گراف معین $G = (V, E)$ با چگالی p شروع می کنیم؛ یعنی یک خانواده $(X_v : v \in V)$ از متغیرهای مستقل برنولی به صورت $\mathbb{P}_p(X_v = \circ) = p$ (۱. الفبایی از دو حرف $\circ$ و 1 را در نظر بگیرید و برای مجموعه ای از کلمات نامتناهی در این الفبا بنویسید $\Xi = \{\circ, 1\}^{\mathbb{N}}$. می گوئیم کلمه $w = (w_i : i \in \mathbb{N}) \in \Xi$ می گوئیم کلمه w «از راس v دیده می شود» هرگاه یک قدم زدن از خودگریز $(v_1, v_2, v_3, \dots)$ از $v_1 = v$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر i ، $X_{v_i} = w_i$. می گوئیم w «دیده می شود» هرگاه از v دیده شود. مسئله پرکولاسیون بستی متناظر با کلمه $(1, 1, 1, \dots)$ ، و پرکولاسیون AB متناظر با کلمه $(1, \circ, 1, \circ, \dots)$ است.

پرسش های جالب در این باره عبارت اند از اینکه کدام کلمات از یک v مفروض با احتمال اکیداً مثبت دیده می شوند و کدام کلمات جایی در G با احتمال 1 دیده می شوند؟ هری سه مقاله در این خصوص با بنیامینی، سی دوراویچس، و ژانگ نوشت. فرض کنید S_v مجموعه کلماتی باشد که از v دیده می شوند و $S_\infty = \bigcup_v S_v$.

قضیه ۱۳.۷. پرکولاسیون کلمه روی گراف G را در نظر بگیرید.

(الف) [K۱۳۶] فرض کنید $G = \mathbb{Z}^d$ و $\mathbb{P} := \mathbb{P}_p$ در این صورت،

$$\mathbb{P}(S_\infty = \Xi) = 1 \quad (d \geq 1), \quad \mathbb{P}(S_v = \Xi) = 1 \quad (d \geq 4).$$

(ب) [K۱۵۶] فرض کنید G مشبک مثلثی $\mathbb{T}$ باشد و $\mathbb{P} := \mathbb{P}_p$ با احتمال 1 ، هر کلمه

دوره‌ای به جز $(1, 1, 1, \dots)$ و $(0, 0, 0, \dots)$ ، و تقریباً هر کلمه نادره‌ای دیده می‌شوند. در اینجا اصطلاح «تقریباً هر کلمه» نسبت به μ_β -احتمال ۱ معنی می‌شود که در آن μ_β اندازه حاصل ضرب روی Ξ با چگالی مفروض $\beta \in (0, 1)$ است.

(ج) $[K167]$ فرض کنید G از $\mathbb{Z}^2$ با اضافه کردن دو قطر به هر وجه حاصل شود. در این صورت $\mathbb{P}_p(S_\infty = \Xi) = 1$ وقتی برقرار است که $p \in (1 - p_c, p_c)$ ، که در آن p_c (کمتر از $\frac{1}{2}$) احتمال بحرانی پرکولاسیون بستی روی G است.

همان‌طور که در $[101]$ آورده شده است، احتمال دانان هنوز هم مجذوب مسئله کلمه هستند؛ در آنجا قسمت (الف) قضیه ۱۳.۷ برای هر $d \geq 3$ نیز به $\mathbb{P}(S_\infty = \Xi) = 1$ تعمیم داده شده است. باید از سه مسئله نشان دادن مرتبط یعنی نشان دادن‌های لیپ‌شیتس $[64, 65]$ ، نشان دادن‌های شبه هم‌سنجی $[11, 12]$ ، و مسئله سازگاری وینکلر $[K193]$ یاد می‌کنیم.

۹.۷ فرایندهای مرتبط

مدل پرکولاسیون فقط آغاز یک نظریه غنی و جدید برای دستگاه‌های گسسته بی‌نظم است که اغلب توسط شبکه‌هایی مانند $\mathbb{Z}^d$ نمایانده می‌شوند. در ادامه، شرح مختصری از آثار هری در تعدادی از مباحث مرتبط می‌آوریم.

