فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۳ (پاییز ۱۳۸۸) صص. ٦٧ تا ۸۳

در پائیز اتفاق می‌افتد!

احسان ممتحن

اکنون در مقابل درب باغی ایستاده‌ام که دیوارهای بلندش آن را از جهان خارج جدا می‌سازد. باغ در ارتفاعات کوهستانی و در میان جنگلی از بلوط‌های وحشی واقع شده است. جنگلی که در اوائل پائیز به رنگ طلائی و سرخ درآمده است. جوی بزرگی که از برف آب‌های قلل مرتفع سرچشمه می‌گیرد از میان باغ می‌گذرد و سپس تا دامنه کوه ادامه می‌یابد و در آنجا به رودخانه می‌ریزد.

دیروز نامه‌ای از دوستم دریافت کرده بودم که برای دیدن دبستانش مرا دعوت کرده بود. مدتها منتظر چنین فرصتی بودم. صبح زود به راه افتادم و تا آنجا که جاده اجازه می داد با ماشین رفتم. و بعد ماشین را پارک کردم. از چوپانی که همان نزدیکی برای گوسفندانش نی می‌زد و موهایش مثل کاکل ذرّت زرد بود خواهش کردم مواظب ماشین باشد. و راه کوهستان را در پیش گرفتم و پس از دو ساعت کوه‌پیمائی به باغ رسیدم.

به نگاهبانان نامهٔ دعوتم را نشان می‌دهم و وارد باغ می‌شوم. دوست سقراط صولتم به پیشواز می‌آید.

می‌گوید: پس نامه به دستتان رسید؟ این هم از دبستان ما که اینقدر کنجکاو بودید آن را ببینید. دوست داشتید باچشمان خود ببینید که ما چطور روزمان را به شب می‌رسانیم. اکنون فرصت مناسبی است تا عطش کنجکاوی خود را فرو نشانید.

باغ بزرگ بود و پر از درختان سرو و نارنج. اینجا و آنجا سکوهائی سنگی برای نشستن در نظر گرفته شده بود. هر گوشه‌ای از باغ گروه‌های کوچکی گرد هم آمده بودند. اما صدایشان در هیاهوی شاد گنجشکان به گوش نمی‌رسید. پائیز بود اما با این حال عطر بهار نارنج آدم را مست و مدهوش می‌ساخت. چیز عجیبی بود. اما نه عجیب‌تر از چهره و رفتار دوستم که مدام مرا به فکر سقراط می‌انداخت. تقریباً حوالی ظهر بود که به باغ رسیدم اما در باغ دشوار بود که تشخیص دهی چه وقت از روز است. طراوت و خنکای صبحگاهی باغ را یکسره فرا گرفته بود. به دوستم می‌گویم چرا این باغ در پائیز حال و وضع بهاری دارد. می‌خندد و پاسخ می‌دهد باز هم شمّ کارآگاهی‌تان گل کرد. عمده درختان این باغ درختانی همیشه سبز چون نارنج و سرو هستند. بنابراین وضع باغ در هر موقع

از سال کم و بیش همین طور است. می‌گویم پس بوی بهار نارنج را چه می‌گوئی؟ این چیز عجیبی نیست. دستانش را بر شکم می‌گذارد و از خنده روده بر می‌شود. قدری خودم را می‌بازم. درست گفته‌ام هیچ درخت نارنجی در پائیز شکوفه نمی‌دهد اما او به چه می‌خندد. طبق معمول فکرم را می‌خواند، دستی بر شانه‌ام می‌نهد و می‌گوید چندتائی از نارنج‌های این باغ جهش ژنی کرده‌اند همان‌طور که در یک خانواده ناگهان یکی از فرزندان نابغه می‌شود. آنها یک بار در بهار و بار دیگر در پائیز شکوفه می‌کنند.

گفت: چون شما ریاضیدان هستید بهتر است به آن گوشه برویم که دوست ریاضیدانم با شاگردانش مشغولِ گفتگوست.

و با دست کنجی از باغ را نشان داد. نزدیک‌تر که شدیم توانستم چهرهٔ افراد حاضر در جمع را تشخیص دهم. سه نفر بر روی سکوی سنگی بزرگی نشسته بودند، یکی از آنها مردی است با موهای سپید و ریش بلند، باشکوه و پر جذبه و دو نفر دیگر جوان هستند. از گونه‌هایشان شادابی و سرزندگی هویداست. معلوم است که شخص مسن‌تر را بسیار محترم می‌دارند. تخته سیاه بسیار بزرگی در کنارشان به دیوار آویزان است و از نوشته‌های روی تخته سیاه پیداست که پیش از آن که ما وارد شویم مشغول حل مسأله‌ای بودند. در میانه، میز مرمرین بزرگی قرار دارد و پیرمرد، که به نظر استادی فرزانه می‌آید با مداد بر آن تصاویری رسم کرده است. به حلقهٔ آنها وارد شدیم و بر روی دو کرسی سنگی مجاور جای گرفتیم.

دوست من: مایلم دوست ریاضیدانم را به شما معرفی کنم. او در دانشگاه تدریس می‌کند. اما دوست داشت دبستان ما را هم از نزدیک ببیند.

پیرمرد باشکوه با مهربانی و احترام مکانی در میان خود و دو جوان برای من گشود: «بیائید اینجا». دو جوان پر نشاط نیز هر یک جای خود را تعارف می‌کنند. سپاسگزاری می‌کنم و در کنار آن مرد جای می‌گیرم.

استاد: از این که ریاضیدانی به جمع ما پیوسته است بسیار خوشحالیم. شنیده‌ام که دوست ما گاه پیش شما می‌آید و درباره موضوعات مورد علاقه‌اش با شما گفتگو می‌کند. من اما دُم به تله‌اش نمی‌دهم زیرا جز حل مسأله دربارهٔ چیز دیگری گفتگو نمی‌کنم. تنها هنگامی که مسأله حل می‌کنم احساس زنده بودن به من دست می‌دهد. تجربهٔ دیگری که بتواند با حل مسأله برابری کند نداشته و ندارم.

دوست من: آری او را تنها حل مسأله راضی می‌کند و بس.

استاد: و نمی‌دانم چگونه تو حاضری وقتت را صرف چیز دیگری به جز مسأله حل کردن کنی.

و بعد رو به من کرد و گفت اگر او به ریاضیات می‌پرداخت مقام بلندی می‌یافت چنان که در جوانی هم مسأله حل کن اعجوبه‌ای بود. اما حیف که کنجکاویش را مرزی نیست. فرشتهٔ فلسفه او را از پرداختن به هر چیز دیگری منع می‌کند. مرا اما الههٔ ریاضیات تنها به حل کردن مسأله فرمان

داده است و بس.

من: تخصص شما چیست؟

استاد: قدری دشوار است که بگویم چه تخصصی دارم. درست‌تر آن است که بگویم تخصصم ریاضیات است اما اگر اصرار دارید که از تخصصی نام برم باید بگویم هندسه. می‌دانید، من به نسلی از ریاضیدانان متعلقم که علائقشان بسیار گسترده بود. ما هم در دوران رشد و تربیتمان و هم پس از آن در حوزه‌های پژوهشی خود تجارب بسیار متنوعی داشتیم. با این حال معمولاً زندگی فکریم را در مرز میان فیزیک و ریاضیات سپری می کنم. آنجا می‌ایستم و با دقت خواص زیبائی را در هر دو عالم ریاضی و فیزیک رصد می‌کنم. راستی، این دو جوان، داور و دیهیم (با دست آنها را معرفی می‌کند)، می‌خواستند مسأله‌ای را حل کنند که شما وارد شدید. اجازه دهید از آنها بخواهم که مسألهٔ خود را مطرح سازند.

