فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۲، شمارهٔ ۷۲ (بهار و تابستان ۱۴۰۲) صص. ۱ تا ۴۶

سیری در آنالیز فوریه: گفت‌وگویی با دکتر مهدی هرمزی

سعید مقصودی

در جایی دیگر [۴] سیر تحول و ورود آنالیز هارمونیک مجرد به ایران را تا سه نسل به‌اجمال بررسی کرده‌ایم و در آنجا اشاره کردیم که جای تعجب دارد که چرا هیچ دانش‌آموخته‌ای در زمینهٔ آنالیز فوریه (کلاسیک یا مدرن)، یا همان آنالیز هارمونیک[1] کلاسیک (حقیقی یا مختلط)، نداشته‌ایم و این شاخه در ایران اصلاً مورد توجه نبوده است. البته همین مطلب دربارهٔ آنالیز حقیقی کلاسیک هم درست است. پرواضح است که آنالیز هارمونیک مجرد چیزی جز توسعهٔ نظریهٔ سری و انتگرال‌های فوریه به گروه‌های توپولوژیک (یا ساختارهای مشابه) نیست (برای دیدن دیدگاه دیگری در مورد روش آنالیز هارمونیک، در چشم‌انداز بسیار وسیع‌تری در ذیل نظریهٔ نمایش، [۱۴] را مطالعه کنید؛ همچنین بد نیست اشاره کنیم که آن بخش از آنالیز هارمونیک را که فضای زمینهٔ مورد مطالعه در آن جابه‌جایی یا فشرده است آنالیز هارمونیک جابه‌جایی و بخش دیگر را آنالیز هارمونیک ناجابه‌جایی می‌نامند [۹]). نمی‌توان بااطمینان گفت، ولی به نظر می‌رسد قدمت، مسائل، روش‌های حل مسائل، و پیچیدگی‌های این رشته یکی از دلایل عدم استقبال ما از این شاخهٔ آنالیز بوده است. عموماً چنین می‌پندارند که عمر این رشته به سر آمده است و آنچه در آن باقی‌مانده است مسائل بغایت دشوار و روش‌های حل آن‌ها نیز نیازمند محاسبات بسیار دقیق و ظریفی است.

تا آنجا که نگارنده اطلاع دارد، دکتر مهدی هرمزی اولین دانش‌آموختهٔ رشتهٔ آنالیز فوریه است که هم‌اکنون در کشور مشغول به فعالیت علمی در این زمینه است. پیش از آنکه به گفت‌وگو با

عبارات و کلمات کلیدی: آنالیز فوریه، سری فوریه، انتگرال‌های منفرد، تبدیل هیلبرت، فضاهای BMO، دورهٔ دکترا در سوئد
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۴

[1] harmonic

© ۱۴۰۲(انجمن ریاضی ایران)
doi: 10.30504/mct.2023.1378.1968

او بپردازیم لازم است تاریخچه‌ای از آنالیز فوریه بیاوریم تا خواننده آشنایی نسبی با این حوزه از ریاضیات پیدا کند.

در [۱۲] آنالیز فوریه در حکمی موجز و مبهم خلاصه شده است: هر تابع مجموعی از نوسان‌های هماهنگ («هارمونیک‌ها») است. به گفتهٔ آن‌ها «آنالیز هارمونیکِ جابه‌جایی محل تلاقی چندین نظریهٔ ریاضی است. یکی تمایل دارد که سری فوریه را نمونهٔ بسیار خاصی از نظریهٔ کلی دستگاه‌های متعامد بداند. دیگری، که شیفتهٔ نظریهٔ طیفی عملگرهای دیفرانسیلی است، می‌گوید آنالیز فوریه دقیقاً بررسی عملگر $\frac{d^۲}{dx^۲}$ تحت شرایط مرزی بسیار خاص است. سومی می‌گوید تبدیل فوریه فقط یکی از بسیار تبدیل‌های انتگرالی معمول در آنالیز است. برداشت چهارمین متخصص این است که آنالیز فوریه صرفاً مثالی از نظریهٔ جبرهای جابه‌جایی باناخ است . . .. و البته همهٔ این‌ها درست می‌گویند زیراکه آنالیز هارمونیکِ جابه‌جایی را می‌توان از راه‌های بسیاری در ذیل نظریه‌های کلی مختلفی قرار داد.»

اساساً می‌توان تاریخ آنالیز فوریه را به دو دورهٔ کلاسیک و مدرن تقسیم‌بندی کرد. دورهٔ کلاسیک، که با رسالهٔ فوریه شروع می‌شود و تا دههٔ ۱۹۵۰ ادامه دارد، دورانی است که در آن مسئلهٔ اصلی بررسی همگرایی سری فوریه و روش‌های مختلف مجموع‌پذیری این سری است. دورهٔ مدرن، که اساساً در آنالیز با ورود نظریهٔ انتگرال‌گیری لُبگ[۱] و خصوصاً مفهوم فضاهای تابعیِ مجرد و به‌طور کلی بررسی فضای توابع به جای رفتار یک عضو مشخص از آن فضا شکل گرفت، در آنالیز فوریه با وارد کردن روش‌های متغیرهای حقیقی به دست آنتونی زیگموند[۲] و آلبرتو کالدرون[۳] در دههٔ ۱۹۵۰ آغاز می‌شود. با یک تقسیم‌بندی جزئی‌تر می‌توان چهار دوره را در آنالیز فوریه از یکدیگر متمایز کرد: ۱) دورهٔ ۱۷۵۰–۱۸۵۰، ۲) دورهٔ ۱۸۵۰–۱۹۰۵، ۳) دورهٔ مدرن ۱۹۰۵–۱۹۵۰، و ۴) دورهٔ ۱۹۵۰ به بعد. در ادامه، نگاهی به دوران کلاسیک می‌کنیم و تصویر بسیار موجزی از دوران مدرن ترسیم می‌کنیم. شرح مختصر دوران مدرن را از زبان دکتر هرمزی، در بخش بعد، خواهیم آورد.

۱ تاریخچه‌ای از آنالیز فوریه

اجازه دهید این بخش را با نقل گفته‌ای از نوربرت وینر[۴]، یکی از مهم‌ترین شخصیت‌ها در تاریخ آنالیز هارمونیک، شروع کنیم [۱۶]:

به‌نوعی تحریف تاریخ ریاضیات است اگر ریاضیات محض را علمی متکی به خود

[1] Henri Léon Lebesgue(1875–1941) [2] Antoni Zygmund (1900–1992) [3] Alberto Pedro Calderón (1920–1998) [4] Norbert Wiener (1894–1964)

جلوه دهیم چنان‌که گویی تنها منبع الهامش خودش است و به احتمال قوی هم فقط به درد خودش می‌خورد. اما مجردترین مفاهیم موجود هم سابقه‌ای در دنیای عینی دارند.

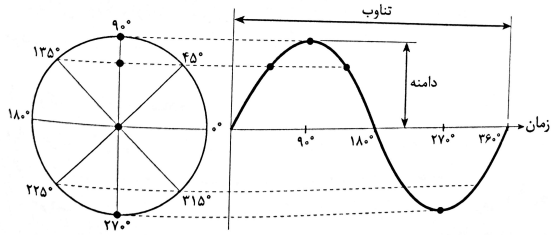
آنالیز هارمونیک روی فضاهای اقلیدسی و چند شاخهٔ دیگر با موضوع‌های مشترک (طبق آخرین رده‌بندی موضوعی انجمن‌های ریاضی آمریکا و اروپا)

کد اصلی شاخه	عنوان بعضی از موضوع‌ها
42: **Harmonic analysis on Euclidean spaces**	Trigonometric approximation; Trigonometric interpolation, semigroups, etc.; amenable groups; Measure algebras on groups, semigroups, etc.; L^p-spaces and other function spaces on groups, Fourier coefficients, Fourier series of functions with special properties, special Fourier series; Convergence and absolute convergence of Fourier and trigonometric series; Summability and absolute summability of Fourier and trigonometric series; Fourier and Fourier-Stieltjes transforms and other transforms of Fourier type; Multipliers in one variable harmonic analysis; Conjugate functions, conjugate series, singular integrals; Lacunary series of trigonometric and other functions; Riesz products; Probabilistic methods for one variable harmonic analysis; Classical almost periodic functions, mean periodic functions; Positive definite functions in one variable harmonic analysis; Convolution, factorization for one variable harmonic analysis; Fourier series and coefficients in several variables; Summability in several variables; Singular and oscillatory integrals (Calderón-Zygmund, etc.); Maximal functions, Littlewood-Paley theory;H^p-spaces; Function spaces arising in harmonic analysis; Harmonic analysis and PDEs; Orthogonal functions and polynomials, general theory of nontrigonometric harmonic analysis; Fourier series in special orthogonal functions (Legendre polynomials, Walsh functions, etc.); General harmonic expansions, frames; Other transformations of harmonic type; Uniqueness and localization for orthogonal series; Completeness of sets of functions in nontrigonometric harmonic analysis; Nontrigonometric harmonic analysis involving wavelets and other special systems
30: **Functions of a complex variable**	BMO-spaces; Zygmund spaces; Hardy spaces; Transformation groups and semigroups
32: **Several complex variables**	Harmonic analysis of several complex variables
35: **Partial differential equations**	General topics in partial differential equations
44: **Integral transforms, operational calculus**	Special integral transforms (Legendre, Hilbert, etc.);Integral transforms of special functions
42: **Functional analysis**	Rings and algebras of continuous, differentiable or analytic functions; Interpolation between normed linear spaces; Banach algebras of differentiable or analytic functions, H^p-spaces
47: **Operator theory**	Partial differential operators; Potential operators; Pseudodifferential operators
40:**Sequences, series, summability**	Cesàro, Euler, Nörlund and Hausdorff methods; Abel, Borel and power series methods
33: **Special functions**	Basic orthogonal polynomials and functions (Askey-Wilson polynomials, etc.); Orthogonal polynomials and functions in several variables expressible in terms of special functions in one variable

۱.۱ پیش‌زمینهٔ تاریخی آنالیز فوریه

اساس کیهان‌شناسی بطلمیوسی بر تجزیهٔ حرکت پیچیدهٔ اجرام به مجموعه‌ای از حرکت‌های ساده بود. دراصل، قبل از کپلر و نیوتن، یکی از بهترین راه‌های توصیف حرکت سیاره‌ها ترکیب کردن حرکت‌های دایره‌ای بود. این مطلب را می‌توان سرچشمهٔ تاریخی تجزیه و ترکیب هارمونیکی به حساب آورد. اصطلاح هارمونی قبلاً در کیهان‌شناسی افلاطون، در آنجا که از هارمونی کیهانی صحبت می‌کند، آمده است. حتی بااینکه دست از اخترشناسی افلاطونی برداشته شد تجزیهٔ حرکت به حرکت‌های دوره‌ای و تجزیه به توابع مثلثاتی تا امروز نیز باقی مانده است؛ اصطلاح هارمونی از موسیقی گرفته شده بود. از نظر افلاطون ریاضیات پنج بخش دارد: حساب، هندسهٔ مسطحه، هندسهٔ فضایی، اخترشناسی، و موسیقی. از نظر او اخترشناسی و موسیقی همانند دو برادرند و در این دو از طریق چشم‌ها و گوش‌ها به حرکت‌های هماهنگ پی می‌بریم. صداهای خالص هم بَدَل دایره‌های کامل‌اند [۱۱، ۱۶].

در دوره‌ای که به مدد صنعت چاپ تهیه جداول ریاضی ممکن شد، توابع مثلثاتی به‌صورت ابزار مهمی در جهت‌یابی و ستاره‌شناسی درآمدند. توابع اصلی در این جدول‌ها، سینوس، کسینوس، و لگاریتم بود. اسامی جالبی هم به این توابع داده بودند؛ مثلاً نمودار تابع سینوس روی $(0, \pi)$ را چرخ‌وار می‌نامیدند.



حرکت هماهنگ ساده

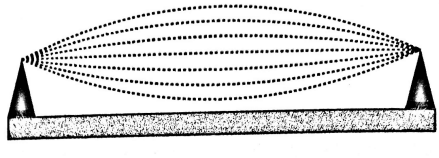
بنابر این ملاحظات، سرچشمه‌های اولیهٔ آنالیز فوریه (هارمونیک) را باید در موسیقی جستجو کرد. در موسیقی تجزیه و ترکیب، هر دو، براساس هارمونی (هماهنگی) است و این دقیقاً معنای تجزیه و ترکیب هارمونیکی است. از قدیم‌الایام می‌دانستند صوتْ حاصلِ ارتعاش اجسام است. از اوایل قرن هفدهم هم مسئلهٔ زه‌ها و اصوات موسیقیایی، شکل زنجیر آویخته، و ویژگی‌های کشسانی و گسیختگی اجسام به صورت پررنگ‌تری مطرح بود و بعضی از قوانین پایه در این موضوعات به دست آمده بود.

اما اجازه دهید با نقل قول دیگری از نوربرت وینر به نقطهٔ درست نقل تاریخ برسیم:

> دو عامل برخاسته از نظریهٔ موج در حوزهٔ صوت و نور و دوره‌ای‌بودن پدیده‌های اخترشناسی و ژئوفیزیکی، که افلاطون آن‌ها را در موسیقی افلاک یکی کرده بود، دو محرک اصلی در علوم طبیعی بود که مطالعهٔ آنالیز هارمونیک را موجب شد. اما عقب‌تر بردن تاریخ آنالیز هارمونیک به قبل از هویگنس[1]، دیگر از اعجازهای بدیع تخیل است.

واقع امر این است که تشخیص طنین سازهای موسیقیایی و جدال بر سر مسئلهٔ تار مرتعش و نمایش تابع برحسب توابع مثلثاتی، محرک‌های اصلی آنالیز هارمونیک و به‌طورکلی آنالیز قرنِ هجدهم و منشأ بسیاری از مفاهیم اصلی آنالیز ریاضی است. هرچند این مسئله‌ها در حوزهٔ فیزیکِ ریاضیاتی مطرح بودند.

در سال ۱۷۱۵، بروک تیلور[2] کتابی منتشر کرد که در آن بسط تیلور اولین‌بار ظاهر می‌شود. وی در فصلی از آن کتاب مسئلهٔ تار مرتعش را مطرح می‌کند و به نقش منحنی سینوس در تولید اصوات خالص اشاره می‌کند. چنان‌که اشاره کردیم مفاهیم ارتعاش، انتشار صوت، و نظریهٔ ریاضی موسیقی از مباحث مهم در قرن شانزدهم به بعد بود. مسئلهٔ تار مرتعش این است که تار یکنواختی با طول l با خاصیت کشسانی در امتداد محور x از دو سر ثابت نگه داشته شده است. اگر محور yها را عمود بر تار در نظر بگیریم و زمان را با t نشان دهیم مسئلهٔ یافتن معادله‌ای برای نمایش حرکت این تار برحسب y به عنوان تابعی از x و t است. این مسئله ازجمله مسائل مکانیک استدلالی بود و در عصر پسانیوتنیِ مکانیک استدلالی مطالعهٔ مکانیک میل‌ها، تیرک‌ها، غشاها، سیال‌ها، و بسیاری دیگر از مواد مطرح بود. حل مسئله‌های مربوط به ارتعاش این مواد نیازمند معادله‌های دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی بود.



مسئلهٔ تار مرتعش

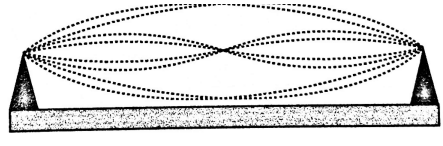
[1] Christiaan Huygens (1629–1695) [2] Brook Taylor (1685–1731)

۲.۱ دورهٔ ۱۷۵۰–۱۸۵۰

در گزارش‌های فرهنگستان برلین به سال ۱۷۴۷، دالامبر[1] اولین‌بار به‌درستی معادلهٔ تار مرتعش و جوابی برای آن را به دست می‌آورد. این معادله مکان عمودی، y، نقاط تاری به طول l را که در راستای محور x است و مبدأ مختصات در یک سر آن قرار دارد نسبت به زمان t توصیف می‌کند و به شکل

$$\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲} = a^۲ \frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲}$$

است که در آن a عددی ثابت است. جواب دالامبر، با توجه به شرایط اولیهٔ مسئله، به‌صورت $y = f(at + x) + f(at - x)$ است که در آن f طوری است که $f(z) = f(z + ۲l)$. بنابه ویژگی‌های فیزیکی مسئله، $۰ \leq x \leq l$ ، $t > ۰$، و f نیز باید با توجه به خود معادله دوبار مشتق‌پذیر باشد، و از اَشکال اولیهٔ تار کنار گذاشته می‌شوند. این نظر دالامبر بود و معتقد بود که جواب به دست آمده جواب کلی مسئلهٔ فیزیکی مطرح شده نیست. راه حل دالامبر بسیار درخشان بود و او در آن از جواب‌های سادهٔ تابع سینوسی، که بروک تیلور برای حرکت هماهنگ ساده داده بود، پس از ۳۰ سال استفاده کرد. از اینجا جدال معروف و مهم بر سر مسئلهٔ تار مرتعش شروع می‌شود که در سراسر قرن هیجدهم دانیل برنولی[2] و دالامبر، اویلر[3] و لاگرانژ[4] را در مقابل هم قرار می‌دهد. به‌درستی گفته شده است که قسمتی یا علتی از این جدال دراصل بر سر مفهوم تابع بوده است که نه در آن زمان و نه مدت‌ها بعد هنوز شناخته نشده بود.



تولید هارمونیک‌های مختلف در تار

ازجمله آثار مهم در این‌باره، مقالهٔ دانیل برنولی در ۱۷۵۳ است که در آن مسئلهٔ تار مرتعش را با رویکردی فیزیکی بررسی می‌کند. برنولی تحت تأثیر مطالعات تیلور به سال ۱۷۱۳ درخصوص تطبیق جواب سینوسی معادلهٔ موج و فرکانس ارتعاش تار نتیجه گرفت که تار مرتعش یک صدای اصلی و چندین هارمونیک آن را، که متناظر با ضرایب صحیح آن صدای اصلی‌اند، تولید می‌کند، و درنتیجه ترکیبی از صدای اصلی و هارمونیک‌ها باید بتوانند هرگونه صوتی را که تار قابلیت تولید

[1] Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783) [2] Daniel Bernoulli (1700–1782) [3] Leonhard Euler (1707–1783) [4] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

داشته باشد تولید کند. این یعنی اینکه جواب‌های جزئی معادلهٔ موج به‌صورت

$$\sin n\frac{\pi x}{l}\cos n\frac{\pi ct}{l} \qquad \text{و} \qquad \sin\frac{\pi x}{l}\sin n\frac{\pi ct}{l}$$

هستند و جواب کلی و یا عمومی باید به‌صورت

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\frac{\pi x}{l}(a_n\cos n\frac{\pi ct}{l}+b_n\sin n\frac{\pi ct}{l})$$

باشد و از اینجا نتیجه گرفت جواب کلی دالامبر باید به‌صورت

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{1}^{\infty}(a_n\cos n\frac{\pi}{l}x+b_n\sin n\frac{\pi}{l}x)$$

قابل نمایش باشد. به‌این‌ترتیب مسئلهٔ نمایش یک تابع معین برحسب سری مثلثاتی مطرح می‌شود. این مسئله موضوع اصلی آنالیز فوریه (هارمونیک کلاسیک) است.