موجودات شبکه‌ای حریص

متغیرهای تصادفی iid را به رئوس v از $\mathbb{Z}^d$ با شرط $X_v \geq 0$ نسبت می‌دهند. وزن زیرمجموعه $U \subseteq V$ به صورت $W(U) = \sum_{v \in U} X_v$ تعریف می‌شود. فرض کنید M_n وزن ماکسیمال زیرگراف‌های همبند (که به «موجودات شبکه‌ای»^۱ نیز مشهورند) با n رأس و شامل مبدأ باشد. کاکس، گاندولفی، گریفین، و کستن در $[K126, K133]$ نشان دادند که، مشروط به شرایط گشتاوری مناسب روی X_v ، نسبت M_n/n وقتی $n \rightarrow \infty$ همگرا است. نتیجه مشابهی برای قدم‌زدن‌های از خودگریز n گامی از مبدأ برقرار است. نتایج جزئی بدون فرض مثبت بودن X_v در $[K164]$ یافت می‌شود.

ρ -پرکولاسیون

پرکولاسیون بستی روی $\mathbb{Z}^d$ را با شرط $d \geq 2$ و چگالی p در نظر بگیرید و فرض کنید $p \in (0, 1)$.

¹lattice animals

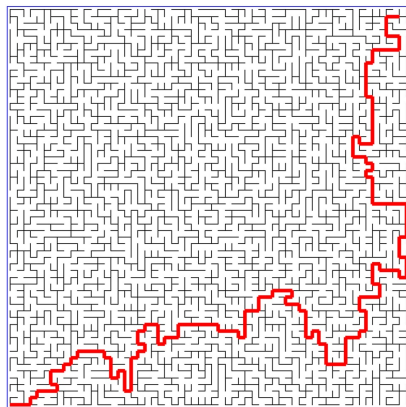
شروع بررسی ρ -پرکولاسیون به [۹۹] می‌رسد. گوئیم ρ -پرکولاسیون با احتمال اکیداً مثبت رخ می‌دهد اگر قدم‌زدن از خودگزین نامتناهی $w = (w_0, w_1, \dots)$ از مبدأ $w_0 = 0$ وجود داشته باشد به طوری که نسبت π_n از رئوس باز در n رأس اول w در شرط $\liminf_{n \rightarrow \infty} \pi_n \geq \rho$ صدق کند. بنابراین، ρ -پرکولاسیون به مسئله حریص‌ها در قدم‌زدن‌های از خودگزین یادشده در بالا مرتبط می‌شود. کستن و سو در [۱۶۰] ρ -پرکولاسیون در گراف جهت‌داری را بررسی کرده‌اند که با جهت‌دهی هر یال براساس جهت صعودی مختصات از $\mathbb{Z}^d$ به دست می‌آید. فرض کنید $p_c(\rho)$ مقدار بحرانی p برای ρ معلوم باشد. آن‌ها ثابت کردند که وقتی $d \rightarrow \infty$

$$d^{1/\rho} p_c(\rho) \rightarrow \frac{\theta^{1/\rho}}{e^\theta - 1},$$

که در آن $\theta = \theta(\rho)$ جواب یکنای معادله معینی است. علاقه هری به بررسی رفتار دستگاه‌های برهم‌کنشی برای d های بزرگ در $[K107]$ برای مدل آیزینگ، در $[K110]$ برای مدل‌های پاتس و هاینبرگ، در $[K112]$ برای پرکولاسیون، و در $[K118]$ برای مدل خوشه تصادفی تکمیل شده است.

جنگل‌های فراگیر یکنواخت

درخت فراگیر یکنواخت در یک گراف همبند متناهی درخت فراگیری است که به طور تصادفی از مجموعه تمامی چنین درخت‌هایی انتخاب شده است. جنگل فراگیر یکنواخت در $\mathbb{Z}^d$ حد ضعیف درخت‌های فراگیر یکنواخت روی جعبه‌های بزرگ و بزرگ‌تر تعریف می‌شود (شکل ۴ را ببینید).