دیهیم: می‌خواهیم بدانیم آیا مجموعهٔ تامی وجود دارد که فاقد هرگونه عدد گویا باشد؟

داور: من همان اول به او پاسخ دادم اما او اصرار داشت مسأله را به اتفاق شما بررسی کنیم شاید چیزهای بیشتری بیاموزیم.

استاد: پیش از آن که حل تو را بشنویم آیا مایلی خود سئوال را قدری مورد بررسی دقیق‌تر قرار دهیم؟

هر دو جوان: آری با کمال میل.

استاد: پس شما می‌خواهید در مجموعهٔ اعداد گنگ، مجموعه‌ای تام بیابید. مجموعه‌ای که نه تنها همهٔ نقاط حدی خود را شامل است بلکه همهٔ نقاطش نیز حدی هستند. به نظر شما، جدا از زیبائی درونی، این کار به چه دردی می‌خورد؟

دیهیم: مجموعه‌های تامی که تاکنون شناخته‌ایم همه شامل اعداد گویا بوده‌اند. منظورم بازه‌های بسته و مجموعهٔ کانتور است. در مجموعهٔ کانتور اعداد گویای فراوانی از جمله $\frac{1}{4}$ وجود دارند. اکنون می‌خواهیم مجموعهٔ تامی بسازیم که فاقد هر گونه عدد گویائی باشد. منظورتان را از «به چه درد می‌خورد»، متوجه نمی‌شوم.

استاد: منظورم دیدن مسأله در چشم‌اندازی وسیع‌تر بود. به نظر شما این مسأله با کدام یک از مسائل مهم ریاضیات در ارتباط است؟

دیهیم: نمی‌دانیم. بسیار خوب است که چنین چیزی را بدانیم. این مسأله با کدام مسألهٔ مهم در ارتباط است؟

استاد: فکر می‌کنم با فرض پیوستار کانتور. کانتور در ۱۸۹۰ فرض پیوستارش را مطرح کرد: *هر زیر مجموعهٔ ناشمارای $\mathbb{R}$ هم عدد با خود $\mathbb{R}$ است*. از طرفی می‌دانیم که عدد اصلی هر مجموعهٔ تام $2^{\aleph_0}$ است. یعنی برابر با عدد اصلی $\mathbb{R}$. حال اگر در اعداد گنگ مجموعهٔ تامی چون P سراغ بگیرید چه اتفاقی خواهد افتاد؟

داور: در واقع $P \subset \mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$. چون P با $\mathbb{R}$ هم توان است پس $\mathbb{Q}^c$ با $\mathbb{R}$ هم‌توان است.

استاد: برای لحظه‌ای تصور کن که مضاف بر اعداد گنگ اگر هر مجموعهٔ ناشمارائی یک زیر مجموعهٔ تام می‌داشت، فرض پیوستار اثبات می‌شد. از مجموعه‌های ناشمارا، یکی هم مجموعهٔ اعداد گنگ است.

من: توجه کنید، هم اکنون علاوه بر مطالبی که طرح شد از قضیهٔ شرودر ــ برنشتاین نیز استفاده کردید و گرنه اثبات کامل نمی‌شد.

استاد: کاملاً درست است و استفاده از قضیهٔ شرودر ــ برنشتاین یعنی استفاده از اصل انتخاب. البته من گفتم «اگر بتوان در هر مجموعهٔ ناشمارا مجموعه‌ای تام سراغ گرفت». حال راه حل خودت را بگو، بعد دوباره به این موضوع باز می‌گردیم.

داور(در حالی که گه گاه با مداد بر میز مرمرین می‌نوشت): من از مجموعهٔ سه‌سه‌ای کانتور الهام گرفتم. همان کاری را که کانتور در فرآیند ساخت مجموعه‌اش از بازهٔ $[۰, ۱]$ کرده است در مورد بازهٔ $A = [\sqrt{۲}, \sqrt{۳}]$ انجام داده‌ام و مجموعهٔ مورد نظر را به دست آوردم. نخست دنبالهٔ همهٔ اعداد گویای A را با $\{r_n\}$ نشان دادم و دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته $\{A_n\}$ چنان ساختم که آ) $A_{n+۱} \subseteq A_n$ ب) A_n چنان باشد که r_n به آن متعلق نباشد اما همهٔ اعداد گویائی که به A_n تعلق دارند نقاط‌درونی‌اش باشند و ج) هر A_n اجتماع متناهی از بازه‌های بسته باشد. برای ساخت $A_۱$ از A، می‌توان چنین عمل کرد: چون $r_۱$ نقطهٔ درونی A است پس اعداد گنگ x و y موجودند که $\sqrt{۲} < x < r_۱ < y < \sqrt{۳}$. حال بازهٔ (x, y) را از A کنار می‌گذاریم. پس خواهیم داشت $A_۱ = [\sqrt{۲}, x] \bigcup [y, \sqrt{۳}]$. اکنون گیریم که A_n را ساخته‌ایم و می‌خواهیم $A_{n+۱}$ را بسازیم. اگر $r_{n+۱} \notin A_n$ که $A_{n+۱}$ را همان A_n قرار می‌دهیم در غیر این صورت $r_{n+۱}$ یکی از نقاط درونی A_n است و بنا به طرز ساخت ما، A_n، اجتماع تعدادی بازهٔ بستهٔ مجزاست. پس r_n باید در یکی از این بازه‌ها مثل I قرار داشته باشد. اما این بازه به شکل $[c, d]$ است حال اعداد گنگ x_n و y_n را به این شرط در نظر می‌گیریم که $c < x_n < r_{n+۱} < y_n < d$. اکنون $A_{n+۱}$ عبارت خواهد بود از $A_n \setminus (x_n, y_n)$. به عبارتی دیگر تمام بازه‌های موجود در A_n دست نخورده سرجایشان باقی می‌مانند الا $[c, d]$ که جایش را به $[c, x_n] \bigcup [y_n, d]$ می‌دهد. حال اشتراک تمام A_n ها مجموعه‌ای تام و فاقد نقطهٔ گویا است. زیرا بنا بر قضیهٔ اشتراکی کانتور غیرتهی است و بسته هم هست و هر نقطه‌اش نیز نقطه‌ای حدی است.

استاد: حل زیبائی است و کاملاً درست. هرچند که نشان دادن این که تمام نقاط مجموعهٔ شما حدی است خود به یکی دو جملهٔ دیگر نیاز دارد. کنار گذاشتن تعداد شمارائی نقطه به این شیوه مرا بی اختیار به یاد بازی ماتسور[۱] می‌اندازد. راستی چرا از این راه حل راضی نیستید (خطاب به

۱) بازیکن آ صاحب اعداد گنگ $[۰, ۱]$ و بازیکن ب صاحب اعداد گویای آن است. یکی از بازیکن‌ها (فرقی نمی‌کند کدامیک) بازهٔ بسته‌ای با طول کمتر یا مساوی از $\frac{۱}{۲}$ در $[۰, ۱]$ انتخاب می‌کند. سپس بازیکن دیگر بازهٔ بسته‌ای با طول کمتر یا مساوی $\frac{۱}{۴}$ در داخل بازهٔ انتخابی بازیکن قبلی انتخاب می‌کند و به همین ترتیب ←

جوان دیگر)

دیهیم: چیزی که مرا ناراحت کرده آن است که او از همان اول سراغ اثبات مسأله رفت نه رد آن. می‌خواهم بدانم چرا قدری دربارهٔ درستی مسأله تردید به خرج نداد؟ چطور به لحاظ شهودی فهمید که چنین مجموعه‌ای ممکن است وجود داشته باشد؟

