

قضیه مماس روبنده مامیگن*

تام ام. آپوستل، ام. ای. مناتساکانیان

ترجمه میثم سلیمانی ملکان

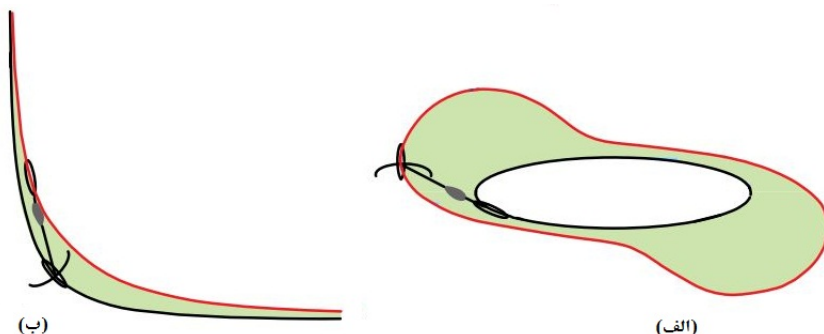
چکیده. مسائل رایج متعددی در حساب دیفرانسیل و انتگرال را می‌توان به‌آسانی، با یک روش بصری نوآورانه، بی‌آنکه از فرمولی استفاده شود حل کرد. این روش که مبتنی بر قضیه مماس روبنده مامیگن می‌باشد، یک نتیجه شهودی هندسی است که دانش‌آموزان دبیرستانی به‌آسانی آن را می‌فهمند. در این مقاله مماس‌های روبنده تعریف می‌شوند و نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان از آن برای یافتن مساحت نواحی مسطح بسیاری (بی‌آنکه ابزار حساب دیفرانسیل و انتگرال به کار رود) استفاده کرد؛ نواحی‌ای مانند یک حلقه بیضی‌شکل، یک قطعه سهموی یا هذلولی، ناحیه زیر نمودار یک تابع توان کلی، یک خم نمایی یا لگاریتمی، یک کشاننده، ناحیه بین دو خم که توسط چرخ‌های عقب و جلوی دوچرخه پیموده می‌شود، ناحیه محصور توسط یک دلواری، و توسط هریک از اعضای خانواده حلزونی‌ها. برای قطعه سهموی و نمایی از ویژگی‌های هندسی سایه‌های مماس این دو خم استفاده می‌شود که از آن برای ترسیم خطوط مماس نیز می‌توان استفاده کرد. روش مماس روبنده کاربردی دور از انتظار در فیزیک دارد. در این کاربرد، پایداری تکانه زاویه‌ای در یک میدان نیروی مرکزی به عنوان نتیجه‌ای ابتدایی از قضیه مماس روبنده مامیگن استنتاج می‌شود.

در اینجا دو مسئله وجود دارد که با روشی که در اینجا بدان می‌پردازیم به‌سادگی حل می‌شود. درک این مسائل آسان است ولی چالش‌انگیزتر از آن چیزی است که در نگاه نخست به نظر می‌رسد. شاید خواننده مایل به حل این دو مسئله پیش از خواندن این نوشته باشد.

عبارات و کلمات کلیدی: قضیه مامیگن، پهنه مماسی، خوشه مماسی، مساحت، حلزونی، خم کشاننده، انتگرال نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۷/۱۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۷

* Apostol, T. M., Mnatsakanian, Mamikon A., *New Horizons in Geometry*, The Dolciani Mathematical Expositions, vol. 47, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2012, 1-30.

در شکل زیر مسیرهایی که توسط چرخ‌های جلو و عقب یک دوچرخه به طول ۳ پیموده شده‌اند نشان داده شده است. در (الف) چرخ عقب، محیط یک بیضی به معادله دکارتی $x^2 + 16y^2 = 16$ را می‌پیماید و در (ب) چرخ جلو روی هذلولوی $y^2 - 3x^2 = 3$ حرکت می‌کند.

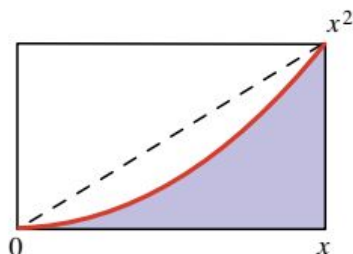


در هر مورد مساحت ناحیه سایه‌خورده بین مسیره‌های چرخ جلو و عقب را پیدا کنید.

۱ مقدمه

حساب دیفرانسیل و انتگرال موضوعی زیبا با انبوهی از کاربردهای حیرت‌آور است. دانستن اینکه بسیاری از مسائل رایج در حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌آسانی با یک رویکرد بصری نوآورانه بی‌آنکه از فرمول‌ها استفاده شود قابل حل‌اند، افرادی را که با این شاخه مهم از ریاضیات آشنایی دارند شگفت‌زده می‌کند. برای نمونه:

مسئله ۱. مساحت یک قطاع سهموی را پیدا کنید.

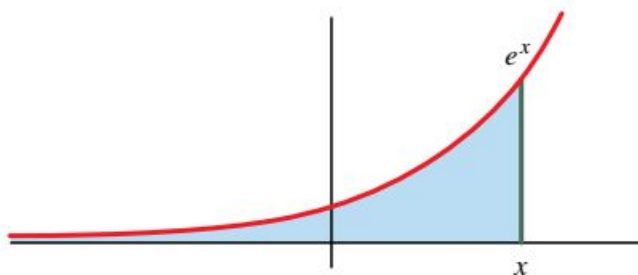


شکل ۱. یک قطاع سهموی

در شکل ۱ قطعه سهموی ناحیه سایه‌خورده بین نمودار $y = x^2$ و محور x از ۰ تا x است.

بیش از ۲۰۰۰ سال پیش، برای نخستین بار ارشمیدس این مساحت را محاسبه کرد؛ با روشی که مبنای حساب انتگرال گردید. امروزه هر دانشجوی سال اولی قادر به حل این مسئله است: انتگرال x^2 برابر است با $x^3/3$. راه حلی بدون استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال در بخش ۱۰ ارائه می‌شود.

مسئله ۲. مساحت ناحیه‌ای در زیر یک خم نمایی را بیابید.



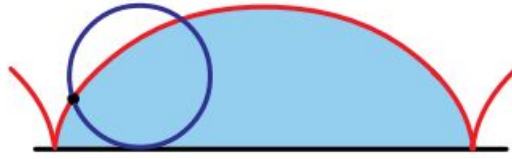
شکل ۲. ناحیه‌ای در زیر یک خم نمایی

شکل ۲ نمودار تابع نمایی $y = e^x$ را نشان می‌دهد و ما مساحت ناحیه سایه‌خورده بین خم و محور x را از منهای بی‌نهایت تا x می‌خواهیم. از حساب انتگرال معلوم می‌شود که پاسخ e^x است. به‌طور کلی، اگر معادله خم $y = e^{x/b}$ باشد، که در آن b ثابت مثبتی است، انتگرال‌گیری به ما می‌گوید که مساحت برابر $be^{x/b}$ می‌شود. راه حلی بدون استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال در بخش ۸ آورده شده است.

مسئله ۳. مساحت ناحیه زیر یک قوس از یک چرخزاد را محاسبه کنید.

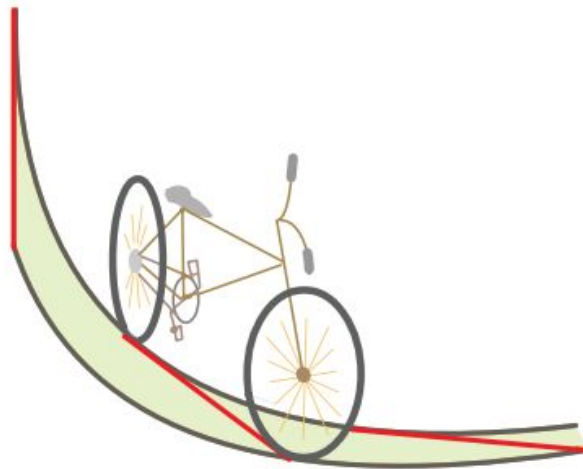
چرخزاد مسیری است که یک نقطه ثابت بر مرز یک قرص دایره‌ای با چرخش آن در امتداد یک خط می‌پیماید. برای مثال، چراغی که به لبه چرخ یک دوچرخه بسته می‌شود، وقتی دوچرخه در امتداد یک خط افقی حرکت می‌کند، یک چرخزاد را طی می‌کند. ما می‌خواهیم مساحت ناحیه سایه‌خورده در شکل ۳ را محاسبه کنیم.

این مسئله کلاسیک حساب دیفرانسیل و انتگرال از دوتای قبلی دشوارتر است. نخست، نیاز است معادله‌ای برای چرخزاد به دست آورید که با قدری تلاش در آن موفق می‌شوید. انتگرال‌گیری نشان می‌دهد که این مساحت دقیقاً سه برابر مساحت دیسک غلطان است.



شکل ۳. ناحیه زیر یک قوس چرخزاد

این سه مسئله کلاسیک را می‌توان با روشی نوین، که متکی بر شهود هندسی است و درک آن حتی برای دانشجویان تازه‌وارد راحت است، حل کرد. در این روش نو، نیازی به معادله‌ها یا انتگرال‌گیری نیست. افزون‌براین، با این روش می‌توانیم برخی از مسائل را حل کنیم که با حساب دیفرانسیل و انتگرال نمی‌توانیم.

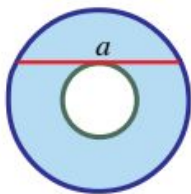


شکل ۴. ناحیه بین مسیر چرخ‌های یک دوچرخه

برای مثال، به مسیری که توسط چرخ جلویی یک دوچرخه در حال حرکت، همانند شکل ۴، پیموده می‌شود نگاه کنید. چرخ عقب خم دیگری را می‌پیماید. مساحت ناحیه بین دو مسیر چقدر است؟ برای پاسخ به این سؤال با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال به معادله‌ها نیاز دارید. اما، با این رویکرد بصری جدید، به هیچ معادله‌ای نیاز نیست و صرف‌نظر از شکل مسیر دوچرخه، شما می‌توانید به آسانی مسئله را حل کنید. راه حلی در بخش ۴ داده می‌شود.

۲ سیر تکاملی قضیه مامیگن

مثل همه کشف‌های بزرگ، روش مامیگن نیز بر ایده‌ای ساده استوار است. شکل‌گیری این روش به نیم‌قرن پیش باز می‌گردد، زمانی که مامیگن جوان با یک مسئله هندسی کلاسیک مواجه شد که در آن دو دایره هم‌مرکز وجود داشت و وتر از دایره بیرونی بر دایره درونی، مانند شکل ۵، مماس است.

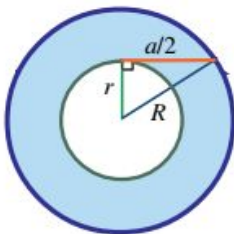


شکل ۵. یک حلقه طوقی بین دوایر هم‌مرکز

طول وتر برابر a است و مسئله از این قرار است: مساحت حلقه طوقی بین دایره‌ها را بیابید. برای حل این مسئله به شکل ۶ نگاه کنید. مساحت دایره درونی با شعاع r برابر πr^2 ، و مساحت دایره بیرونی با شعاع R ، πR^2 است، لذا مساحت حلقه برابر است با

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2).$$

اما دو شعاع و قطعه مماس یک مثلث قائم الزاویه با طول اضلاع r و $a/2$ ، و وتر به طول R تشکیل می‌دهند، پس بنابه قضیه فیثاغورس $R^2 - r^2 = (a/2)^2$ ، بنابراین حلقه مساحتی برابر با $\pi a^2/4$ دارد. جواب آخر فقط به a وابسته است و نه به شعاع‌های دو دایره!

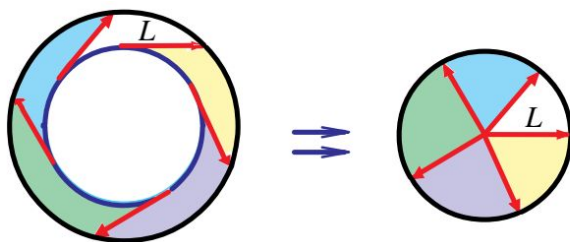


شکل ۶. حلقه با شعاع داخلی r و شعاع بیرونی R

اگر از قبل می‌دانستیم که پاسخ فقط به a بستگی دارد، می‌توانستیم از راه دیگری آن را پیدا

کنیم. دایره درونی را تا حد یک نقطه کوچک می‌کنیم، و در نتیجه حلقه به قرصی به قطر a با مساحتی برابر با $\pi a^2/4$ تبدیل می‌شود. به قول مارتین گاردنر: «عجب!» الهامی.