شکل ۴. یک درخت فراگیر یکنواخت روی مربعی از مشبک مربعی؛ این درخت شامل یک مسیر یکتا بین هر دو رأس مرزی مفروض است و مسیر دارای قانون قدم‌زدن تصادفی بدون دور است.

پمانتل [۱۰۴] ثابت کرد که جنگل فراگیر یکنواخت به طور تقریباً حتمی همبند است اگر و تنها اگر $d \leq 4$. واقعیت شگفت‌انگیزی که بنیامینی، کستن، پرز، و اشرام [K۱۷۴] کشف کردند نشان می‌دهد که گذارهای بیشتری صورت خواهد گرفت هرگاه d از مضرب‌های ۴ عبور کند. فرض کنید هر درخت در جنگل فراگیر یکنواخت به یک تکرار تقبیل یافته باشد، و گراف C را در نظر بگیرید که بدین طریق به دست می‌آید. آن‌ها نشان دادند که قطر C به اندازه ۱ واحد افزایش می‌یابد به شرطی که بُعد به اندازه ۴ واحد افزایش یابد. این نتیجه غیرعادی را هاچکرافت و پرز [۸۲] ضمن اثبات اینکه جنگل فراگیر یکنواخت با شرط $d \geq 4$ هربار بر اثر افزایش بُعد دستخوش تغییر کیفی در همبندی خود می‌شود تعمیم دادند.

درخت فراگیر مینیمال

فرض کنید n نقطه $X_1, X_2, \dots, X_n$ به صورت تصادفی و یکنواخت در مکعب واحد $[0, 1]^d$ رها شوند و $d \geq 2$. بیردود، هالتون، و همزلی [۱۳] مطالعه اشیاء گرافیکی با مجموعه رؤس $\{X_i\}$ را ضمن مطالعه خود (با استفاده از خاصیت زیرجمعی بودن) درباره طول کوتاه‌ترین مسیر فروشنده دوره‌گرد آغاز کردند. آلدس و استیل [۳, ۱۱۵] در مورد درخت فراگیر مینیمال روی $\{X_i\}$ تحقیق کرده‌اند و نشان داده‌اند که α -طول $M_{n,\alpha}$ آن (با یالی به طول l که طولی به اندازه l^α به‌ازای $\alpha \in (0, 2]$ ای تولید می‌کند) با $n^{(d-\alpha)/d}$ مجانب است. کستن و لی [K۱۴۶] با نوشتن $M_{n,\alpha}$ به صورت مجموعی از تفاضل‌های مارتینگلی، یک قضیه حد مرکزی برای آن اثبات کردند. اخیراً چترجی و سین [۳۱]، با استفاده از روش استاین، کران‌هایی برای نرخ همگرایی این حد را یافته‌اند.

۸ آثار دیگر

۱۰.۸ تقریب دیوفانتی احتمالاتی

هری چندین اثر مرتبط با تقریب دیوفانتی نوشت و اغلب در آن‌ها از مفاهیم و روش‌شناسی احتمالاتی استفاده کرده است. اولین و تنها مقاله او با کاتس به یک قضیه حد مرکزی برای تعداد ظهور یک رقم مشخص در بسط یک عدد «نوعی» به صورت کسر مسلسل می‌پردازد [K۸]. این نتیجه از یک موضوع کلی‌تری به دست آمد و آن بررسی مجموع‌های جزئی یک دنباله تندآمیخته^۱ از تکرارهای یک نگاشت حافظ اندازه بود. آن‌ها در پی‌نوشتی بر آن مقاله خاطرنشان می‌کنند که نتایجشان برای

^۱rapidly mixing

کسرهای مسلسل را قبلاً دوبلین [۴۴] در سال ۱۹۴۰ به دست آورده است.