داور: هیچ امر راز آلودی در کار نیست، هر چند منظور تو را از شهود در نمی‌یابم. اگر منظور تو اینست که در میان مجموعه‌های تامی که تا به حال دیدیم، یعنی فاصله‌های بسته و مجموعهٔ کانتور هیچ یک فاقد نقطهٔ گویا نبوده، مطلبی است درست. اما روش ساخت مجموعهٔ کانتور به ما آموخت که ممکن است به ترتیب تعداد شمارائی بازه را بیرون گذاشت و به مجموعه‌ای تام رسید. از اینجا تا ایدهٔ حل من راه درازی نیست. من تنها به این اندیشیدم که ممکن است بتوان همهٔ اعداد گویای $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ را یکی پس از دیگری بیرون گذاشت و به مجموعه‌ای تام دست یافت. دو نقطهٔ ابتدا و انتهای بازه را هم از اعداد گنگ انتخاب کردم زیرا در فرآیند ساخت کانتور نقاطی از این دست در مجموعهٔ تام باقی می‌مانند. او بازهٔ $[0, 1]$ را گرفته و سپس یک سوم میانی آن را حذف می‌کند و به مجموعهٔ $F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ می‌رسد. در مرحلهٔ بعد یک سوم میانی هر یک از بازه‌های بستهٔ F_1 را بیرون می‌آورد و به $F_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{9}{9}]$ می‌رسد و این فرایند را ادامه می‌دهد تا به دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته که ذکر خیرشان رفت می‌رسد، یعنی $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$. بعد تمامی آنها را با هم اشتراک می‌دهد یعنی $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$.

استاد: می‌دانید کانتور این مجموعه را برای چه ساخته است؟ می‌دانید که این طرز ساخت اصولاً از آنِ کانتور نیست؟

داور: خیر به تاریخچهٔ کار کانتور رجوع نکرده‌ام. برای حل این مسأله هم به چنین اطلاعاتی نیاز نداشتیم.

دیهیم: با این حال من همواره به تو می‌گویم که داشتن درک تاریخی از هر موضوع از جمله مجموعهٔ کانتور و مجموعه‌های تام بصیرت بیشتری به ما خواهد داد.

داور: من تنها به حل مسأله علاقمندم. این که فلانی چه کرد و بعد بهمانی آن را ادامه داد به چه درد من می‌خورد. این که بدانم کانتور چطور به مفهوم مجموعه‌های تام رسید چه نفعی دارد. همین که تعریف مجموعهٔ تام را بدانم و بعد مسأله‌ای در آن باره به چنگ بیاورم که سخت و تأمل برانگیز باشد مرا کافی است. استاد آیا درست نمی‌گویم؟

استاد: تو در این مرحله از زندگیت سرشار از احساس غرور و شادمانی ناشی از حل مسائل هستی.

$\rightarrow$ بازیکن‌ها در بازه‌های انتخابی یکدیگر بازه‌های کوچکتر انتخاب می‌کنند. اشتراک این بازه‌های بستهٔ تو در تو بنا به قضیهٔ اشتراکی کانتور تهی نیست و یک تک‌نقطه‌ای است. اگر این تک نقطه گویا بود بازیکن ب و در غیر این صورت بازیکن آ برندهٔ بازی است. اثبات می‌شود که استراتژی ب هرچه که باشد بازیکن آ می‌تواند برنده شود.

دشوار است که از تو بخواهیم به بحث‌های تاریخی علاقه نشان دهی. برای ریاضی خواندن نیاز به هیچ انگیزه‌ای نداری، برعکس بازداشتن تو از ریاضیات نیاز به تلاش فراوان دارد. اما من اکنون، در روزگار پیری، به این نتیجه رسیده‌ام که آگاهی ما از تاریخچهٔ یک قضیه یا یک نظریه می‌تواند به درک ما از آن کمک شایانی کند. البته نمی‌توانم ادعایم را اثبات کنم. اما بسیاری از ریاضیدان‌ها را می‌شناسم که با خواندن مقالات کلاسیک و جاافتاده به ایده‌های مهمی دست یافته‌اند. می‌گویند وایرشتراس کتاب توابع متعالی آبل را هر شب با خود به رختخواب می‌برده و تا لحظه خواب آن را مطالعه می‌کرده است.

داور: مطالعه آثار جاافتاده ریاضی باز هم مطالعه ریاضی است نه تاریخ ریاضی و من با این موضوع مشکلی ندارم اما با ستایش این ریاضیدان و آن ریاضیدان چرا. نظیر کتابِ مردان ریاضی اثر بِل. از یک سو زندگی ریاضیدان‌ها را آنچنان مهیج نشان می‌دهد و نبوغ آنها را می‌ستاید که شیفته آن می‌شوی و از سوی دیگر خواننده را نا امید می‌کند. انگار به زبان بی زبانی می‌گوید: «هر کس وزن مغزش از سه کیلو کمتر است وارد نشود». من نیز اگر به درستی در موقعیتش قرار گیرم و آموزش‌های لازم را ببینم می‌توانم اثری مهم در ریاضیات ایجاد کنم.

استاد رو به دوست من کرد و با چشمانش از او استمداد طلبید.

دوست من (خندان): والله من چه بگویم، اینها دست پخت خودت هستند. با این حال اگر فکر می‌کند تاریخ ریاضی یعنی ستودن این و آن حق دارد که تاریخ ریاضیات را جدی نگیرد. اما تاریخ ریاضی و بطور عام تاریخ علم را چنین تعریف نمی‌کنند. پیشنهاد من این است که به عوض یک بحث انتزاعی درباب مفید بودن یا نبودن تاریخ ریاضی از یکی از شما دو نفر (با دست به من و استاد اشاره کرد) بخواهم تاریخچهٔ مجموعهٔ کانتور را بازگو کنید. اگر احساس کردیم که دانستن آن مفید است دیگر نیازی به بحث بیشتر نیست. تو آیا با این پیشنهاد موافقی؟

داور: کاملاً.

استاد رو به من کرد و گفت آیا مایلید پیش از آن که بحث را ادامه دهیم زمینهٔ تاریخی کار کانتور را شرح دهید تا دوست جوان ما بستر تاریخی موضوع را لمس کند. یا این که شما نیز به تاریخ این موضوع بی‌علاقه‌اید؟

من: البته من چندان در تاریخ ریاضیات زبده نیستم اما دست بر قضا تاریخچهٔ این یکی را خوب می‌دانم. در فاصلهٔ سال‌های ۱۸۷۰ تا ۱۸۸۵ از خاک مطالعهٔ توپولوژی خط حقیقی دو پرسش بنیادی جوانه زده بودند: ۱) شرایطی که تحت آن تابعی انتگرال پذیر باشد و ۲) یکتائی سری‌های مثلثاتی. در هنگامهٔ پاسخ به این دو پرسش به ظاهر مجزا بود که مجموعهٔ کانتور کشف شد. نخستین گام در پاسخ به سئوال اول را گئورگ برنهارد ریمان (۱۸۶۶ ــ ۱۸۲۶) برداشت. از دل یکی از شرط‌هائی که ریمان برای انتگرال پذیری توابع مطرح کرده بود جوانه‌های نظریهٔ اندازه سر برون کردند. گام اساسی بعدی در این زمینه را هرمان هانکل (۱۸۷۳ — ۱۸۳۹) در اوایل دهه ۱۸۷۰ برداشت. هانکل ، در ادامهٔ کار ریمان، نشان داد که انتگرال‌پذیری یک تابع به سرشت مجموعهٔ

نقاطی مربوط به تابع بستگی دارد. این عین عبارت اوست: «یک تابع انتگرال‌پذیر ریمان است اگر و تنها اگر به طور *نقطه وارناپیوسته* باشد» که با اصطلاحات امروزی یعنی آن که به ازای هر $\delta > ۰$ مجموعه نقاطی مانند x که در آنها تابع در هر همسایگی x نوسانی بیش از δ دارد هیچ جا چگال باشند. هانکل چنین می‌پنداشت که مجموعه‌های هیچ جا چگالِ $\mathbb{R}$ شکل و شمایل کلی‌اشان همچون شکل و شمایل $\{\frac{۱}{۲^n}\}$ است ([۲]).

داور و دیهیم: اما این نادرست است.