بد نیست به رساله‌ای از لاگرانژ دربارهٔ مسئلهٔ تار مرتعش به سال ۱۷۵۹ نیز اشاره کنیم که با انجام محاسباتی در یک قدمی کشف ضرایبی قرار می‌گیرد، که بعداً به نام سری فوریه شناخته شدند، ولی او هرگز متوجه این موضوع نشد؛ شاید به این دلیل که هدف او از این استدلال‌ها اثبات درستی روش اویلر در جدال بر سر مسئلهٔ تار مرتعش بود [۸].

اما تقدیر این بود که ژوزف فوریه[1] دانش ما از سری‌های مثلثاتی را بر پایه‌ای مستحکم بنا کند. در اواخر قرن هیجدهم، مقاله‌ای طولانی به فرهنگستان فرانسه تقدیم می‌شود؛ موضوع آن مسئلهٔ بررسی پخش گرما در اجسام از دیدگاه ریاضی است ــ مسئله‌ای مهم از نظر عملی و نظری و مورد علاقهٔ بسیار ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان اواخر قرن هجدهم.[2] تا این زمان همه پذیرفته بودند که گرما صورتی از انرژی است. شاهد این مدعا استفاده روزافزون از ماشین‌های بخار در فرآیندهای صنعتی بود، خصوصاً در فرانسه و انگلستان. اما برای دانشمندان فرانسوی برخلاف صاحبان کارخانه‌های بافندگی انگلستان، جنبه نظری موضوع مورد توجه بود. موضوع از این قرار بود که در ۱۷۳۶

[2] یکی از کاربردهای عملی مسئلهٔ پخش گرما در ساختن سرداب یا سردابه‌ها (محلی در زیرِ زمین برای فرار از گرما یا خنک نگه داشتن مواد) است. با استفاده از معادلهٔ پخش گرما می‌توان نفوذ گرما از سطح به عمق زمین را برحسب عوامل مختلفی ازجمله رسانندگی گرمایی خاک منطقه تعیین کرد. می‌توان دید بهترین عمق زمین برای ساختن سرداب که دارای کمترین نوسانات دمایی باشد و دما در آن عمق نیز در حد آسایش باشد عمق ۴٫۵ متری زمین است؛ نک [۱۵].

[1] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)

فرهنگستان فرانسه جایزه‌ای با موضوع بررسی پخش گرما گذاشته بود ولی همهٔ داوطلبان، حتی اویلر، از درک درست مسئله عاجز بودند. در انتهای قرن هجدهم بحث‌هایی دربارهٔ ماهیت گرما مطرح بود و کلاً فهم درستی از موضوع حاصل نشده بود. فوریه در ۱۸۰۷ مقاله‌ای طولانی به مؤسسهٔ فرانسه (همان فرهنگستان فرانسه) فرستاد. این مقاله که حاصل کاری بود که در ۳۶ سالگی شروع کرده بود برای داوری به لاگرانژ، لاپلاس، لاکروئا[1]، و مونژ[2]، از اعضای مؤسسه، داده شد. لاگرانژ از کاربرد سری‌های مثلثاتی در مقاله به شدت انتقاد کرد.

موضوع پخش گرما دوباره به مسابقه گذاشته شد. فوریه در ۱۸۱۱ دوباره مقاله‌ای طولانی‌تر با اصلاحات بیشتر و استدلال‌های دقیق‌تر به فرهنگستان فرستاد. لاگرانژ، لاپلاس[3]، و لاکروئا داوران مقاله بودند و فوریه این‌بار برنده شد؛ ولی رأی داوران پذیرش قطعی مقاله نبود، و درنتیجه مقاله منتشر نشد. سرانجام، فوریه پس از مطالعات مجدد در این‌باره نسخه‌ای کامل‌تر از دست‌نوشتهٔ خود، در سال ۱۸۲۲، تحت عنوان نظریهٔ تحلیلی گرما منتشر کرد که کل نظریهٔ ریاضی مسئلهٔ را مشتمل بر سری‌های، به‌اصطلاح امروزی، فوریه و انتگرال‌های فوریه در برداشت. در این کتاب، فوریه به‌طرز قابل قبولی مشکلاتی را که پیشینیان داشتند از سر راه برمی‌دارد. مثلاً در همین کتاب است که اشاره می‌کند که تابع مورد بحث لازم نیست به مفهوم قدیم «پیوسته» باشد بلکه می‌تواند مرکب از چند تابع جدا باشد. همچنین او در مواردی به حل مسئلهٔ پخش گرما از اجسام صلب مختلف می‌پردازد.

معادلهٔ پخش گرما بسته به شکل جسم صورت‌های مختلفی می‌گیرد و فوریه برای اجسام مختلف، ازجمله یک میلهٔ نامتناهی، معادلهٔ مربوط را به دست آورد: خط حقیقی را مدلی از یک میلهٔ متناهی در نظر می‌گیریم. دمای y در نقطهٔ x در زمان t (صرف‌نظر از یک ضریب ثابت) در معادلهٔ

$$\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} = \frac{\partial y}{\partial t}$$

صدق می‌کند. با جدا کردن متغیرها و حل معادله‌های حاصل و اِعمال شرایط اولیهٔ $y = f(x)$، به‌ازای $t = ۰$، سری زیر برای تابع f به دست می‌آید

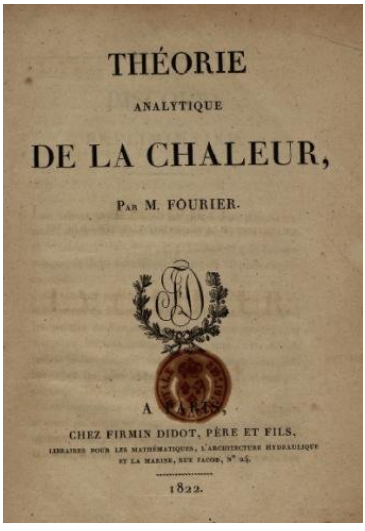
$$f(x) = a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (-\pi \le x \le \pi). \qquad (\star)$$

فوریه نشان می‌دهد $a_۰ = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ و به‌ازای هر $n \ge ۱$،

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx. \qquad (\star\star)$$

[1] Sylvestre François Lacroix (1765–1843) [2] Gaspard Monge (1746–1818) [3] Pierre-Simon marquis de Laplace (1749–1827)

ژوزف فوریه



روی جلد نظریهٔ تحلیلی گرما

سپس فوریه به حل کلی معادلهٔ پخش گرما می‌پردازد. برای بعضی از اجسام و تحت بعضی شرایط اولیه سری بالا فقط برحسب سینوس به دست می‌آید. این سری‌ها از همان سری‌هایی هستند که برنولی قبلاً در مسئلهٔ تار مرتعش به دست آورده بود. توجه کنیم که سری‌های مثلثاتی قبلاً در قرن هجدهم در موارد متعدد و خاصی توسط ریاضی‌دانانی از جمله اویلر، برنولی، و کلرو[1] در رابطه با مسئلهٔ تار مرتعش و صوت به دست آمده بودند. فوریه، به‌وضوح، از الگوی معادلهٔ موج و روش حل دانیل برنولی و سری مثلثاتی‌ای که به دست آورده بود الگو گرفته است. فوریه ادعای کشف این ضرایب را نداشت. ضرایب a_n و b_n در سری بالا را قبلاً اویلر در ۱۷۷۷ و کلرو در ۱۷۵۷ و، در حالت خاصی، دالامبر در ۱۷۵۴ به دست آورده بودند؛ اما تفاوت در خود انتگرال‌هاست که معنایی متفاوت از ریاضیات قرن هجدهم داشت. فوریه اولین کسی است که این نمایش را برای توابع کاملاً دلخواه به کار برد. هیچ‌کس قبل از او به‌درستی نمایش تابع دلخواه برحسب سری مثلثاتی را درک نکرده بود و برای اولین‌بار است که می‌بینیم تابع روی دامنه‌ای مشخص تعریف شده است و مقادیر آن خارج از دامنه اصلاً معلوم نیست.

هم‌زمان با فوریه، پواسون[2] هم که عضو فرهنگستان بود و نمی‌توانست در مسابقه شرکت کند،

[1] Alexis Claude Clairaut (1713–1765) [2] Siméon Denis Poisson (1781–1840)

مسئلهٔ پخش گرما را حل کرد و با استفاده از سری‌های مثلثاتی و انتگرال‌های فوریه معادلهٔ دیفرانسیل مربوط را حل کرد. او در ۱۸۲۳ نیز مقاله‌ای طولانی دربارهٔ توزیع دما در اجسام صلب منتشر کرده بود. در آنجا مجموع‌پذیری به‌اصطلاح آبل[1]ـ‌پواسون مطرح شده است. بین فوریه، پواسون، و کوشی مشاجراتی دربارهٔ حق تقدم و درستی روش‌ها درگرفته بود. پواسون دربارهٔ مقاله‌ای از فوریه می‌نویسد که به نظر می‌رسد فرمول بسط توابع برحسب سری مثلثاتی به‌شیوهٔ دقیق و درست اثبات نشده است. پواسون دوجا مرتکب جفاکاری می‌شود: یکی در حق فوریه و دیگری خودش ــ هیچ کتابی دربارهٔ پواسون نوشته نشد و مجموعهٔ آثار او نیز منتشر نشد [۱۱]. البته این رقابت‌ها و حسادت‌ها در جامعهٔ علمی فرانسهٔ آن زمان چیز عجیبی نبوده است: برای شرح بیشتر [۸] را مطالعه کنید. کوشی هم در مواردی سعی در به دست دادن اثبات مستقیم همگرایی سری فوریه نمی‌دهد و آن را از طریق آزمونی غیرمستقیم (البته نادرست) اثبات می‌کند.

این اتفاق‌ها نشان از آن دارند که ریاضیات آن زمان بیشتر شبیه علمی تجربی بود تا قیاسی! عجیب است که کوشی در سلسله دروسش در اکول پلی‌تکنیک بسیار دقیق و واضح می‌نویسد ولی در مقالات تحقیقی این شیوه را ندارد. به‌هرحال، سطح دقت این سه ریاضی‌دان یکی است و هر سه معتقد به درستی اثبات بسط برای هر تابع دلخواه هستند. یکی از اشتباهات کوشی در مقالهٔ سالِ ۱۸۲۶، «دربارهٔ بسط توابع برحسب سری‌های دوره‌ای»، این است که بین همگرایی معمولی و مجموع‌پذیری آبل‌ـپواسون فرق نمی‌گذارد، ادامهٔ تحلیلی را در جای نامناسب به کار می‌برد، و مهم‌تر اینکه اگر دو سری معادل باشند (حد نسبت جملاتْ متناهی باشد) و یکی همگرا باشد تصور می‌کند که دیگری هم همگرا است! این سه اشتباه تأثیرات مثبتی بر کل ریاضیات داشت! محرک دیریکله و ریمان همین اشتباهات بود.

پس مسئلهٔ اصلی تا اینجا به این صورت در می‌آید:

> برای تابع مفروض f ضرایب a_n و b_nها را به صورت گفته‌شده در (⋆⋆) مشخص می‌کنیم. تحت چه شرایطی سری یادشده نمایش تابع f است؟

تا پیش از انقلاب لبگ، این مسئله، بررسی همگرایی نقطه‌ای سری فوریه، مسئلهٔ اصلی بود و آثار دیریکله در این زمینه اولین پیشرفت مهم در این جهت است. دیریکله طی مسافرتی به پاریس در سال ۱۸۲۲ دوستی نزدیکی با فوریه برقرار کرده بود. وی در دو مقاله، یکی به سال ۱۸۲۹ در مجلهٔ

[1] Niels Henrik Abel (1802–1829)

کرِل[۱] و دیگری در گزارش‌های فیزیک[۲] به سال ۱۸۳۷، تحقیقاتی در این زمینه انجام داد. تحقیقات وی نقطهٔ عطفی، نه در سری‌های فوریه که در آنالیز ریاضی، و نمونهٔ بارز روشن‌نویسی است. او با حد انتگرال‌های

$$\int_{\circ}^{a} f(x)\frac{\sin \mu x}{\sin x}dx \quad \text{و} \quad \int_{a}^{b} f(x)\frac{\sin \mu x}{\sin x}dx \qquad (b > a > \circ)$$

وقتی μ زیاد می‌شود شروع می‌کند و نشان می‌دهد مجموع سری فوریهٔ تابع دوره‌ای f در هر نقطهٔ $-\pi < x < \pi$، به‌شرطی‌که f تکه‌ای‌پیوسته و تکه‌ای‌یکنوا باشد، برابر $\frac{۱}{۲}(f(x+) + f(x-))$ است؛ در حالت خاص، سری به $f(x)$ همگرا است اگر f در x پیوسته باشد. او مجموع سری را مانند فوریه به‌صورت حد مجموع جزئی تعریف می‌کند. از نظر تاریخی این قضیه اولین آزمون همگرایی برای سری فوریه است. این را هم بیفزاییم که در همین مقاله‌های دیریکله است که برای اولین‌بار مفهوم تابع را آن‌طورکه امروزه در کتاب‌های حسابان تعریف می‌شود می‌بینیم. پیش از آن، تابع چیزی بود که با عبارت تحلیلی، یک خم هندسی، یا برحسب تعبیری سینماتیکی[۳] توصیف می‌شد.

اکنون در آستانهٔ دورهٔ جدیدی در تاریخ آنالیز فوریه کلاسیک قرار گرفته‌ایم.

۳.۱ دورهٔ ۱۸۵۰–۱۹۰۵

در این دوره ما وارد حوزهٔ ریاضیات محض می‌شویم و مسئله یادشده به یک مسئلهٔ ریاضیات محض تبدیل می‌شود. اولین کسی که نقش مهمی در این دوره دارد ریمان[۴] است. او در رسالهٔ استادی‌اش به سال ۱۸۵۴، که البته در ۱۸۶۷ پس از مرگش چاپ شد و نقش مهمی در پیشرفت آنالیز ریاضی داشت، خواص جالبی از سری‌های مثلثاتی و سری‌های فوریه را کشف کرد. مسئلهٔ اصلی او پیدا کردن شرط‌هایی بود که تحت آن‌ها سری فوریهٔ تابع f در نقطهٔ x به $f(x)$ همگرا باشد. وی در این راه متوجه شد که مفهوم انتگرال باید وسیع‌تر و دقیق‌تر از قبل تعریف شود.

کوشی در ۱۸۲۳ انتگرال را به صورت حدی از، به‌اصطلاح امروز، مجموع‌های ریمان تعریف کرده بود که در آن نقاط انتخابی را نقاط انتهایی زیرفاصله‌ها در نظر گرفته و برای وجود انتگرال

---

[۳] kinematics؛ شاخه‌ای از دانش مکانیک کلاسیک است که حرکت اجسام و دستگاه‌ها را بدون در نظر گرفتن نیروهای عاملِ حرکت بررسی می‌کند.

[1] Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal) [2] Repertorium der Physik [4] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

شرط پیوستگی را لحاظ کرده بود. همچنین مفهوم انتگرال را به توابعی که در نزدیکی یک نقطه کران‌دار نیستند نیز تعمیم داده بود. ریمان تعریف را به توابعی که در تعداد متناهی نقطه ناپیوسته‌اند، به‌صورتی‌که امروز می‌شناسیم، تعمیم داده بود و تعریف را گسترده‌تر بیان کرده و به آن مبنایی فارغ از کلیهٔ ملاحظات هندسی و صوری داده بود. با تعریف جدید ریمان بعضی توابعی که قبلاً انتگرال نداشتند انتگرال‌پذیر می‌شوند. از قضیه‌های مهمی که ریمان دربارهٔ سری فوریه ثابت می‌کند این است که ۱) ضرایب فوریه گفته‌شده در بالا برای توابع کران‌دار و انتگرال‌پذیر همگرا به صفرند، و ۲) برای چنین توابعی همگرایی سری فوریه فقط به رفتار تابع در همسایگی آن نقطه بستگی دارد. او همچنین به بررسی سری

$$a_۰ + (a_۱ \cos x + b_۱ \sin x) + (a_۲ \cos ۲x + b_۲ \sin ۲x) + \cdots$$

می‌پردازد که در اینجا a_n و b_n ضرایب فوریه نیستند. این سؤال مهم را مطرح می‌کند که اگر مجموع سری‌ای از این نوع روی کل بازه صفر شد آیا ضرایب صفرند؟

رویداد مهم دیگری که در این دوره اتفاق افتاد این بود که دوبوا ریمون[۱] در ۱۸۷۵ ثابت کرد اگر یک سری مثلثاتی در هر نقطه به تابع انتگرال‌پذیری میل کند، آن سری باید سری فوریهٔ آن تابع باشد. او همچنین مثالی از تابعی پیوسته ساخت که سری فوریهٔ آن در یک نقطهٔ مشخص واگرا است.

از وقتی استوکس[۲] در ۱۸۴۷ مفهوم همگرایی یکنواخت را تعریف کرد نوع همگرایی سری فوریه نیز اهمیت پیدا کرد. در سال ۱۸۷۰ بود که هاینه[۳] همگرایی یکنواخت سری فوریه را برای توابع با شرط‌های موجود در قضیهٔ معروف دیریکله روی بازه‌هایی که نقطهٔ ناپیوستگی تابع را در بر ندارند ثابت کرد. دینی[۴] (۱۸۸۰)، لیپ‌شیتس[۵] (۱۸۶۴)، و ژوردان[۶] (۱۸۸۱) هم شرط‌هایی کافی همانند قضیهٔ دیریکله برای همگرایی سری فوریه اثبات کردند. ژوردان با معرفی توابع با تغییر کران‌دار بررسی سری فوریه را ساده‌تر کرد. او ثابت کرد سری فوریهٔ تابع انتگرال‌پذیر f در هر نقطه‌ای که در همسایگی آن با تغییرات کران‌دار باشد به $\frac{۱}{۲}(f(x+) + f(x-))$ همگراست.

در این دوره ویژگی‌های ضرایب فوریه نیز بررسی شده است، ازجمله روابط مهم که برحسب انتگرال ریمان بیان شده است قضیهٔ معروف پارسوال[۷] است که می‌گوید اگر $f(x)$ و $f^۲(x)$ روی $(-\pi, \pi)$ انتگرال‌پذیر باشند آنگاه

[1] Paul David Gustav du Bois-Reymond (1831–1889) [2] George Gabriel Stokes(1819–1903) [3] Heinrich Eduard Heine (1821–1881) [4] Ulisse Dini (1845–1918) [5] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903)
[6] Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922) [7] Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755–1836)

$$\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^۲dx = ۲a_۰^۲ + \sum_{۱}^{\infty}(a_n^۲ + b_n^۲).$$

همچنین اگر $f(x)$ (با ضرایب a_n, b_n) و $g(x)$ (با ضرایب α_n, β_n) روی $(-\pi, \pi)$ و مربعشان، هردو، انتگرال‌پذیر باشد آنگاه

$$\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = ۲a_۰\alpha_۰ + \sum_{۱}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

کانتور[۱] تحت تأثیر هاینه تعدادی مقاله بین سال‌های ۱۸۷۰–۱۸۸۲ دربارهٔ سری‌های فوریه منتشر کرد. او برای اولین‌بار مجموعهٔ E از دایره را مجموعهٔ یکتایی[۲] نامید اگر هر سری مثلثاتی که خارج از E برابر صفر بود آن‌وقت همه‌جا برابر صفر باشد. او در ضمن بررسی این مجموعه‌ها و مسئلهٔ سری‌های مثلثاتی، بسیاری از مفاهیم بنیادی نظریهٔ مجموعه‌ها و توپولوژی عمومی را ابداع کرد.

آکسل هارناک[۳] بین ۱۸۷۰–۱۸۸۰ راه دیگری برای بررسی همگرایی سری فوریه ابداع کرد که باید آن را نقطهٔ شروع همگرایی در میانگین دانست. او توابعی را که توان دوم آن‌ها انتگرال‌پذیر ریمان است در نظر گرفت و قضیه‌ای ثابت کرد که نتیجه آن این می‌شود که اگر $b_۰ + \sum_{۱}^{\infty} a_k \sin bx + b_k$ سری فوریه آن تابع باشد آن‌گاه این سری همگرا است. تحقیقات هارناک بسیار اهمیت دارد زیرا او در صدد حل مسئله‌ای بود که به معرفی فضای توابع $L^۲$ و حل معادلهٔ انتگرالی به دست لبگ، هیلبرت[۴]، ام. ریس[۵]، و دیگران در اوایل قرن بیستم منتهی شد. به‌هرحال اندیشه‌های هارناک چنان از زمان خودش جلوتر بود و زمانه آمادگی درک آن‌ها را نداشت که خود او هم آن‌ها را پس زد.

در اواخر قرن نوزدهم تحقیقات کمی درباره سری‌های فوریه انجام می‌گرفت و این حوزه سرزمینی ناامن و بی‌رونق، مثل آنالیز حقیقی، به حساب می‌آمد (مثال غیرمنتظرهٔ دوبوا ریمون و هیولاهای وایرشتراس در این دوره را به یاد بیاورید). برعکس، توابع مختلط و چندمتغیری و معادلات دیفرانسیل حوزه‌های مُد روز بودند [۱۱]. اما در آستانهٔ قرن بیستم تحولات مهمی در آنالیز فوریه شکل گرفت و چهرهٔ سری‌های فوریه را به‌کلی عوض کرد.

۴.۱ دورهٔ ۱۹۰۰–۱۹۵۰

در ابتدای این دوره اولین تحول مهمی که اتفاق افتاد بررسی مفاهیم دیگری از همگرایی و «شیوه‌های

[1] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) [2] set of uniqueness [3] Carl Gustav Axel Harnack (1851–1888) [4] David Hilbert (1862–1943) [5] Marcel Riesz (1886–1969)

مجموع‌یابی» به جای بررسی همگرایی نقطه‌ای سری فوریه بود. اولین قضیه از این نوع را لئوپلت فِیِر[1]، ریاضی‌دان بیست‌سالهٔ مجارستانی، در ۱۹۰۰ ثابت کرد. او نشان داد اگر f تابعی کران‌دار و انتگرال‌پذیر روی $[۰, ۲\pi]$ باشد و همچنین پیوسته یا دارای ناپیوستگی از نوع اول باشد و تعریف کنیم $S_n = \sum_{k=۰}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ و $\sigma_n = \frac{۱}{n}\sum_{k=۰}^{n} S_k$، آنگاه

$$\sigma_n \to \frac{۱}{۲}(f(x+) + f(x-)).$$

این قضیه به سرعت معروف و در موارد مختلفی به کار گرفته شد، ازجمله در روش‌های مجموع‌پذیری (C, α) که بعداً مارتسل ریس ابداع کرد.

نسبت دادن مجموع به سری‌های واگرا حتی پیش از ۱۹۰۰ شناخته شده بود و مثلاً دالامبر چنین روش‌هایی را به کار گرفته بود. همچنین آبل، پواسون، و چزاره[2] هم در مورد سری‌های توانی از این روش‌ها استفاده کرده بودند. فِیِر با تحقیقات بورل[3] دربارهٔ مجموع‌یابی سری‌های تیلور و ادامهٔ تحلیلی توابع آشنایی داشت. بنابراین او حدس دشواری را با یک روش خلاقانه حل نکرد، بلکه او روشی روشن، ساده، و کاربردی را در حوزه‌ای راکد به کار گرفت. این کار باعث تغییر موقعیت سری‌های مثلثاتی در ریاضیات و شروع مطالعات کلی دربارهٔ روش‌های مجموع‌یابی شد که در فاصلهٔ زمانی ۱۹۱۰–۱۹۴۰ تعداد آن‌ها بسیار زیاد است [۱۱].

تحول دیگر، که نه تنها برای سری‌های مثلثاتی که برای آنالیز ریاضی اهمیت داشت، ابداع نظریهٔ اندازه و انتگرال‌گیری لبگ به سال ۱۹۰۲ بود. لبگ طی ۱۹۰۲–۱۹۱۰ نظریهٔ سری‌های فوریه را از نو برپایهٔ انتگرال جدیدش بنا کرد و بسیاری از نتایج قبلی را به این وضعیت کلیِ جدید تعمیم داد. دراصل، لبگ در رساله و کتابش به سال ۱۹۰۴ انتگرال را برای توابع اندازه‌پذیر کران‌دار تعریف می‌کند حال آنکه توابع انتگرال‌پذیر و بسیاری از قضیه‌های مربوط به آن‌ها را به‌عنوان ابزار اصلی در آثار مربوط به سری‌های فوریه اثبات می‌کند. لبگ در مقاله‌ای به سال ۱۹۰۳ می‌نویسد: «قصد دارم این انتگرال را برای بسط مثلثاتی توابعی که به مفهوم ریمان انتگرال‌پذیر نیستند به کار ببرم.» یکی از نتایج اصلی او در ۱۹۰۲ این است که هر سری مثلثاتیِ همه‌جا همگرا که مجموعش تابع کران‌دار f است، سری فوریه–لبگ تابع f است («همه‌جایی» را می‌توان با خارج از یک مجموعهٔ شمارا از گونهٔ اول کانتور عوض کرد). لبگ (در ۱۹۰۶) پرسش‌هایی نظیر اینکه آیا تابع پیوسته‌ای وجود دارد که سری فوریه آن همه‌جا واگرا باشد و یا تابعی با سری فوریهٔ همگرا وجود دارد که روی

[1] Lipót Fejér (1880–1959) [2] Ernesto Cesàro (1859–1906) [3] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956)

هیچ زیربازه‌ای همگرای یکنواخت نباشد؟ نیز مطرح می‌کند. به‌طورکلی، می‌توان گفت تحقیقات در سری‌های مثلثاتی تا سال ۱۹۲۰ در همان مسیری بود که لبگ تعیین کرده بود. در ۱۹۱۶ مِنشُف[۱] تابع ناصفری ساخت که سری فوریهٔ آن همه‌جا به صفر همگرا بود. همچنین کولموگوروف[۲] در ۱۹۲۳ تابع انتگرال‌پذیر لبگی ساخت که سری فوریهٔ آن تقریباً همه‌جا و (بعداً در ۱۹۲۶) حتی همه‌جا واگراست.

رسالهٔ دکترای فاتو[۳](۱۹۰۶) هم در کنار آثار لبگ در این زمینه اهمیت بسیار دارد. رسالهٔ فاتو نتایج بسیاری دربارهٔ شرایط مرزی توابع تحلیلی دارد: هر تابع تحلیلی کران‌دار روی قرص واحد دارای حد شعاعی و حتی حد غیرمماسی در تقریباً هر نقطهٔ مرزی است و این حد تقریباً همه‌جا غیرصفر است. حد شعاعی تابع $f(z)$ در $e^{i\theta}$ عبارت است از $\lim_{r\uparrow ۱} f(re^{i\theta})$ و حد غیرمماسی، $\lim_{r\uparrow ۱,|\varphi-\theta|<\lambda(۱-r)} f(re^{i\theta})$ برای هر $\lambda > ۰$. او برای سری‌های مثلثاتی ثابت می‌کند که اگر دنباله‌های (na_n) و (nb_n) به صفر میل کنند، مجموعهٔ نقاط واگرایی سری $\sum_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ اندازهٔ صفر دارد؛ همچنین او قضیهٔ پارسوال را برای توابع مربعی‌انتگرال‌پذیر لبگ ثابت می‌کند ــ لم معروف فاتو در اینجا ظاهر می‌شود.

تحول بسیار مهم دیگر، که نه‌تنها در آنالیز فوریه بلکه در دنیای آنالیز ریاضی رخ داد، پیدایش مفهوم فضای مجرد و آنالیز تابعی بود. آغاز دورهٔ مدرن در آنالیز به‌طورکلی و آنالیز فوریه به‌طورخاص با شروع نظریهٔ انتگرال‌گیری لبگ، و متأثر از آن، معرفی مفهوم فضای مجرد در رسالهٔ دکترای فرشه[۴] در ۱۹۰۶، و به‌دنبال آن فضاهای بی‌نهایت بُعدی و فضاهای تابعی و درنهایت تولد آنالیز تابعی معنا پیدا می‌کند.

معرفی فضای دنباله‌های مربعی‌مجموع‌پذیر، $\ell^۲$، به دست هیلبرت درضمن حل معادله‌های انتگرالی اتفاق افتاد. یکی از تأثیرگذارترین افراد در این زمینه خود هیلبرت است که پس از اطلاع از نتایج ایوار فردهولم[۵]، دانشجوی میتاگ‌ـلفلر[۶]، کار خود را در این‌باره شروع می‌کند و بین ۱۹۰۴ تا ۱۹۰۶ شش مقاله در این باره منتشر می‌کند. او یک فرایند حدی را برای عبور از دستگاه معادلات متناهی به نامتناهی به‌کار برد. دنبالهٔ (ϕ_n) از توابع را که در مفهوم پلانشرل[۷] توابع ویژه با شرط

$$\int_a^b \phi_m \phi_n dt = ۰ \quad (m \neq n), \qquad \int_a^b \phi_n^۲ dt = ۱$$

[1] Dmitrii Evgenevich Menshov (1892–1988) [2] Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987) [3] Pierre Joseph Louis Fatou (1878–1929) [4] Maurice René Fréchet (1878–1973) [5] Ivar Fredholm (1866–1927) [6] Magnus Gustaf (Gösta) Mittag-Leffler (1846–1927) [7] Michel Plancherel (1885–1967)

هستند درنظر می‌گیرد و ضرایب فوریه را به‌صورت

$$(x|\phi_n) = \int_a^b x(t)\phi_n(t)dt$$

تعریف می‌کند. در ضمن حل معادله‌ای ثابت می‌کند اگر تابع f با ضابطهٔ $f = \int_a^b k(s,t)g(t)dt$ باشد، که در آن g پیوسته است، دراین‌صورت بسط فوریهٔ متناظر آن

$$f(s) = \sum_n (f|\phi_n)\phi_n(s)$$

همگرای یکنواخت است و اتحاد پارسوال

$$\int_a^b f^2 ds = \sum_n (f|\phi_n)^2$$

برقرار است. اشمیت[1]، باهوش‌ترین شاگرد هیلبرت، در رساله‌اش به سال ۱۹۰۵ اتحاد بسل[2] را برای دستگاه متعامد دلخواه و تابع پیوسته اثبات می‌کند و همگرایی یکنواخت

$$\sum_n (f|\phi_n)(g|\phi_n)$$

را برای توابع f و g، که مربعی‌انتگرال‌پذیرند، ثابت می‌کند.

ازطرفی، فرشه هم درصدد بر آوردن نظریهٔ (استادش) آدامار[3] درخصوص بررسی مجموعهٔ توابع همچون مجموعه‌ای از نقاط بود که اندیشه‌های اولیه را در ۱۹۰۴ و تکمیل آن‌ها را در رسالهٔ دکترایش در ۱۹۰۶ به ثمر رساند (مفاهیمی مانند فضای مجرد، جداپذیری، فشردگی، و همسایگی نقطه)؛ در آنجا فاصله دو تابع برابر ماکسیمم قدر مطلق تفاضل آن‌ها در نظر گرفته می‌شود. هیلبرت ظاهراً در مقالات اولیه خبر از انتگرال لبگ نداشت ولی فرشه کاملاً آشنا به انتگرال لبگ بود.

ام. ریس با شوق فراوان رسالهٔ فرشه را مطالعه و با استفاده از فاصلهٔ تعریف‌شده بین توابع توسط فرشه، قضیه‌ای از اشمیت راجع‌به دستگاه متعامد توابع را، که قبلاً هیلبرت بیان کرده بود، تعمیم داد. همچنین دریافت که با استفاده از انتگرال لبگ می‌توان آنچه را هارناک به دنبالش بود به دست آورد. وی فاصلهٔ توابع را برابر $(\int_a^b (f-g)^2 dx)^{1/2}$ به مفهوم انتگرال لبگ تعریف کرد و قضیهٔ همگرایی سری فوریه را در ۱۹۰۷ منتشر کرد. او ابتدا حالت خاص سری فوریه را بررسی

[1] Erhard Schmidt (1876–1959) [2] Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) [3] Jacques Salomon Hadamard (1865–1963)

می‌کند و سپس نتایج را به دستگاه متعامد دلخواه برای توابع مربعی‌انتگرال‌پذیر (که امروزه فضای L^2 نامیده می‌شود) تعمیم می‌دهد. فیشر[1] هم همین نتایج را زودتر و ساده‌تر به دست آورده بود ولی بعد از او به چاپ رسانده بود. فیشر بسیاری از مفاهیم اولیه دربارهٔ فضای توابع مربعی‌انتگرال‌پذیر، مثل حاصل‌ضرب داخلی، نرم، نابرابری مثلثی، و دنبالهٔ کوشی را در آن مقاله بررسی کرده است.

قضیه ۱.۱. • (فیشر، ۱۹۰۷) اگر (f_n) دنباله‌ای از توابع در $L^2[a,b]$ چنان باشد که وقتی $m,n\to\infty$، $\int_a^b |f_n(x)-f_m(x)|^2dx\to 0$ آنگاه تابع f وجود دارد به‌طوری‌که

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2dx\to 0.$$

• (ریس، ۱۹۰۷) اگر (ϕ_n) دنباله‌ای متعامد در $L^2[a,b]$ و (c_n) دنباله‌ای از اعداد (مختلط) با شرط $\sum |c_n|^2<\infty$ باشد، آنگاه تابع $f\in L^2[a,b]$ وجود دارد که به‌ازای همهٔ nها، $\int_a^b f(x)\overline{\phi_n(x)}dx=c_n$.

در سال ۱۹۱۰ اتفاق دیگری رخ می‌دهد که به آنالیز فوریه نیز مربوط می‌شود و آن ورود ردهٔ توابعی است که توان pام آن‌ها انتگرال‌پذیر است. فریدیش ریس[2] در سال ۱۹۱۰ برای حل معادلهٔ انتگرالی

$$\int_a^b f\phi_i dx=a_i$$

تابع f را مربعی‌انتگرال‌پذیر در نظر نمی‌گیرد بلکه آن را طوری می‌گیرد که توان pام آن انتگرال داشته باشد. این دسته از تابع‌ها را ردهٔ تابعی $[L^p]$ می‌نامد و همگرایی برای آن‌ها را همگرایی تعمیم‌یافتهٔ فیشر در نظر می‌گیرد. برای حل معادلهٔ یادشده مجبور می‌شود ردهٔ $[L^{\frac{p}{p-1}}]$ را وارد کار کند. درواقع، در آن مقاله ردهٔ این توابع را معرفی و بسیاری از خواص اصلی آن‌ها را ثابت می‌کند.

لوزین[3] در ۱۹۱۳ با اشاره به قضیهٔ ریس–فیشر (قضیهٔ ۱.۱) شرایط لازم و کافی برای همگرایی تقریباً همه‌جایی سری فوریهٔ توابع مربعی‌انتگرال‌پذیر روی $[0,2\pi]$ را به دست می‌دهد و در آنجا حدس می‌زند که سری فوریهٔ هر تابع مربعی‌انتگرال‌پذیر تقریباً همه‌جا همگرا است. بیش از پنجاه سال طول کشید تا این حدس را کارلسون[4] در ۱۹۶۶ اثبات کند. بد نیست اشاره کنیم که کولموگوروف یکی از شاگردان لوزین بود.

[1] Ernst Sigismund Fischer (1875–1954) [2] Frigyes Riesz (1880–1956) [3] Nikolai Nikolaevich Luzin (1883–1950) [4] Lennart Axel Edvard Carleson (1928–)

قضیهٔ ریش–فیشر ضرایب فوریهٔ توابع مربعی‌انتگرال‌پذیر را دقیقاً مشخص می‌کند و همچنین دنباله‌هایی را مشخص می‌کند که می‌توانند ضرایب فوریهٔ چنین توابعی باشند. یعنی اطلاعاتی دربارهٔ ضرایب فوریهٔ این دسته از توابع به دست می‌دهد که عملاً همان برابری پارسوال است. دربارهٔ دستهٔ دیگر توابع چه می‌توان گفت؟ برای ردهٔ دیگر توابع چنین مشخص‌سازی دقیقی نداریم و در عوض قضیه‌هایی برای دستگاه‌های مثلثاتی داریم که این نتایج را تعمیم می‌دهند. یانگ[1] در سال ۱۹۱۲ برای تعمیم برابری پارسوال برای حالتی غیراز توان ۲ (به ردهٔ توابعی که توان pام آن‌ها به مفهوم لبگ انتگرال‌پذیر است) می‌پردازد و از این ردهٔ توابع استفاده می‌کند ولی هیچ نماد خاصی برای آن‌ها در نظر نمی‌گیرد. هاوسدورف[2] در ۱۹۲۳ این نتایج را برای توان دلخواه تعمیم می‌دهد.

اف. ریس در مقاله‌ای به سال ۱۹۲۳ این نتایج را به دستگاه متعامد دلخواه تعمیم داد. ریس در همان‌جا عملگر خطی و پیوستگی آن را تعریف می‌کند و برای آن مسئلهٔ خاص به کار می‌برد. فرض کنید یک فضای اندازه با شرط $\int 1 = 1$ و یک دستگاه متعامد (u_n) با شرط $|u_n(t)| \le M$ (به‌ازای هر n) داده شده باشد. فرض کنید $1 < p \le 2$ و $1/p + 1/p' = 1$. اگر $f \in L^p$ و آنگاه $c_n = \int f\overline{u_n}$

$$\left(\sum |c_n|^{p'}\right)^{1/p'} \le M^{(2-p)/p} \left(\int |f|^p\right)^{1/p}.$$

اگر $(c_n) \in \ell^p$ و $f = \sum c_n u_n$ (همگرایی در L^2) آنگاه

$$\left(\int |f|^{p'}\right)^{1/p'} \le M^{(2-p)/p} \left(\sum |c_n|^p\right)^{1/p}.$$

این حکم تعمیم قضیه‌ای معروف به قضیهٔ یانگ–هاسدورف است. از اینجا برای $p = 2$ قضیهٔ ۱.۱ به دست می‌آید. نتایج یانگ را هاردی[3] و لیتل‌وود[4] در ۱۹۲۶ تعمیم می‌دهند. آن‌ها نتایج کاملی از تعمیم نامساوی‌های پارسوال و یانگ–هاسدورف ارائه می‌کنند، همچنین آن‌ها نماد L^r و S_r و J_r را برای رده‌های لبگ توابع به کار می‌برند.

باید توجه کرد که مفهوم فضای بی‌نهایت بُعدی، فضای تابعی، کامل بودن فضا، و مفاهیمی از این دست تا قبل از ۱۹۰۷ اصلاً وجود نداشتند. چیزی از این دست که مورد بررسی بود مجموعهٔ توابع مربعی‌انتگرال‌پذیر با فاصلهٔ یادشده در بالا بود. حتی نماد L^2 و مشابه آن تنها در دههٔ ۱۹۳۰

[1] William Henry Young (1863–1942) [2] Felix Hausdorff (1868–1942) [3] Godfrey Harold Hardy (1877–1947) [4] John Edensor Littlewood (1885–1977)

رایج شد. باناخ[1] درکتاب مشهورش با عنوان نظریهٔ عمل‌های خطی که آغاز آنالیز تابعی و فضاهای تابعی است، از نماد $\mathcal{S}$ و $\mathcal{S}^p$ به جای فضای توابع انتگرال‌پذیر و L^p استفاده می‌کرد. اولین‌بار نظریهٔ اصل موضوعی فضاهای نرم‌دار را باناخ در ۱۹۲۰ در رساله‌اش مطرح کرد (او این فضاها را فضا از نوع β نامید)؛ بااین‌حال، [۱] را ببینید. تعریف دقیق فضاهای برداری، نرم، پیوستگی، کامل بودن، و بررسی برخی فضاهای تابعی خاص در آنجا آغاز شد. بعد از آن، آنالیزدان‌ها به قدرت شیوه‌های جدید پی بُردند و آن را در بسیاری از مسائل به کار گرفتند. اصطلاحات باناخ و نمادهای آن قبول عام یافت و فضای نرم‌دارِ کامل، فضای باناخ نامیده شد.

و آخرین نکته اینکه تا اواسط قرن نوزدهم ریاضی‌دانان به اشیای ریاضی کاملاً مشخص مثل نقاط، اعداد، سطوح، خم‌ها، تابع‌ها، عملگرها، و از این دست می‌پرداختند. اما این مطلب که دست‌ورزی جبری روی اشیای مختلف شباهت‌هایی خیره‌کننده به یکدیگر دارد توجه‌ها را جلب کرد و از ۱۸۴۰ معلوم شد که اساساً این اعمال به ماهیت اشیا بستگی ندارند و قواعدی که این اعمال از آن‌ها متابعت می‌کنند اهمیت دارد. صورت‌بندی این درک تا پیش از رواج یافتن زبان مجموعه‌ها به تعویق افتاد و از سال ۱۸۹۵ به بعد است که می‌بینیم مفاهیم گروه روی یک مجموعهٔ دلخواه توسط وبر[2] مطرح می‌شود. جریان تعریف ساختارهای جبری از اینجا شروع شد و در ۱۹۲۰ مفاهیم جبری بنیادی امروز، که لازمهٔ پیشرفت‌های بعدی در آنالیز تابعی بود، تعریف شدند.

سری فوریه و روش‌های متغیرهای مختلط (۱۹۱۵–۱۹۳۰)

بیشتر پیشرفت‌هایی که در حوزهٔ آنالیز مختلط بین دو جنگ جهانی رخ داد به‌نوعی به ارتباط سری فوریه روی دایرهٔ واحد و توابع تمام‌ریخت[3] یا هارمونیک روی قرص واحد مربوط می‌شود. برای توضیح بیشتر چند تعریف لازم داریم. اگر سری $\sum_{n=۰}^{\infty} c_n z^n$ را در نظر بگیریم که در آن $c_۰ = a_۰/۲$ و $c_n = a_n - ib_n$، و فرض کنیم که $z = re^{ix}$ (متعلق به قرص واحد) باشد آن‌وقت سری $a_۰/۲ + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ همان قسمت حقیقی سری توانی گفته‌شده در بالا روی دایرهٔ واحد است. قسمت مختلط آن سری، به‌ازای $z = e^{ix}$، هم سری زیر است

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(-b_n \cos nx + a_n \sin nx).$$

این سری را مزدوج سری فوریه می‌نامند. حالا اگر c_nها کران‌دار باشند، این سری نمایش یک تابع

[1] Stefan Banach (1892–1950) [2] Heinrich Martin Weber (1842–1913) [3] holomorphic

تحلیلی روی قرص واحد است برای

$$z = re^{ix}, \quad ۰ \le r < ۱, \quad ۰ \le x \le ۲\pi;$$

بنابراین قسمت‌های حقیقی و مختلط،

$$u(r,x) = a_۰/۲ + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)r^n$$

و

$$v(r,x) = \sum_{n=۱}^{\infty}(-b_n \cos nx + a_n \sin nx),$$

توابع هارمونیک مزدوج (صادق در معادلهٔ کوشی–ریمان) هستند.

صورت مختلط سری فوریه به شکل $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ است که در آن

$$c_۰ = \frac{a_۰}{۲}, \qquad c_n = \frac{a_n - ib_n}{۲}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{۲}$$

و مجموع جزئی آن به‌صورت $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ikx}$ در می‌آید. اگر f تابعی انتگرال‌پذیر روی دایرهٔ واحد باشد، سری فوریه آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنند

$$f(\theta) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}, \qquad c_k = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta$$

و مجموع جزئی آن به صورت $S_n(\theta) = \sum_{-n}^{n} c_k e^{ik\theta}$ است. به هر سری فوریه سری زیر را وابسته می‌کنند

$$u(r,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ik\theta} \qquad (۰ \le r < ۱).$$

به‌ازای r ثابت، تابع بالا برحسب θ را میانگین آبل تابع f می‌نامند. مزدوج هارمونیک این تابع، که در مبدأ صفر می‌شود، به صورت زیر است

$$v(r,\theta) = \frac{۱}{i}\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(\mathrm{sgn}(k))r^{|k|}e^{ik\theta}$$

که در آن sgn تابع علامت اعداد مختلط است. ثابت شده است که حد $\lim_{r\to ۱} v(r,\theta)$ تقریباً همه‌جا وجود دارد و با سری زیر داده می‌شود که آن را تابع مزدوج (فوریه) می‌نامند

$$\tilde{f}(\theta) = \lim_{r\to ۱} v(r,\theta) \sim \frac{۱}{i}\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(\mathrm{sgn}(k))r^{|k|}e^{ik\theta}.$$

هاردی در مقاله‌ای به سال ۱۹۱۵، دربارهٔ خواص میانگین یک تابع تحلیلی روی قرص واحد، ثابت می‌کند تابع

$$M_F^p(r) = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta$$

برحسب r صعودی و $\log M_F^p(r)$ تابع محدب برحسب $\log r$ است. در تنها مقالهٔ مشترک برادران ریس، فریدیِش و مارتسل، در سال ۱۹۱۶ دربارهٔ مقادیر مرزی توابع تمام‌ریخت روی قرص واحد، آن‌ها ثابت می‌کنند که تحت شرایطی چنین توابعی روی زیرمجموعه‌ای از دایرهٔ واحد با اندازهٔ مثبت نمی‌توانند صفر شوند (نقطهٔ شروع این مقاله همان قضیهٔ مهم فاتو است که در بالا اشاره شد). فرض کنید $0 < p < \infty$ و تعریف کنید

$$H^p(\mathbb{D}) = \{F : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : \lim_{r\to 1} M_F^p(r) < \infty \text{ و } F \text{ تمام‌ریخت است}\}.$$

آن‌ها ثابت می‌کنند که

قضیه ۲.۱ (فریدیِش و مارتسل ریس، ۱۹۱۶). تابع تمام‌ریخت $F(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ روی قرص واحد به $H^1(\mathbb{D})$ تعلق دارد اگر و فقط اگر $\sum_0^\infty a_k e^{ik\theta}$ سری فوریهٔ تابعی مانند $f(e^{i\theta})$ در $L^1(\mathbb{T})$ باشد. دراین‌صورت داریم

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{f(z)}{w - z} dw, \qquad f(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} F(re^{i\theta}).$$

بعدها در ۱۹۲۳، اف. ریس این رده از توابع را بررسی کرد و آن‌ها را ضمن اشاره به نقش میانگین کلی (بررسی‌شده توسط هاردی) ردهٔ H_δ نامید. این‌ها همان فضاهای هاردی امروزی‌اند.

موضوع دیگر این است که مثالی ساده نشان می‌دهد مزدوج توابع متعلق به L^1 لزوماً در L^1 نیست، اما دربارهٔ L^p با شرط $p > 1$ چه می‌توان گفت؟ در حالت $p = 2$ پاسخ معلوم است: $\|\tilde{f}\|_2^2 = 2\pi \sum_{k\neq 0} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$. حالت باقی‌مانده عمیق‌تر است.

قضیه ۳.۱ (ام. ریس، ۱۹۲۴). نگاشت $f \mapsto \tilde{f}$ روی $L^p(\mathbb{T})$ برای $1 < p < \infty$ کران‌دار است.

این نتیجه نمونه‌ای از نتایج نظریهٔ انتگرال‌های منفرد است، ولی ابزار این نظریه در سال‌های ۱۹۲۴ وجود نداشت. به این موضوع بعداً باز خواهیم گشت.

فریدیِش ریس

مارتسل ریس

آخرین پیشرفتی که در این دوره ذکر خواهیم کرد به مقاله‌ای مهم از هاردی و لیتل‌وود به سال ۱۹۳۰ مربوط می‌شود. آن‌ها مفهوم بازآرایی غیرصعودی را تعریف و نتایج مهمی دربارهٔ آن ثابت کردند. همچنین آن‌ها برای هر تابع در $L^1(\mathbb{T})$ مفهوم تابع ماکسیمال

$$Mf(\theta) = \sup_{0<|t|<\pi} \frac{1}{t} \int_0^t |f(\theta+\phi)| d\phi,$$

و تابع غیرتماسی ماکسیمال

$$u_c^*(\theta) = \sup_{(r,\phi)\in S_c(\theta)} |u(r,\phi)| \qquad (0 \le c < 1)$$

را برای توابع روی قرص واحد تعریف کردند؛ در اینجا $S_c(\theta)$ غلاف محدب قرص با شعاع کمتر از c در مرکز $(1,\theta)$ است.

قضیه ۴.۱ (هاردی–لیتل‌وود، ۱۹۳۰).

- برای $1 < p \le \infty$ عدد ثابت A_p موجود است که $\|Mf\|_p \le A_p \|f\|_p$ به‌ازای هر $f \in L^p(\mathbb{T})$.
- برای $0 \le c < 1$ عدد ثابتی مانند B_c موجود است که $u_c^*(\theta) \le B_c Mf(\theta)$ که در آن $f \in L^1(\mathbb{T})$ و u گسترش هارمونیک آن روی قرص واحد است؛ همچنین برای $p > 1$ داریم $\|u_c^*\|_p \le A_p B_c \|f\|_p$.

قضیه‌های درونیابی

در بالا به قضیهٔ یانگ–هاسدورف اشاره کردیم. اثبات یانگ برای آن قضیه بسیار تکنیکی است. اولین کسی که پی برد در بعضی نابرابری‌ها، مانند قضیهٔ یانگ–هاسدورف، حالت‌های خاصْ حالت کلی را نتیجه می‌دهد مارتسل ریس، در سال ۱۹۲۷، بود. ام. ریس اشاره می‌کند که این قضیه حالت خاصی از یک قضیهٔ کلی دربارهٔ درونیابی عملگرها است. این قضیه یک دیدگاه کلی از کاربرد نظریهٔ عملگرها به دست می‌دهد. در اینجا اطلاعاتی دربارهٔ دو حالت خاص $p = ۱, ۲$ داریم و می‌خواهیم اطلاعاتی دربارهٔ حالت‌های میانی به دست آوریم. این قضیه کلی را قضیهٔ تحدب ریس یا ریس–تورین هم می‌نامند، چون تورین[1]، دانشجوی ام. ریس، در ۱۹۴۸ اثبات کوتاه‌تر و زیباتری برای آن داده است. زیگموند این قضیه را یکی از برجسته‌ترین و زیباترین قضیه‌های آنالیز دانسته است [۱۰]!

فرض کنید (M, μ) و (N, ν) دو فضای اندازه باشند. می‌گوییم عملگر T که توابع اندازه‌پذیر روی M را به توابع اندازه‌پذیر روی N می‌برد از نوع (p, q) است اگر روی $L^p(M)$ تعریف شده باشد و عدد ثابت A مستقل از تابع f موجود باشد به‌طوری‌که

$$\left(\int_N |T(f)|^q d\nu\right)^{۱/q} \leq A \left(\int_M |f|^p d\mu\right)^{۱/p}.$$

قضیه ۵.۱ (ام. ریس، ۱۹۲۷؛ تورین، ۱۹۳۹). فرض کنید T عملگری از نوع $(p_۰, q_۰)$ و $(p_۱, q_۱)$ با کران‌های $A_۰$ و $A_۱$ باشد. آنگاه این عملگر از نوع (p_t, q_t) با کران $A_t \leq A_۰^{۱-t} A_۱^t$ است که در آن

$$\frac{۱}{p_t} = \frac{۱-t}{p_۰} + \frac{t}{p_۱}, \qquad \frac{۱}{q_t} = \frac{۱-t}{q_۰} + \frac{t}{q_۱} \qquad (۰ \leq t \leq ۱)$$

در ۱۹۵۶، اشتاین[2] این قضیه را به خانوادهٔ تحلیلی از عملگرها تعمیم داد.

قضیهٔ درونیابی دیگری وجود دارد که مارچینکیویچ[3] در مقالهٔ کوتاهی در ۱۹۳۹ منتشر کرد و به دلیل وقفه‌ای که جنگ جهانی دوم ایجاد کرد فقط زیگموند طی یادداشتی از اثبات مارچینکیویچ خبر داشت، تا اینکه بعد از ۱۷ سال، زیگموند گزارش کاملی دربارهٔ آن منتشر کرد.

فرض کنید T عملگری باشد که توابع روی (M, μ) را به توابع روی (N, ν) می‌نگارد. اگر

[1] G. Olof Thorin (1912–2004) [2] Elias Menachem Stein (1931–2018) [3] Józef Marcinkiewicz (1910–1940)

عدد A موجود باشد که برای هر $f \in L^p(M)$ داشته باشیم

$$\lambda_{T(f)}(y) \leq \left(\frac{A}{y}\|f\|_p\right)^q$$

می‌گوییم این عملگر از نوع (p,q) ضعیف است (اگر g تابعی روی فضای اندازه (N,ν) باشد، توزیع تابع g تابع ناصعودی $\lambda_g(y) = \nu(\{x \in N : |g(x)| > y\})$ است که برای هر $y > 0$ تعریف می‌شود). کولموگوروف در ۱۹۲۲ نشان داده بود که مزدوج یک تابع لزوماً انتگرال‌پذیر نیست بلکه مجموعهٔ نقاطی که $|\tilde{f}(x)| > y$ دارای اندازه‌ای کمتر از یک مضرب ثابت $\|f\|f_1/y$ است، و این مطلب به همین مفهوم انتگرال‌پذیری ضعیف منتهی شد؛ با این اصطلاحات جدید، نگاشت مزدوج عملگری از نوع $(1,1)$ ضعیف است. این عملگر زیرخطی است به این معنی که در شرط زیر صدق می‌کند: $|T(f+g)| \leq |T(f)|+|T(g)|$. اکنون دومین ابزار آنالیزدان‌ها در درونیابی عملگرها را می‌آوریم که قضیهٔ ریس نتیجه‌ای از آن است.

قضیه ۶.۱ (مارچینکیویچ، ۱۹۳۹). فرض کنید T عملگر زیرخطی از نوع (p_0,q_0) و (p_1,q_1) ضعیف باشد که $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$ برای $i = 0,1$ و $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$. آنگاه T از نوع (p_t,q_t) که در آن

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} \qquad (0 < t < 1).$$

گسترش به مجموعه‌های دیگر

اجازه دهید این قسمت را از زبان ففرمن[1] [۶] بازگو کنیم:

> اجازه دهید با طرح اجمالی از آخرین نتایجی که تا حوالی ۱۹۵۰ به دست آمده بود شروع کنم. در آن دوره، آنالیز فوریه به‌خوبی بسط یافته بود اما فقط برای حالت یک‌بُعدی. ازآنجایی‌که مدت‌ها پیش معلوم شده بود که سری فوریهٔ توابع پیوسته روی $[0,2\pi]$ لزوماً در هر نقطه همگرا نیست، پر مسلم است که اندازهٔ لبگ (و به‌خصوص L^p) به‌صورت ابزار اصلی در آمده باشند. قضیهٔ پلانشرال $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = 2\pi\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2$ که در آن $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$ مشخص‌سازی کاملی از توابع در L^2 برحسب ضرایب فوریهٔ آن‌ها به دست می‌داد و همگرایی سری فوریه را نسبت به نرم اثبات می‌کرد.

[1] Charles Louis Fefferman (1949–)

اما معلوم شده بود که بررسی L^p (وقتی $p \neq ۲$) بسیار دشوارتر است. برای دیدن نشانه‌ای از دشواری‌های مسائل مربوط به L^p تابعی مثل $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$ را که در L^p ($p < ۲$) باشد ولی در $L^۲$ نباشد در نظر بگیرید و سری فوریهٔ آن را به‌صورت $g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \pm a_k e^{ikx}$ تغییر دهید که در آن علامت $\pm$ به‌طور مستقل با پرتاپ سکه تعیین می‌شود. دراین‌صورت با احتمال یک، تابع g به L^p (یا حتی $L^۱$) تعلق ندارد و فقط توزیعی با تکینگ‌های ناخوشایند است. درنتیجه، این حکم که $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} \in L^p$ نه فقط به اندازهٔ ضرایب فوریه $|a_k|$، بلکه به روابط ظریفی که بین فازهای $\arg(a_k)$ وجود دارد نیز وابسته است.

باوجود دشواری این مسئله، به یُمن کارهای پیشگامانهٔ هاردی و لیتل‌وود، ام. ریس، پیلی[1]، زیگموند، مارچینکیویچ و دیگران مطالب بسیاری دربارهٔ رابطهٔ بین اندازهٔ یک تابع و طبیعت سری فوریهٔ آن تا حوالی ۱۹۴۰ معلوم شده بود.

. . . اکنون دربارهٔ تغییرات مهمی که در آنالیز فوریهٔ کلاسیک صورت گرفت می‌خواهم صحبت کنم، تغییراتی که با مقالهٔ بنیادی کالدرون و زیگموند در ۱۹۵۲ شروع شد. توجه ما در اینجا مصروف تلاشی است که برای تعمیم عملگرهای اصلی، به‌ویژه تبدیل هیلبرت، از $\mathbf{R}^۱$ به $\mathbf{R}^n$ شده است. این تعمیم‌ها، به‌هیچ‌وجه، عادی نیستند، زیراکه حاصل‌ضرب‌های بلاشکه [2] به توابع چندمتغیرهٔ مختلط تعمیم نمی‌یابند، و درنتیجه (به این دلیل و دلایل دیگری) از همهٔ روش‌های مختلط باید دست کشید و این احکام را باید با فنون متغیرهای حقیقی از نو اثبات کرد. علاوه‌براین، روش‌های متغیرهای حقیقی و مشابه n متغیری تبدیل هیلبرت، Sـتابع‌ها، و غیره نقش مهمی در معادله های دیفرانسیل، توابع چندمتغیرهٔ مختلط، نظریهٔ احتمال و پتانسیل دارد و احتمالاً کاربردهای بیشتری با گذشت زمان خواهد یافت.

درواقع، عمدهٔ تحقیقات در نیمهٔ دوم قرن بیستم در آنالیز فوریه همان موضوعات دهه‌های قبل ولی با تغییر فضای زمینه بود. در این دوره، توجه از قرص و دایرهٔ واحد به مجموعهٔ اعداد حقیقی و نیم‌صفحهٔ بالایی جلب شد، و این کار از راه‌های مختلفی انجام گرفت. برای مثال، روی $\mathbb{R}$ مشابه نگاشتی که هر سری فوریه را به مزدوجش می‌برد تبدیل هیلبرت است، که عملگری یکانی روی

[1] Raymond Edward Alan Christopher Paley (1907–1933) [2] Blaschke

$L^۲(\mathbb{R})$ است و به‌صورت

$$Hf(x) = \frac{۱}{\pi} \lim_{\varepsilon \to ۰} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy$$

تعریف می‌شود (این تبدیل واجد خواص تقارنی مختلفی است و یک تبدیل پیچشی با همگرایی غیرمطلق است). ریس نشان داد که حکم مربوط به سری‌های فوریه در این حالت هم برقرار می‌ماند.

قضیه ۷.۱ (ام. ریس، ۱۹۲۴). تبدیل H روی L^p برای هر $۱ < p < \infty$ کران‌دار است.

توجه داشته باشید که می‌توان نشان داد که تبدیل هیلبرت نیز از نوع $(۱,۱)$ ضعیف است و این قضیهٔ ریس را می‌توان از قضیهٔ ۶.۱ نتیجه گرفت.

تبدیل هیلبرت واجد خواص بسیاری است و قابلیت تعمیم به فضای nبُعدی را دارد. این قابلیت در کار بنیادی کالدرون و زیگموند بازتاب می‌یابد.

اما تغییر بسیار مهم‌تری که در تغییر فضای زمینه انجام گرفت، همان‌طورکه در نقل‌قول بالا از ففرمن آمد، تغییر از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^n$ بود. نظریهٔ کالدرون–زیگموند دربارهٔ انتگرال‌های منفرد یکی از نقطهٔ عطف‌های مهم در توسعهٔ آنالیز هارمونیک روی $\mathbb{R}^n$ بود، نظریه‌ای که تعمیمی با پیامدهای بسیار از تبدیل هیلبرت است [۷].

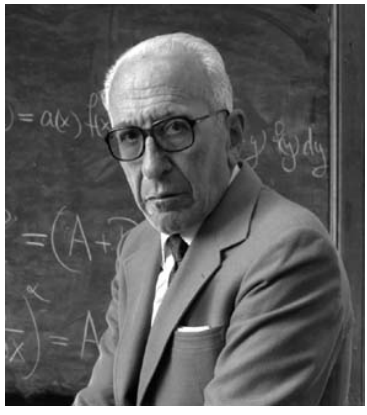
قضیه ۸.۱ (کالدرون–زیگموند، ۱۹۵۲). فرض کنید K از ردهٔ $C^{(۱)}$ و روی $\mathbb{R}^n \setminus \{۰\}$ همگن از درجهٔ $-n$ باشد (یعنی $K(rx) = r^{-n}K(x)$ برای هر $r > ۰$) و در شرط زیر صدق کند $\int_{\|x\|=۱} K(x)d\sigma(x) = ۰$ (σ اندازهٔ سطح روی کرهٔ واحد است). دراین‌صورت عملگر T_K با ضابطهٔ

$$T_K f(x) = f * K(x) = \lim_{\varepsilon \to ۰} \int_{\|y\|>۰} f(x-y)K(y)dy$$

از نوع $(۱,۱)$ ضعیف است و روی L^p برای هر $۱ < p < \infty$ کران‌دار است.

۵.۱ از ۱۹۵۰ به بعد

از آغاز این دهه تمرکز آنالیز فوریه روی انتگرال‌های منفرد بود. درواقع، همان‌طورکه در سری‌های فوریه تک‌متغیری تبدیل هیلبرت به‌صورت موضوع مهم در آمد در هر بررسی در آنالیز فوریهٔ چندمتغیری هم انتگرال‌های منفرد تبدیل به موضوع اصلی شدند. ثمرهٔ نظریهٔ کالدرون–زیگموند دربارهٔ انتگرال‌های



آلبرتو کالدرون

آنتونی زیگموند

منفرد نظریهٔ ففرمن–اشتاین–وایس[۱] درباره فضاهای هاردی شد، و این فضاها موضوع اصلی آنالیز فوریه گردید.

در دههٔ ۱۹۸۰، دو موضوع اساسی توجه‌ها را در آنالیز فوریه به خود جلب کرد. یکی از آن‌ها قضیهٔ $T(1)$ داوید–ژورنه–سِمز[۲] دربارهٔ L^2–کران‌داری انتگرال‌های منفرد بود. از این طریق چشم‌انداز تازه‌ای دربارهٔ اینکه چه انتگرال‌های منفردی می‌توانند عملگرهای کران‌دار القا کنند حاصل آمد. جابجاگر کالدرون، عملگرهای هانکل[۳] و دیگر اشیای کلاسیک با ابزار قدرتمندی که در این قضیه آمده بود در یکجا گرد آمدند.

اتفاق مهم دیگری که در دههٔ ۱۹۸۰ افتاد ابداع موجک‌ها به دست ایوز مِیِر[۴] بود در سال ۱۹۸۰. مانند هر ایدهٔ خوبی، موجک‌ها هم باعث کشف مجدد آنالیز فوریه شد. حالا دیگر لازم نبود که برای مدل‌سازی فقط به موج‌های سینوسی و کسینوسی فکر کنیم بلکه برای هر مسئله‌ای می‌شد یک آنالیز فوریه‌ای مناسب آن مسئله بنا کرد. روش‌های قدرتمندی برای موضعی‌سازی هر مسئله برحسب متغیرهای مکانی و فازی در اختیار داشتیم. موجک‌ها در حوزه‌های مختلف ریاضیات کاربردی مانند پردازش سیگنال و فشرده‌سازی تصاویر انقلابی به پا کرد.

جمع‌بندی اجازه بدهید با یک تصویر کلی از زبان کرانتس[۵] در مؤخرهٔ کتابش [۱۳] این مقدمه را به پایان برسانیم: دیدیم سؤالات اصلی آنالیز فوریه برخاسته از تحقیقات قرن هیجدهم دربارهٔ معادلهٔ

[1] Guido Leopold Weiss (1928–2021) [2] Guy David (1957–); Jean-Lin Journé (1957–); Stephen William Semmes (1962–) [3] Hermann Hankel (1839–1873) [4] Yves F. Meyer (1939–) [5] Steven George Krantz (1951–)

موج بود. دهه‌ها بعد، فوریه روشی برای بسط «هر تابع دلخواه» روی $[0, 2\pi]$ برحسب توابع سینوس و کسینوس پیدا کرد. انگیزهٔ اصلی فوریه در این کار مسائل مطرح در فیزیک بود و شاید مطالب به آن اندازه که ما انتظار داریم دقت ریاضی نداشته باشند، اما دیریکله بنای دقت در نظریهٔ سری‌های فوریه را گذاشت.

سرچشمهٔ بسیاری از مفاهیم آنالیز ریاضی مدرن در آنالیز فوریه بوده است. تحقیقات کانتور در نظریهٔ مجموعه‌ها تا حدودی از مسئلهٔ مجموعهٔ یکتایی سری‌های فوریه نشأت گرفته است. نظریهٔ اندازهٔ لبگ و ابداع آنالیز تابعی در قرن بیستم هم برخاسته از سؤالاتی در آنالیز فوریه بود. آنالیز فوریه ــ به‌ویژه تبدیل فوریه ــ و نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی پابه‌پای هم رشد کرده‌اند.

در دههٔ ۱۹۲۰، مارتسل ریس ثابت کرد تبدیل هیلبرت روی $L^p(\mathbb{T})$ به‌ازای $1 < p < \infty$ کران‌دار است، و به‌این‌ترتیب اثباتی یکپارچه برای همگرایی سری فوریه در نرم به دست آورد و با این کار دست به ابداع نظریهٔ درونیابی زد و عملگرهای انتگرالی منفرد را در مرکز آنالیز هارمونیک جا داد. نظریهٔ انتگرال‌های منفرد تبدیل هیلبرت را برگرفت و آن را در نظریهٔ عمومی عملگرها قرار داد. کالدرون، زیگموند، اشتاین، و دیگران نشان دادند که نظریهٔ انتگرال‌های منفرد بستر طبیعی بررسی مسائل معادله‌های دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی و آنالیز هارمونیک است.

ابداع جبرهای عملگرهای شبه‌دیفرانسیلی در دههٔ ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ و نظریهٔ کلی‌تر هُرماندر[1] دربارهٔ عملگرهای انتگرالی فوریه را می‌توان «نسل بعد» نظریهٔ آنالیز فوریه به حساب آورد. این نظریه‌ها انتگرال‌های منفرد را به قالب ابزار قدرتمند جبرهای عملگری در آوردند که اینک می‌شد با استفاده از آن‌ها مسائل مختلفی در آنالیز را مورد بررسی قرار داد.

قضیهٔ $T(1)$ داوید–ژورنه–سِمز تمام دانش ما دربارهٔ انتگرال‌های منفرد، جبرهای عملگری، و جابجاگرهای انتگرال‌های منفرد را در خود جمع کرد و به ابزاری قدرتمند برای تحلیل عملگرهای تحت انتقال ناوردا و عملگرهایی که به‌طور طبیعی در آنالیز هندسی ظاهر می‌شوند تبدیل شد.

نظریهٔ جدید موجک‌ها به آنالیز هارمونیک مجالی برای خلق دوبارهٔ خود داد. با این نظریه می‌توان آنالیز فوریه‌ای طراحی کرد که مناسب مسئلهٔ مشخصی باشد. فنون فشرده‌سازی تصاویر، که امروزه در برخی سازمان‌ها برای انگشت‌نگاری الکترونیکی به کار می‌رود، برپایه الگوریتم موجک‌ها قرار دارد؛ روش‌هایی که برای بازسازی و بهسازی برخی آهنگ‌های قدیمی به کار می‌رود نیز برپایهٔ الگوریتم‌های

[1] Lars Valter Hörmander (1931–2012)

پردازش سیگنال مبتنی‌بر موجک‌ها است. دیدن تصاویر زنده از طریق دستگاه‌های ارتباط جمعی به مدد فنون فشرده‌سازی تصاویری که مبتنی‌بر الگوریتم‌های موجک‌هاست میسر شده‌اند.

حقیقت مطلب این است که مجموع‌های جزئی که به‌طور طبیعی در بسط موجک‌ها ظاهر می‌شوند نوعی عملگرهای کالدرون–زیگموند تعریف می‌کنند. به‌این‌ترتیب می‌بینیم که بعضی از نوترین ایده‌ها، دراصل، ثمرهٔ جاافتاده‌ترین آن‌ها هستند. آنالیز فوریه و آنالیز هارمونیک صرفاً نظریه‌هایی از انواع نظریه‌های ریاضیات نیستند، بلکه جریان‌هایی دنباله دارند. آینده آن‌ها هم گسترده است و هم غیرقابل پیش‌بینی.

۲ مصاحبه

از اینکه قبول زحمت فرمودید بسیار سپاسگزارم. ضمن معرفی خودتان، بگویید که در چه تاریخی و کجا متولد شدید؟ مختصری از سوابق تحصیل خودتان نیز بگویید.

ـ با سپاس از لطف شما. متولد ۱۳۵۹ در آبادان هستم. هم‌زمانی تولدم و آغاز جنگ منجر به مهاجرت خانواده‌ام به شهرستان رامهرمز شد. پس از پایان دبیرستان بنا به دلایلی علاقه به ادامهٔ تحصیل نداشتم. پس از یک دورهٔ آموزش نظامی در یزد، دورهٔ سرباز معلمی‌ام آغاز شد. تدریس در روستاهای دورافتادهٔ لرنشین و عرب‌نشین خوزستان از جهات مختلف فرصت درخشانی بود که در آن ضمن کسب تجربیات ناب اجتماعی، روش‌های آموزشی را که پیش‌ازاین مطالعه کرده بودم، حتی‌المقدور در عمل بیازمایم. پس از اتمام خدمت سربازی به استخدام رسمی شرکت ملی پتروشیمی درآمدم. دورهٔ کارآموزی بهره‌برداری را در پتروشیمی تبریز گذراندم و پس از آن در پتروشیمی بوعلی‌سینای ماهشهر مشغول به کار شدم.

مطالعه و تفکر در مورد مسائلی در ریاضیات از بزرگ‌ترین تفریحات بنده در دوران اشتغال در پتروشیمی بود. بعد از مدت‌ها کشمکش درونی، مهم‌ترین تصمیم زندگی‌ام را گرفتم. برای کنکور ثبت‌نام کردم. پس از گذشت حدوداً هشت سال از فارغ‌التحصیلی از دبیرستان، مدت کوتاهی (تقریباً دو ماه) را به آمادگی برای کنکور اختصاص دادم و با قبولی در دانشگاه سیستان و بلوچستان، تحصیل خود را در

رشتهٔ ریاضی محض در پاییز سال ۱۳۸۵ و در سن بیست‌وشش سالگی آغاز کردم. با اتمام مقطع کارشناسی در تیرماه ۱۳۸۹ بورس تحصیلی در مقطع دکترای دانشکدهٔ ریاضیِ دو دانشگاه گوتنبرگ و دانشگاه صنعتی سوئد را دریافت کردم و در مردادماه همان سال به کشور سوئد عزیمت کردم. در اکتبر سال ۲۰۱۵ با دفاع از رسالهٔ خود تحت عنوان «مباحثی در جبر چندخطی و آنالیز هارمونیک» مدرک دکترا را اخذ کردم. با اتمام دورهٔ دکترا بلافاصله به ایران بازگشتم و دورهٔ پسادکترای خود را با حمایت بنیاد ملی نخبگان در دانشگاه شیراز آغاز کردم. پس از اتمام کار در شیراز، مدتی در خدمت دانشگاه تحصیلات تکمیلی زنجان بودم و از مهرماه ۱۳۹۹ در پژوهشگاه دانش‌های بنیادی (IPM) با عنوان پسادکترای ارشد مشغول پژوهش هستم.

کمی دربارهٔ دورهٔ کارشناسی و افرادی که روی شما تأثیر گذاشتند صحبت کنید.

ـ من در کلاس درس‌های مختلف کارشناسی و کارشناسی ارشد حاضر می‌شدم. ترم سوم کارشناسی بودم که در کلاس درس آنالیز حقیقی و تابعی مرحوم دکتر پرویز عظیمی حاضر می‌شدم. یک بار پای تخته فضای «توابع با تغییر کران‌دار» را معرفی کرد و تعمیم آن را که «فضای واترمن»[1] است تشریح کرد. این فضاها در آنالیز فوریه بسیار اهمیت دارند چون همگرایی یکنواخت سری فوریه توابع متعلق به فضای واترمن، البته به شرط انتخاب درست وزن، شناخته شده است. دکتر عظیمی به من گفتند که رسالهٔ دکترای یکی از دانشجویانش مربوط به بررسی ویژگی‌های این فضا است. متأسفانه چند ماه بعد از این موضوع ایشان درگذشتند. با درگذشت ایشان دانشجوی دکترای ایشان موضوع رساله را عوض کرد. در ترم چهارم که بودم، «قضیهٔ هلی» را برای فضای «شیبا–واترمن»[2] اثبات کردم. همچنین لمی را که از آن برای پیوستگی تابع موسوم به $\Lambda - p - \text{variation}$ استفاده می‌شود و یک شرط لازم برای شمول فضای شیبا–واترمن و فضای تعمیم‌یافته لیپ‌شیتس به دست آوردم. بعدها پراسویسنیوسکی[3] شرط لازم و کافی را پیدا کرد و با کمک لم یادشده نتایج دیگری به مقالهٔ مشترکمان اضافه کرد. تکمیل آن مقاله حدوداً دو سال طول کشید. با استفاده از ایدهٔ واترمن، فضای «اندازه‌های با تغییر کران‌دار» را که در نظریهٔ شپلی–اومان[4] نقش کلیدی دارند تعمیم دادم و فضای جدیدی تعریف و «پیش‌دوگان» آن‌را به دست آوردم. در این مقاله دکتر احمدی لداری «جدایی‌ناپذیر» بودن این فضا را ثابت کرد. در تابستان سال ۱۳۸۷، مقاله را برای فابیو مکرونی[5] و ویلیام راکل[6] فرستادم و نظرشان را جویا شدم. درواقع مقاله تعمیم کار آن‌ها بود. چون صحت آن

[1] Waterman [2] Shiba-Waterman [3] Franciszek Prus-Wiśniowski [4] Aumann-Shapley [5] Fabio Maccheroni
[6] William Ruckle

را تأیید کردند و کیفیت کار را پسندیده بودند، تشویق شدم که مقاله را چاپ کنم. درهرصورت، از دید امروزم باید بگویم که هیچ‌کدام از این مقالات از نظر ریاضی دستاوردهای فوق‌العاده‌ای نیستند.

مرحوم عظیمی تأثیر بزرگی بر تحصیل و پژوهش من گذاشتند. درهرصورت این ایده‌های خام برای تحقیق به این بر می‌گردد که استادی مثل عظیمی موضوع اصلی را به‌صورتی قابل فهم شرح داده بود و از طرفی برخوردهایش اعتماد به نفس لازم را به من داد. واقعیت این است که من مطلع نیستم که پیش از مرحوم عظیمی آیا استادی در ایران موضوع آنالیز فوریهٔ کلاسیک را به دانشجویان کارشناسی ارشد و یا دکترایش عرضه کرده باشد. البته باید بگویم منظورم از آنالیز فوریهٔ کلاسیک چیست تا سوءتفاهمی پیش نیاید. منظور من از آنالیز فوریهٔ کلاسیک موضوعاتی کاملاً مرتبط و در راستای کتاب‌های قدیمی سری‌های مثلثاتی از باری[1] و کتابی به همین نام از زیگموند است.

پس از دورهٔ کارشناسی برای دورهٔ دکترا به سوئد رفتید. دربارهٔ این دوره از دوران تحصیل خودتان توضیح بدهید.

ـ کشور سوئد بیش از ده میلیون جمعیت دارد و کشور ثروتمندی است. باوجوداین، حدود پنجاه دانشگاه دارد و از این میان دانشگاه گوتنبرگ (با قدمتی بیش از صدوبیست سال) و دانشگاه صنعتی چالمرز (با قدمتی حدوداً دویست سال) جزو قدیمی‌ترین دانشگاه‌های آن کشورند. هر دو دانشگاه در شهر گوتنبرگ (یوتوبوری) قرار دارند و تعدادی از دانشکده‌ها، از جمله دانشکدهٔ ریاضی، بین آن‌ها مشترک است. دانشکدهٔ ریاضی در محوطهٔ دانشگاه چالمرز واقع است و این دانشگاه حدود یازده هزار دانشجو دارد.

در کل من در سوئد احساس غربت نکردم. خیلی به‌ندرت پیش آمد که با کسی صحبت کنم که انگلیسی نداند. ازطرفی من خوش اقبال بودم که دوستان بسیار خوب، مستعد، باسواد و اهل فکری از ملیت‌های مختلف و فعال در رشته‌های مختلف علوم و مهندسی پیدا کردم. شاید بزرگ‌ترین چیزی که در دورهٔ دکترا نصیب من شد آن دوستی‌ها، تبادل تجربه‌ها، و مباحثات بود.

در سال ۲۰۱۰ پنج نفر برای بخش ریاضی و چهار نفر برای بخش آمار در دانشکدهٔ ریاضی برای دورهٔ دکترا پذیرش کردند که من هم جزو آن‌ها بودم. در سوئد دانشجوی دکترا، کارمند محسوب می‌شود. شما حقوق بسیار بالایی نسبت به بقیهٔ کشورها دریافت می‌کنید، مالیات می‌دهید و بسیاری از امکاناتی که در اختیار استادان قرار دارد، در اختیار شما نیز قرار می‌گیرد. عموماً دانشجو،

[1] Nina Karlovna Bari (1901–1961)

تورستِن کارلِمن

یلمار روزنگرن

برای سال اول یک استاد راهنما را در نظر می‌گیرد. اگر توافق دوطرفه باشد، این رویه هدایت دانشجو توسط استاد راهنما سال اول ادامه پیدا می‌کند. در مورد من، استاد راهنمای سال اول من پروفسور گریگوری رزنبلوم[۱] بود. پس از سال اول، استاد راهنمای من پروفسور یلمار روزنگرن[۲] بودند. همین‌طور، یک نفر به‌اصطلاح «مراقب» انتخاب می‌شود که وظیفهٔ بررسی پیشرفت دانشجو را برعهده دارد و درس‌هایی که بناست دانشجو بگذراند و همین‌طور رساله، علاوه بر استاد راهنما باید به تأیید او برسد. در دوران تحصیل، مثلاً خودم، باید ۱۲۰ واحد درس می‌گرفتیم. اکثر درس‌ها هفت‌ونیم واحد هستند. در سال اول دکترا، یک درس اجباری هست که تعداد واحد آن ۱/۵ است. یک دورهٔ دو روزه برای شما ترتیب می‌دهند تا آشنایی بهتری از دورهٔ دکترا پیدا کنید. در این دوره در مورد مقاله‌نویسی و نکات مختلفی بحث می‌شود. صرف حضور در این‌دوره به معنای گذراندن درس است. در هرصورت دانشجو موظف است که تعداد بسیاری زیادی درس بگذراند. همچنین برای دفاع از رسالهٔ دکترا عموماً سه مقالهٔ باکیفیت شرط ضروری است. البته پذیرش مقاله در مجله شرط لازم نیست و تأیید استاد راهنما و کمیتهٔ داوری کفایت می‌کند.

در مورد دروس دورهٔ دکترا باید اضافه کنم که ملزم بودیم از شاخه‌های مختلف درس بگذرانیم: آنالیز تابعی، روش‌های مجانبی، نظریهٔ میدان‌های کوانتومی، گروه‌های لی، دو درس در مورد نظریهٔ انتگرال‌های منفرد، یک درس مدیریت پروژه، داده‌های بزرگ، یادگیری ماشین، دو درس در آنالیز

[1] Grigori Rozenblum [2] Hjalmar Rosengren (1972–)

عددی، آنالیز فوریه و موجک‌ها، حمل و نقل بهینه، و چند درس دیگر.

> پس از طرف روزنگرن نَسب علمی شما به کانتوروویچ[۱] و از آن هم به فیختن‌گولتس[۲] و اسمیرنوف[۳] و از طرف روزنگرن به کارلمن[۴] معروف می‌رسد؛ بگذریم. درمورد امتحانات دروس و امتحان جامع هم توضیحی بدهید.

ـ دانشجوی دکترا یا نمرهٔ قبولی درس را می‌گرفت یا در آن درس به‌اصطلاح مردود می‌شد. روش امتحان گرفتن هر درس هم کاملاً وابسته به سلیقهٔ استاد بود. مثلاً درس‌هایی بودند که امتحان کتبی داشت و درس‌هایی هم داشتیم که برای نمرهٔ قبولی باید تمرین‌هایی را حل می‌کردیم و امتحان شفاهی می‌دادیم. در بعضی درس‌ها هم باید یک مقالهٔ جذاب یا فوق‌العاده دشوار را تجزیه و تحلیل می‌کردیم و دربارهٔ آن سمینار و به سؤالات استاد جواب می‌دادیم.

بسیاری از استادان واقعاً وقت صرف تهیهٔ تمرین‌های درس‌ها می‌کردند تا تمرین‌هایی که می‌دادند صرفاً از کتابی کپی نشده باشد. بسیار اتفاق می‌افتاد که خود استاد مسائل زیبایی طرح می‌کرد. اگر دانشجویی دست به تقلب می‌زد، از دانشگاه اخراج می‌شد. اگر اشتباه نکنم این اتفاق متأسفانه برای یک دانشجوی کارشناسی ارشد ایرانی افتاد. به نظر من این تمرین‌ها در آن درس‌ها بسیار مهم بودند. برای درس نظریهٔ انتگرال‌های منفرد، پیتر شوگرن[۵] بهترین تمرین‌ها را به‌نحوی خلاقانه طراحی کرده بود. به گمانم اگر تلاش برای حل آن مسئله‌های زیبا نبود، به این رشته علاقه‌مند نمی‌شدم. اینکه استاد چگونه باید تمرین طراحی کند که بعداً دانشجوی دکترا از آن به نفع تحقیقاتش استفاده کند، بحث مفصلی است.

در درس‌های مرتبط با آمار هم علاوه بر امتحان شفاهی، باید با کمک نرم‌افزار پروژه‌ای را آماده می‌کردیم. چنانکه عرض کردم کاملاً وابسته به نظر استاد بود. در سوئد استاد هر درس در قبال نمره دادن یا ندادن به دانشجو احساس مسئولیتی خطیر می‌کند و برای آن‌ها امری جدی به حساب می‌آید. اگر دانشجویی درسی را گذرانده است دیگر مورد تأیید همگان است. از طرفی دانشجوی دکترا باید کم‌وبیش شانزده درس دکترا بگذراند. بنابراین برای آن‌ها امتحان جامع ضرورتی پیدا نمی‌کند.

شما شاخهٔ آنالیز هارمونیک حقیقی را به‌عنوان حوزهٔ اصلی پژوهشی‌تان انتخاب

---

[1] Leonid Vitalievich Kantorovich (1912–1986) [2] Grigorii Mikhailovich Fikhtengolts (or Fichtenholz) (1888–1959) [3] Vladimir Ivanovich Smirnov (1887–1974) [4] Torsten Carleman(1892–1949) [5] Peter Sjögren

کردید. آثار پژوهشی شما به حوزه‌ای مربوط است که از آن به آنالیز فوریهٔ مدرن یاد می‌شود. در این باره توضیحی بدهید.

ـ درست می‌فرمایید. اولاً باید بگویم آنالیز هارمونیک حقیقی به‌شکلی خیره‌کننده در آنالیز فوریه تنیده شده است. این موضوع مفصل است. همین تنیده شدن باعث می‌شود گاه در نام‌گذاری سرگردان بشویم. آنچه مقدمات حوزهٔ تحقیقی بنده است مثلاً در کتاب‌های آنالیز فوریه کلاسیک و مدرن از گرافاکوس و آنالیز هارمونیک از اشتاین آمده است. مراجع دیگری هم هستند که عنوان‌هایی مثل «آنالیز فوریه» یا «آنالیز هارمونیک» دارند. بنده ترجیح می‌دهم، به‌تبعیت از بسیاری از بزرگان این حوزه، از «آنالیز هارمونیک حقیقی» استفاده کنم.

برای درک چیستی موضوع این شاخه از ریاضی، خواندن مقاله‌ای از ترِنس تائو[1] بسیار راهگشاست. ترجیح می‌دهم گاه کلمه‌به‌کلمهٔ عبارات او را به کار ببرم. تائو دید و دانش بسیار وسیعی دارد. من از گرافاکوس نقل می‌کنم که گفته است از میان همهٔ بزرگان ریاضی، تائو و بورگَن[2] ابرانسان‌اند. اگر مقالهٔ تائو را بخوانید می‌بینید که به جای آنکه به ورطهٔ تعریف‌های تخصصی بیفتد می‌گوید که تمرکز شاخهٔ آنالیز هارمونیک حقیقی بر روی خواص کمّی توابع است و دریافتن اینکه با به‌کارگیری عملگرهای گوناگون چطور این خواص کمّی تغییر می‌کنند. در همان مقاله، با یک مثال بسیار ساده، نمونهٔ سؤالات این شاخه از ریاضیات را کمی روشن می‌کند:

> اگر تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و گرادیان آن هردو در فضای L^2 باشند آیا می‌توان نتیجه گرفت که تابع f یکنواخت‌کران‌دار است؟

از طرفی، گاهی تکنیک‌های آنالیز هارمونیک برای بررسی «خواص کیفی» یک تابع (مثلاً اندازه‌پذیری، انتگرال‌پذیری، پیوستگی، مشتق‌پذیری و غیره) مفیدند. مثلاً تابع ائری[3] را در نظر بگیرید. این تابع با کمک انتگرال تعریف می‌شود. حالا برای اینکه بدانید آیا همیشه همگرایی انتگرال را دارید یا خیر، یا دانستن رفتار تابع وقتی متغیر به بی‌نهایت میل می‌کند، از ابزار های آنالیز هارمونیک استفاده می‌کنید. از این‌ها گذشته، در شاخهٔ آنالیز هارمونیک، عملگرهایی را که از دیگر شاخه‌ها، نظیر آنالیز مختلط، نظریهٔ ارگودیک، نظریهٔ احتمال، آنالیز عددی، و هندسهٔ دیفرانسیل می‌آیند تجزیه و تحلیل می‌کنند. اما خب، در این زمان شاید گسترده‌ترین شکل کاربردی آنالیز هارمونیک در زمینهٔ ارتباط این شاخه و نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی است.

[1] Terence Chi-Shen Tao (1975–) [2] Jean, Baron Bourgain (1954–2018) [3] George Biddell Airy (1801–1892)

تکنیک‌های آنالیز هارمونیک برای فهم جواب‌های معادله‌های دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی خطی و غیرخطی گوناگون به کار می‌رود. مثلاً با حل معادلهٔ پواسون در حالت ساده، شما با «تبدیل هیلبرت» روبرو می‌شوید که معروف‌ترین مثال از عملگرهایی است که به اسم «عملگرهای کالدرون–زیگموند» شناخته می‌شوند.

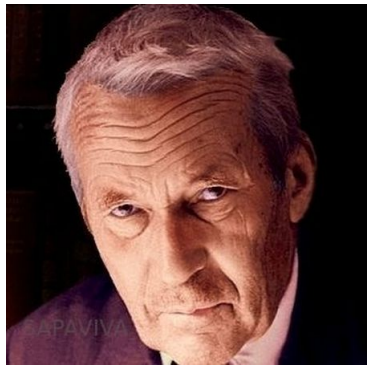
مقالات اخیر بنده مربوط به کاربردها در معادله‌های دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی بوده است و در آن‌ها کران‌داری عملگرهایی مثل عملگر شرودینگر، عملگر ضربی فوریه، عملگرهای کالدرون–زیگموند، و عملگرهای لیتل‌وود–پیلی بررسی شده است.

برگردیم به اصطلاح «آنالیز فوریه». چگونه دستاوردهای مدرن، به فهم سؤالات قدیمی آنالیز فوریه کمک کردند؟

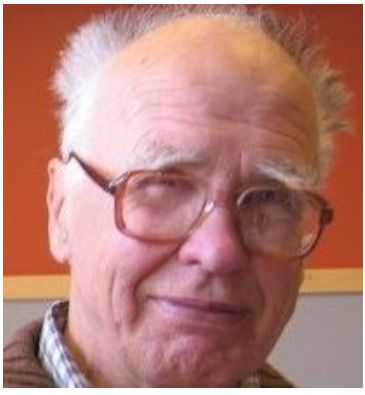
– نمونهٔ بارز این مطلبی که می‌فرمایید قضیهٔ «کارلسون–هانت» است که می‌دانید مهم‌ترین قضیهٔ شناخته‌شده در مورد همگرایی سری فوریه است. اثبات، به‌معنای واقعی کلمه، دشوار است و ابزارهای بسیاری از آنالیز هارمونیک برای اثبات این قضیه به کار گرفته می‌شوند. دراصل، کران‌داری عملگر کارلسون اثبات قضیه را نتیجه می‌دهد و برای این‌کار انواع و اقسام روش‌ها به کار گرفته می‌شود. برای نمونه، اگر به تعریف عملگر کارلسون نگاه کنید پیچش هستهٔ دیریکله و تابع را مشاهده می‌کنید و این کمک می‌کند که حتی در نگاه اول هم ردپای انتگرال‌های منفرد را ببینیم. منظورم از انتگرال‌های منفرد، به‌تسامح، عملگرهایی شبیه به «تبدیل هیلبرت» و «تبدیل ریس»اند که نقاط تکین در هستهٔ انتگرال دارند. بررسی این‌گونه عملگرها، عموماً «نظریهٔ کالدرون–زیگموند» خوانده می‌شود. البته برای پاسخ به آن سؤال می‌شود، همگرایی مجموع جزئی فوریه در L_p را هم ذکر کرد، که (با شرط $p > ۱$) مثال فوق‌العاده ساده‌تری است. شما مجموع جزئی فوریه را به‌صورت تفاضل دو عملگر می‌نویسید. در هریک از این دو عملگر «تبدیل هیلبرت» به‌شکلی ظاهر می‌شود. با توجه به اینکه $p > ۱$ و با کمک کران‌داری «تبدیل هیلبرت» در L_p نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

اگر ممکن است تاریخچه و یا چشم‌اندازی از دوران مدرن آنالیز فوریه برای ما ترسیم کنید. چه مسائلی در این دورهٔ مدرن مطرح بودند و چه افرادی پیشگامان این دوره به حساب می‌آیند؟

– آنالیز فوریهٔ کلاسیک شامل مباحثی است که با سرمنشأ بحث، یعنی سری‌های فوریه، ارتباط تنگاتنگ دارند. به همین دلیل، از دید تاریخی این مباحث از سال ۱۸۰۰ تا دههٔ پنجاه قرن بیستم و



آندرئی کولموگوروف



لنارت کارلسون

اوایل قرن بیست‌ویکم ادامه داشته‌اند. از طرفی مباحث طبقه‌بندی‌شده در آنالیز فوریه مدرن هرچند در ادامهٔ مسیر آنالیز فوریه کلاسیک‌اند اما این مباحث یا دارای کاربردهای بسیار مهم در شاخه‌های دیگر ریاضی، خصوصاً نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی، است و یا نسبت به مباحث کلاسیک، پیش‌نیازهای زیادی برای درک روش‌ها و تکنیک‌ها مورد نیاز است. به‌همین دلیل است که شاید بتوان زمان انتشار قضیهٔ شناخته‌شده کارلسون (در میانهٔ دههٔ شصت) را مصادف با تولد آنالیز فوریهٔ مدرن قلمداد کرد. البته با توجه به تعریف و بیان کاربردهایی از فضاهای لورنتس[۱] و شوارتس[۲] در اوایل دههٔ پنجاه و نیز بسط نظریهٔ کالدرون–زیگموند، عده‌ای مایل‌اند که آغاز دورهٔ آنالیز فوریهٔ مدرن را اوایل دههٔ پنجاه فرض کنند.

به تبعیت از گروه دوم، در اینجا، مراد من از آنالیز فوریهٔ مدرن، مباحث پیشرفته‌ای در آنالیز فوریه است که از اوایل دههٔ پنجاه تا به امروز طرح و پرداخته شده‌اند. با این تفاسیر می‌توان دید که دستاوردهای ژوردان، دینی، ریمان، کولموگوروف، و دیگران در حوزهٔ آنالیز فوریه، و یا هر تحقیقی که سبک و سیاق آنان را در حمله به مسائل دنبال کند، در زمرهٔ کلاسیک قرار می‌گیرد. به همین دلیل اگر در دههٔ هفتاد میلادی می‌بینیم که واترمن فضای توابع با تغییر کران‌دار را تعمیم می‌دهد و کلاسی از توابع را معرفی می‌کند که همگرایی یکنواخت سری فوریهٔ آنان تضمین می‌شود نباید اطلاق کنیم که این نتیجه الزاماً در آنالیز فوریه مدرن می‌گنجد. بلکه چون تکنیک‌ها قدیمی هستند، این دست نتایج را باید در گروه آنالیز فوریهٔ کلاسیک طبقه‌بندی کرد.

پیش از آنکه وارد بحث شوم و تصویری از آنالیز فوریهٔ مدرن و تاریخچهٔ بسیار مختصری از آن را

[1] Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) [2] Laurent-Moïse Schwartz (1915–2002)

بیان کنم، لازم می‌دانم که در ابتدا قضیهٔ کارلسون را بیان کنم. می‌دانیم که دوبوا ریمون در سال ۱۸۷۶ نشان داد تابع پیوسته‌ای وجود دارد که سری فوریه‌اش در یک نقطه واگراست. همچنین کولموگوروف در سال ۱۹۲۳ تابعی را پیدا کرد که سری فوریه‌اش تقریباً همه‌جا واگرا بود. این نتایج می‌تواند کمک کند تا دریابیم که چقدر کار کارلسون شگفت‌انگیز بوده است. قضیهٔ کارلسون گه در سال ۱۹۶۶ ارائه شد با توابع L^2 سروکار دارد و اثبات می‌کند سری فوریهٔ این توابع تقریباًهمه‌جا (نسبت به اندازهٔ لبگ) همگراست. تعمیم این قضیه توسط هانت برای توابع L^p که $1 < p < \infty$ در سال ۱۹۶۸ صورت گرفت. این قضیه اکنون به نام قضیهٔ کارلسون–هانت مشهور است. کارلسون برای اثبات قضیه‌اش، عملگری غیرخطی را معرفی می‌کند:

$$Cf(x) = \sup_N \left| \int_{-N}^{N} \hat{f}(y) e^{2\pi i x y}\, dy \right|.$$

اثبات کارلسون–هانت چیزی جز اثبات کران‌داری عملگر کارلسون روی $L^p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$ نیست. باید توجه کنیم که این اثبات بسیار دشوار است و مقدمات زیادی برای فهم آن ضروری است. به‌عنوان مثال ما باید اطلاعاتی راجع به نظریهٔ کالدرون–زیگموند و انتگرال‌های منفرد داشته باشیم. پس بیاییم و نگاهی به انتگرال‌های منفرد بیندازیم. به‌طورکلی یک «انتگرال منفرد» یک عملگر انتگرالی به فرم

$$T(f)(x) = \int K(x,y) f(y)\, dy$$

است که در آن تابع هستهٔ $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ روی قطر $x = y$ منفرد است. یک سؤال طبیعی این است که انگیزهٔ این تعریف که ذکر کردیم چه بوده است؟

معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbb{R}^n \quad \text{روی} \quad \Delta u = f$$

که در آن $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. جواب u به شکل زیر است

$$u(x) = C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy.$$

یک سؤالی که در نظریهٔ نظم معادلات دیفرانسیل مطرح است این است که آیا u دارای مشتق دوم در L^p است؟ یعنی اینکه

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n)?$$

اگر از u به‌طور صوری مشتق بگیریم می‌رسیم به

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x_i \partial x_j} = c \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\partial^۲}{\partial x_i \partial x_j} \frac{۱}{|x-y|^{n-۲}} dy$$
$$\leq C_۲ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^n} dy =: Tf(x).$$

درنتیجه $\frac{\partial^۲ u}{\partial x_i \partial x_j}$ یک انتگرال منفرد مانند $Tf(x)$ تعریف می‌کند.

یک رابطهٔ معمول که در نظریهٔ انتگرال‌های منفرد در جستجوی آن هستند این است که

$$\|Tf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

بنابراین اگر چنین رابطه‌ای صادق باشد، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

نظریهٔ انتگرال‌های منفرد با عملگرهای انتگرالی سروکار دارد که هسته‌های آن‌ها به‌گونه‌ای است که نتیجهٔ زیر به دست نمی‌آید

$$\|T\|_{L^۲}^۲ \leq \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) dx \right) \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) dy \right)$$

بلکه کران‌داری عملگر وابسته به خصوصیاتی از هسته است که «خاصیت‌های حذفی»[۱] نامیده می‌شوند.

تا اینجا با مسامحه یکی از انگیزه‌های تعریف انتگرال‌های منفرد و رفتار هسته‌های آن‌ها را بیان کردم. وقت آن است که مهم‌ترین عملگر در آنالیز فوریه را بشناسیم: تبدیل هیلبرت. تبدیل هیلبرتِ تابعی مثل $f(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$H(f)(x) = \frac{۱}{\pi} \text{ p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y} \, dy$$

که در آن

$$\text{p.v.} \int g dx = \lim_{\epsilon \to ۰} \int_{|x|>\epsilon} g dx.$$

[1] cancelation properties

به عملگرهایی که $L^۲$ کران‌دارند و هستهٔ آن‌ها خصلت‌های خاص و مشابهی با هستهٔ تبدیل هیلبرت دارند، عملگرهای کالدرون–زیگموند می‌گویند. بررسی خصلت‌های چنین عملگرهایی منجر به نظریهٔ انتگرال‌های منفرد شد. همین نظریه از مهم‌ترین ابزارهای اثبات قضیهٔ کارلسون–هانت بود.

حال که در مورد نقطهٔ عطف تاریخ آنالیز فوریه، قضیهٔ کارلسون–هانت، گفتیم اجازه دهید برگردیم به آنالیز فوریهٔ مدرن. برای آنکه خواننده ذهنیتی کمی دقیق‌تر راجع‌به موضوعات موردعلاقه در آنالیز فوریه به دست آورد به مثال زیر توجه کنید که یک تقریب جذاب لیتل‌وود–پیلی است و در اثبات آن اسامی ریاضی‌دانان بزرگی را مشاهده می‌کنیم. درحالتی‌که $۲ \leq p < \infty$ برآورد جالبی، منسوب به لیتل‌وود–پیلی، برقرار است: ثابتی مانند C_p موجود است که برای هر خانواده از بازه‌های باز و مجزا مانند I_j در $\mathbb{R}$ داریم

$$\|(\sum_j |(\hat{f}\chi_{I_j})'|^۲)^{۱/۲}\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}.$$

این حکم را روبیو دِ فرانسیا[1] در ۱۹۸۵ ثابت کرد، هرچند حالت خاص $I_j = (j, j+۱)$ را کارلسون در ۱۹۶۷ ثابت کرده بود. البته بورگَن در ۱۹۸۵ اثبات دیگری برای آن داده است.

برای آنکه فضای تحقیقاتی از دوران کلاسیک را که به‌وضوح منجر به پژوهش‌های دوران مدرن شده است دریابیم لازم است توجه خوانندگان را به این موضوع جلب کنیم که بررسی کران‌داری ضعیف و قوی عملگرهای انتگرالی و خصوصاً عملگرهای انتگرالی منفرد یکی از موضوعات اساسی تحقیقاتی در آنالیز فوریهٔ کلاسیک و مدرن بوده است.

منظور ما از کران‌داری ضعیف این است که فرض کنید (X, μ) و (Y, ν) دو فضای اندازه و T عملگری از $L^p(X, \mu)$ بتوی توابع اندازه‌پذیر از Y به $\mathbb{C}$ باشد. می‌گوییم T از نوع (p, q) ضعیف است، وقتی $q < \infty$، هرگاه

$$\nu\Big(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}\Big) \leq C\Big(\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda}\Big)^q.$$

برای ذکر نمونه‌ای از تحقیقی که در دوران کلاسیک شروع و در دوران مدرن پیگیری شده است، عملگرهای پتانسیل ریس را در نظر بگیرید: برآوردهای از نوع قوی $L^p \to L^q$ برای عملگرهای پتانسیل ریس در حالت بُعد یک را هاردی و لیتل‌وود در ۱۹۲۷ و ۱۹۳۲ به دست آوردند. در حالت

[1] Rubio de Francia

کلی هم سوبلِیف[1] آن را در ۱۹۳۸ اثبات کرد. از طرفی تقریب کران‌داری توسط زیگموند در سال ۱۹۵۶ انجام شد. تعمیم کار سُوبلِیف برای عملگرهای غیرپیچشی توسط فالند[2] و اشتاین در سال ۱۹۷۴ انجام شد.

سروکار داشتن با کران‌داری قوی و ضعیف علت اصلی اهمیت قضیهٔ درونیابی مارچینکیویچ (۱۹۳۹) و قضیهٔ درونیابی ریس–تورین (۱۹۴۸) است. (صورت این قضیه‌ها را شما در قسمت مقدمه آوردید) کلاً بحث درون‌یابی یکی از موضوعات مهم تحقیقاتی در آنالیز فوریه است و از سرآمدان این شاخه می‌توان از یاک پیتره[3] نام برد.

چنانچه ذکر شد قضیهٔ کارلسون را باید بارزترین مرز بین دنیای آنالیز فوریه کلاسیک و آنالیز فوریه مدرن دانست، که مسئلهٔ همگرایی در بُعد یک را تا حد بسیار زیادی حل‌وفصل کرد. اما موضوع در ابعاد بالاتر بسیار پیچیده‌تر است و دانش فعلی ما بسیار محدود. بیاید نگاهی به بُعد دو بیندازیم.

ترتیب مجموع‌یابی بسیار مهم است. مثلاً در حالت دوبُعدی، می‌شود تعریف کرد

$$S_N(f;t_1,t_2)=\sum_{|n_1|\le N,|n_2|\le N}\widehat{f}(n_1,n_2)e^{i(n_1t_1+n_2t_2)}$$

که به آن مجموع‌های جزئی مربعی می‌گویند. و اگر آن را با

$$\sum_{n_1^2+n_2^2\le N^2}\widehat{f}(n_1,n_2)e^{i(n_1t_1+n_2t_2)}$$

عوض کنیم به مجموع‌های جزئی دایره‌ای می‌رسیم. تفاوت این‌ها بسیار زیاد است.

تعمیم قضیهٔ کارلسون–هانت برای ابعاد بالاتر برحسب مجموع‌یابی مربعی نتیجه‌ای از حالت یک‌بُعدی است که آن را ففرمن در ۱۹۷۱ و شُلین[4] در همان سال و توزادز[5] در ۱۹۷۰ عرضه کرده‌اند. مثالی از ففرمن در سال ۱۹۷۱ نشان می‌دهد که مجموع‌های جزئی دایره‌ای سری فوریه ممکن است در $L^p(\mathbb{T}^n)$ به‌ازای $n\ge 2$ و $p\neq 2$ همگرا نباشد. این مثال نشان می‌دهد که وقتی $1<p\le 2$ توابعی در L^p روی $\mathbb{T}^n$ وجود دارند که مجموع‌های جزئی دایره‌ای آن‌ها وقتی $n\ge 2$ همگرایی تقریباً همه‌جایی ندارند.

[1] Sergei Lvovich Sobolev (1908–1989) [2] Gerald Budge Folland (1947–) [3] Jaak Peetre (1935–2019)
[4] Per Sjölin (1943–) [5] Revaz Nikolaevich Tevzadze

در آنالیز فوریهٔ مدرن فضاهای تابعی متنوعی معرفی شدند. یکی از مهم‌ترین این فضاها، فضای BMO[۱] است که توسط اف. جان[۲] و نیرنبرگ[۳] در سال ۱۹۶۱ در زمینهٔ معادله‌های دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی غیرخطی معرفی شد. اینکه BMO دوگان فضای هاردی H^1 است در سال ۱۹۷۱ توسط ففرمن اثبات شد. از طرفی، ففرمن به همراه اشتاین ارتباط توابع BMO با اندازهٔ کارلسون را در سال ۱۹۷۲ ارائه کردند. این‌گونه دستاوردها به همراه ابزارهای دیگر موجب شد داوید و ژورنه در سال ۱۹۸۴ بتوانند قضیهٔ مهم $T(1)$ را اثبات کنند. این قضیه بیان می‌کند که

قضیه. اگر $T(1)$، $T^*(1)$ از نوع BMO باشند و T ضعیفاً کران‌دار[۴] باشد آنگاه T در شرط L^2 کران‌داری صدق می‌کند.

تعمیمی از این قضیه ابزار مهمی شد که بعدها مسئلهٔ کاتو[۵]، که از شناخته‌شده‌ترین مسائل نظریهٔ معادلات دیفرانسیل بوده، حل شود و در سال ۲۰۰۲ در مجلهٔ Annals of Mathematics منتشر شود.

مایلم در اینجا اشاره‌ای کنم به تعدادی از مقالات در حوزهٔ آنالیز فوریه که در مجلات بسیار با پرستیژ نظیر Annals of Mathematics چاپ شده‌اند. سال‌هاست توجه پژوهشگران آنالیز فوریه به بررسی عمیق‌تر عملگرهای انتگرالی منفرد چندخطی جلب شده است. ازسوی‌دیگر، مجموعهٔ ایده‌های خلاقانه و پیشگام لِیسی[۶] و تیله[۷] برای اثبات متفاوتی برای قضیهٔ کارلسون در سال ۲۰۰۰ اکنون به‌عنوان آنالیز زمان‌ـفرکانس[۸] موردتوجه ریاضی‌دانان است. همچنین اثبات حدس $A2$ توسط هیتونِن[۹] در سال ۲۰۱۲، زمینه‌ساز تحقیقات گسترده پیرامون کران‌داری وزن‌دار عملگرهای انتگرالی منفرد و ابداعات شیوه‌های متفاوتی شد که اکنون کاربرد آن‌ها در شاخه‌های دیگر مانند نظریهٔ معادلات دیفرانسیل و نظریهٔ اعداد شناخته شده است.

در پایان لازم است اشاره کنم که این امیدواری وجود دارد که در آینده ابداعات و دستاوردهای مهم در آنالیز فوریه به دستیابی به جواب‌های معادلات ناویه‌ـاستوکس[۱۰] کمک شایانی کند. این معادلات با پدیدهٔ «تلاطم»[۱۱]، که به قول فیزیک‌دان معروف فاینمن مهم‌ترین مسئلهٔ حل‌نشدهٔ فیزیک کلاسیک است، گره خورده‌اند. می‌دانیم که یکی از هفت مسئلهٔ بزرگ هزاره مربوط به معادلات ناویه‌ـاستوکس است و خوانندگان می‌توانند صورت‌بندی این مسئله را که چارلز ففرمن ارائه کرده است به‌راحتی با

[1]Bounded Mean Oscillation [2]Fritz John (1910–1994) [3]Louis Nirenberg (1925–2020) [4]weakly bounded [5]Kazuya Kato (1952–) [6]Michael Thoreau Lacey (1959–) [7]Christoph Thiele (1968–) [8]Time-Frequency Analysis [9]Tuomas Hytönen (1981–) [10]Navier-Stokes [11]turbulence

یک جستجو در اینترنت بیابند. از طرفی کاربردهای گوناگون آنالیز فوریهٔ مدرن در شاخه‌های مختلف کاملاً شناخته شده است. به‌عنوان مثال پردازش سیگنال و تصویر مخابرات، اکتشافات فضایی، آکوستیک، اقیانوس‌شناسی، اپتیک و طیف‌سنجی کریستالوگرافی، ژنتیک، رادیو اخترشناسی، و توموگرافی. برای درک این موضوع علاقه‌مندان را به کتاب [۱۵] ارجاع می‌دهم.

> گفتید که قضیهٔ کارلسون–هانت دربارهٔ L^pهایی است که $p > 1$. از طرفی، کولموگوروف هم ثابت کرد که تابع انتگرال‌پذیری، یعنی تابعی در L^1، وجود دارد که سری فوریهٔ آن تقریباً همه‌جا واگراست. حالا این سؤال پیش می‌آید که بزرگ‌ترین ردهٔ توابع که به‌نوعی مطمئن باشیم سری فوریهٔ هر عضوش همگرا است چیست؟

ـ توجه داشته باشید که بین فضای L^1 و L^p روی بازهٔ متناهی با شرط $p > 1$ رده‌های بسیاری از توابع وجود دارد که می‌توان همگرایی را برای آن‌ها بررسی کرد. تا جایی که من اطلاع دارم، بزرگ‌ترین رده‌ای که همگرایی سری فوریهٔ هر عضو آن ثابت شده است فضای $L\log L\log\log\log L$ است؛ این قضیه‌ای متعلق به آنتونُف[1] است که با استفاده از روش شُلین آن را در ۱۹۹۶ ثابت کرد. توجه کنید منظور از نماد مرسوم بالا، رده‌ای از توابع با تعریف زیر است

$$L\log L\log\log\log L = \left\{ f \in L^1 : \int |f|(\log^+|f|)(\log^+\log^+\log^+|f|) < \infty \right\}$$

که در آن قسمت مثبت تابع لگاریتم در نظر گرفته می‌شود. همچنین ردهٔ کوچک‌تری از فضای توابع انتگرال‌پذیر که بتوان وجود تابعی با سری فوریهٔ واگرا را در آن تضمین کرد ردهٔ

$$L\phi L = \left\{ f \in L^1 : \int |f|\phi(|f|) < \infty \right\}$$

است که در آن ϕ تابعی صعودی با این شرط است که $\phi(x) = \mathrm{o}(\sqrt{\log x}/\sqrt{\log\log x})$ وقتی $x \to \infty$. این نتیجه‌ای متعلق به کونیاگین[2] در سال ۲۰۰۰ است. با توجه به زنجیرهٔ رده‌های

$$L^p \subsetneq \ldots \subsetneq L\log L\log\log\log L \subsetneq \ldots \subsetneq L\phi L \subsetneq L\phi \subsetneq \ldots \subsetneq L^1$$

می‌دانیم جواب سؤال شما رده‌ای بین فضای آنتونُف و کونیاگین است، ولی هنوز آن را پیدا نکرده‌ایم.

[1] Nikolai Yur'evich Antonov [2] Sergei Vladimirovich Konyagin (1957-)

و یک سؤال دیگر در این‌باره، همهٔ این نتایج دربارهٔ همگرایی نقطه‌ای سری فوریه است، دربارهٔ همگرایی یکنواخت سری فوریه چه می‌توان گفت؟

ـ متأسفانه پیشرفت قابل‌توجهی در این زمینه صورت نگرفته است. ازجمله نتایج می‌توان به ردهٔ $HBMO$ اشاره کرد که شی[1] در سال ۱۹۸۵ تعریف کرده است. نتایج او صورت قوی‌تر نتایج واترمن، یعنی فضای HBV، است. به‌تازگی، در مقالهٔ (۲) ردهٔ $V_p[\nu]$ را تعریف و شرایطی برای همگرایی یکنواخت داده‌ایم. در این فضا وقتی $p = 1$ ردهٔ چانتوریا[2] $V_p[\nu]$، و وقتی $\nu(n) = 1$ به‌ازای هر n، ردهٔ وینر BV_p به دست می‌آید.

موقعیت رشتهٔ آنالیز هارمونیک حقیقی در دنیا چطور است؟

ـ تا جایی که من اطلاع دارم این شاخه ازجمله شاخه‌های مهم و مورد توجه در ریاضی محسوب می‌شود. از میان برندگان جایزهٔ فیلدز که در این حوزه فعالیت جدی کرده‌اند می‌توان هِرماندر، بورگن، ففرمن، تائو، و از میان برندگان جایزهٔ آبل می‌شود به کارلسون و نیرنبرگ اشاره کرد.

از طرفی، از معیارهایی که شاید بشود برای سنجیدن جذابیت شاخه‌ای از ریاضیات در دوره‌ای خاص در نظر گرفت این است که چه تعداد از پیشگامان آن شاخه اعضای هیئت تحریریهٔ مجلات تراز اول جهان‌اند و یا اینکه چه تعداد از مقالات مربوط به شاخهٔ مورد نظر در مجلات عمومی برتر ریاضی چاپ شده‌اند. اگر این معیارها را بپذیریم، می‌توان با قطعیت گفت که این اتفاق برای شاخهٔ آنالیز هارمونیک حقیقی سال‌هاست که رخ داده است.

دربارهٔ آثار پژوهشی دورهٔ دکترایتان هم توضیحی بدهید.

ـ پژوهش‌های جدی من در دورهٔ دکترا در هشت مقاله منتشر شده است؛ مقالات (۶)، (۷)، و (۹)-(۱۴). دو مقاله در حوزهٔ جبرچندخطی که کاملاً جبری هستند و مشقی در کار با تانسورها بودند. می‌دانید که ضرب‌المثلی در میان ریاضی‌دانان است که ماتریس را خدا آفرید و تانسور را شیطان. به نظر من سطح این مقالات جبری‌ام که در سال‌های ابتدایی دکترا با همکاری رودتس[3] نوشتم، نسبت به آثار آنالیزی‌ام بسیار پایین‌تر است. هرچند بعضی از قسمت‌های آن دو مقاله از دید استاد راهنمایم، رزنگرن، زیبا آمدند.

[1] Xian-liang Shi [2] Z. A. Chanturiya [3] Kijti Rodtes

از آن شش مقالهٔ آنالیزی، دو مقاله در زمینهٔ آنالیز فوریه کلاسیک هستند و ادامهٔ کارهای دورهٔ کارشناسی. خصوصاً مقاله‌ای که به‌تنهایی نوشتم حاصل مشقت شبانه‌روزیِ چندماهه بود. چهار مقالهٔ دیگر در حوزهٔ آنالیز هارمونیک حقیقی (نظریهٔ انتگرال‌های منفرد) و مربوط به کارهای سال‌های آخر دکترایم هستند. به نظرم سطح آثار سال‌های آخرم بسیار بالاتر بودند. نکتهٔ حائز اهمیت این است که بدون همکاری ریاضی‌دانان همکارم در مقاله‌ها مطلقاً امکان توفیق به دست آوردن نتایج ممکن نبود. هریک از این افراد به‌خوبی در کار مشارکت کردند و من نه‌تنها شوق کشف ریاضی و سخت‌کوشی‌شان را دیدم و لذت بردم بلکه خیلی مطالب را از آن‌ها یاد گرفتم.

اما نکته‌ای هم دربارهٔ انتخاب مجلات و سلیقه‌ای که در دانشکدهٔ محل تحصیلم رایج بود بگویم. در کل من هرگز نشنیدم که بگویند فلان مجله چون ضریب تأثیرش بالاست یا پایین، معتبر یا نامعتبر است. البته فاکتورهایی را لحاظ می‌کردند: قدیمی بودن مجله، سخت‌گیری مجله، و اینکه هیئت تحریریه تا چه میزان شناخته شده‌اند و آیا ریاضی‌دان سرشناسی قبلاً در آنجا مقاله مهمی چاپ کرده است یا نه. به نظرم بیشتر این عامل‌ها را مدنظر داشتند. تصور می‌کنم معیار آن‌ها تا حد بسیار زیادی مشابه آن چیزی است که در مقاله‌ای نوشتهٔ افتخاری و همکاران[1] در این زمینه آمده است. این سه نفر تحلیل دقیق و درخور توجه‌ای دربارهٔ انتخاب مجله‌های ریاضی کرده‌اند و به نظرم لازم است به این مقاله بیشتر توجه شود. سایت دیگری که می‌تواند در این باره کمک کند، سیستم ارزیابی مجلات فنلاند است. در مورد خود من استادانم، رزنبلوم و رزنگرن، بینشی را به من دربارهٔ انتخاب مجلات دادند.

خارج از حوزهٔ ریاضی چه دلبستگی‌هایی دارید؟

ـ خواندن کتاب‌های ادبیات، فلسفه، علوم شناختی، و تماشای تئاتر و فیلم. همین‌طور هم علاقه‌مندم از رشته‌های دیگر علوم بیشتر بدانم. بنابراین اگر مقاله قابل فهمی در حوزه‌های دیگر باشد با لذت می‌خوانم. همچنین سال‌هاست که در اوقات فراغت مشغول نوشتن رمانی بودم که پارسال به چاپ رسید. در این رمان به‌صورت اجمالی به زندگی راماناجان و گروتندیک اشاره شده است.

۳ فهرست مقاله‌های منتشرشده در مجله‌های علمی

(1) Hormozi, M., Sawano, Y., Yabuta, K., On the weak boundedness of Littlewood-Paley functions, *J. Fourier Anal. Appl.*, **29** (2023), Article no. 49.

[1] https://math.ipm.ac.ir/ nassiri/Math-Evaluation.pdf

(2) Esslamzadeh, G. H., Goodarzi, M. Moazami, Hormozi, M., Lind, M., The modulus of p-variation and its applications, *J. Fourier Anal. Appl.*, **28** (2022), no. 1, Paper no. 7.

(3) Hormozi, M., Yabuta, K., Comments on: "Sharp weighted estimates for square functions associated to operators on spaces of homogeneous type", *J. Geom. Anal.*, **32** (2022), no. 1, Paper no. 1,

(4) Cao, M., Hormozi, M., Ibañez-Firnkorn, G., Rivera-Ríos, Israel P., Si, Z., Yabuta, K., Weak and strong type estimates for the multilinear Littlewood-Paley operators, *J. Fourier Anal. Appl.*, **27** (2021), no. 4, Paper no. 62.

(5) Moazami Goodarzi, M., Hormozi, M., Memić, N., Embedding generalized Wiener classes into Lipschitz spaces, *Math. Inequal. Appl.*, **22** (2019), no. 1, 291–296.

(6) Hormozi, M., Si, Z., Xue, Q., On general multilinear square function with non-smooth kernels, *Bull. Sci. Math.*, **149** (2018), 1–22.

(7) Damián, W., Hormozi, M., Li, K., New bounds for bilinear Calderón-Zygmund operators and applications, *Rev. Mat. Iberoam.*, **34** (2018), no. 3, 1177–1210.

(8) Moazami Goodarzi, M., Hormozi, M., Memić, N., Relations between Schramm spaces and generalized Wiener classes, *J. Math. Anal. Appl.*, **450** (2017), no. 1, 829–838.

(9) Bui, The Anh, Conde-Alonso, J. M., Xuan T., Hormozi, M., A note on weighted bounds for singular operators with nonsmooth kernels, *Studia Math.*, **236** (2017), no. 3, 245–269.

(10) Bui, The Anh, Hormozi, M., Weighted bounds for multilinear square functions, *Potential Anal.*, **46** (2017), no. 1, 135–148.

(11) Hormozi, M., Rodtes, K., Orthogonal bases of Brauer symmetry classes of tensors for groups having cyclic support on non-linear Brauer characters, *Electron. J. Linear Algebra*, **31** (2016), 263–285.

(12) Hormozi, M., Prus-Wiśniowski, F., Rosengren, H., Inclusions of Waterman-Shiba spaces into generalized Wiener classes, *J. Math. Anal. Appl.*, **419** (2014), no. 1, 428–432.

(13) Hormozi, M., Rodtes, K., Symmetry classes of tensors associated with the semi-dihedral groups SD_{8n}, *Colloq. Math.*, **131** (2013), no. 1, 59–67.

(14) Hormozi, M., Inclusion of $\Lambda BV(p)$ spaces in the classes H^q_ω, *J. Math. Anal. Appl.*, **404** (2013), no. 2, 195–200.

(15) Hormozi, M., Ledari, A. A., Prus-Wiśniowski, F., On p-Λ-bounded variation, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **37** (2011), no. 4, 35–49.

(16) Ledari, A. A., Hormozi, M., ΛBV as a non separable dual space, *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci.*, **34** (2010), no. 3, 237–244.

سپاسگزاری از دکتر هرمزی بابت قبول دعوت مصاحبه و همچنین اصلاح برخی اشکالات این نوشته سپاسگزاری می‌کنم. همچنین لازم است از دکتر حمیدرضا ابراهیمی ویشکی تشکر کنم که زحمت مطالعهٔ کامل این نوشته را قبول کردند و غلط‌های نگارشی و علمی بسیاری را که در متن برجای مانده بود پیراستند و نویسنده و خواننده، هر دو، را مدیون خود ساختند.

مراجع

[۱] دزیتارلی، داوید ای.، بزرگان ریاضیات آمریکا ۱۸۹۰-۱۹۵۰، ترجمهٔ سعید مقصودی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی شمارهٔ **۶۱** (۱۳۹۶)، ۱۷-۶۱.

[۲] زیگموند، آنتونی، تاریخچه سریهای فوریه، ترجمهٔ سعید ذاکری، جنگ ریاضی دانشجو، جلد **۶** (۱۳۶۹)، ۱-۱۷.

[۳] کاهان، ژان-پیر، میراث فوریه، ترجمهٔ سعید مقصودی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ **۵۹** (۱۳۹۵)، ۲۹-۴۱.

[۴] مقصودی، سعید، دکتر محمود لشکری‌زاده بمی: زندگی و آثار، ریاضی و جامعه، شمارهٔ **۱** (۱۴۰۰)، ۱-۲۶.

[5] Darrigol, O., The acoustic origins of harmonic analysis, *Archive for History of Exact Sciences*, **61** (2007), 343-424.

[6] Fefferman, C., Recent progress in classical Fourier analysis, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Ralph D. James, ed., Vancouver, B.C., 1974, 95-118.

[7] Folland, G. B., Some topics in the history of harmonic analysis in the twentieth century, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **48** (2017), no. 1, 1–58.

[8] Grattan-Guinness, I., *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, The Colonial Press, Massachusetts, 1970.

[9] Gross, K. I., On the evolution of noncommutative harmonic analysis, *Amer. Math. Monthly*, **85** (1978), 525–548.

[10] Hirschman, I. I., *Studies in Real and Complex Analysis*, vol. 3, The Mathematical Association of America, Prentice-Hall, NJ, 1965.

[11] Kahane, Jean-Pierre, Lemarié-Rieusset, Pierre Gilles, *Séries de Fourier et ondelettes* (French), 2nd ed., Nouvelle Bibliothèque Mathématique, vol. 3, Cassini, Paris, 2016.

[12] Khavin, V. P., Nikol'skij, N. K., eds., *Commutative Harmonic Analysis*, vol. I, Springer-Verlag, New York, 1991.

[13] Krantz, Steven G., *A Panorama of Harmonic Analysis*, Carus Mathematical Monographs, 27, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999.

[14] Mackey, G. W., *The Scope and History of Commutative and Noncommutative Harmonic Analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[15] Prestini, Elena, *The Evolution of Applied Harmonic Analysis, Models of the Real World*, 2nd ed., Birkhäuser/Springer, New York, 2016.

[16] Wiener, N., The historical background of harmonic analysis, in *Semicentennial Addresses of the American Mathematical Society*, vol. II, American Mathematical Society, New York, 1938, 56-68.

سعید مقصودی: دانشگاه زنجان، گروه ریاضی
رایانامه: s_maghsodi@znu.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 42, Number 72, Spring/Summer 2023, Pages 1–46
doi: 10.30504/mct.2023.1378.1968

An Excursion into Fourier Analysis: An Interview with Mahdi Hormozi

S. Maghsoudi[1]

Department of Mathematics, University of Zanjan, Iran

Abstract. Elsewhere, the history and introduction of harmonic analysis into Iran has been briefly discussed. Abstract harmonic analysis is, without doubt, a natural extension of the Fourier's series and integrals. It's worth noting that Harmonic analysis is nothing but the development of the theory of series and integrals on topological groups (or similar structures). The history of Fourier analysis can be divided into two periods: classical and modern. The classical period of Fourier analysis, which spanned from Fourier's treatise into the 1950s, focused mainly on investigating the convergence and summability methods of Fourier series. The modern era of Fourier analysis was essentially shaped by Lebesgue's theory of integration and the introduction of the concept of abstract function spaces, thus shifting the focus from examining individual members of a space of functions to investigating the entire space. This era was further developed in Fourier analysis by Antoni Zygmund's introduction of real variable methods. Alberto Calderon's contributions began in the 1950s.

In the first part of this paper, we briefly survey the most critical developments in Fourier analysis from the early days till recent decades. Then, in the second part, an interview with M. Hormozi –a Fourier analyst who graduated from the Chalmers University of Technology– provides us with a more rigorous picture of the modern era of Fourier analysis.

Keywords: Fourier analysis, Fourier series, singular integrals, Hilbert transform, BMO spaces, PhD programmes in Sweden
Article history: Recieved 5 March 2023; Accepted 25 May 2023
Article type: review

[1] s_maghsodi@znu.ac.ir

ISSN 1022-6443/© Iranian Mathematical Society under the CC BY-NC-SA 4.0 license

References

[1] Darrigol, O., The acoustic origins of harmonic analysis, *Archive for History of Exact Sciences*, **61** (2007), 343-424.

[2] Fefferman, C., Recent progress in classical Fourier analysis, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Ralph D. James, ed., Vancouver, B.C., 1974, 95-118.

[3] Folland, G. B., Some topics in the history of harmonic analysis in the twentieth century, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **48** (2017), no. 1, 1–58.

[4] Grattan-Guinness, I., *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, The Colonial Press, Massachusetts, 1970.

[5] Gross, K. I., On the evolution of noncommutative harmonic analysis, *Amer. Math. Monthly*, **85** (1978), 525–548.

[6] Hirschman, I. I., *Studies in Real and Complex Analysis*, vol. 3, The Mathematical Association of America, Prentice-Hall, NJ, 1965.

[7] Kahan, Jean-Pierre, The Heritage of Fourier, transl. S. Maghsoudi, *Mathematical Culture and Thought*, **59** (2016), 29-41. [in Persian]

[8] Kahane, Jean-Pierre, Lemarié-Rieusset, Pierre Gilles, *Séries de Fourier et ondelettes* (French), 2nd ed., Nouvelle Bibliothèque Mathématique, vol. 3, Cassini, Paris, 2016.

[9] Khavin, V. P., Nikol'skij, N. K., eds., *Commutative Harmonic Analysis*, vol. I, Springer-Verlag, New York, 1991.

[10] Krantz, Steven G., *A Panorama of Harmonic Analysis*, Carus Mathematical Monographs, 27, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999.

[11] Mackey, G. W., *The Scope and History of Commutative and Noncommutative Harmonic Analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[12] Maghsoudi, S., Dr. Mahmoud Lashkarizadeh Bami: life and works, *Mathematics and Society*, **6** (2021), 1-25. [in Persian]

[13] Prestini, Elena, *The Evolution of Applied Harmonic Analysis, Models of the Real World*, 2nd ed., Birkhäuser/Springer, New York, 2016.

[14] Wiener, N., The historical background of harmonic analysis, in *Semicentennial Addresses of the American Mathematical Society*, vol. II, American Mathematical Society, New York, 1938, 56-68.

[15] Zitarelli, David E., Towering figures in American mathematics, 1890-1950, transl. S. Maghsoudi, *Mathematical Culture and Thought*, **61** (2017), 17-61. [in Persian]

[16] Zygmund, A., Notes on the history of Fourier series, transl. S. Zakeri, *Jung Rīyāzī Daneshju*, **6** (1990), 1-17. [in Persian]