فرض کنید $x, y \in [0, 1]$ و $0 \leq a \leq b \leq 1$. تعریف کنید

$$S_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}(\{y + kx\} \in [a, b])$$

که در آن $\mathbf{1}(A)$ تابع مشخصه مجموعه A و $\{z\} = z - [z]$ جزء کسری z است. وایل [۱۲۱] ثابت کرده است که، برای x گنگ، وقتی $n \rightarrow \infty$ آنگاه $n \rightarrow b - a$ $S_n(x, 0)/n \rightarrow$ هری در [K۱۴, K۱۸] یک نظریه درباره افت و خیزهای $S_n(x, y)$ بیان می‌کند با این شرط که X و Y با توزیع یکنواخت روی بازه $[0, 1]$ باشند. او ثابت می‌کند

$$\frac{1}{\log n} [S_n(X, Y) - n(a - b)] \Rightarrow Z/\rho$$

که در آن Z دارای توزیع کوشی، و ρ وابسته به $b - a$ است، و برای $(b - a)$ ی گنگ ثابت است. این حکم در [K۲۹] به یک قانون لگاریتم مکرر تعمیم داده شده است. این حکم در [K۳۵, K۳۶] با اثبات حدسی از اردوش و شوش تکمیل می‌شود که بیان می‌کند $S_n(X, 0) - n(a - b)$ برحسب n کران دار است اگر و تنها اگر برای عدد صحیح j ، $b - a = \{jx\}$. نتیجه اخیر منشأ مطالعه مجموعه‌ها با باقی‌مانده کران دار است (به [۴۶] مراجعه کنید).

چیشلسکی و کستن در پژوهشی مرتبط با این موضوع [K۱۹] فرایند

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} [\mathbf{1}(\{2^k X\} \leq t) - t] \quad (t \in [0, 1])$$

را در نظر گرفتند که در آن X دارای توزیع یکنواخت روی بازه $[0, 1]$ است. آن‌ها با اثبات (از طریق اصل ناوردایی) اینکه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} |X_n(t)| < u \right) = \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} |X(t)| < u \right) \quad (u \in [0, 1])$$

به پرستی از کاتس پاسخ دادند؛ در اینجا X فرایندی گاوسی، یعنی، حد ضعیف $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ است.

فرض کنید $\langle x \rangle$ فاصله x تا نزدیک‌ترین عدد صحیح به آن باشد. هری در تعمیمی [K۲۱] از کار فریدمن و نیون [۵۷]، و اردوش، شوش، و توران [۵۲, ۵۳] سه قضیه را اثبات کرد، از جمله

اینکه اگر X دارای توزیع یکنواخت روی بازه $[0, 1]$ باشد، آنگاه وقتی که $m \rightarrow \infty$ دنباله $m \cdot \min\{kX : 1 \leq k \leq m\}$ نسبت به توزیع همگرا است. نتایج اخیر آتريا و گوش در این باره را می‌توان در [۷] یافت.

۲.۸ رشد تصادفی

پروکولاسیون نخستین‌گذر مثالی از یک مدل رشد تصادفی است؛ مدل‌های متعدد دیگری از جمله مدل کلاسیک ایدن [۵۱] وجود دارد. کستن و شونمان [K۴۱] گونه‌ای از مدل ایدن را بررسی کرده‌اند و رابطه مجانبی برای نرخ رشد و شکل آن را به دست آورده‌اند.

کستن در $[K۱۷۸, K۱۸۰, K۱۸۴, K۱۸۵]$ یک مدل جمعیت روی $\mathbb{Z}^d$ با دو نوع ذره را مطالعه کرده است. ذرات نوع A به صورت قدم‌زدن‌های تصادفی مستقل زمان‌پیوسته با نرخ D_A حرکت می‌کنند و ذرات نوع B به‌طور مشابه با نرخ D_B رفتار می‌کنند. وقتی یک ذره نوع B با یک ذره نوع A برخورد می‌کند، ذره نوع A بی‌درنگ نوع خود را به B تغییر می‌دهد. مسئله مورد نظر در اینجا به دست آوردن قضیه‌ای برای شکل پراکنش ذرات نوع B است. این فرایند در حالت خاص $D_A = 0$ مدل قورباغه نامیده می‌شود. کارهای اخیر درباره صورت پیوستار این مسئله در [۱۴, ۶۸] مطرح شده است.