مامیگن با خود اندیشید آیا راهی وجود دارد که از قبل دریابیم چرا جواب تنها به طول وتر وابسته است. او به این فکر افتاد که با روش دینامیکی به مسئله بپردازد. نیمی از وتر را بردارید و مانند شکل ۷ (سمت چپ) نیمه باقی‌مانده را برداری مماس به طول L بر دایره درونی در نظر بگیرید. با حرکت بردار مماس بر دایره درونی، می‌بینیم که حلقه طوقی بین دو دایره روبیده می‌شود، لذا با یک چرخش کامل، بردار مماس سطح را می‌روبد.

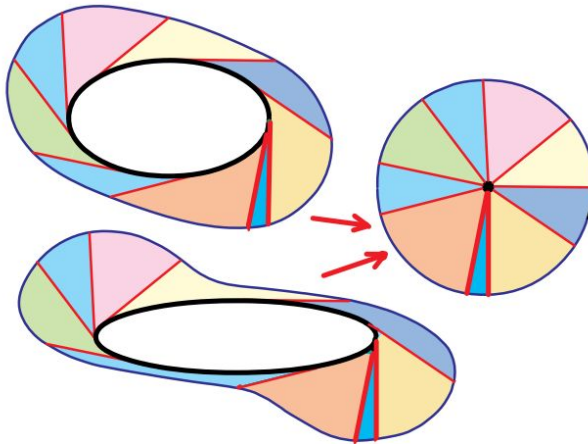


شکل ۷. حلقه با برداری با طول ثابت روبیده می‌شود.

اکنون، همانند شکل ۷ (راست)، هر بردار را به موازات خودش انتقال دهید تا نقاط تماس به نقطه‌ای مشترک برده شود. همچنانی که بردار مماس گِرد دایره درونی حرکت می‌کند، بردار انتقال یافته یک‌بار به دور این نقطه مشترک می‌چرخد و قرصی دایره‌ای به شعاع L را می‌پیماید. بنابراین، این بردارهای مماس یک قرص مستدیر را می‌روبند، انگار که نقطه شروع همه آن‌ها یکی است. و این قرص مساحتی برابر با حلقه دارد.

مامیگن متوجه شد که اگر دایره داخلی با یک خم بیضوی دلخواه جایگزین شود، این روش دینامیکی همچنان به کار می‌آید. شکل ۸ به کار رفتن همین روش را برای دو بیضی نشان می‌دهد. همچنان که پاره خط مماس با طول ثابت یک‌بار حول هر بیضی حرکت می‌کند، طوقه‌ای کلی‌تر، موسوم به حلقه بیضوی، را می‌روبد.

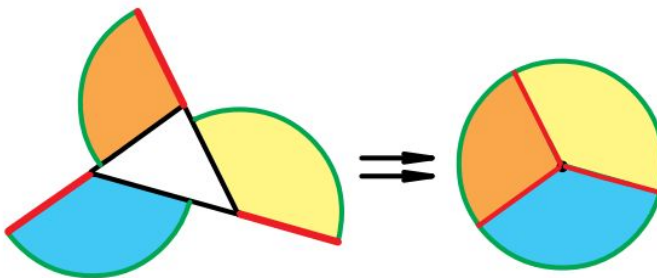
در اینجا هم هر بردار را به موازات خودش انتقال می‌دهیم تا نقطه تماس به نقطه‌ای مشترک آورده شود. وقتی که بردار مماس گِرد بیضی درونی حرکت می‌کند، قطعه خط‌های انتقال یافته سطح یک قرص مستدیری را می‌روبد که شعاع آن برابر همان طول ثابت است. بنابراین، مساحت حلقه بیضوی باید برابر مساحت آن قرص مستدیر باشد.



شکل ۸. مماس بر یک بیضی یک حلقه بیضوی را می‌روبد.

این بار قضیه فیثاغورس در محاسبه مساحت حلقه‌های بیضوی به کار نمی‌آید. وقتی شکل درونی بیضی باشد می‌توان مساحت را از طریق حساب انتگرال (که کار کمی هم نیست) محاسبه کرد؛ با انجام این کار، خواهید دید که همه حلقه‌های بیضوی مساحتی برابر دارند که تنها به طول قطعه خط مماس وابسته است!

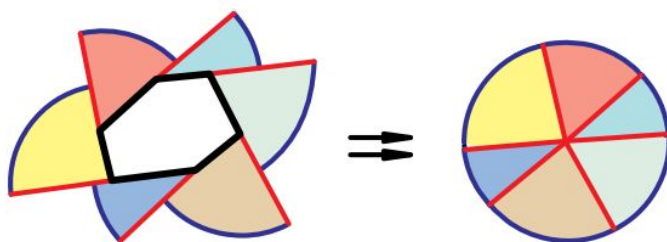
آیا ممکن است این مطلب برای هر خم ساده بسته و محدب درست باشد؟ در شکل ۹ این روش برای یک مثلث به تصویر کشیده شده است. وقتی که قطعه خط مماس در امتداد یک ضلع مثلث حرکت می‌کند تغییر جهت نمی‌دهد، لذا هیچ سطحی را نمی‌روبد.



شکل ۹. مماسی با طول ثابت در حال حرکت حول یک مثلث

وقتی که در یک رأس از یک ضلع به ضلع دیگر می‌چرخد بخشی از یک قطاع دایره‌ای را

می‌روبد. و وقتی که حول تمامی مثلث می‌چرخد سه قطاع دایره‌ای را می‌روبد که در مجموع یک قرص مستدیری را، مانند شکل ۹ (راست)، پر می‌کنند. این مطلب برای هر چندضلعی محدب برقرار است، چنان‌که در شکل ۱۰ برای یک شش‌ضلعی ترسیم شده است.



شکل ۱۰. مماسی با طول ثابت در حال حرکت حول یک شش‌ضلعی

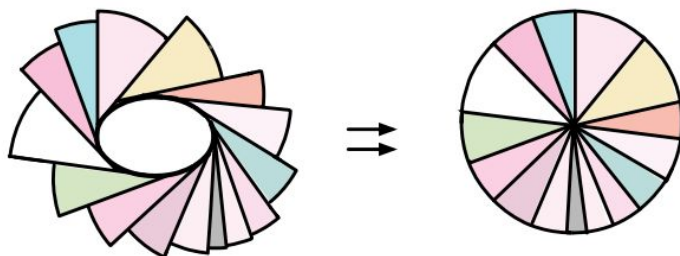
یک قطعه خط مماس با طول مفروض با حرکت حول یک چندضلعی محدب مساحتی برابر با مساحت یک قرص مستدیر، با شعاعی برابر همان طول، را می‌روبد. پس این مطلب برای هر خم محدب، که حد یک چندضلعی محدب است که تعداد اضلاع آن به بی‌نهایت میل کرده است، درست است؛ همان‌طور که از مثال نشان داده شده در شکل ۱۱ معلوم است.

این مطلب ما را به قضیه زیر می‌رساند:

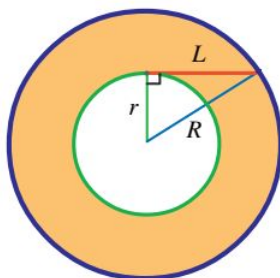
قضیه مامیگن برای حلقه‌های بیضوی تمامی حلقه‌های بیضوی که با پاره خطی روییده می‌شود که طول آن معلوم و یک سر آن مماس بر یک خم مسطح و هموار است، صرف نظر از اندازه یا شکل خم درونی، مساحت‌های برابر دارند. افزون‌براین، این مساحت فقط به طول پاره خط مماس، L ، وابسته و برابر πL^2 است، که مساحت یک قرص به شعاع L است و گویی پاره خط مماس حول نقطه انتهایی خود چرخیده است.

کاربردی در قضیه فیثاغورس

شکل ۱۲ نشان می‌دهد چگونه می‌توان از قضیه مامیگن برای اثبات جدیدی از قضیه فیثاغورس استفاده کرد. اگر خم درونی دایره‌ای به شعاع r و خم بیرونی نیز دایره‌ای (مثلاً به شعاع R) باشد، مساحت حلقه بیضوی برابر است با تفاضل $\pi R^2 - \pi r^2$. اما بنابه قضیه مامیگن، مساحت حلقه بیضوی نیز برابر با πL^2 است که در آن L طول ثابت قطعه خط‌های مماس است. با برابر قرار دادن مساحت‌ها در می‌یابیم که $R^2 - r^2 = L^2$ ، و از آن به دست می‌آوریم $R^2 = r^2 + L^2$.



شکل ۱۱. مماسی با طول ثابت در حال حرکت حول یک چندضلعی کثیرالاضلاع



شکل ۱۲. قضیه مامیکن قضیه فیثاغورس را نتیجه می‌دهد.

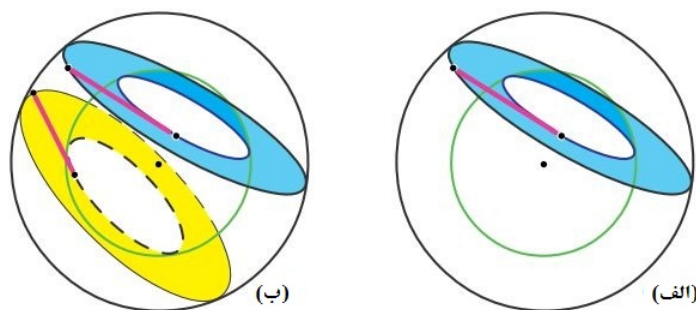
که همان قضیه فیثاغورس است.

۳ کاربرد در برش‌های پوسته کروی

یک پوسته کروی ناحیه‌ای محصور بین دو کره هم‌مرکز است. برش چنین پوسته‌ای توسط صفحه‌ای که هر دو دایره درونی و بیرونی را قطع می‌کند حلقه‌ای طوقی است که شعاع‌های درونی و بیرونی آن وابسته به صفحه قاطع است. قضیه مامیکن برای حلقه‌های مَدور به نتیجه‌ای شگفت و تاحدودی غیرمنتظره می‌انجامد:

صفحه‌ای که هر دو کره یک پوسته کروی را قطع می‌کند حلقه‌ای طوقی پدید می‌آورد که مساحت آن مقداری ثابت و مستقل از موقعیت و شیب صفحه است.

اثبات. از بحث قبلی می‌دانیم که مساحت حلقه طوقی فقط به طول قطعه خط مماس بر دایره درونی، که توسط دایره بیرونی جدا شده است، بستگی دارد. به آسانی دیده می‌شود این طول برای هر صفحه‌ای که هر دو کره را برش می‌دهد، صرف‌نظر از موقعیت و شیبش، یکسان است.



شکل ۱۳. (الف) مماس دایره داخلی بر کره داخلی نیز مماس است. (ب) طول قطعه خط مماس مستقل از وضعیت و شیب صفحه برش است.

ملاحظه کنید که قطعه خط مماس بر دایره درونی به کره بیرونی نیز از نقطه ای روی سطح کره بیرونی مماس است. به دلیل تقارن کروی، تمام این قطعه خط های مماس رسم شده از کره بیرونی بر کره داخلی، در هر وضعیت و شیب صفحه برش، مادامی که هر دو کره را قطع کند (شکل ۱۳ (ب))، طولی ثابت دارند (شکل ۱۳ (الف)).

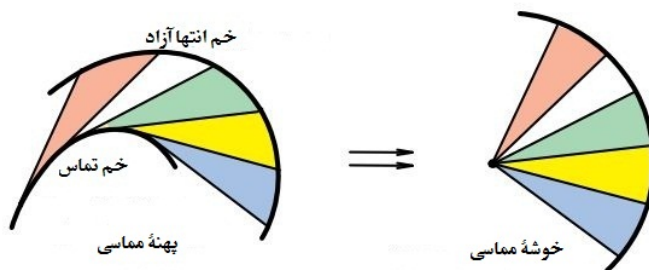
اگر ویژگی فوق را برای برش هایی با ضخامت یکسان که توسط دو صفحه موازی که هر دو کره را قطع می کنند به کار ببندیم می بینیم که همه برش ها دارای حجم برابرند. از این مطلب هم نتیجه می شود که سطح بیرونی همه برش ها دارای مساحت برابرند. این ویژگی همچنین کاربردهایی در برش نگاری^۱ دارد.