استاد: بله اما این مربوط به آغاز شکل گیری تعریف مجموعه‌های هیچ جا چگال است. اگر امروز درک روشنی از این مفاهیم داریم به خاطر تلاش‌های چنین دانشمندانی است. لطفاً ادامه دهید.

من: به خاطر همین پیش فرض، هانکل گمان برد می‌توان مجموعه‌های هیچ جا چگال را در بازه‌هائی که طولشان به هر اندازه که بخواهیم کوچک می‌شود جای داد. نکته‌ای که شاگردانتان نادرستی‌اش را متوجه شدند. با وجودی که پژوهش‌های هانکل بسیار مهم بودند، اما آنچه او را گمراه کرد، نداشتن بصیرت کافی دربارهٔ تنوع فراوان مجموعه‌های نامتناهی ، به ویژه مجموعه‌های هیچ جا چگال بود. این اشتباه بر جای ماند تا آنکه اچ. جی. اسمیت (۱۸۸۳ ـ۱۸۲۶)، استاد هندسه در آکسفورد، در سال ۱۸۷۵ مقاله‌ای منتشر کرد. در آنجا، اسمیت برای نخستین بار مجموعهٔ هیچ جا چگالی ساخت که بسیار پیچیده‌تر از $\{\frac{۱}{۲^n}\}$ بود. آنچه را که شما در مورد برداشتن پی در پی یک سوم‌های میانی از بازهٔ $[۰, ۱]$ گفتید در واقع روش ساخت اسمیت بود. متأسفانه ریاضیدانان اروپا اهمیت کار اسمیت را در نیافتند. حدود ده سال بعد که این مجموعه توسط کانتور از نو کشف شد آهسته آهسته توجه ریاضیدانان را برانگیخت ([۲]).

دیهیم و داور: خود کانتور چطور به این مجموعه دست یافت.

من: گئورگ کانتور (۱۹۱۸ ـ ۱۸۴۵)، پس از نوشتن رساله‌ای در باب نظریه اعداد در برلین به سال ۱۸۶۷، به سراغ توپولوژی مجموعه نقاط آمد. او زیر نظر ادوارد هاینه (۱۸۸۱ ـ ۱۸۲۱) در دانشگاه هاله شروع به پژوهش در باب یکتائی سری‌های مثلثاتی کرد. مسأله یکتائی سری‌های مثلثاتی این است: اگر به ازای همهٔ xها به استثنای آنهائی که در مجموعه‌ای مثل P هستند داشته باشیم $\frac{۱}{۲}a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = ۰$، آیا لزوماً همهٔ ضرایب a_n و b_n صفر هستند؟ پاسخ هاینه این بود: بله به شرط آن که: «همگرائی سری فوق نسبت به مجموعهٔ P یکنواخت و P متناهی باشد» ([۲]).

دیهیم و داور: همگرائی نسبت به مجموعه P یکنواخت باشد یعنی چه؟

من: یعنی همگرائی سری فوق روی هر بازهٔ فاقد مجموعهٔ متناهی P یکنواخت باشد. کانتور در حل مسأله بسیار پیش رفت. او در مقالاتی به سال‌های ۱۸۷۰ و ۱۸۷۱، فرض یکنواختی همگرائی را برداشت و به تفکر در حالتی که P مجموعه‌ای نامتناهی باشد پرداخت. به این منظور به توپولوژی

بنیادی خط حقیقی با دقت خیره شد تا بفهمد اساساً مجموعه‌های نامتناهی چطور موجوداتی هستند. در مقاله‌ای به سال ۱۸۷۲، کانتور مفهوم *نقطهٔ حدی* یک مجموعه را به همان شکل که ما امروز می‌دانیم تعریف کرد و مجموعهٔ تمام نقاط حدی مجموعهٔ P را مجموعهٔ P' نامید. لذا P'' مشتق P' است و $P^{(3)}$ مشتق P'' است و همین طور تا آخر. کانتور نشان داد که اگر عدد طبیعی n موجود باشد به نحوی که $P^{(n)} = \emptyset$ و سری $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ همه جا به جز احتمالاً روی P صفر شود، آنگاه همهٔ ضرایب سری صفر می‌شوند ([۲]).

دیهیم و داور: چه تعمیم قدرتمندی از قضیهٔ هاینه.

من: در فاصلهٔ سال‌های ۱۸۷۹ تا ۱۸۸۴، کانتور ٦ مقالهٔ زنجیره‌ای (در واقع یک مقالهٔ ٦ قسمتی) با عنوان «دربارهٔ رویه‌های نقطه‌ای خطی نامتناهی»، منتشر کرد که نخستین مطالعهٔ نظام‌مند توپولوژی مجموعه نقاط خط حقیقی بود. در این مقالات کانتور سه مفهوم مهم را معرفی کرد. در نخستین مقاله مجموعه‌های *همه جا چگال* را تعریف کرد. او مثال‌های متعددی از جمله $\{\frac{2^{2n}+1}{2^m}\}$ ارائه داد و به رابطهٔ میان مجموعه‌های همه جاچگال و مشتق آنها پرداخت. یعنی $P \subseteq (a,b)$ همه جاچگال در (a,b) است هرگاه $P' = (a,b)$. در پنجمین مقاله، کانتور دربارهٔ افراز یک مجموعه به دو بخش *تحویل‌پذیر* و *تام* سخن می‌گوید. تعریف او از یک مجموعهٔ تام هنوز در میان ریاضی‌خوانان متداول است: P مجموعه‌ای تام است اگر $P = P'$. پس از معرفی مجموعه‌های تام کانتور اظهار می‌دارد که مجموعه‌های تام لزوماً همه جاچگال نیستند. همین جاست که به عنوان نمونه مجموعهٔ خودش را به صورت همه اعداد حقیقی دربازهٔ $[0, 1]$ که در بسط سه‌سه‌ای آنها تنها ۰ و ۲ به کار رفته باشد معرفی می‌کند. چیزی که امروزه می‌دانیم با مجموعهٔ اسمیت یکی است.

دوست من: نفهمیدم چرا کانتور برای نشان دادن اینکه همهٔ مجموعه‌های تام لزوماً همه جا چگال نیستند سراغ این مجموعهٔ پیچیده رفته است. می‌توانست یک بازهٔ بسته مثلاً $[0, 1]$ را ارائه دهد.

استاد: اما این بازهٔ بسته در خودش همه جا چگال است. کانتور دنبال مجموعهٔ تامی بود که در هیچ، تأکید می‌کنم در هیچ بازه‌ای چگال نباشد.

دوست من: که اینطور. خواهش می‌کنم ادامه دهید.

من: اتفاقاً کانتور خود متذکر می‌شود که این مجموعه نامتناهی است و در هیچ بازه‌ای هر چقدر هم که کوچک باشد همه جا چگال نیست. هنوز معلوم نیست که کانتور چطور به این نتیجه رسیده است. اما فکر می‌کنم برای مطالعهٔ مسأله‌ای که طرح شد زمینهٔ تاریخی ذکر شده کافی باشد.

دوست من (خطاب به داور): حال چه می‌گوئی؟

داور: خوب راستش دانستن این نکات خالی از لطف هم نبود و حتی می‌توانم بگویم مفید بودند. اما جای لحظاتی که با یک مسألهٔ سخت کلنجار می‌روم را نمی‌گیرد. جایگزین آن احساس درونی نمی‌شود. من می‌خواهم خودم کانتور باشم، خودم با مشکلات روبرو شوم. اما اذعان می‌کنم که باید

قدری دربارهٔ دیدگاهم تجدید نظر کنم.

دوست من (رو به استاد): باز جای شکرش باقی است. اما درباره مسأله: حال که خاطراتم را مرور می‌کنم می‌بینم من و تو این مسأله را سالها پیش حل کرده بودیم. وقتی دو شاگرد جوان بودیم. درست مثل این دو. حتماً تو آن راه حل را بیاد داری.

استاد: نه تنها آن را به یاد دارم بلکه تعمیم‌هائی از آن را نیز به خاطر می‌آورم. ایدهٔ آن راه حل چنین بود: اگر بتوان مجموعهٔ کانتور، $\mathbb{K}$ را با عددی مثل α جمع کرد به نحوی که $\mathbb{K} + \alpha \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ به هدف خود نائل شدیم. زیرا این مجموعه همچنان تام باقی می‌ماند اما فاقد نقطهٔ گویاست.

من: مدتی پیش در یکی از مجلات ریاضی، ریاضیدانی از دانشگاه برکلی همین سئوال را مطرح کرده بود. منتها اضافه کرده بود که کافی نیست وجود چنین عددی را ثابت کنیم بلکه باید آن عدد را دقیقاً معرفی کنیم ([۵]).

داور: البته دیهیم پس از راه حل من به طور مبهمی به این راه حل فکر کرده است. حتی عددی را هم برای این موضوع پیشنهاد کرده است اما هنوز نتوانسته‌ایم ثابت کنیم که جمع این عدد با اعضای مجموعهٔ کانتور همواره عددی گنگ می‌شود.

استاد: آن عدد چیست؟

دیهیم: قرار دهید $\alpha = ۰/\alpha_۱\alpha_۲\alpha_۳\cdots$ که در آن $\alpha_i = ۱$ اگر $i = n! + n$ و در غیر اینصورت $\alpha_i = ۰$.

چشمان استاد پیر از خوشحالی برق زد.

استاد: چطور پیدایش کردی؟

دیهیم: با محاسبه. می‌خواستم عددم در بسط سه‌سه‌ای اعضای کانتور که در آنها تنها ۰ و ۲ به کار رفته، پس از جمع چنان بی‌نظمی و آشوبی ایجاد کند که حاصل عددی گنگ شود. هنوز هم فکر می‌کنم این عدد چنین کند. همانطور که می‌بینید وضع این عدد به گونه‌ای است که بین ۱ ظاهر شده در یک مکان و ۱ بعدی اقیانوسی از صفرها شناورند. این صفرها اولاً در عمل جمع با اعضای مجموعهٔ کانتور کار را ساده‌تر می‌کنند و ثانیاً ۱ های این عدد آنچنان بی‌نظم ظاهر می‌شوند که در هنگام جمع، اعضای مجموعهٔ کانتور را به اعدادی گنگ مبدل می‌سازند.

داور: استاد، حال او پس از یافتن این عدد تماشائی بود. هر چه کاغذ داشتیم را با رشته‌های طولانی از ۰ ها و ۲ ها به شیوه‌های گوناگون در سطری می‌نوشت و بعد آنها را با عدد خودش جمع می‌کرد.

استاد: کار درست را همو کرده است. معمولاً از دل محاسبات دشوار است که حقایق زیبای ریاضی آشکار می‌شوند. خوب بیائید به برهان خلف متوسل شویم. اگر این عدد نتواند همهٔ نقاط مجموعهٔ کانتور را در فرآیند جمع با خودش به اعدادی گنگ تبدیل کند چه می‌شود؟

داور: در آن صورت عدد گویای غیر صفر r وجود خواهد داشت که $r-\alpha$ عضو $\mathbb{K}$ شود.

دیهیم: پس در بسط $r-\alpha$ باید تنها ۰ و ۲ ظاهر شوند.

استاد (با دست به دیهیم اشاره می‌کند که به کناره تخته سیاه برود): بنویس $r-\alpha=\dots x=0.x_1x_2x_3$. از طرفی چون r گویا بود بنابراین دارای بسط سه سه‌ای نامختومی به شکل $r=r_0.r_1r_2\dots r_l\overline{(r_{l+1}\dots r_{l+m})}$ است. چون r دارای بسط نامختوم است پس باید برای k که $l+1\leq k\leq l+m$ داشته باشیم $r_k\neq 0$. این نکته روشن است که اگر $k\equiv n(\mathrm{mod} m)$ آنگاه $r_k=r_n$. اکنون به گمان شما دربارهٔ r_k چه می‌توان گفت.

داور: چون شما r را در مبنای سه نوشته‌اید. پس تنها ارقام ظاهر شده در بسط سه‌سه‌ای آن عبارتند از ۰، ۱ و ۲. چون r_k صفر نبود پس تنها یا باید ۱ باشد یا ۲.

استاد: کاملاً درست. باید در هریک از این دو حالت به تناقض برسیم. پس فرض کنیم $r_k=1$. اگر بتوان نشان داد که در این حالت در بسط سه‌سه‌ای x یک ظاهر می‌شود کار تمام است. میخواهم از ایدهٔ اقیانوس صفرهای تو (خطاب به دیهیم) استفاده کنم. این ابزاری را که می‌گویم برایم مهیا کن.

دیهیم: چه ابزاری؟

استاد: میخواهم اعداد طبیعی $n_1<n_2$ را چنان مهیا کنی که اولاً هر دو با k همنهشت باشند و ثانیاً عدد طبیعی q را چنان برایم بیابی که $q!+q<n_1<n_2<(q+1)!+q+1$. اگر بتوانی چنین کنی، اولاً در بسط سه‌سه‌ای r، در مکان‌های n_1 و n_2، عدد ۱ ظاهر می‌شود اما در همین مکان ها در بسط α صفر قرار دارد. تصور کن دو تا یک و میانشان اقیانوسی صفر و بالای سرش درست آنجا که در α صفر ظاهر شده است در بسط r دو تا یک قرار دارد.

برای مدتی سکوت برقرار شد. شاگردان به کنار تخته سیاه رفتند. محاسباتی انجام دادند. و در نهایت خوشحال برگشتند.

داور: چون می‌خواستید هم n_1 و هم n_2 با m همنهشت باشند و از $q!+q$ بزرگتر باشند چنین کردیم. قرار دادیم $q=m+k$، $y=\frac{q!}{m}+1$، $n_1=(y+1)m+k$ و $n_2=(y+2)m+k$. این اعداد همهٔ خواست شما را برآورده می‌سازند.

استاد: ممنون. حال مشاهده می‌کنیم که چون بسط‌های اعشاری $r=r_0.r_1r_2r_3\dots$ و $r_0.r_1r_2\dots r_{n_1}\alpha_{n_1+1}\alpha_{n_1+2}\dots$ به شکل نشان داده شده است، پس $x=r-\alpha>r_0.r_1r_2\dots r_{n_1}-0.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_1}$. این یک مطلب. از سوی دیگر می‌دانیم که $r<r_0.r_1r_2\dots r_{n_1}\overline{2}$. پس $x=r-\alpha<r_0.r_1r_2\dots r_{n_1}-0.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_1}+\frac{1}{3^{n_1}}$. این هم مطلب دوم. حال از این دو چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

دیهیم: این نتیجه که

$$r_0.r_1r_2\ldots r_{n_1} - 0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_1} < x < r_0.r_1r_2\ldots r_{n_1} - 0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_1} + \frac{1}{3^{n_1}}$$

پس $x_{n_1} = r_{n_1} - \alpha_{n_1} = 1 - 0 = 1$. در بسط سه‌سه‌ای x که قرار بود عضوی از مجموعهٔ کانتور باشد یک ظاهر شده است که تناقض است.

استاد: می‌بینی دقیقاً حدس شما درست از آب درآمد. حالت دیگر یعنی $r_k = 2$ نیز راهی مشابه دارد. آن را به عهدهٔ خودتان می‌گذارم. اما قصه هنوز پایان نگرفته است. این راه حل هنوز نکات آموختنی فراوان دارد. تنها موهبت ظاهری این راه حل نیست که آن را برجسته می‌کند امکاناتی که پیش روی ما می‌گذارد از خود راه حل مهم‌تر است: منظورم امکان تعمیم دادن است. روش حل خود فریاد بر می‌آورد که «مرا تعمیم دهید». برای این کار بیائید مجموعهٔ کانتور را زیر ذره بین بگذاریم و آن را خوب تماشا کنیم. شما بگوئید مجموعهٔ کانتور چه خواصی داشت؟

دوست من: پیش از آن که مسأله را تعمیم دهی من دو سؤال داشتم. نخست آن که عددی که هم‌اکنون شاگرد تو ارائه کرد نوعی عدد لیوویل بود. اگر $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ دنباله‌ای دلخواه باشد، آنگاه $z = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1+f_j}{10^{j!}}$ یک عدد لیوویل است. البته باید آن را در مبنای سه، یعنی بصورت $z = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1+f_j}{3^{j!}}$ ببینیم. پرسش اول این است که آیا تمام اعداد لیوویل که به این شکل هستند در جمع با مجموعهٔ کانتور رفتاری αوار از خود نشان نمی‌دهند؟ آیا تمامی این اعداد یا به طور کلی اعدادی که در بسط سه‌سه‌ای آنها اقیانوسی از صفرهاست که عدد یک با بی‌نظمی این جا و آنجا خودی نشان می‌دهد همین خاصیت را ندارند؟ و دومین سؤال این که می‌توان به جای جمع، α را در مجموعهٔ کانتور ضرب کرد. آیا مجموعهٔ حاصل از این ضرب زیر مجموعهٔ اعداد گنگ می‌گردد؟ اگر نه، عدد دیگری برای این کار یافته می‌شود؟ اصلاً اگر بخواهم عددی ارائه دهید که هم جمع آن و هم ضرب آن مجموعهٔ کانتور را به زیرمجموعه‌ای از اعداد گنگ تبدیل کند حرف حسابتان چیست؟

دیهیم و داور از خنده ریسه می‌روند و استاد هم که مرد پرجذبه‌ای است و کمتر می‌خندد دیگر نمی‌تواند جلوی خودش را بگیرد. جمع ما به اغتشاش می‌کشد. هر کس چیزی می‌گوید. استاد منتظر می‌ماند تا کم کم آرامش به گروه ما باز گردد و بعد ادامه می‌دهد.

استاد: می‌دانی دربارهٔ تو چه فکر می‌کنم؟ پس از این همه سال هنوز همان شیطان ناقلای تمام عیار باقی مانده‌ای. با این حال هم من و هم تمامی شاگردانم تو را دوست می‌داریم. و اما دربارهٔ سئوالات نیم جدّی‌ات که قرار بود دوتا بیشتر نباشند اما بسیار بیشتر شدند. اندکی بعد خواهیم دید که وجود اعدادی که ضربشان در مجموعهٔ کانتور منجر به اعدادی گنگ شود حتمی است. اما این که عددی را برای این کار معرفی کنیم مسأله‌ای برای این دو است. در مورد پرسش اول تو نیز باید بگویم که به نظر می‌رسد پاسخش مثبت باشد اما اثبات آن از عددی به عدد دیگر سهل‌تر یا دشوارتر است. عدد α از این نظر عدد خوش رفتاری بود. شاید هم بتوان اثباتی ارائه کرد که نشان دهد کلیهٔ اعدادی از این خانواده می‌توانند با مجموعهٔ کانتور جمع شوند و هر بار حاصل عددی گنگ باشد.

این دو باید دربارهٔ سئوال‌هایت بیاندیشند و نتیجه را به من یا تو اطلاع دهند. باری سخن از تعمیم به میان آوردم. داشتم می‌پرسیدم مجموعهٔ کانتور چه خواصی دارد؟

داور و دیهیم با هم (به طوری که صدایشان در هم طنین انداز می‌شد): این مجموعه درون تهی است، تام است، یعنی نه تنها بسته است بلکه هر نقطه‌اش نیز نقطه‌ای حدی است و .....
من اضافه می‌کنم: واندازهٔ آن صفر است.

استاد: همین جا صبر کنید. گفتید که این مجموعه درون تهی است؟ و بسته است؟ خوب، اکنون تصور کنید به شما مجموعه‌ای بسته و درون تهی چون A داده‌اند. می‌توانید عدد حقیقی مناسبی مثل α بیابید که $A + \alpha \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$؟ ممکن است اندکی راهنمائی دریافتن راه حل به ما کمک کند. این راهنمائی در حقیقت یکی از مهمترین اکتشافات دربارهٔ توپولوژی خط حقیقی است. مرور شما بر تاریخچهٔ مجموعهٔ کانتور به راستی جامع بود. آیا ممکن است به قضایای رسته‌ای بئر نیز اشاره‌ای کنید.

من: با کمال میل. یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی چون A را هیچ جا چگال گوئیم هرگاه در هیچ بازه‌ای چگال نباشد. اجتماع هر تعداد متناهی مجموعهٔ هیچ جا چگال و همین طور بستار یک مجموعهٔ هیچ جا چگال، باز هم هیچ جا چگال‌اند. البته لزومی ندارد که اجتماع شمارش پذیرِ(نامتناهی) مجموعه‌های هیچ جا چگال بازهم مجموعه‌ای هیچ جا چگال باشد، مانند $\mathbb{Q}$. اما اگر مجموعه‌ای اجتماع شمارش پذیری از مجموعه‌های هیچ جا چگال باشد آن را از رستهٔ اول[1] می‌نامیم. آن دسته از زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$ که از رستهٔ اول نباشند را از رستهٔ دوم[2] می‌نامیم. در ۱۸۹۹، بئر[3] نشان داد که «متمم هر مجموعه از رستهٔ اول در اعداد حقیقی چگال است، هیچ بازه‌ای از رستهٔ اول نیست و اشتراک هر دنباله‌ای از مجموعه‌های باز چگال باز هم چگال است و دست آخر این که هر زیر مجموعهٔ یک مجموعه از رستهٔ اول از رستهٔ اول است».

استاد: متشکرم. اگر فرض کنید که برای مجموعهٔ بسته و درون تهی و لذا هیچ جا چگالِ A، هیچ چنین عددی یافت نمی‌شود به چه تناقضی می‌رسیم؟

پس از کمی سکوت دو جوان رو به استاد کردند و آن که تند و تیز بود پاسخ داد:

داور: فرض کنیم چنین αای یافت نشود، در آن صورت برای هر عدد حقیقی α، با $(A + \alpha)\bigcap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ مواجه می‌شویم. یعنی $r = a + \alpha$. حال ادعا می‌کنیم که در این صورت $\mathbb{R} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(A + r)$. اگر $\alpha \in \mathbb{R}$، بنا بر فرض $(-\alpha + A)\bigcap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. پس عدد گویای $r_{\circ}$ موجود است که $r_{\circ} = -\alpha + a$ یا $\alpha = a - r_{\circ}$ یعنی $\alpha \in A + (-r_{\circ})$ پس $\alpha \in A + (-r_{\circ}) \subset \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(A + r)$. لذا $\mathbb{R} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(A + r)$. اما $\mathbb{R}$ بنا بر قضیهٔ رسته‌ای بِئر از رستهٔ دوم است حال آن که طرف دوم از رستهٔ اول است و این تناقض نشان می‌دهد که حتماً α یافت می‌شود.

1) First Category 2) Second Category 3) R. Baire

من: اگر به جای «بسته و درون تهی بودن» شرط «اندازهٔ صفر بودن» را در نظر می‌گرفتیم بازهم این راه حل پاسخ می‌داد؟ منظورم آن است که اگر مجموعه A اندازهٔ صفر داشته باشد آنگاه عددی حقیقی مثل α وجود دارد که $A + \alpha \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. کافی بود به برهان خلف تا این جا می‌رسیدیم که $\mathbb{R} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(A + r)$. بنا بر خواص اندازهٔ لبگ اندازهٔ مجموعهٔ سمت راست صفر است حال آن که خط حقیقی اندازه‌اش بی‌نهایت است. دوست من (در حالی که به قهقهه افتاده و دستش را روی دلش گذاشته بود چشمکی به من زد و گفت): البته از تعمیم تو نتیجه‌ای به دست می‌آید که از تعمیم این دو حاصل نمی‌شد و آن این نتیجه است که: برای هر زیر مجموعهٔ شمارا از اعداد حقیقی همانند S، عددی چون β وجود دارد که $S + \beta$ فاقد اعداد گویا است. اگر طرفداران اصالت سود اینجا بودند می‌گفتند تعمیم تو بهتر است چون نتایج بیشتری دارد. داور و دیهیم در حالی که سر تکان می‌دادند و خنده‌شان گرفته بود: همین طور است. هر مجموعهٔ شمارا دارای اندازهٔ صفر است اما لزوماً بسته و درون تهی نیست.

استاد: هر چند نکتهٔ قابل تأملی بیان داشت اما بهوش باشید تا این شیطان ناقلا فریبتان ندهد. او می‌خواهد به شیوهٔ خاص خودش بحث را به سمت فلسفهٔ اخلاق ببرد. من که خود بارها قربانی این شیوه بوده‌ام دوباره توجه شما را به این سو فرا می‌خوانم. همین اثبات با اندکی جرح و تعدیل نشان می‌دهد که اگر A بسته و درون تهی باشد، عددی چون α یافت می‌شود که $\alpha A \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. هدف شما رسیدن به مجموعه‌ای فاقد نقطهٔ گویا بود با خواصی که باید حفظ شوند. ضرب نیز خواص بسته بودن و درون تهی بودن را حفظ می‌کند.

من: دربارهٔ مجموعه‌های اندازه صفر چه؟ درست است که انتقال اندازهٔ یک مجموعه را تغییر نمی‌دهد اما متأسفانه ضرب در اغلب اوقات اندازهٔ یک مجموعه را دگرگون می‌کند.

دیهیم: حتی اندازهٔ یک مجموعهٔ اندازه صفر را؟

من: آه حق با شماست. پاسخ برای مجموعه‌ای اندازه صفر مثبت است.

استاد: اگر بیاد داشته باشید پیش از شنیدن راه حل‌های مختلف اشاره‌ای به فرض پیوستار کانتور شد. فکر می‌کنم شما (اشاره به دو شاگرد جوان) آنقدر مشتاق بررسی راه حلهایتان بودید که به آن نکته چندان توجهی مبذول نداشتید. مایلم قدری در آن زمینه صحبت کنیم. از نظر من، کاری که هم اکنون موفق به انجام آن شدید آن بود که نشان دادید اعداد گنگ، $\mathbb{Q}^c$، زیرمجموعه‌های تام دارد. حداقل یک نتیجه از کار شما این بود. پس در حقیقت نشان دادید که $\mathbb{Q}^c$ هم عدد با $\mathbb{R}$ است. چنین نیست؟

داور: آری اما این نکته را به روش‌های ساده‌تر نیز می‌توان نشان داد.

استاد (با دست شاگردانش را به شکیبائی دعوت می‌کند): تاریخچهٔ کار کانتور نشان داد که او در ۱۸۸۳ مجموعه‌های تام را معرفی کرد و هفت سال بعد در ۱۸۹۰ فرض پیوستارش را مطرح ساخت. کمی تخیل نشان می‌دهد چگونه کانتور پس از هفت سال به ایدهٔ فرض پیوستار رسید. دست کم این حدس من است. ریاضیدانان متوجه شده بودند که هر مجموعهٔ تامی به اندازهٔ $\mathbb{R}$ عضو دارد.

پس فرض پیوستار برای مجموعه‌های تام درست از آب در می‌آید. خوب چرا دیگر زیر مجموعه‌های ناشمارا نه؟ اگر شما بودی چه می‌کردی؟

داور: سعی می‌کردم ثابت کنم هر مجموعهٔ ناشمارائی شامل یک مجموعه تام است. و آن وقت فرض پیوستار اثبات می‌شد.

استاد: البته با کمک قضیهٔ شرودر ــ برنشتاین ــ کانتور. برای لحظه‌ای خودتان را جای کانتور بگذارید و بیاندیشید: بازه‌ها، اگر بسته باشند که خود تام هستند و اگر باز باشند می‌توان در آنها بازه‌ای بسته و لذا مجموعه‌ای تام یافت. از این هم بیشتر، اگر مجموعهٔ ما بازه نباشد اما شامل یک بازه شود، یعنی به یک معنی لاغر یا درون تهی نباشد دوباره می‌توانی آن را با $\mathbb{R}$ هم عدد کنی. پس می‌ماند مجموعه‌های درون تهی یا لاغری که نتوان در آنها بازه‌ای قرار داد.

دیهیم: مجموعهٔ اعداد گنگ با این که درون تهی است اما از این حیث رو سفید از آب در آمد.

استاد: نکته همین جاست. مثال کانتور نشان می‌دهد که مجموعه‌های تام هیچ جا چگال یا لاغری وجود دارند. گام بعدی می‌توانست این باشد: اگر ممکن بود در هر مجموعهٔ ناشمارای درون تهی، مجموعهٔ تامی درون تهی قرار داد در حقیقت ثابت می‌شد که همه مجموعه‌های ناشمارا چه درون تهی و چه درون ناتهی با $\mathbb{R}$ هم‌توان هستند. مجموعه‌های ناشمارائی چون مجموعهٔ اعداد گنگ که شامل مجموعهٔ تام هستند خود مهر تأییدی بر این باور بودند. فکر کنم چنین شد که کانتور فرض پیوستارش را حدس زد. راستی یادم رفت که بگویم قضیهٔ کانتور ــ بندیکسون نیز مهر تأیید دیگری بر این باور بود چرا که بنا بر آن: هر مجموعهٔ ناشمارای بسته‌ای را می‌توان به شکل اجتماع یک مجموعهٔ شمارا و یک مجموعهٔ تام نوشت. پس فرض پیوستار برای بسیاری از مجموعه‌ها، مجموعه‌های باز و بسته، مجموعهٔ اعداد گنگ و بسیاری مجموعه‌های دیگر درست بود.

دوست من: حیف که مجموعه‌ها مثل درْ نیستند که یا باز باشند یا بسته وگرنه فرض پیوستار کانتور اثبات می‌شد.

داور: حتماً مجموعه‌های پیچیده‌ای هستند که سر راه این ایده سنگ انداخته‌اند. چون می‌دانیم که فرض پیوستار اثبات‌پذیر نیست.

استاد: بله، اما باید دقیق‌تر از این سخن گفت، فرض پیوستار در منطق مرتبهٔ اول تصمیم‌ناپذیر است، نه منطق مرتبهٔ دوم ([۱]). فلیکس هاوسدورف در کتاب نظریه مجموعه‌هایش $\mathbb{R}$ را به شکل اجتماع دو مجموعهٔ مجزا از هم A و B نوشت به نحوی که نه A و نه B، هیچکدام، شامل زیرمجموعهٔ تام نبود ([۳]). پس از چنین تلاش‌هائی معلوم شد که کار بسیار دشوارتر از این حرفهاست. فرض پیوستار پهلوان پنبه نبود. چهل و هشت سال بعد از طرح فرض پیوستار کورت گودل، در ۱۹۳۸، نشان داد که این فرض با بقیهٔ اصول نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار است و ۲۳ سال پس از کار گودل، کوهن[۱] به کمک روش تَحمیل خود استقلال نقیض فرض پیوستار را کامل کرد.

1) Paul j. Cohen

او نشان داد که نقیض فرض پیوستار و بقیهٔ اصول مجموعه‌ها از جمله اصل انتخاب سازگارند به شرط آن که سازگاری خود اصول نظریهٔ مجموعه‌ها را فرض بگیریم. اخیراً امیدهائی در قلب ریاضیدانان زنده شده است که شاید بتوان با دستکاری اصول نظریهٔ مجموعه‌ها مسائل تصمیم‌ناپذیر به ویژه فرض پیوستار را واقعاً حل کرد. البته بیشتر ریاضیدانان صاحب نظر، مثل گودل، کوهن و وودین[1] معتقدند فرض پیوستار غلط است ([۱])، [٦] و [۷]). خیلی وقت نیست که ریاضیدانی بنام کریس فرایلینگ[2] سعی کرده است نادرستی فرض پیوستار را با یک آزمایش فکری جالب ثابت کند ([۱]، فصل یازدهم). دوست من: فکر کنم اکنون بتوانم به شما (اشاره به دو جوان) بگویم که چرا تلاش برای دیدن یک مسأله در متن تاریخی‌اش و به عنوان بخشی از تلاش مردان ریاضی مهم است. بدون این چشم‌انداز شما تنها مسأله‌ای را حل کردید که بیش از صد سال از کشف آن و حتی از کشف تعمیم‌هائی که امروز به آن رسیدیم می‌گذرد. اما حال که قادر شدیم در یک چشم‌انداز تاریخی به تلاش‌هایمان بنگریم از احساس همدلی با کانتور و ریاضیدانانی که فرض پیوستار را درست تلقی می‌کردند غرق شادی می‌شویم. در ماجراجوئی‌های فکریشان و در شکست‌ها و پیروزی‌هایشان شرکت می‌کنیم. گوئی در همان فضای رقیقی نفس می‌زنیم که روزگاری کانتورها و هاوسدورف‌ها در آن نفس می‌زدند. فرهنگ دانش تنها به همین شکل از نسلی به نسل دیگر منتقل شده تا به ما رسیده است. اگر خودمان را از این چشم‌انداز وسیع محروم کنیم ممکن است ریاضی بدانیم اما دیگر به فرهنگ اصیلی که قرن‌ها چرخ دانش و ریاضیات را به جنبش در آورده است تعلق نخواهیم داشت. ارزش دیگر این نوع نگاه فروتنی است. وقتی می‌بینیم غول‌ها اشتباه می‌کنند آیا نباید متواضع‌تر باشیم؟ به همین علت اِلن کُن[3] ریاضیات را دبستان بزرگ فروتنی می‌نامد. اصولاً «نبوغ واقعی چیزی جز فضیلت فوق‌العادهٔ فروتنی در حوزهٔ تفکر نیست»[4].

استاد: «جانا سخن از زبان ما می‌گوئی».

داور: من با شما در این باب موافقم و اگر مطالعهٔ تاریخ ریاضی به این شکل به خدمت گرفته شود با کمال میل در تحصیل آن خواهم کوشید.

بحث از نظریهٔ مجموعه‌ها مرا یکباره به یاد کارگاهی انداخت که چندی قبل در آن شرکت کرده بودم:

من: اخیراً برای شرکت در کنفرانسی به پایتخت رفته بودم. در سخنرانی یک نظریه مجموعه‌دان حرفه‌ای شرکت کردم؛ از چیزهای عجیب اما جالبی صحبت می‌کرد. هدفش استفاده از روش بازگشتی در توپولوژی بود. مجموعه نقاطی را به نام نقاط سایه‌دار و مجموعه نقاطی را با نام نقاط اجتناب پذیر تعریف کرد. اما آنچه برای من جالب بود آن بود که دسته‌ای از مجموعه‌های او علاوه بر ویژگی‌های دیگر همگی مجموعه‌های تامی بودند فاقد هرگونه نقطهٔ گویا ([۴]).

هر دو جوان: مقاله‌اش را برای ما بفرستید.

---

1) W. Hugh Woodin   2) C. Freiling   3) A. Cones

۴) این عبارت از سیمون وی است.

قول دادم به محض رسیدن به دانشگاه این مقاله را برایشان ارسال کنم. وقت رفتن بود. استاد از جای برخاست و حدس مرا تأیید کرد. قد بلندترین ما به شانه‌اش هم نمی‌رسید. خداحافظی کردیم. دوستم مرا تا جادهٔ باریک جلوی باغ همراهی کرد و همان جا از هم جدا شدیم. با غریزهٔ آب همراه شدم تا مرا سالم و سلامت به پائین کوه برساند. از بیرون باغ تا دامنهٔ کوه پر بود از درختان بلوط کهنسال. از دور ماشینم را می‌بینم که بر دامن طبیعت وصله‌ای ناجور است. کنار تک درخت بلوطی پارک‌اش کرده بودم. چوپان نازنین با موهائی به رنگ کاکل ذرت هنوز آنجا بود.

چوپان: آقا خیلی دیر کردی. دلواپس شدم. با خودم گفتم بروم، نروم. دیگر غروب شده و از موقع به آغل رفتن گوسفندانم خیلی گذشته.

من: شرمنده‌ام. مهمان بودم و متوجه گذر زمان نشدم.

از همان اول مرا بخشیده است. دعوتم می‌کند تا در کنار آتش او بنشینم. از قوری دود زده‌ای برایم چای می‌ریزد و قوری را باز در کنار هیزم‌های نیم سوخته جای می‌دهد. بعد دستمال پر از قصبک خود را می‌گشاید و تعارفم می‌کند.

می‌گوید: به عوض قند.

چون می‌بیند با کنجکاوی به گوسفندانش نگاه می‌کنم برایم می‌گوید: آقا این‌ها خیلی برام عزیزن. آن بزغاله اواخر بهار بدنیا آمد. آن برهٔ سوز[1] چهار ماهه است. سن همهٔ آنها را می‌دانم. حتی به یاد می‌آورم که کجا و چطور به دنیا آمدند. میش‌هایم هم در بهار و هم در پائیز می‌زایند. بچه‌هایشان که به دنیا می‌آیند راه رفتن سختشان است. با همین توبره به خانه می‌آورمشان و در اتاق با خودم می‌خوابند.

شب پردهٔ سیاه خود را پهن کرده است و ستاره‌ها چون گل‌های زرین بر آن می‌درخشند. با مهربانی و به اصرار دعوتم می‌کند تا میهمانش باشم. تشکر می‌کنم و قول می‌دهم باز به ملاقاتش آیم. تا کنار ماشین بدرقه‌ام می‌کند، رویش را می‌بوسم و راهی شهر می‌شوم.

مراجع

[1] James Robert Brown, *Philosophy of Mathematics, A contemporary introduction to the world of proofs and pictures*, second edition, Routledge, 2008.

[2] Julian F. Fleron, *A Note on the History of Cantor Set and Cantor Function*, Mathematics Magazine, Vol 67, No. 2, (Apr. 1994), pp. 136–140.

[3] F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Zweite Auflage, Berlin-Leipzig, 1927.

---

۱) سوز بر وزن حوض. به معنی سبز، اما در میان چوپانان رنگی است میان خاکستری و سبز یا به عبارتی نوعی خاکستری است که به سبز متمایل است.

[4] I. Kalantari and L. Welch, *A Blend of Mathods of Recursion Theory and Topology: Part II*, submitted.

[5] Problem 1036: Proposed by: R. M. Robinson, University of California, Berkeley. C.A., Amer. Math. Monthly, Vol 101, no 2, Feb(1994).

[٦] کورت گودل، *فرض پیوستار کانتور چیست؟*، ترجمهٔ ضیاء موحد، نشر ریاضی، سال ۲، شمارهٔ ۱، فروردین ۱۳٦۸.

[۷] هیو وودین، *فرضیهٔ پیوستار، بخش ۱*، ترجمهٔ نفیسه کسروی، نشر ریاضی، سال ۱۳، شمارهٔ ۲، مهر ۱۳۸۱.

احسان ممتحن
گروه ریاضی، دانشگاه یاسوج
momtahan_e@hotmail.com