۳.۸ توارث جمعیت

هری تحت تأثیر یک دوره سخنرانی که توسط کینگمن^۱ در سال ۱۹۷۹ ارائه شد، با کار روی مدل اُهتا-کیمورا^۲ درخصوص تغییرات تدریجی فراوانی‌های آلی^۳ در یک جمعیت متناهی مشخص (اما بزرگ)، به‌طور مختصر‌گریزی به توارث جمعیت زد. هر نسل دارای یک اندازه ثابت N است که یک نمونه تصادفی با اندازه n از آن گرفته می‌شود. فرض کنید $\Lambda(n, N, t)$ تعداد ژن‌های قابل تشخیص موجود در چنین نمونه‌ای از نسل t باشد، و فرض کنید $\Lambda(n, N)$ حد ضعیف $\Lambda(n, N, t)$ باشد وقتی $t \rightarrow \infty$ (این حد بنابر نتیجه‌ای از کینگمن [۸۹] وجود دارد). تحلیل کیمورا و اُهتا نشان داد که وقتی $N \rightarrow \infty$ دنباله $\mathbb{E}\Lambda(N, N)$ کران‌دار است، هرچند موران^۴ به‌صورت آزمایشی نشان داده است که $\Lambda(N, N) \rightarrow \infty$. معلوم شده است که به‌نوعی هر دو نتیجه درست‌اند.

فرض کنید γ_k نشان‌دهنده تراسیون^۵ (یا برج توانی^۶) به ارتفاع k یعنی $\gamma_k := e^{e^{\dots^e}}$ و

^۱John Frank Charles Kingman ^۲Ohta-Kimura ^۳allelic frequencies ^۴Moran ^۵tetration ^۶power

$\lambda(n) = \max\{k : \gamma_k \leq n\}$ و $\lambda(n)$ وارون آن باشد. هری در $[K71, K72]$ نشان داده است که وقتی $n, N \rightarrow \infty$ با شرط $n \leq N$ ، $\Lambda(n, N)/\lambda(n)$ نسبت به احتمال به حدی معین همگرا می‌شود. او اشاره کرده است که، در بسیاری از موارد عملی، $\Lambda(N, N)$ کران‌دار است. او این موضوع را با توجه با اینکه برای $10^{1656520} \leq N \leq 3814280$ داریم $\lambda(N) = 3$ نشان داده است. هری، در پایان سخنرانی‌ای در این باره در دانشگاه استنفورد، در مورد سردرگمی آشکاری که زیست‌شناسان در این باره دارند و اظهار رضایت کارلین^۱ درخصوص پیش‌بینی کران‌داری $\Lambda(N, N)$ صحبت کرده است.

۴.۸ توزیع‌های شبه‌مانای زنجیرهای مارکوف

فرض کنید X یک زنجیر مارکوف با زمان گسسته و با حالت جاذب با برچسب $\circ$ باشد. در مورد X_n به شرط $\circ$ $X_n \neq \circ$ چه می‌توان گفت؟ این سؤال کلاسیک منجر به نظریه توزیع‌های شبه‌مانا شده است. هری، با مشارکت فِزاری، مارتینس، و پیگو چندین نتیجه اساسی در مورد توزیع‌های شبه‌مانا اثبات کرده است. آن‌ها در $[K137]$ ثابت کردند که، مشروط به یک فرض مشخص، توزیع شبه‌مانایی وجود دارد اگر و تنها اگر زمان جذب دارای دُمی با میرایی نمایی باشد. شرط مذکور برای یک رده مهم از زنجیرهای مارکوف ناشی از دستگاه‌های متشکل از ذرات برهم‌کنشی توزیع شده فضایی، از جمله مدل برخورد زیربحرانی (زمان گسسته) در $\mathbb{Z}^d$ ، برقرار نیست. این عیب در مقاله قابل توجه $[K143]$ با بررسی ویژگی به اصطلاح R -مثبت بازگشتی رفع شد. هری برای رسیدن به این نتایج در $[K144]$ مبحث قضیه‌های حد نسبت را مورد تجدید نظر قرا می‌دهد و اثبات می‌کند که حدهای نسبت برای زنجیرهای مارکوف روی اعداد صحیح نامنفی با حالت جاذب $\circ$ وجود دارند مشروط به اینکه هنوز جذب نشده باشند.