۴ پهنه و خوشه های مماسی یک خم مسطح با طول های ثابت

شکل ۱۴ صورتی کلی تر از قضیه مامیکن را نشان می دهد. خم پایینی در سمت چپ یک خم مسطح هموار و کم و بیش دلخواه است که آن را خم تماس، τ ، می خوانیم. مجموعه تمام قطعه خط های مماس با طول ثابت ناحیه ای را مشخص می کند که محدود به τ و یک خم بالایی (موسوم به خم انتها آزاد، σ) است؛ درواقع، انتهای قطعه خط های مماس بر خم σ قرار دارند. شکل دقیق این ناحیه وابسته به خم τ و طول قطعه خط های مماس از τ به σ است. این ناحیه را پهنه مماسی^۲ می نامیم.

اگر قطعه خط های مماس به موازات خود انتقال یابند نقاط تماس، مانند قبل، به یک نقطه برده

^۱tomography ^۲tangent sweep



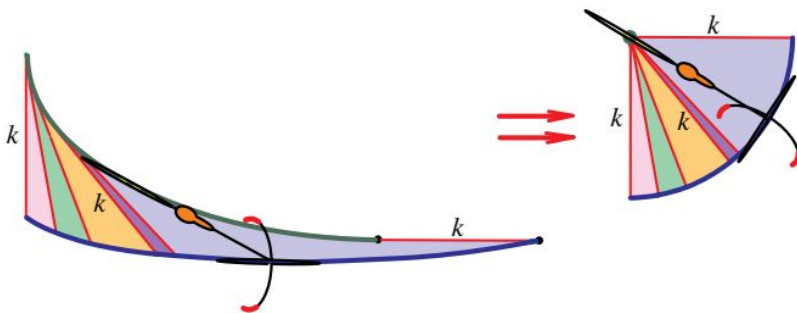
شکل ۱۴. خوشه مماسی برای یک پهنه مماسی با طول ثابت به صورت قطاع دایره‌ای است.

شوند، مجموعه قطعه‌خط‌های انتقال یافته خوشه مماسی^۱ نامیده می‌شود. شکل ۱۴ (چپ) یک پهنه مماسی و متناظر با آن (در سمت راست) خوشه مماسی را نشان می‌دهد.

از آنجا که قطعه‌خط‌های مماس طول ثابتی دارند، خوشه مماسی در شکل ۱۴ یک قطاع دایره‌ای می‌شود که شعاع آن همان طول ثابت است. در ضمن، می‌توانیم قطعه‌خط‌های مماس را طوری انتقال دهیم که نقاط انتهایی به نقطه‌ای مشترک نیز برده شوند. خوشه مماسی به دست آمده نوع متقارن خوشه‌های دیگر است. بنابراین می‌توان گفت:

قضیه مامیگن: قطعه‌خط‌های مماس با طول ثابت صرف نظر از شکل داده شده، مساحت پهنه مماسی با مساحت خوشه مماسی برابر است.

می‌توان این قضیه را در مثالی عینی دید: وقتی چرخ جلوی دوچرخه‌ای روی یک خم حرکت می‌کند و چرخ عقب (که در فاصله‌ای ثابت از چرخ جلو قرار دارد) خم دیگری، همانند شکل ۱۵ (چپ)، را می‌پیماید.



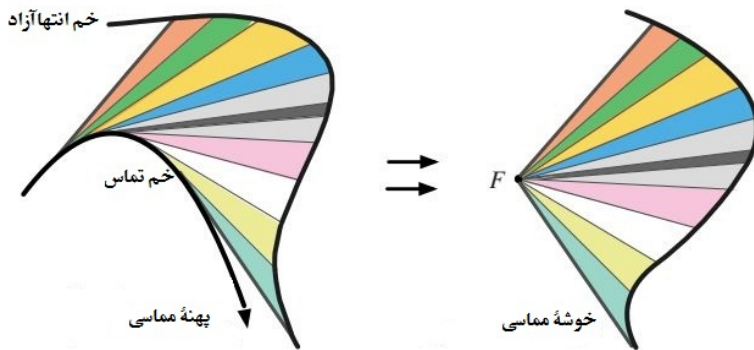
شکل ۱۵. یافتن مساحت ناحیه بین دو مسیر تائر

^۱tangent cluster

مساحت پهنه مماسی برابر مساحت قطاعی دایره‌ای است که، همان‌گونه که در خوشه مماسی سمت راست شکل ۱۵ نشان داده شده است، تنها به طول دوجرخه و تغییر زاویه بین موقعیت ابتدایی و انتهایی وابسته است

۵ پهنه مماسی با طول متغیر؛ خم‌های فضایی

در شکل ۱۶ کاربرد همین مفاهیم در حالتی کلی‌تر نشان داده شده است. در اینجا نیازی نیست قطعه‌خط‌های مماس از خم تماس τ تا خم انتها آزاد σ دارای طولی ثابت باشند. مانند قبل پهنه مماسی (در سمت چپ) و همچنین خوشه مماسی (در سمت راست) داریم که با کنارهم آوردن نقاط تماس در یک نقطه مشترک مانند F تشکیل می‌شود.

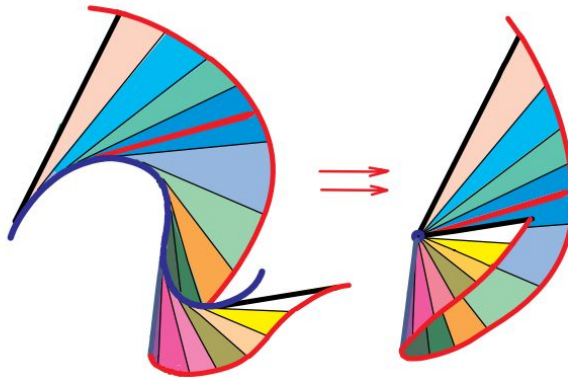


شکل ۱۶. پهنه و خوشه‌های مماسی با طول متغیر مساحت‌های برابر دارند.

قضیه مامیکُن، که دیگر به‌طور شهودی درست می‌نماید، این است که مساحت خوشه مماسی با مساحت پهنه مماسی یکی است. برای اطمینان خاطر خودتان، مثلث‌های کوچک متناظر را که از پهنه مماسی به خوشه مماسی انتقال می‌یابند در نظر بگیرید.

در کلی‌ترین صورت قضیه مامیکُن نیازی نیست که خم تماس مسطح باشد. خم تماس می‌تواند هر خم همواری در فضا باشد، و طول قطعه‌خط‌های مماس می‌تواند، مانند شکل ۱۷، تغییر کند.

در این حالت پهنه مماسی بر یک رویه گسترده قرار می‌گیرد، رویه‌ای که می‌توان آن را بی‌هیچ اعوجاجی بر یک صفحه گستراند. شکل پهنه مماسی به چگونگی تغییر طول و جهت‌های قطعه‌خط‌های مماس بر خم وابسته است. همچنین خوشه مماسی بر یک رویه مخروطی قرار می‌گیرد که رأس آن نقطه مشترک خوشه‌ها است. همان‌طور که انتظار داریم، مساحت پهنه مماسی با خوشه



شکل ۱۷. پهنه و خوشه مماسی با طول متغیر در فضا

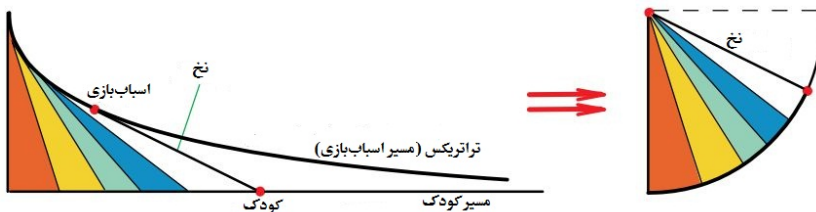
مماسی برابر است.

شکل کلی قضیه مامیکن مساحت هر پهنه مماسی بر یک خم فضایی با مساحت خوشه مماسی آن روی رویه‌ای مخروطی برابر است.

این قضیه، که الهام گرفته از شهود هندسی است، با استفاده از روش‌های هندسه دیفرانسیل ثابت می‌شود. اما اهمیت آن ریشه در طیف گسترده‌ای از کاربردهای جالب و غیرمنتظره آن دارد.

۶ کاربرد در خم کشاننده

همان‌طور که پیش از این گفتیم، از جمله خم‌هایی که توسط قطعه‌خط‌های مماس با طول ثابت روییده می‌شوند حلقه‌های بیضوی و مسیرهای چرخ‌های دوچرخه‌اند. نمونه دیگری از این دست، خم کشاننده^۱ است، یعنی، مسیر حرکت یک اسباب بازی که با نخ محکم در دست کودکی، که در امتداد خطی مستقیم و ثابت راه می‌رود، مثل شکل ۱۸، کشیده می‌شود.



شکل ۱۸. پهنه مماسی و خوشه مماسی یک خم کشاننده

^۱tractrix

برای یافتن مساحت بین خم کشاننده و محور x از طریق حساب دیفرانسیل و انتگرال، باید معادله کشاننده را به دست آورید. این کار به خودی خود بسیار چالش برانگیز است، زیرا که به حل یک معادله دیفرانسیل نیاز دارد. وقتی که معادله کشاننده را دارید، می‌توانید از انتگرال‌گیری برای یافتن مساحت آن استفاده کنید. این کار را نیز می‌توان انجام داد، اما محاسبه آن قدری طاقت‌فرسا است؛ جواب آخر $\pi k^2/4$ است که در آن k طول نخ است. برای آنکه بدون استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال این جواب را بیابید فقط کافی است توجه کنید که کشاننده حالت خاصی از «خم دوچرخه»^۱ است که پهنه مماسی آن قطاعی از دایره به شعاع k می‌باشد. و مساحت کل برابر یک چهارم از یک قرص کامل، $\pi k^2/4$ ، است.

این مثال‌ها، که مماس در آن‌ها طول ثابتی داشت، این ویژگی قابل توجه را نشان می‌دهند که مساحت پهنه مماسی را می‌توان برحسب مساحت قطاعی از یک دایره بیان کرد بی‌آنکه از هیچ‌یک از روش‌های مرسوم حساب دیفرانسیل و انتگرال رایج استفاده کنیم.

از این هم چشمگیرتر، کاربردهای این روش در مثال‌هایی است که طول قطعه خط‌های مماس تغییر می‌کند. این مثال‌ها قدرت واقعی روش مامیکن را آشکار می‌کند. پیش از پرداختن به این مثال‌ها، قدری از مسیر منحرف می‌شویم و به اختصار درباره زیرمماس‌ها بحث می‌کنیم؛ زیرمماس یک روش هندسی ساده برای رسم خطوط مماس بر خم‌ها به دست می‌دهد.

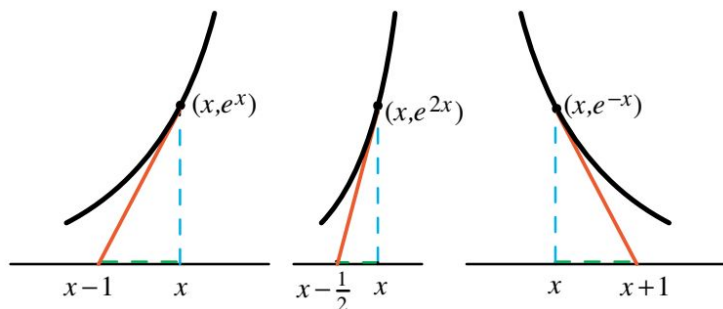
۷ کاربرد زیرمماس‌ها در رسم خطوط مماس بر خم‌های مسطح

خط مماس در نقطه $(x, f(x))$ واقع بر نمودار تابع f خطی است با شیب $f'(x)$ که از آن نقطه می‌گذرد. در عمل، ساده‌ترین راه برای رسم این خط، چه با دست و چه با کامپیوتر، آن است که نقطه $(x, f(x))$ را به نقطه شناخته شده‌ای از خط مماس وصل کنیم. گاهی بدون محاسبه $f'(x)$ می‌توان یک چنین نقطه‌ای را یافت.

این روش را با استفاده از سه خم نمایی در شکل ۱۹ توضیح می‌دهیم. در نخستین خم، خط اصل بین نقاط (x, e^x) و $(x-1, 0)$ و بر نمودار $f(x) = e^x$ مماس است زیرا که دارای شیب مطلوب $f'(x) = e^x$ می‌باشد. در دومین خم، خط مماس نقطه $(x - \frac{1}{e}, 0)$ را به $(x, e^{1/x})$ وصل می‌کند، و در سومین مورد، خط مماس نقطه $(x+1, 0)$ را به (x, e^{-x}) متصل می‌نماید.

روی خم مسطحی مانند $y = f(x)$ نقطه جادویی‌ای که روی محور x به دنبالش هستیم و بر خط مماس گذرنده از $(x, f(x))$ نیز قرار می‌گیرد نقطه $(x - s(x), 0)$ است، که در آن $s(x)$

¹bicyclix



شکل ۱۹. یک راه ساده برای رسم مماس بر خم‌های نمایی

زیرمماس تعریف شده به صورت

$$s(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (1.7)$$

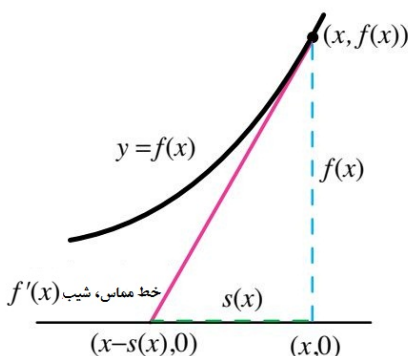
است در هر نقطه x که $f'(x)$ ناصفر است. در شکل ۲۰، $s(x)$ قاعده یک مثلث قائم‌الزاویه با ارتفاع $f(x)$ و شیب وتر $f'(x)$ است. از رابطه (۱.۷) درمی‌یابیم که $f'(x) = f(x)/s(x)$ ، لذا اگر $s(x)$ معلوم باشد، این تساوی فرایند هندسی ساده‌ای برای یافتن خط مماس بر نقطه‌ای دلخواه واقع بر نمودار f به دست می‌دهد. دراصل، مانند شکل ۲۰ از $(x, f(x))$ عمودی به نقطه $(x, 0)$ واقع بر محور x رسم نمایید. سپس روی محور x به نقطه $(x - s(x), 0)$ بروید و آن را به $(x, f(x))$ وصل نمایید تا خط مماس مطلوب را به دست آورید.

این روش به‌ویژه زمانی مفید است که $s(x)$ ، مانند مثال‌های زیر، دارای شکلی ساده باشد.

مثال ۴ (زیرمماس‌های ثابت). خم‌های نمایی برای نخستین بار در ۱۶۸۴، زمانی که لایب‌نیتس مسئله یافتن خم با زیرمماس‌های ثابت را مطرح کرد، تعریف شدند. جواب این مسئله خم‌های نمایی‌اند. در حالت خاص، برای ثابت ناصفر b داریم $f(x) = Ke^{x/b}$ ، که $K \neq 0$ عددی ثابت است، اگر و تنها اگر $s(x) = b$.

شکل ۱۹ مثال‌هایی را برای $b = 1, 1/2, -1$ نشان می‌دهد. ضمناً، ضرب تابع f در ثابتی ناصفر باعث تغییر زیرمماسش نمی‌شود، زیرا f' نیز در همان عامل ضرب می‌شود و طبق رابطه (۱.۷) بی‌اثر می‌گردد.

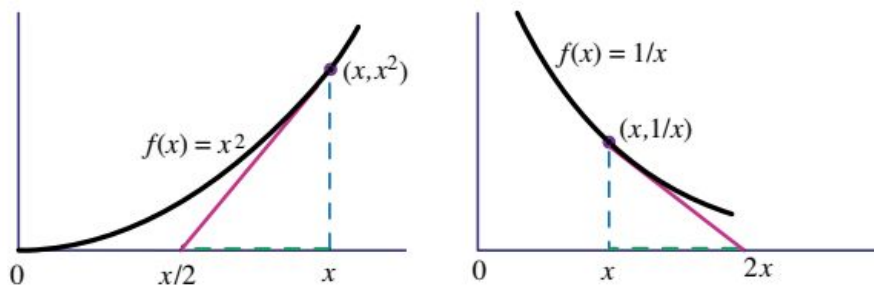
در بخش ۸ از ویژگی ثابت بودن زیرمماس‌های خم‌های نمایی در کنار قضیه مامیکن بهره خواهیم برد تا نشان دهیم مساحت محصور بین نمودار $y = e^{x/b}$ و بازه دلخواه $(-\infty, x]$ برابر $be^{x/b}$



شکل ۲۰. معنای هندسی زیرمماس؛ خط مماس در نقطه $(x, f(x))$ از نقطه $(x - s(x), 0)$ روی محور x می‌گذرد.

می‌شود، نتیجه‌ای که می‌توان آن را با انتگرال‌گیری نیز به دست آورد.

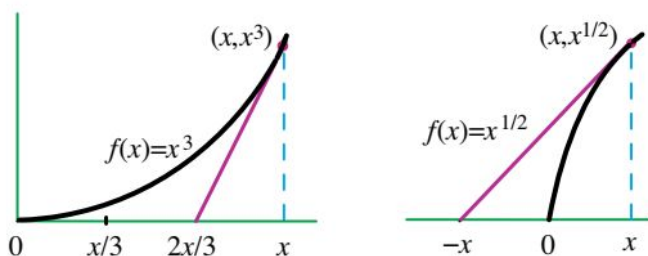
مثال ۵ (زیرمماس‌های خطی). توابع توانی زیرمماس‌های خطی دارند. درحقیقت، برای ثابتی ناصفر مانند b داریم $f(x) = Kx^{1/b}$ ، که $K \neq 0$ ثابت است، اگر و تنها اگر $s(x) = bx$. در حالت خاص، سهمی $f(x) = x^2$ دارای زیرمماس $s(x) = x/2$ و هذلولوی $f(x) = 1/x$ دارای زیرمماس $s(x) = -x$ است. شکل ۲۱ (سمت چپ) نشان می‌دهد چگونه خطوط مماس بر سهمی $f(x) = x^2$ را می‌توان به سادگی با اتصال $(x/2, 0)$ به (x, x^2) رسم کرد. شکل ۲۱ (سمت راست) رسم مماس بر هذلولوی $f(x) = 1/x$ را نشان می‌دهد. در اینجا $x - s(x) = 2x$ ، لذا خط مماس از $(2x, 0)$ و $(x, 1/x)$ می‌گذرد.



شکل ۲۱. راه ساده ترسیم هندسی مماس بر هذلولوی $f(x) = 1/x$ و سهمی $f(x) = x^2$

برای خم درجه سه $f(x) = x^3$ داریم $s(x) = x/3$ ، لذا نقطه $(2x/3, 0)$ را به (x, x^3)

متصل می‌کنیم تا خط مماس در (x, x^3) را، مانند شکل ۲۲ (سمت چپ)، به دست آوریم. برای تابع توانی کلی‌تر $f(x) = x^r$ نقطه $(x - x/r, 0)$ را به (x, x^r) وصل می‌کنیم تا مماس در (x, x^r) به دست آید. شکل ۲۲ (سمت راست) مثالی را برای $r = 1/2$ نشان می‌دهد.



شکل ۲۲. راه ساده ترسیم هندسی مماس بر $f(x) = x^{1/2}$ و $f(x) = x^3$

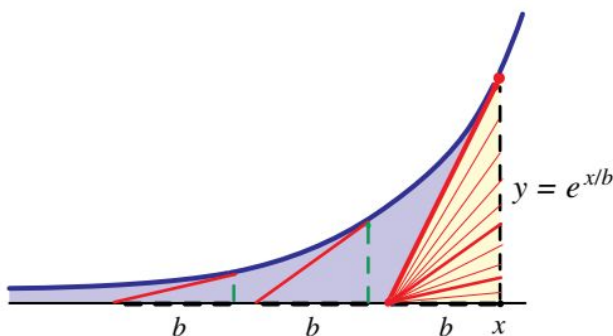
۸ خم‌های نمایی

توابع نمایی همه‌جا در کاربردهای ریاضیات حاضرند. در مسائل مربوط به رشد جمعیت، واپاشی رادیواکتیو، شارش گرما، و سایر مسائل فیزیکی که در آن نرخ رشد یک کمیت با مقدار موجود آن متناسب است سروکله این توابع ظاهر می‌شود. از منظر هندسی، این بدان معنی است که شیب خط مماس در هر نقطه از یک خم نمایی متناسب با ارتفاع خم در آن نقطه است.

همچنین دیدیم که خم‌های نمایی تنها خم‌هایی هستند که زیرمماس ثابت دارند. با بهره‌گیری از این مطلب، می‌توان قضیه مامیگن را برای یافتن مساحت ناحیه زیر خم‌های نمایی بدون استفاده از حساب انتگرال به کار گرفت. شکل ۲۳ نحوه انجام این کار را به ما نشان می‌دهد.

خم نمایی $y = e^{x/b}$ زیرمماسی ثابت به طول b دارد، و ناحیه مورد نظر با قطعه‌خط‌های مماسی روبوده می‌شود که توسط محور x با حرکت نقطه تماس از x به منفی بی‌نهایت بریده می‌شوند.

همچنین شکل ۲۳ نشان می‌دهد هر قطعه‌خط مماس به گونه‌ای انتقال یافته است که نقطه انتهایی آن‌ها روی محور x به نقطه‌ای مشترک، در اینجا رأس پایینی یک مثلث قائم‌الزاویه، انتقال یافته است. از آنجا که طول زیرمماس ثابت است، خوشه مماسی حاصل مثلث قائم‌الزاویه‌ای با قاعده b و ارتفاع $e^{x/b}$ تشکیل می‌دهد. بنابراین مساحت پهنه مماسی برابر با مساحت مثلث قائم‌الزاویه است، و مساحت بین خم نمایی و بازه $[-\infty, x]$ دو برابر مساحت مثلث قائم‌الزاویه است که برابر



شکل ۲۳. ناحیه زیر خم نمایی که توسط مماس‌ها روبنده شده است.

حاصل ضرب قاعده b در ارتفاع آن $e^{x/b}$ می‌باشد، یعنی $be^{x/b}$.
به بیان حساب دیفرانسیل و انتگرال، نشان داده‌ایم که

$$\int_{-\infty}^x e^{t/b} dt = be^{x/b}$$

نتیجه‌ای حاصل از قضیه مامیکن است بدون استفاده از روش‌های حساب انتگرال.

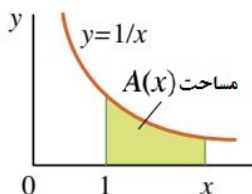
۹ مساحت یک قطاع هذلولوی

از اینکه خم‌های نمایی زیرمماس‌هایی ثابت دارند می‌توان برای اثبات فرمول کلاسیک زیر استفاده کرد

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \log x, \quad (1.9)$$

که در آن $\log x$ لگاریتم طبیعی x است. اگر $x \geq 1$ ، انتگرال بالا مساحت یک قطعه هذلولوی، $A(x)$ ، را نمایش می‌دهد که ناحیه‌ای زیر نمودار هذلولوی $y = 1/x$ و بالای بازه $[1, x]$ ، شکل ۲۴، است.

در برخی کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال، رابطه (۱.۹) را تعریف تابع لگاریتم در نظر می‌گیرند، و پس از آن تابع نمایی را تابع وارون آن تعریف می‌کنند. (بخش‌های ۳.۶ و ۱۲.۶ از [۱] را ببینید). در اینجا ما دیدگاه دیگری را اتخاذ می‌کنیم. تابع نمایی را تابعی با زیرمماس ثابت ۱ و مقدار ۱ در نقطه 0 ، و تابع لگاریتم را وارون تابع نمایی تعریف می‌کنیم. اکنون نشان می‌دهیم



شکل ۲۴. $A(x)$ مساحت ناحیه زیر هذلولوی $y = 1/x$ و بالای بازه $[1, x]$ است.

تابع $A(x)$ که مساحت قطاع هذلولوی در شکل ۲۴ را نشان می‌دهد، و به بیان حساب دیفرانسیل و انتگرال با انتگرال

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad (2.9)$$

داده می‌شود، وارون تابع نمایی است و این یعنی اینکه $A(x) = \log x$ ، که همان رابطه (۱.۹) است.

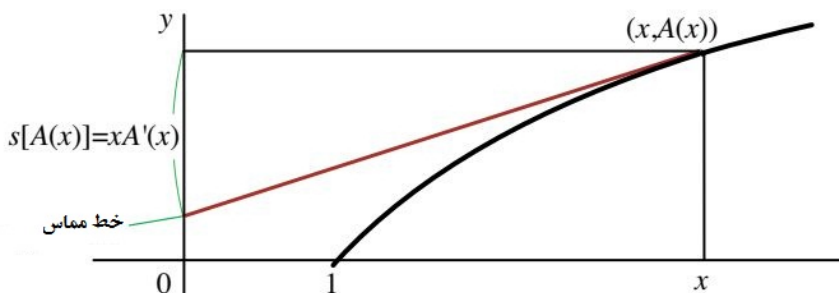
شکل ۲۵ نشان می‌دهد که شکل کلی نمودار تابع مساحت $y = A(x)$ تابعی صعودی از x برای $x \geq 1$ است و $A(1) = 0$. مشتق‌گیری از (۲.۹) معلوم می‌کند که $A'(x) = 1/x$ یا $xA'(x) = 1$. اکنون به‌طور هندسی نشان می‌دهیم که $xA'(x)$ زیرمماس برای وارون A است، و از آنجایی که این زیرمماس ثابت است پس تابع وارون تابعی نمایی است. وارون A را با B نشان می‌دهیم، پس $y = A(x)$ اگر و تنها اگر $x = B(y)$. بنابراین $B[A(x)] = x$ و مشتق‌گیری از آن به دست می‌دهد $B'[A(x)]A'(x) = 1$.

$$\frac{B[A(x)]}{B'[A(x)]} = \frac{x}{1/A'(x)} = xA'(x) = 1.$$

با استفاده از رابطه (۱.۷) تابع زیرمماس s متناظر با B به صورت زیر بیان می‌شود

$$s(y) = \frac{B(y)}{B'(y)}.$$

بنابراین اگر $y = A(x)$ ، رابطه بالا به ما می‌گوید که $s(y) = 1$. در شکل ۲۵ مماس بر نمودار $y = A(x)$ در نقطه $(x, A(x))$ روی محور y پاره‌خطی، که زیرمماس تابع وارون B است، به طول ۱ جدا می‌کند. بنابراین B نمایی است، یعنی $B(y) = e^y$ ، و وارون آن تابع لگاریتم $A(x) = \log x$ می‌شود، و رابطه (۱.۹) ثابت می‌شود.



شکل ۲۵. خط مماس به $y = A(x)$ قطعه‌ای به طول $xA'(x) = 1$ روی محور y جدا می‌کند.

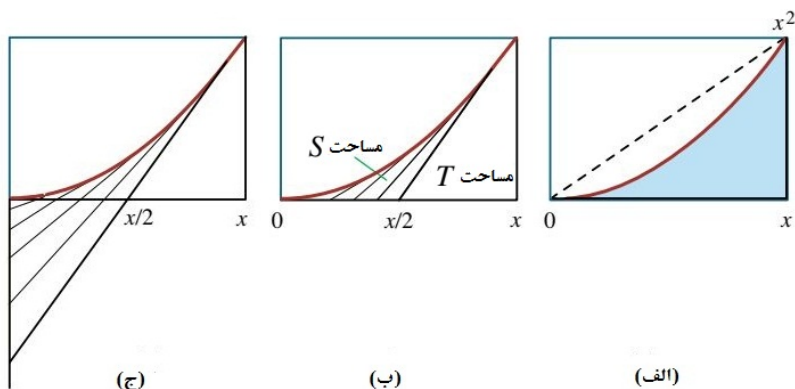
در شکل ۲۵، خم $y = \log x$ مستطیل با مساحت xy را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. ناحیه بالا مساحتی برابر با $x - 1 = e^y - 1$ دارد، پس مساحت ناحیه پایین برابر $xy - (x - 1)$ است. به بیان حساب انتگرال، این یعنی $\int_1^x \log t dt = x \log x - x + 1$ نتیجه‌ای که در اینجا به‌طور هندسی حاصل آمد.

۱۰ مساحت یک قطاع سهموی

در ادامه به مسئله ۱ که در مقدمه آمد باز می‌گردیم؛ مسئله‌ای که شاید قدیمی‌ترین مسئله حساب دیفرانسیل و انتگرال در تاریخ باشد — یافتن مساحت یک قطاع سهموی، ناحیه سایه‌خورده در شکل ۲۶(الف).

قطاع یادشده در یک مستطیل با طول x و عرض x^2 محاط شده است. مساحت مستطیل، R ، برابر x^3 است، البته نیازی با این فرمول صریح برای R نخواهیم داشت. از شکل ۲۶(الف) روشن است که مساحت قطاع سهموی از $R/2$ ، نصف مساحت مستطیل، کمتر است. کشف خیره‌کننده ارشمیدس این بود که این مساحت دقیقاً یک سوم مساحت مستطیل، یا همان $R/3$ ، است. این مطلب را از روش هندسی ساده‌ای با استفاده از پهنه‌های مماسی نتیجه خواهیم گرفت.

معادله سهمی به‌صورت $y = x^2$ است، البته نیازی به آن نداریم. تنها مطلبی که به کار می‌گیریم این است که زیرمماس سهمی برابر $x/2$ است، و در نتیجه خط مماس بالای هر نقطه x قطعه‌ای به طول $x/2$ ، همان‌طور که در شکل ۲۶(ب) می‌بینید، جدا می‌کند. در شکل ۲۶ پهنه‌های مماسی با رسم تمام خطوط مماس بر سهمی بین نقاط 0 و x که با محور x قطع می‌شوند به دست می‌آید. همچنین از ویژگی دیگری از پهنه‌های مماسی، موسوم به ویژگی تغییر مقیاس، استفاده خواهیم



شکل ۲۶. (الف) قطاع سهموی. (ب) رفت مماس قطاع سهموی بریده شده توسط محور x . (ج) ناحیه ای که با دو برابر کردن طول قطعه خط های مماس در (ب) به دست می آید.

کرد که برای خم های فضایی و مسطح، هر دو، برقرار است.

ویژگی تغییر مقیاس. اگر طول هر قطعه خط مماس از یک پهنه مماسی t برابر شود، آنگاه مساحت آن پهنه مماسی t^2 برابر خواهد شد.

دلیل درستی این ویژگی این است که با t برابر کردن پهنه مماسی خوشه مماسی نیز به طور شعاعی t برابر می شود و شکلی مشابه ایجاد می کند که مساحتش t^2 برابر شده است.

در شکل ۲۶ (ب)، قطاع سهموی به دو ناحیه تقسیم شده است، یکی پهنه مماسی با مساحت S ، و یک مثلث قائم الزاویه که مساحت آن را T می گیریم. اثبات خواهیم کرد که $S = T/3$ ، پس مساحت قطاع سهموی، $S + T$ ، برابر با $4T/3$ می شود. از آنجا که $4T = R$ ، مساحت قطاع سهموی، $S + T$ ، همان طور که گفته شد، برابر $R/3$ است.

برای اثبات اینکه $S = T/3$ ، به شکل ۲۶ (ج) نگاه کنید که در آن طول هر قطعه خط مماس از شکل ۲۶ (ب) دو برابر شده است تا به محور y برسد. مساحت پهنه مماسی تغییر مقیاس داده شده $4S$ است. ولی ناحیه انبساط یافته از دو بخش تشکیل یافته است، یکی بخش بالای محور x با مساحت S ، و دیگری مثلث قائم الزاویه با مساحت T زیر محور x . بنابراین $4S = S + T$ ، پس $S = T/3$. این رابطه ثابت می کند که قطاع سهموی مساحتی برابر با $R/3$ دارد.

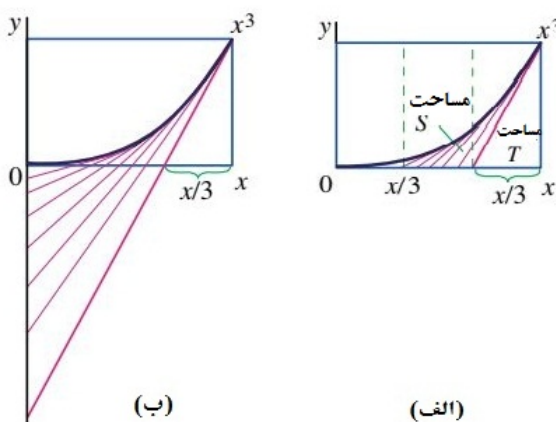
به بیان حساب دیفرانسیل و انتگرال، این استدلال ساده نشان می دهد

$$\int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3},$$

که انتگرال گیری از سهمی خوانده می شود. این رابطه را اولین بار ارشمیدس با استفاده از یک فرآیند حدی هندسی، به نام روش افنا، به دست آورد. در قرن شانزدهم، علاقه به روش افنا دوباره احیا شد و این روش به تدریج به یک فن قدرتمند معروف به حساب انتگرال تبدیل گردید که در آن انتگرال گیری از سهمی کاری معمولی به شمار می آمد.

۱۱ توان های حقیقی مثبت

حالا x^2 را با یک توان دیگر x^r ، با شرط $r > 0$ ، جایگزین می کنیم. اگر $f(x) = x^r$ زیر مماس برابر x/r است، پس مماس بالای هر نقطه x پاره خطی با طول x/r روی محور x جدا می کند. در شکل ۲۷ داریم $r = 3$ و مماس بالای x پاره خطی به طول $x/3$ جدا می کند. از پهنه های مماسی استفاده می کنیم و نشان می دهیم قطاع مکعبی زیر منحنی $y = x^3$ و بالای بازه $[0, x]$ دارای مساحت $R/4$ است، یعنی یک چهارم مساحت مستطیل محیطی.



شکل ۲۷. (الف) قطاع مکعبی به دو ناحیه تقسیم شده است. (ب) قطعه خط های مماس با طول سه برابر نسبت به (الف)

در شکل ۲۷ (الف) قطاع مکعبی به دو ناحیه تقسیم شده است، یکی پهنه مماسی (به مساحت S) و دیگری یک مثلث قائمه (به مساحت T). ثابت خواهیم کرد $S = T/2$.

پاره خط های مماس در شکل ۲۷ (الف) را سه برابر کنید تا، مثل شکل ۲۷ (ب)، به محور y برسند. مساحت پهنه مماسی گسترش یافته در شکل ۲۷ (ب) برابر با $9S$ است. مساحت آن بخشی از ناحیه گسترش یافته که بالای محور x قرار دارد برابر S است و بخش قرار گرفته در زیر محور

x مثلثی قائمه است که اضلاعش نسبت به شکل ۲۷ (الف) دو برابر است، پس مساحتش $۴T$ می‌شود. بنابراین $۹S = S + ۴T$ ، پس $S = T/۲$. مساحت قطاع مکعبی برابر است با

$$S + T = ۳T/۲ = ۶T/۴ = R/۴;$$

زیرا $۶T$ مساحت مستطیل محیطی، R ، نیز است. این نشان می‌دهد، همان‌طور که ادعا شد، مساحت قطاع مکعبی برابر $R/۴$ است.

استدلال برای توان کلی $۱ < r$ مشابه است. قطاع کلی را می‌توان به دو ناحیه تقسیم نمود، یکی پهنه مماسی با مساحت S که توسط محور x برش می‌خورد و دیگری مثلث قائمه به مساحت T . هر پاره‌خط مماس را r برابر منبسط می‌کنیم تا با برش توسط محور y پهنه مماسی گسترش‌یافته‌ای با مساحت $r^۲S$ به دست آید. بخشی از ناحیه گسترش‌یافته که بالای محور x قرار گرفته است مساحتی برابر S دارد، و بخش زیر محور x مثلثی قائمه با مساحت $(r-۱)^۲T$ است. بنابراین

$$r^۲S = S + (r-۱)^۲T \quad \text{و لذا}$$

$$S = \frac{(r-۱)^۲}{r^۲-۱}T = \frac{r-۱}{r+۱}T$$

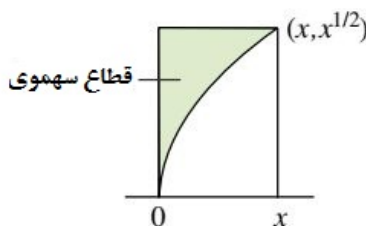
و مساحت قطاع کلی برابر $(۲rT)/(r+۱)$ است. ولی برای مساحت مستطیل محیطی داریم $۲rT = R$ ، پس مساحت قطاع کلی $R/(r+۱)$ برابر است. به بیان حساب دیفرانسیل و انتگرال، این رابطه معادل است با

$$\int_0^x t^r dt = \frac{x^{r+۱}}{r+۱}.$$

اگر $r = ۱$ این روش باز هم کارآمد است، و مقدار $x^۲/۲$ را به دست می‌دهد. در این حالت، قطاع مورد بحث مثلثی قائمه با مساحتی برابر نصف مستطیل محیطی می‌شود. (پهنه مماسی مساحتی برابر $S = ۰$ دارد).

اگر $۰ < r < ۱$ شکل نمودار از کاو به کوژ تغییر می‌یابد، و پهنه مماسی به جای آنکه زیر خم باشد بالای آن قرار می‌گیرد. بحث بالا را می‌توان برای استفاده در این حالت اصلاح نمود، اما مسئله برای حالت $r < ۱$ به سادگی به مسئله‌ای برای توان‌های بزرگ‌تر از ۱ تحویل می‌یابد. مثال شکل ۲۸ برای حالت $r = ۱/۲$ نشان می‌دهد چگونه در حالت کلی استدلال کنیم.

بخشی از مستطیل که بالای نمودار قرار دارد با یک قطاع سهموی به مساحت $R/۳$ هم‌نهشت



شکل ۲۸. برای حالت $r = 1/2$ می‌توان مساحت را از قطاع سهموی به دست آورد.

است، پس بخش زیرین نمودار مساحتی برابر با $R/(1 + 1/2) = 2R/3$ دارد. (در حساب دیفرانسیل و انتگرال، این همان روش انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء است.)

برای حالت کلی $0 < r < 1$ بخشی از مستطیل که بالای نمودار $y = x^r$ قرار دارد با یک قطاع کلی برای توان $1/r \leq 1$ هم‌نهشت است، پس مساحتش برابر با $R/(1 + 1/r)$ می‌شود. بنابراین مساحت بخش زیرین نمودار برابر با $R/(r + 1)$ است، که مشابه با فرمول به دست آمده برای $r > 1$ می‌باشد.

۱۲ توان منفی کلی

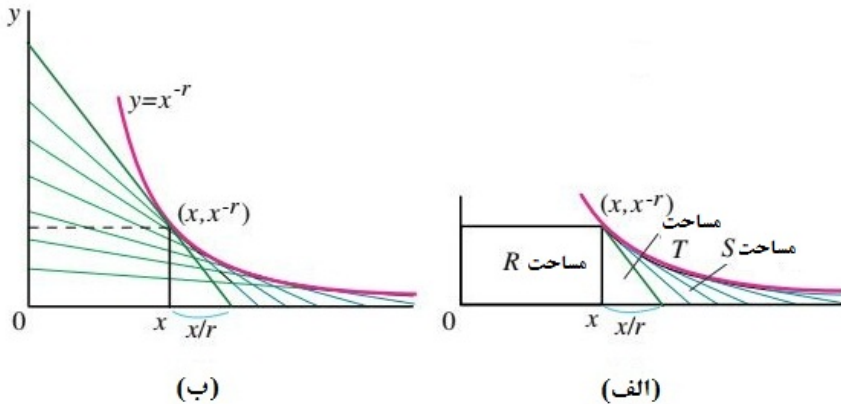
در ادامه به سراغ نمودار $y = x^{-r}$ می‌رویم که در آن $1 < r$ ، و مساحت ناحیه‌ای را که بالای بازه $[x, \infty)$ قرار دارد، برای هر $x > 0$ ، تعیین می‌کنیم. حساب انتگرال به ما می‌گوید که این مساحت با برابری زیر بیان می‌شود

$$\int_x^\infty t^{-r} dt = \frac{x^{1-r}}{r-1}. \quad (1.12)$$

این برابری را به‌طورهندسی و بدون استفاده از حساب انتگرال اثبات خواهیم کرد.

قطاع کلی مورد بحث شامل دو بخش می‌باشد که در شکل ۲۹ (الف) نشان داده شده است، یکی مثلث قائمه با مساحت $T = x^{1-r}/(2r)$ و دیگری پهنه مماسی با مساحت S ، بنابراین مساحت قطاع برابر با $S + T$ است. این ناحیه در مجاورت مستطیلی با طول x و عرض x^{-r} است و مساحت آن برابر با $R = x^{1-r} = 2rT$ است. نشان خواهیم داد $S + T = R/(r-1)$ ، و این همان نتیجه‌ای است که رابطه (۱.۱۲) بیان می‌کند. ضمناً این رابطه نشان می‌دهد که S نمی‌تواند نامتناهی باشد.

شکل ۲۹ (ب) ناحیه‌ای را نشان می‌دهد که با رسم پاره‌خط‌های مماس از نقطه تماس (t, t^{-r})



شکل ۲۹. (الف) یک قطاع کلی که به پهنه مماسی به مساحت S و یک مثلث به مساحت T تقسیم شده است. (ب) پهنه مماسی برش خورده توسط محور y مساحتی برابر $r^2 S$ دارد.

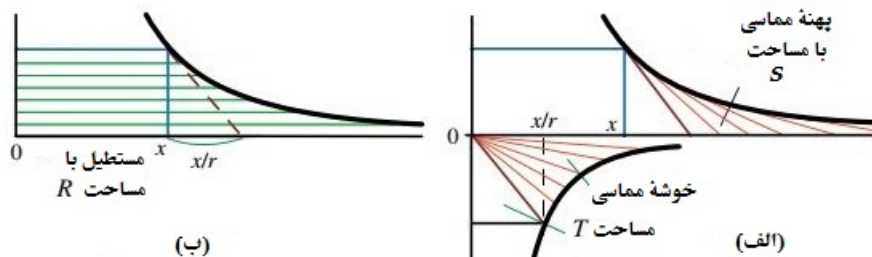
به محور y ، برای هر $t \geq x$ ، به دست می‌آید. طول هر پاره‌خط مماس r برابر پاره‌خط مماسی است که در همان نقطه توسط محور x برش می‌خورد (شکل ۲۹(الف))، بنابراین پهنه مماسی در شکل ۲۹(ب) دارای مساحت $r^2 S$ است. این ناحیه از دوبخش تشکیل یافته است، یکی مثلث قائمه به مساحت $(r+1)^2 T$ ، و دیگری پهنه مماسی اصلی با مساحت S در مجاورت آن. پس $S = (r+1)^2 T / (r^2 - 1) = (r+1)T / (r-1)$ که رابطه $r^2 S = (r+1)^2 T + S$ را نتیجه می‌دهد، بنابراین، همان‌طور که می‌خواستیم،

$$S + T = \left(\frac{r+1}{r-1} + 1 \right) T = \frac{r^2 T}{r-1} = \frac{R}{r-1}.$$

۱۳ روشی دیگر برای توان‌های منفی

روش هندسی دیگری در شکل ۳۰ نشان داده شده است؛ در این تصویر مشاهده می‌کنید که از پهنه مماسی در شکل ۲۹(الف) یک خوشه مماسی به دست آمده است به این صورت که هر پاره‌خط مماس به موازات خودشان طوری انتقال داده شده است که نقطه تماس به مبدأ برده شود.

بنابراین قضیه مامیگن، این خوشه مماسی دارای مساحت S است. خوشه مماسی و مثلث قائم‌الزاویه مجاور آن در شکل ۳۰(الف) دارای مساحت $S + T$ است. در ادامه، این ناحیه (خوشه مماسی به انضمام مثلث) را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا ناحیه‌ای هم‌نهشت، با مساحت



شکل ۳. (الف) خوشه مماسی برای پهنه مماسی شکل ۲۹ (الف) در مجاورت مثلثی با مساحت T ؛ (ب) قرینه سازی ناحیه پایینی شکل (الف) و کشیدن آن در جهت افقی با ضریب r

$S + T$ ، به دست آید، سپس آن را به طور افقی با ضریب r می کشیم (یعنی، مؤلفه x هر نقطه در ناحیه قرینه شده را در r ضرب می کنیم) تا ناحیه جدید با مساحت $r(S + T)$ ، که با هاشورهای افقی در شکل ۳ (ب) مشخص شده است، حاصل آید. ناحیه کشیده شده از دو بخش ساخته شده است، یکی مستطیل به مساحت R و دیگری ناحیه اصلی در شکل ۳ (الف) با مساحت $S + T$. بنابراین $r(S + T) = R + (S + T)$ و بار دیگر درمی یابیم که

$$S + T = \frac{R}{r - 1}.$$

اگر $0 < r < 1$ ، انتگرال در رابطه (۱.۱۲) واگراست، اما در این حالت مساحت ناحیه زیر خم $y = x^{-r}$ و بالای بازه $[0, x]$ برابر است با

$$\int_0^x t^{-r} dt = \frac{x^{1-r}}{1-r}.$$

این روش را می توان برای توان های مثبت نیز به کار برد.

۱۴ کاربرد در جهت عکس

در همه مثال های قبل، مساحت پهنه مماسی را از طریق برابری آن با مساحت خوشه مماسی متناظر، که تعیین آن آسان تر بود، می یافتیم. ولی اگر تعیین مساحت پهنه مماسی آسان تر باشد، در این صورت قضیه مامیکن را می توان به صورت شمشیری دو لبه برای به دست آوردن مساحت خوشه مماسی به کار گرفت. در این بخش، این ایده را برای ارائه اثباتی هندسی از فرمول انتگرال گیری زیر

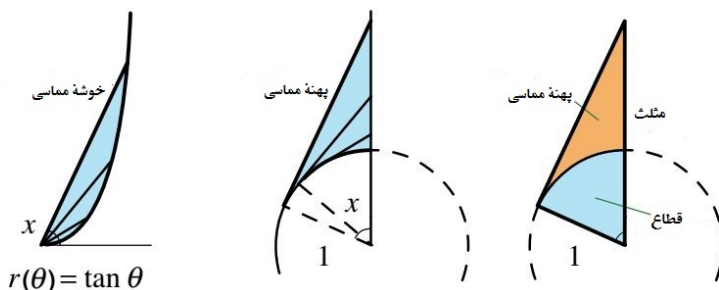
به کار می‌گیریم

$$\int_0^x \tan^2 \theta d\theta = \tan x - x. \quad (1.14)$$

شکل ۳۱ (سمت چپ) نمودار معادله قطبی $r(\theta) = \tan \theta$ را نشان می‌دهد که θ از ۰ تا x تغییر می‌کند. مساحت ناحیه هاشورخورده، $A(x)$ ، از برابری زیر به دست می‌آید

$$A(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \tan^2 \theta d\theta.$$

حال به‌طور هندسی نشان می‌دهیم که $A(x) = \frac{1}{2} \tan x - \frac{1}{2} x$. ناحیه شکل ۳۱ (سمت چپ) خوشه مماسی برای پهنه مماسی دایره یکه است که در سمت راست به شکل خط‌چین نشان داده شده است. در اینجا هر پاره خط مماس بر دایره یکه توسط خط عمودی که از مرکز دایره می‌گذرد برش می‌خورد.



شکل ۳۱. ناحیه سایه‌خورده در سمت چپ، خوشه مماسی برای پهنه مماسی شکل سمت راست است. این دو مساحتی برابر دارند. مساحت پهنه مماسی برابر مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه منهای مساحت یک قطاع دایره‌ای است.

اگر زاویه بین شعاع و خط عمودی θ باشد، در این صورت خط مماس متناظر دارای طول $\tan \theta$ می‌باشد. مساحت $A(x)$ پهنه مماسی برابر با مساحت مثلثی قائم‌الزاویه با قاعده ۱ و ارتفاع $\tan x$ است، که برابر می‌شود با $\frac{1}{2} \tan x$ ، منهای مساحت قطاع دایره‌ای با زاویه x ، که برابر است با $\frac{1}{2} x$. بنابراین

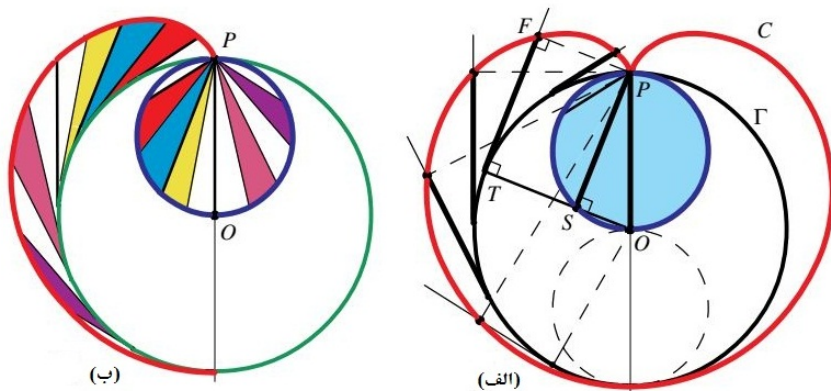
$$A(x) = \frac{1}{2} \tan x - \frac{1}{2} x$$

که وقتی در ۲ ضرب شود رابطه (۱.۱۴) را به دست می‌دهد.

۱۵ کاربرد ی در حلزونی پاسکال

حلزونی در شکل یک خم پادکی

کار را با یک خم هموار Γ و یک نقطه P موسوم به نقطه پادکی^۱ (که لزوماً روی Γ نیست) آغاز می‌کنیم. پای خط عمود از P بر یک خط مماس دلخواه از Γ را با F نشان می‌دهیم. مکان هندسی همه چنین نقاط F را که از خطوط مماس به دست می‌آید خم پادکی Γ نسبت به P می‌خوانیم. وقتی Γ دایره باشد منحنی پادکی، مثل شکل ۳۲ (الف)، حلزونی پاسکال خوانده می‌شود. برای اینکه نشان دهیم نوع خم پادکی برای به کارگیری قضیه مماس روبنده مامیگن مناسب است، ناحیه محصور توسط یک حلزونی را محاسبه می‌کنیم؛ ابتدا حالتی که نقطه پادکی P روی Γ قرار دارد.



شکل ۳۲. (الف) دلوار در شکل یک خم پادکی با نقطه پادکی P روی دایره؛ (ب) پهنه مماسی یک هلال و خوشه مماسی آن، به شکل یک قرص دایره‌ای. هلال و قرص دارای مساحت برابرند.

مساحت ناحیه محصور توسط یک دلوار

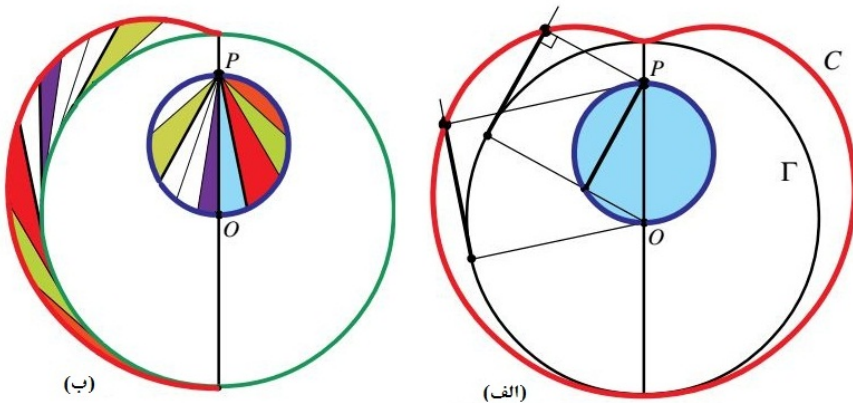
اگر نقطه پادکی P روی دایره باشد، همانند شکل ۳۲ (الف)، حلزونی یک دلوار است که در اینجا آن را با C نمایش می‌دهیم. دلوار C در شکل ۳۲ (الف)، دایره Γ و دو بخش هلالی شکل هم‌نهشت بین Γ و C را در بر گرفته است. هر هلال یک پهنه مماسی از Γ روی C است. یک قطعه خط مماس نوعی از نقطه T روی Γ به F روی C با وتر PS از دایره کوچک‌تر به قطر OP موازی است و طولی برابر با آن دارد، زیرا که $PFTS$ مستطیل است (زاویه PSO ، زاویه‌ای محاطی در

^۱pedal

یک نیم‌دایره، قائمه است). بنابراین، خوشه مماسی هریک از این هلال‌ها قرص دایره‌ای مانند D با قطر OP است (شکل ۳۲ (ب)) که مساحت آن را با $[D]$ نشان می‌دهیم. پس هر هلال مساحتی برابر با $[D]$ دارد. قرصی که توسط Γ محصور شده است دارای قطر OP می‌باشد، پس مساحت آن $4[D]$ است. بنابراین ناحیه محصور توسط دلواری C مساحتی برابر با $6[D]$ دارد.

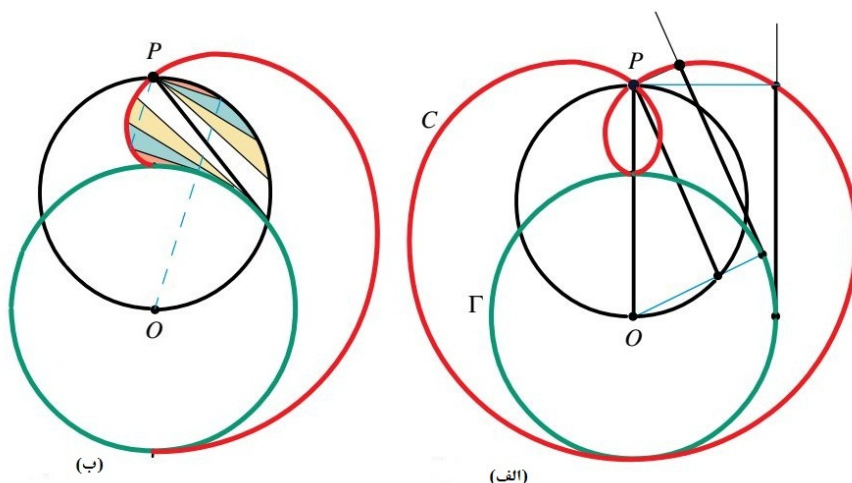
مساحت ناحیه محصور توسط حلزونی دلخواه

کار را با دایره Γ ، مانند شکل ۳۲، شروع می‌کنیم ولی این بار نقطه پادکی P را داخل Γ ، مثل شکل ۳۳ (الف)، انتخاب می‌کنیم. با این کار خانواده‌ای از حلزونی‌های C به دست می‌آید که وابسته به به فاصله OP اند. اینجا هم هر هلال یک پهنه مماسی از Γ به C است و خوشه مماسی نیز قرص دایره‌ای به قطر OP ، همانند شکل ۳۳ (ب). مساحت هر هلال برابر با $[D]$ مساحت قرص D به قطر OP است. مساحت ناحیه محصور به C برابر با $2[D]$ به علاوه مساحت قرص Γ است. اگر قطر Γ برابر با d باشد، آنگاه مساحت $[\Gamma]$ برابر با $\lambda^2[D]$ است، که در آن λ نسبت قطرهای، $\lambda = d/OP$ است.



شکل ۳۳. (الف) خم پادکی C برای دایره Γ نسبت به نقطه پادکی داخلی P ; (ب) پهنه مماسی یک هلال و خوشه مماسی آن به صورت یک قرص دایره‌ای

اگر، همانند شکل ۳۴، P خارج از Γ باشد دو هلال هم‌پوشانی می‌کنند و، مثل شکل ۳۴ (الف)، تشکیل یک طوقه می‌دهند. با کمال تعجب، مساحت هر هلال برابر با $[D]$ ، مساحت قرص با قطر OP ، می‌شود، درست مانند وقتی که P درون یا روی Γ قرار داشت.



شکل ۳۴. (الف) خم پادکی C برای Γ نسبت به نقطه خارجی P ، همراه با یک طوقه گذرنده از P ؛ (ب) پهنه مماسی از Γ به C برای بخش مشترک یک هلال، همراه با خوشه مماسی به شکل قطعه‌ای از یک قرص به قطر OP .

برای فهمیدن دلیلش، نخست شکل ۳۴ را در نظر بگیرید، که در آن پهنه مماسی از Γ به C روی بخشی از یک هلال را نشان می‌دهد که جزئی از طوقه اشتراک است. خوشه مماسی مربوط قطعه‌ای از قرص به قطر OP ، بالای وتر از Γ تا P ، است. این وتر نیز مماس بر Γ است. حالا شکل ۳۵ (الف) را در نظر بگیرید که در آن قسمتی از پهنه مماسی (از Γ به C) نشان داده شده است که جزئی از هلال بغیر از ناحیه هم‌پوشانی است. این قسمت از مماس گذرنده از P آغاز می‌شود و به مماس موازی با OP پایان می‌یابد. خوشه مماسی متناظر قطعه‌ای از قرص به قطر OP در بالای وتر از Γ به P است.

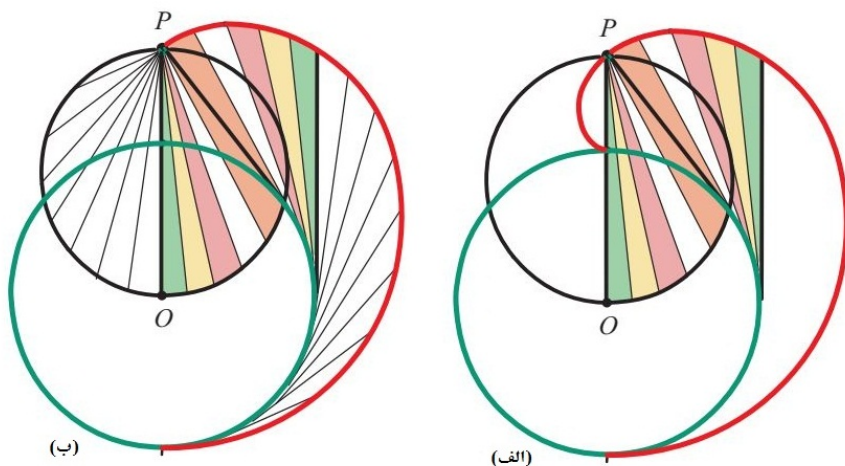
و سرانجام، شکل ۳۵ (ب) نشان می‌دهد که خوشه مماسی برای پهنه مماسی باقی‌مانده هلال از Γ به C نیمه چپ قرص به قطر OP است. در نتیجه، مساحت یک هلال، همان‌طور که ادعا شد، برابر با $[D]$ است.

بنابراین، برای هر سه حالت که P روی، درون، یا بیرون دایره Γ باشد، داریم:

هر هلال مساحتی برابر با مساحت قرص به قطر OP ، یعنی $[D]$ ، دارد.

تا جایی که ما اطلاع داریم، این نتیجه پیش از این بیان نشده است.

اگر P خارج از Γ قرار داشته باشد، مساحت ناحیه‌ای که توسط حلزونی کامل C محصور



شکل ۳۵. (الف) پهنه مماسی از Γ به C ، که از نقطه تماس P آغاز و به خط مماس موازی با OP ختم می‌شود، همراه با خوشه مماسی آن؛ (ب) خوشه مماسی باقی‌مانده پهنه مماسی از Γ به C به صورت نصف یک قرص با قطر OP است.

شده است برابر است با مجموع مساحت‌های دو هلالی که هم‌پوشانی می‌کنند، که برابر $2[D]$ است، منهای مساحت ناحیه $[L]$ ، که توسط طوقه محصور شده است، به علاوه مساحت قرص Γ ، یعنی $[G]$. برای تعیین مساحت طوقه $[L]$ با استفاده از پهنه‌های مماسی، به شکل ۳۵ (ب) نگاه و توجه کنید که، با لحاظ کردن تقارن، $[L]$ دو برابر مساحت قسمت چپ پهنه مماسی از Γ به C است که توسط قطر OP برش خورده است. قسمت راست پهنه مماسی دقیقاً از همان نوعی است که در پهنه مماسی شکل ۳۱ ظاهر شد، و مساحت آن برابر مساحت مثلث قائم‌الزاویه با وتر OP منهای مساحت یک قطاع دایره‌ای در قرص Γ است.

۱۶ کاربرد فیزیک

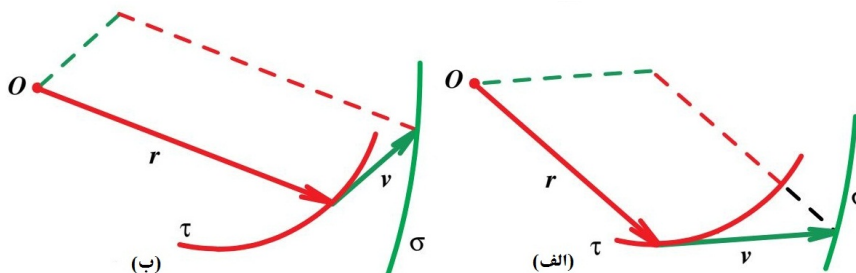
یکی از قانون‌های بنیادی فیزیک حاکمی است که تکانه زاویه‌ای در یک میدان نیروی مرکزی پایسته می‌ماند. ما این قانون را به زبان ریاضی بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که نتیجه‌ای از قضیه مماس روونده مامیکن است.

پیش‌نیازهایی از فیزیک

فرض کنید مکان یک ذره متحرک با بردار شعاعی $\mathbf{r}$ که ابتدایش نقطه ثابت O است بیان گردد.

$\mathbf{r}$ را تابعی برداری مقدار از زمان t در نظر می‌گیریم. انتهای آزاد $\mathbf{r}$ امتداد مسیری را می‌پیماید که حرکت روی آن واقع می‌شود و طول $|\mathbf{r}|$ بیانگر فاصله ذره از O در زمان t است. سرعت ذره $\mathbf{v}$ با رابطه $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ، مشتق زمانی $\mathbf{r}$ ، و بردار شتاب $\mathbf{a}$ با رابطه $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ ، مشتق زمانی $\mathbf{v}$ ، تعریف می‌شوند. بردار سرعت همواره مماس بر مسیر حرکت است و اشاره به جهت حرکت دارد. طول آن $|\mathbf{v}|$ تندی ذره را مشخص می‌کند. مسیری را که توسط انتهای آزاد $\mathbf{r}$ پیموده می‌شود خم تماس می‌خوانیم و آن را با τ نمایش می‌دهیم. اگر جرم ذره m باشد، بردار $m\mathbf{v}$ تکانه ذره خوانده می‌شود، و به ضرب خارجی $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ تکانه زاویه‌ای آن گفته می‌شود.

ضرب خارجی $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ برای دو بردار $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ به صفحه $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ عمود است و طول آن برابر $|\mathbf{r}||\mathbf{v}| \sin \theta$ ضرب در سینوس زاویه بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ است. در حالت خاص، ضرب خارجی دو بردار موازی 0° است. هنگامی که دو بردار $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ همانند شکل ۳۶ باشند، دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند، که البته، ممکن است اندازه و موقعیت آن در اثنای حرکت تغییر کنند. انتهای آزاد $\mathbf{v}$ خمی



شکل ۳۶. متوازی‌الاضلاع تشکیل شده با بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ در دو زمان مختلف

را می‌پیماید که آن را با σ نشان داده‌ایم. در زمان t متوازی‌الاضلاع رئوس متقابلی در O و روی خم σ دارد، و مساحت آن $A(t)$ با برابری زیر داده می‌شود

$$A(t) = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|. \quad (1.16)$$

کمیت اسکالر $mA(t)$ طول بردار تکانه زاویه‌ای در زمان t است.

حرکت با شتاب شعاعی

اگر بردار شتاب $\mathbf{a}$ همواره موازی با بردار شعاعی $\mathbf{r}$ باشد، گفته می‌شود حرکت دارای شتاب شعاعی است. اگر حرکت در اثر نیروی $\mathbf{F}$ بر ذره ایجاد شود، قانون دوم نیوتن برای حرکت بیان می‌دارد که

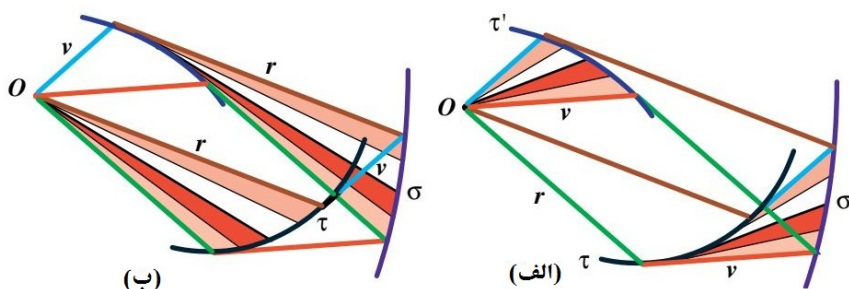
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ، بنابراین بردار شتاب همواره موازی بردار نیرو است. میدان نیروی مرکزی میدانی است که $\mathbf{F}$ همواره با بردار مکان موازی است و از این رو شتاب شعاعی ایجاد می‌کند. اثبات اینکه در یک میدان نیروی مرکزی، مساحت متوازی‌الاضلاع $A(t)$ در رابطه (۱.۱۶) ثابت (مستقل از t) است آسان می‌باشد. دلیلش این است که مشتق بردار حاصل ضرب خارجی برابر ۰ می‌شود. درحقیقت،

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0.$$

زیرا هریک از حاصل ضرب‌های خارجی $\mathbf{r} \times \mathbf{a}$ و $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ برای بردارهای موازی صفرند. بنابراین، $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ برداری ثابت و طول آن $A(t)$ نیز ثابت است.

استنتاج قانون پایستگی تکانه زاویه‌ای در میدان نیروی مرکزی به طریق هندسی

شکل ۳۷ (الف) پهنه مماسی را که توسط بردار سرعت $\mathbf{v}$ پیموده می‌شود و همچنین خوشه مماسی آن را، که با انتقال هر نقطه تماس به O به دست می‌آید، نشان می‌دهد.



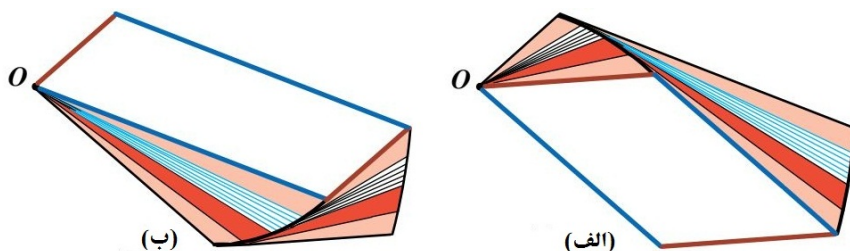
شکل ۳۷. (الف) پهنه مماسی بردار سرعت مساوی با خوشه مماسی‌اش دارد. (ب) برای میدان نیروی مرکزی، پهنه مماسی خطوط مماس به شتاب‌نگار، که توسط منحنی σ برش می‌خورند، مساحتی یکسان با خوشه مماسی‌اش، که توسط بردار شعاعی از O تا τ روییده می‌شود، دارد.

از قضیه مامیگن می‌دانیم که پهنه مماسی و خوشه مماسی مساحت‌هایی برابر دارند. انتهای آزاد بردار انتقال افتنه سرعت خمی را می‌پیماید که در شکل ۳۷ (الف) با τ' نشان داده شده است. همیلتون این خم را، که شتاب‌نگار نامیده است [۵]، برای استنباط قانون گرانش از این واقعیت که سیارات در مدارهای بیضوی به دور خورشید حرکت می‌کنند به کار برده است. همیلتون از مساحت خوشه مماسی هیچ استفاده‌ای نکرده است و فرصت استنباط قانون پایستگی تکانه زاویه‌ای در میدان

نیروی مرکزی از طریق یک استدلال هندسی ساده را از دست داده است، و ما در ادامه به این کار می‌پردازیم.

اکنون، مطابق با اثباتی که لانگ ویدرز با ما در میان گذاشته است [۶]، با دوبار استفاده از قضیه مماس روبنده مامیکن نشان خواهیم داد که $A(t)$ ثابت است. شکل ۳۷ (ب) پهنه‌های مماسی خطوط مماس بر شتاب‌نگار τ' را که توسط σ برش خورده‌اند نشان می‌دهد. از آنجا که شتاب شعاعی است، وقتی پاره‌خط‌های مماس بر τ' انتقال می‌یابند تا هر نقطه تماس به O انتقال یابد، خوشه مماسی متناظر ناحیه‌ای می‌شود که با بردار شعاعی از نقطه O به τ روبیده می‌شود، و این ناحیه اخیر دارای مساحتی برابر با پهنه مماسی از شتاب‌نگار به σ است.

از اینجا به آسانی می‌توان نشان داد که مساحت متوازی‌الاضلاع که با $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ تولید می‌شود در اثنای حرکت بدون تغییر باقی می‌ماند. نواحی سایه‌خورده در شکل ۳۷ را مانند شکل ۳۸ از نو مرتب می‌کنیم. مجموع مساحت‌های نواحی سایه‌خورده در شکل ۳۸ (الف) با مجموع مساحت‌های نواحی سایه‌خورده در شکل ۳۸ (ب) برابر است. از این نکته روشن است که متوازی‌الاضلاع‌ها در دو شکل ۳۸ (الف) و ۳۸ (ب) مساحت‌هایی برابر دارند.



شکل ۳۸. (الف) مساحت کل شکل برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاع به اضافه مجموع مساحت‌های دو ناحیه سایه‌خورده؛ (ب) مساحت همان شکل برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاع دیگر به اضافه همان مجموع مساحت‌های دو ناحیه سایه‌خورده، بنابراین دو این متوازی‌الاضلاع مساحت مساوی دارند.

نکات پایانی

بیشتر مطالب این مقاله اقتباسی از سخنرانی است که تام ام. آپوستل در ۴ اکتبر ۲۰۰۰ در همایشی ایراد کرد [۲] که به منظور بزرگداشت او در مؤسسه فناوری کالیفرنیا برگزار شد. استفاده از زیرمماس‌ها در روش مامیکن در [۳] و [۴] آمده است.

در این مقاله طیف رنگارنگی از موضوعاتی را دیدید که می‌توان با روش مامیکن بدان‌ها پرداخت.

برای دیدن شکل پویانمایی آن‌ها به تارنمای زیر مراجعه کنید:

<http://www.its.caltech.edu/mamikon/calculus.html>

پویانمایی معلوم می‌کند که چگونه پهنه مماسی ایجاد می‌شود و چطوری باید پاره‌خط‌های مماس را برای تشکیل خوشه‌های مماسی انتقال داد. همچنین پویانمایی نشان می‌دهد که بسیاری از خم‌های کلاسیک را می‌توان به روشی طبیعی توسط خواص هندسی و مکانیکی ذاتی آن‌ها ایجاد کرد. این نوشته را با نکته‌ای فلسفی درباره حساب دیفرانسیل و انتگرال پایان می‌دهیم. نیوتن و لایبنیتس، کاشفان حساب انتگرال، کار انجام شده توسط بسیاری از پیشگامان دیگر را سامان بخشیدند، و فرایندهای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را به هم مرتبط کردند. در روش مامیکن نیز ارتباطی بین مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری نهفته است، زیرا که این قضیه پاره‌خط‌های مماس متحرک را به مساحت نواحی روبوده‌شده مرتبط می‌کند.

مراجع

- [1] Apostol, T. M., *Calculus*, vol. 1, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1967.
- [2] Apostol, T. M., Mnatsakanian, M. A., Surprising geometric properties of exponential functions, *Math Horizons*, (1998), 27–29.
- [3] Apostol, T. M., Mnatsakanian, M. A., Subtangents—an aid to visual calculus, *Amer. Math. Monthly*, **109** (2002), 525–533.
- [4] Apostol, T. M., Mnatsakanian, M. A., Tangents and subtangents used to calculate area, *Amer. Math. Monthly*, **109** (2002), 900–909.
- [5] Hamilton, W. R., The hodograph, or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction, *Math. Proc. R. Ir. Acad.*, **3** (1847), 344–353.
- [6] Withers, L., Mamikon meets Kepler, email dated April 21, 2009.

میثم سلیمانی ملکان: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، گروه ریاضی

رایانامه: msmalekan@gmail.com

Mamikon's Sweeping Tangent Theorem*

T. M. Apostol, M. A. Mnatsakanian

Translated by M. Soleimani Malekan¹

Department of Mathematics, Shahid Rajaei Teacher Training University, Iran

Abstract. Many standard problems in calculus can be easily solved by an innovative visual approach that makes no use of formulas. The method is based on Mamikon's sweeping-tangent theorem, a geometrically intuitive result that is easily understood by very young students. In this paper, the method of sweeping tangents introduced and shown how it can be used to find (without the machinery of calculus) areas of many plane regions, including an oval ring, a parabolic segment, a hyperbolic segment, the region under a general power function, an exponential curve, a logarithmic curve, a tractrix, the region between two curves traced by the rear and front wheels of a bicycle, the region enclosed by a cardioid, and by each member of a family of limaçons. The treatment of the parabolic segment and the exponential use geometric properties of subtangents to these curves, which can also be used to draw tangent lines. An unexpected application of the method of sweeping tangents is to physics. In this application, conservation of angular momentum in a central force field is deduced as an elementary consequence of Mamikon's sweeping-tangent theorem.

Keywords: Mamikon's theorem, sweeping tangent, cluster tangent, area, limaçon, tractrix, integral

Article history: Received 8 October 2022; Accepted 28 December 2022

Article type: translation

*Apostol, T. M., Mnatsakanian, Mamikon A., *New Horizons in Geometry*, The Dolciani Mathematical Expositions, vol. 47, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2012, 1-30.

¹msmalekan@gmail.com