۵.۸ قدم‌زدن‌های تصادفی نابودی و درهم‌آمیز

مطالعه این دو نوع قدم‌زدن‌های تصادفی برهم‌کنشی از دهه ۱۹۷۰ به صورت همزادهایی از مدل‌های رأی‌دهنده و پاد رأی‌دهنده برای دستگاه‌های متشکل از ذرات برهم‌کنشی شروع شده است. در مدلی که برای اولین بار توسط وان دن برخ و کستن مطالعه شد $[K162]$ ، ذرات در رئوس $\mathbb{Z}^d$ قرار می‌گیرند، و هریک منطبق با یک زنجیر مارکوف حرکت می‌کنند. وقتی یک ذره به رأسی می‌جهد که قبلاً توسط j ذره اشغال شده است، با احتمال معین q_j حذف می‌شود. فرض کنید $p(t)$ چگالی

¹ Samuel Karlin

میانگین رئوس اشغال شده در زمان t باشد. در مقاله یادشده نشان داده شده است که اگر $d \geq 6$ آنگاه $p(t) \sim C/t$. این گزاره در [K۱۷۱]، با در نظر گرفتن شرطی اضافی، به $d \geq 3$ تعمیم داده شده است.

هری این موضوع را در [K۱۵۹] ادامه داد و ثابت کرد که وقتی $d \geq 9$ برای مدل های مشابهی که در آن ها نابودی^۱ یا درهم آمیزی^۲ می تواند در مجموعه همسایگان ذره متحرک انجام شود داریم $p(t) \sim C/t$.

هری، در یکی از آخرین مقالاتش، به همراه بنیامینی، فوکسل، گورل-گروویچ، و یونگه [K۱۹۴] بار دیگر به قدم زدن های تصادفی درهم آمیزی می پردازد، ولی این بار روی یک گراف همبند و موضعی متناهی G . آن ها می پرسند چه وقت چنین قدم زدن هایی بست های بازگشتی اند به این معنی که هر بست به طور تقریباً حتمی تعداد نامتناهی بار دیدار داشته باشد. بازگشتی بودن هر بست v معادل است با اینکه $\int_0^\infty p_v(t) dt = \infty$ که در آن $p_v(t)$ احتمال اشغال v در زمان t است. آن ها نشان داده اند که وقتی G دارای درجه کران دار است، $p_v(t) \geq C/(1+t)$ ، و وقتی G یک فرایند شاخه ای است که اندازه های خانواده آن دارای دُمی با میرایی نمایی اند، داریم $p_v(t) \geq C/(t \log t)$. به این ترتیب خاصیت بست بازگشتی در هر دو حالت ثابت می شود.

یادداشت ویراستار اطلاعات کتاب شناختی مقاله اصلی که بالغ بر ۳۲۰ عنوان است، به دلیل محدودیت در تعداد صفحه ها، در ترجمه حذف شده اند.

رامین کاظمی: دانشگاه بین المللی امام خمینی، گروه آمار

رایانامه: r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir

Harry Kesten's Work in Probability Theory*

G. R. Grimmett

Translated by R. Kazemi¹

Department of Statistics, Imam Khomeini International University, Iran

Abstract. We survey the published work of Harry Kesten in probability theory, with emphasis on his contributions to random walks, branching processes, percolation, and related topics

Keywords: probability, random walk, branching process, random matrix, diffusion limited aggregation, percolation

Article history: Recieved 20 July 2022; Accepted 3 August 2022

Article type: translation

*Grimmett, G. R., Harry Kesten's work in probability theory, *Probab. Theory and Related Fields*, **181** (2021), 17-55.

¹r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir