فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۲، شمارهٔ ۷۲ (بهار و تابستان ۱۴۰۲) صص. ۱۶۵ تا ۱۹۱

مفاهیم عدد و مقدار در دورهٔ رنسانس*

آنتونی ماله
ترجمهٔ هدی اویارحسین

چکیده. در سده‌های شانزدهم و هفدهم میلادی مفاهیم کلاسیک یونانیِ عدد (گسسته) و مقدار (پیوسته) که در ترجمه‌های لاتینی قرون وسطایی اصول اقلیدس محفوظ مانده بود دستخوش دگرگونی بزرگی شد که آن‌ها را به مقادیر پیوسته اما قابل اندازه‌گیری تبدیل کرد. این مقاله تغییراتی را که سه تحریر رنسانسی تأثیرگذار از اصول اقلیدس در مفاهیم کلاسیک عدد و مقدار ایجاد کرده‌اند بررسی می‌کند. این تحریرها شواهدی از بحث‌هایی دارند که منجر به مفاهیم و استدلال‌هایی در کتاب حساب سیمون استوین در ۱۵۸۵ میلادی شد، علاوه‌براین نقش جبر چرتکه و دیدگاه‌های رنسانسی در تاریخ ریاضیات را در پُر کردن شکاف بین اعداد گسسته و مقادیر پیوسته نشان می‌دهند.

۱ مقدمه

به‌رغم اهمیت مفاهیم عدد و مقدار[۱]، اطلاعات در مورد چگونگی تکامل آن‌ها از شکل‌های کلاسیک یونانی ــ که در ترجمه‌های قرون وسطایی اصول اقلیدس به‌خوبی حفظ شده‌اند ــ به مفهوم امروزی اعداد اندک است. در طول سده‌های شانزدهم و هفدهم میلادی اعداد و مقادیر دستخوش دگرگونی زیادی شدند؛ [۲، ص ۱۳۵–۱۴۳] و [۲۵]. همچنین همواره فرض بر این بوده است که این دگرگونی با اهمیت فزایندهٔ روش‌های جبری در ریاضیات سده‌های شانزدهم و هفدهم میلادی ارتباط نزدیک

عبارات و کلمات کلیدی: تاریخ حساب، جبر دوران رنسانس، اقلیدس، نیکّولو تارتالیا، کریستوفر کلاویوس، رگیومونتانوس، هنری بیلینگزلی، جان دی، سیمون استوین
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۸/۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۱۳

*Malet, A., Renaissance notions of number and magnitude, *Historia Math.*, **33** (2006), no. 1, 63-81.

[۱] number (عدد) و magnitude (قدر/مقدار /کمیت/اندازه/بزرگی) در متون عربی دورهٔ اسلامی با واژه‌های «کمّ منفصل» و «کمّ متّصل» بیان شده‌اند. در سراسر این ترجمه واژهٔ magnitude (و جمع آن magnitudes)، «مقدار» (مقادیر) و واژه‌های quantity و measure نیز به ترتیب «کمیت» و «اندازه» ترجمه شده است. ــم.

doi: 10.30504/mct.2023.1340.1934

دارد [۱۳]. هدف مقالهٔ حاضر ارائهٔ شواهدی از مسیرهای راه‌یابی درک عددی غیررسمی از مقدار پیوسته است که از کتاب‌های چرتکه[1] به تحریرهای معتبر سدهٔ شانزدهمی \اصول اقلیدس راه یافت. ابتدا و پیش از نقد گزارش معروف یاکوب کلاین[2] از تأثیر فرانسوا ویئت[3] بر تغییر مفهوم عدد و مقدار در سدهٔ شانزدهم، مفاهیم اساسی مورد توجه ما در این مقاله را معرفی خواهیم کرد؛ پس از معرفی مفاهیم کلاسیک عدد و مقدار، گزارش معروف یاکوب کلاین از تأثیر ویئت بر تغییر مفهوم عدد و مقدار در سدهٔ شانزدهم نقد خواهد شد و سپس مفاهیم عدد و مقدار، یادشده در سه تحریر تأثیرگذار رنسانسی \اصول اقلیدس، عرضه خواهد شد. این تغییرات ــ چنان‌که می‌نماید ــ راه را برای مفاهیم و استدلال‌هایی آماده کرد که سرانجام در کتاب حساب سیمون استوین در سال ۱۵۸۵ میلادی معرفی شد. چنان‌که خواهد آمد، شواهد استوار نشان از آن دارد که دیدگاه‌های انسان‌گرایانه دربارهٔ تاریخ ریاضیات نیز در پُر کردن شکاف بین اعداد گسسته و مقادیر پیوسته نقش داشته است.

۲ مفاهیم کلاسیک عدد و مقدار

روشن است که در \اصول اقلیدس هیچ معادلی برای مفهوم «طول» یک قطعه یا معیاری برای اندازهٔ اجسام هندسی وجود ندارد. مستطیلی که روی دو خطّ راست عمود بر هم ساخته شده نقشی غیرمستقیم و ابتدایی در ارتباط با مفهوم مدرن حاصل‌ضرب ایفا می‌کند اما مقادیر اقلیدسی را نمی‌توان ضرب یا تقسیم کرد. در مورد توان‌ها و ریشه‌ها نیز چنین باید گفت. این مفاهیم به این صورت برای مقادیر اقلیدسی وجود ندارند، گرچه ارتباطی با مفهوم تناسب پیوسته میان مقادیر دارند. از سوی دیگر، عدد اقلیدسی همیشه همان است که امروزه عدد صحیح مثبت یا «طبیعی» خوانده می‌شود. عملیات عددی مربوط به آن‌ها (برای نمونه درج واسطه‌های هندسی) برای اطمینان از قابل قبول بودن پاسخ‌ها، بسیار محدود شده بود. یعنی پاسخ‌ها اعداد صحیح مثبت بودند.[۴] تا آنجا که اطلاع داریم، نه‌تنها تفکیک دقیق و منسجم میان مفاهیم اقلیدسی از اعداد و مقادیر در ترجمه‌های لاتین قرون وسطی محفوظ مانده بود (نک. ادامهٔ مقاله)، بلکه این مفاهیم همچنان به‌طور منظم در مدارس اصلی اروپای غربی در نیمهٔ دوم سدهٔ پانزدهم تدریس می‌شد. بااین‌حال، در نیمهٔ دوم سدهٔ هفدهم، تمایز میان مفاهیم کلاسیک اعداد (طبیعی) و مقادیر هندسی پیوسته، تاحدّی چشم‌گیر از

[۴] [۲، ص ۱۲۰–۱۲۷] مبحثی دقیق و با جزئیات در مورد اختلاف بین معنی کلاسیک اعداد و مقادیر و همچنین در مورد تفاوت عملیات حسابی و ساختارهای هندسی در اصطلاحات اقلیدسی ارائه کرده است.

[1]abacus [2]Jacob Klein [3]François Viète

بین رفت، همچنان‌که خود مفاهیم نیز از میان رفتند.

پی بردن به چگونگی رخداد این تغییرات دشوار است بیشتر به این دلیل که این رخداد به طریقی بسیار غیرریاضی و کمابیش نامحسوس روی داده است. بی‌گمان در سده‌های شانزدهم و هفدهم، چند مبحث در مورد روابط میان حساب و هندسه وجود داشت که شماری از آن‌ها در مطالعهٔ کلاسیک جووانّی کراپولی[1] دربارهٔ مفهوم آموزهٔ فراگیر[2] بیان شده است [۶]، اما تا هنگام انتشار حساب سیمون استوین[3] در سال ۱۵۸۵، نظریه‌ای در مورد اعداد و مقادیر در تقابل مستقیم با مفاهیم کلاسیک یافت نشده است.

در ریاضیات دورهٔ اسلامی[۴]، مفاهیم کلاسیک عدد و مقدار آن‌جاکه مقادیر به‌طور طبیعی از طریق اندازه‌گیری‌های عددی آن‌ها به کار گرفته می‌شوند بسیار به هم نزدیک می‌شود. به‌طورخاص، در جبر دورهٔ اسلامی[۵] به کارگیری مفاهیم و عملیات حسابی برای مقدارهای هندسی بدیهی است. برای انجام این کار، به برخی اصول خاص نیاز است، مانند قوانینی برای انجام محاسبات به‌وسیلهٔ ریشه‌های عددی (یا اعداد «اصمّ») [۶]؛ بااین‌حال جبر دورهٔ اسلامی همهٔ الگوریتم‌های عددی لازم را دارد. به‌این‌ترتیب که در همان ابتدا برخی (نه همهٔ) موانع استفاده از معادلات در مسایل هندسی حذف شدند (همچنین رجوع کنید به [۲، ص ۱۳۵–۱۳۶، ۱۴]).

این تغییر اساسی که ابداعی شایسته اما بدون توضیحات نظری بود، در تحریرهای لاتین قرون وسطایی اصول چندان بازتاب نداشته است. پیداست که مترجمان و شارحان لاتینی سده‌های میانه بدون پی‌بردن به شماری از ظرایف اصول اقلیدس، ساختار، مفاهیم، و نتایج آن را، به‌جز در تعاریف نسبت و تناسب در مقالهٔ پنجم، صادقانه حفظ کردند [۲۰، ۲۲، ۲۳، ۲۴]. تغییر مفهومی چشم‌گیر در جبر اسلامی، عمدتاً از طریق ریاضیات کاربردی تدریس‌شده در مدارس چرتکه و توضیح داده‌شده در دست‌نوشته‌های چرتکه، که میراث آشکار جبر اسلامی بودند، به غرب لاتینی رسید.[۷] به روش‌هایی که هنوز به‌طور کامل شناخته نیست، آثار ریاضی نوشته‌شده توسط شایسته‌ترین معلمان چرتکه،

[۴] در متن اصلی مقاله برای میراث علمی تمدن اسلامی به‌پیروی از سنت کهن اروپایی، صفت Arabic به کار رفته است. طبیعی است که در ترجمهٔ فارسی برای رساندن درست مفهوم مدّ نظر باید از صفت اسلامی بهره برد. ــم. [۵] نک پانویس پیشین. ــم. [۶] اعداد گنگ، اما چون سخن از سنت دورهٔ اسلامی بود اصطلاح رایج در آن هنگام یعنی اصمّ (و نه گنگ) در متن آمد. همچنان‌که خود نویسنده نیز به جای واژهٔ مرسوم irationel از واژهٔ surd (آن هم در گیومه) بهره برده است. ــم. [۷] چنین می‌نماید که نویسنده واژهٔ abacus و ترکیبات مختلف آن را، دستکم در رابطه با ریاضیات دورهٔ اسلامی درست به کار نبرده باشد. اتفاقاً آثار حساب دورهٔ اسلامی که مروج حساب هندی بود، در سده‌های دوازدهم تا شانزدهم میلادی «الگوریسم» نامیده می‌شد و پیروان این دو مکتب سخت در تقابل با یکدیگر بودند (کرامتی، آلگوریسم، دانشنامهٔ ایران، مرکز دایرةالمعارف بزرگ اسلامی، ۱۳۹۵). ــم.

[1] Giovanni Crapulli [2] mathesis universalis [3] Simon Stevin

سنتی نوشتاری در اروپا ایجاد کردند که سرچشمهٔ آثار کاردانو[۱]، بومبلّی[۲]، استوین، و دیگران در سدهٔ شانزدهم بودند.

۳ گزارش کلاین از ویئت و تغییر مفهوم عدد

در جستاری کلاسیک و تأثیرگذار، یاکوب کلاین تعریف جدید فرانسوا ویئت از جبر به‌عنوان «فنّی تحلیلی» را عاملی حیاتی در دگرگونی مفهوم عدد[۳] انگاشته است [۱۷]. در دیدگاه کلاین، که متأثر از گرایش‌های نوکانتی است، ویئت وام‌دار «شیوهٔ مدرنِ مفهوم‌سازی» معمول دورهٔ رنسانس بود. ویئت از طریق تفسیری جدید در چشم‌انداز روشنفکرانهٔ «مدرن» رنسانس، توانست مفهوم صُوَر[۴] را که در آثار پاپوس[۵] و دیوفانتوس[۶] یافته بود، به مفهوم نمادین گونه‌ها[۷] تبدیل کند. بر این اساس، چنین مفهومی پیش‌نیاز درک نمادین کمیت‌ها است که در آن عدد[۸] و مقدار[۹] به درک عددی جدیدی از مقادیر تقلیل می‌یابند. تحلیل روشنگرانهٔ کلاین را از مفهوم کلاسیک عدد (که نخستین‌بار در سال‌های ۱۹۳۴–۱۹۳۶ به زبان آلمانی منتشر شد)، نمی‌توان نادیده انگاشت، اگرچه بیش از آنچه باید قدیمی تلقی شده است. امروزه درکی کاملاً متفاوت از رنسانس داریم. جزئیاتی بسیار بیشتر از بستر اجتماعی رشد ریاضیات مدرن اولیه در دست است. مهم‌تر از همه، آن تبیین تاریخی که مدعیِ وجود فضایی ایده‌آلیستی بود، که در آن فضا مفاهیم ریاضی مستقر می‌شوند و تکامل می‌یابند و بدون توجه به شرایط تاریخی خود را بر بازیگران تاریخی تحمیل می‌کنند، دیگر بی‌اعتبار شده است.

یکی از شگفتی‌های چشم‌گیر اثر کلاین، جایگاه قائل‌شده برای سیمون استوین (۱۵۴۸–۱۶۲۰) است. استوین ابتدا نقدی تند از مفاهیم کهن عددی منتشر کرد و سپس مفهومی نو از مقدار[۱۰] عرضه کرد که کاملاً عددی بود. درحالی‌که وام‌داری استوین به سنت کوسیستی[۱۱] روشن می‌نماید، منابع او در حساب (منتشرشده در ۱۵۸۵) چندان روشن نیست. امروزه او را یکی از شخصیت‌های اصلی جبر رنسانس، پیش از تبدیل جبر به ابزاری برای تحلیل توسط ویئت، می‌دانند. بااین‌حال، نظر کلاین، در مورد وابستگی مفاهیم عددی نوآورانهٔ استوین به درک نمادین ویئت از گونه‌ها[۱۲] عجیب است [۱۷، ص۱۸۶–۱۹۷]. این نظر به سبب مشکلات آشکار زمانی و ارتباطی (احتمال اندک آگاهی استوین از نوآوری‌های ویئت در اوایل دههٔ ۱۵۸۰) ناپذیرفتنی است. توجه شود که درک استوین از جبر هیچ پیشرفت نمادین و قابل مقایسه‌ای نسبت به ویئت، یا حتی با آثار رایج دههٔ

[1] Cardano [2] Bombelli [3] arithmos [4] eidos [5] Pappus [6] Diophantus [7] species [8] arithmos [9] megethos
[10] grandeur [11] cossist [12] species

۱۵۹۰ پس از ویئت نداشت؛ [۸، ص ۲۱–۳۵] و [۱۰، ۱۱، ۱۹].

مقدمهٔ درک مبتکرانهٔ استوین از مقدار عددی سه تحریر تأثیرگذار سدهٔ شانزدهمی از اصول اقلیدس است: تحریر ایتالیایی تارتالیا[1] (اولین چاپ به سال ۱۵۴۳، و دارای چاپ‌های متعدد پس از آن) تحریر انگلیسی بیلینگزلی[2] با مقدمهٔ معروف جان دی[3] بر آن (چاپ ۱۵۷۰) و تحریر لاتینی کلاویوس یسوعی (اولین چاپ در سال ۱۵۷۴، و دارای چاپ‌های متعدد پس از آن). تحریرهای سدهٔ شانزدهمی اصول شواهدی درهم اما ارزشمند ارائه می‌دهند. گرچه در آن‌ها مفاهیم کلاسیک اعداد حسابی گسسته و مقادیر پیوسته کاملاً از هم جدا فرض می‌شود، اما در ترکیب ویژگی‌های کلیدی سنت عملی و جبری کوتاهی صورت نمی‌گیرد. درواقع، در برخی از مقالات اصول، حتی تمایز میان اعداد و مقادیر روشن نیست. همهٔ آثار بررسی‌شده در این مقاله، درکی عددی از مقدار پیوسته دارند و در عملْ بیشتر نتایج هندسی را به چیزی که امروزه زبان «جبر هندسی» نامیده می‌شود «ترجمه کرده‌اند». مخصوصاً کلاویوس که از رگیومونتانوس[4] به‌عنوان مرجع یاد می‌کند و ردّپای چنین درکی از مقدار را به او منسوب می‌کند. این تحریرهای اصول، مقالاتی در تاریخ ریاضیات با هدف تبیین اشکالات بخش‌هایی از اصول در خود دارند. در نتیجه، این تاریخ و فلسفه به ریاضی‌دانان دورهٔ رنسانس کمک کرد تا دیدگاهی از ریاضیات ارائه دهند که در آن مقادیر باید به‌عنوان اعداد درک شوند.

۴ تارتالیا

در ستایش علوم ریاضی که مقدمهٔ اصول تارتالیا است، درک قوی افلاطونی از علم[5] و ریاضیات همراه با رویکرد فایده‌انگارانه نسبت به ریاضیات دیده می‌شود. کاربردهای ریاضیات از طراحی استحکامات و ماشین‌های جنگی تا ساخت پل و کلیسا را شامل می‌شود و تقریباً در هر علم و هنری از جمله حقوق، فلسفه، و کلام نقش دارد. در این جاست که نیکولاس کوزایی[6] به‌عنوان مرجعی معتبر وارد صحنه می‌شود. او اهمیت مابعدالطبیعی ریاضیات را ناشی از استفاده خداوند از هندسه (به‌معنای نتایج نشان‌دهندهٔ نسبت‌هایی خاص میان اجزای شکل‌ها) می‌داند: «خداوند که خود معیار

[5] مترجم در سراسر این مقاله واژهٔ knowledge را دانش، Wisdom را حکمت و science را علم ترجمه کرده است. برای معانی مختلف علم، دانش، حکمت و این‌گونه مفاهیم رجوع کنید به کتابی با عنوان Knowledge Triumphant: The Concept of Knowledge in Medieval Islam. نیز مطالعهٔ نقد ترجمهٔ این اثر به فارسی (کرامتی، میراث رزنتال به زبان فارسی و صنعت ترجمه، فصلنامه نقد کتاب کلام فلسفه عرفان، سال اول، شماره ۱ و ۲، بهار و تابستان ۱۳۹۳، ۱۲۹–۱۷۱) بسیار سودمند است.

[1] Tartaglia [2] Bilingsley [3] John Dee [4] Regiomontanus [6] Nicholas of Cusa

همه چیز است، در شکل دادن به اجزای انسان خود تابع هندسه بود.»[1] زمانی‌که ماهرترینِ معماران، بناهای عمومی و خصوصی را متناسب با بدن انسان شکل می‌دهند، دیگر این موضوع که بدن انسان «به‌وسیلهٔ بزرگ‌ترین معمار با توجه به مقادیر ساخته شده است» از استدلال بی‌نیاز است.

ریاضیات، و به‌ویژه هندسه، در مورد اشیای قابل اندازه‌گیری است که با ذهنِ «برهنه از مادّه» (منتزَع) سر و کار دارد. به گفتهٔ تارتالیا، اشیای ریاضی عموماً سودمندند زیرا ذهن از راه مشاهدهٔ بصری، اشکال واقعی را از درونِ اشکالِ قابلِ مشاهده می‌بیند. اشکال نمی‌توانند به‌درستی در ماده، به‌دلیل نقص آن، حضور داشته باشند، اما می‌توانند به ذهن بگویند که صورت‌ها «به خودی خود» چگونه هستند. ذهنْ آن‌ها را به شیوه‌ای انتزاعی، مستقیم، و ناب درک می‌کند: شیوه‌ای که می‌باید حقیقت را برساند. این درک افلاطونی و بی‌واسطه از شکل‌های ریاضی (خط، مثلث، هرم، و غیره) تارتالیا را مجاز می‌کند تا دوباره دعوی افلاطون دربارهٔ جایگاه مهم هندسه در فلسفه را به‌طور کلی تأیید کند [۳۲، گ ۲ پ]. جالب اینجاست که همچنین به نظر می‌رسد که این درک افلاطونی، این تصور تارتالیا را ثابت می‌کند که «کمیت» یا اندازهٔ اشکال ریاضی ضرورتاً به آن‌ها تعلق دارد و بنابراین مستقیم و بی‌درنگ توسط ذهن درک می‌شود. ماهیت «ذاتی» کمّی اشکال ریاضی از نظر تارتالیا در تغییراتی که او در تعاریف نقطه، خط، سطح، نسبت، و تناسب معرفی می‌کند و همچنین در تحریر مقالهٔ دوم، آشکارتر است.

به نظر تارتالیا، اَشکال ریاضی چیزی جز «صورت‌های کمیت‌های پیوستهٔ ثابت»[2] نیستند [۳۲، [۵] ر، ۶ ر]. اینکه اشکال هندسی در درجهٔ اول، کمیت‌اند پیامدهایی برای درک تارتالیا از مفهوم نقطه و برای تعریف او از خط راست و رویهٔ مسطح دارد. برای توضیح تفاوت منظور «ریاضی» از خط و «خط در طبیعت»، تارتالیا دو خط با طول قابل اندازه‌گیری یکسان، به اندازهٔ ۲ یارد[3] در نظر می‌گیرد و این دو خط را به‌صورت دو چوب اندازه‌گیری تجسم می‌کند و جنس آن دو چوب را از دو نوع مختلف تصور می‌کند. چوب‌ها برای ریاضی‌دان «برابر»ند درحالی‌که آن‌ها «در طبیعت» برابر نیستند [۳۲، گ ۶ پ]. بنابراین، اندازه‌گیری مقادیر، به آن‌ها ماهیت ریاضی بنیادینشان را می‌بخشد. اکنون جای تعجب نیست که تارتالیا خط راست را به‌عنوان کوتاه‌ترین مسیر («امتداد») بین دو نقطه تعریف کند، که با تعریف اقلیدسیِ خط که مستلزم آن است که «به‌گونه‌ای هموار بر

[1] تقدیرنامه از گابریئل تادینو [Gabrielle Tadino]، راهب بزرگ بارلتا، در تارتالیا [۳۲]. بنابر نظر دباس [Debus] این فکر در فلسفهٔ پنهانی آگریپا (۱۵۳۳) [Agrippa's De occulta philosophia] پیدا شده است و همچنین بعد از آن در پیش‌گفتار جان دی به‌عنوان اساسِ فنّ «انسان‌شناسی» مطرح شد. نک. [۷، ص ۱۲].

[2] forme della quantita continua immobile [3] passi

نقطه‌های خود قرار داشته باشد» متفاوت است. همین تفاوت در تعریف رویهٔ مسطح نیز به چشم می‌آید [۳۲، گ ۷ پ]. تارتالیا در تعریف [اقلیدسی][۱] نقطه دست نمی‌برد: «نقطه آن است که جزء ندارد». با این حال، تفسیرِ همراهِ آن نشان می‌دهد که دغدغهٔ اصلی او بحث در مورد این است که نقاط، نشانه‌های مرزیِ «متصوَّر ذهن»[۲] از چیزهایی «ساختهٔ فنّ»[۳] هستند. تارتالیا تأکید می‌کند که نقاط را نمی‌توان با هیچ چیزِ قابل اندازه‌گیری (مانند آوایی ساده یا صدا) مقایسه کرد. این نشان می‌دهد که نقاط، مقادیر غیرقابل تقسیم و پیوسته‌اند، که به گفتهٔ تارتالیا، امری متناقض است [۳۲، گ ۶ ر].

پای‌بندی تارتالیا به درک کمّی از مقادیر پیوسته در سراسر تفسیر او بر مقالهٔ دوم نیز خود را نشان می‌دهد. دیدگاه او در تعریف ۱ که این طور بیان می‌شود: «هر مستطیلی توسط دو خط، اطراف یک زاویهٔ قائم محصور شده است» آشکارا و بدون ابهام مستطیل‌ها را به حاصل/حاصل‌ضرب اضلاع آن‌ها تبدیل می‌کند:

«ذکر این نکته لازم است که چنین مستطیلی معمولاً با نام‌ها یا عبارات دیگری خوانده می‌شود.
به عنوان مثال، اگر ab و cd دو خط راست باشند، من می‌گویم که
بیان هریک از موارد زیر به یک معنی است،
چیزی که از وارد کردن ab بر cd به دست می‌آید،
مستطیل [حاصل] ازab و cd،
حاصل به دست آمده از وارد کردن ab بر cd،
ضرب ab در cd ، . . .
سطح مستطیلی محصور توسط ab و cd.» [۳۲، گ ۲۹ ر]

ناتوانی تارتالیا از تصور مقادیر بدون اندازه‌گیری، بیشتر با بیان ناپختهٔ او در تعریف «نسبت» (مقالهٔ پنجم، تعریف ۳) معلوم می‌شود: «نسبت، رابطه‌ای معین میان دو کمیت هم‌نوع است: یکی به دیگری؛ مهم نیست که آن‌ها چه قدر بزرگ باشند» (تأکیدها افزوده شده‌اند).[۴] کلمات مؤکد افزوده‌هایی

[۱] افزودهٔ مترجم

[4] La proportione e la conuenientia certa de due quantita de vno medesimo genere dell'una all'altra siano de quanta grandezzasi uoglia [۳۲]. دوباره با ترجمهٔ امانت‌دارانهٔ کلاویوس مقایسه کنید: Ratio est duarum magnitudinem eiusdem generis mutua quaedam secundum quantitatem habitudo [۴]. در ترجمهٔ هیث آمده است: A ratio is a sort of relation in respect of size between two magnitudes of the same kind [۱۵].

[2] con la mente imaginato [3] dall'arte

آشکار و بی‌فایده اما از لحاظی بسیار با اهمیت‌اند زیرا تارتالیا اولین شارح دورهٔ رنسانس است که خوانش نادرست کامپانوس[1] از تعریف دشوار تناسب و تساوی نسبت را تصحیح کرد. در واقع، اولین تحریر تارتالیا از \اصول، تفسیری درست از تعریف ۵ اقلیدس (تعریف ۷ در تحریر تارتالیا) از مقالهٔ پنجم ارائه می‌کند [۹، ۲۸]. تفسیر تارتالیا از تعریف ۳ نشان می‌دهد که نسبت‌ها فقط می‌توانند در میان چیزهای کمیت‌پذیر وجود داشته باشند: «[چیزهایی] ماهیت و طبیعت نسبت‌پذیر دارند که کمیت‌پذیر باشند»[2] [۳۲، ۵۹ پ، ۶۰ ر]. بنابراین، او نیازی به ذکر این نکته ندارد که مقایسه باید«با توجه به کمیت» یا «اندازه» انجام شود.

تارتالیا بر آن بود که هیچ روایت شایان اعتمادی از اصول ریاضیات ــ آن‌چنان‌که اقلیدس خود فراهم آورده بود ــ در دسترس نیست. او ریاضیات (در زمان افلاطون و اقلیدس) را «شالودهٔ تمام فلسفه و حکمت» می‌انگاشت. به نظر او، درواقع، عنوان اثر اقلیدس به همین نقش اشاره دارد [۳۲، گ ۲ پ]. به نظر تارتالیا \اصول در ابتدا با «بالاترین و تحسین‌برانگیزترین نظم قابل‌تصور» سازماندهی و برای مدت طولانی حفظ شده بود، بااین‌حال، «متجدّدین» آن را «نه تنها فاسد، که نابود کردند»، تا جایی که حساب و هندسه «تقریباً از دست رفته‌اند» و دو ترجمهٔ در دسترس، کار اقلیدس را «بی‌نظم» و «حقیر» کرده‌اند.[۳]

تارتالیا به دلایل چنین انحطاطی چندان نمی‌پردازد، جز آنکه بر پیامدهای متعددِ موانعِ زبانی میان متجدّدین و قدما تأکید می‌کند [۳۲، گ ۳ ر]. بنابراین به‌طور ضمنی می‌توان دریافت که تارتالیا در تحریر \اصول نمی‌کوشدتا به شیوهٔ قدما وفادار باشد. او تنها می‌کوشد بر پایهٔ دانسته‌ها سنت متنی موروثی را به بهترین شکل ممکن دریابد. توجه داشته باشید که با فرض اینکه متن \اصول در بهترین حالت تقریباً همهٔ دانش ریاضی دانش‌آموختگان باستانی بود، تارتالیا می‌توانست آزادانه تحریرهای اصلی کار اقلیدس را که در دسترس است، تفسیر و حتی اصلاح کند. ستایش او از علوم ریاضی که مملو از ارجاعات تاریخی است، شامل فهرست بلندبالایی از ریاضی‌دانان گذشته است که با نام برجسته هرمس تریسمگیستوس[4]، «حکیم و کاهن و فرمانروای مصر»[5] آغاز می‌شود و در آن فقط نام دیوفانتوس از قلم افتاده است. همان‌طورکه خواهیم دید تارتالیا تنها کسی نبود که تاریخ را در تفسیری تازه از متن اقلیدس به کار گرفت.

---

[۳] دیدگاه تارتالیا در مورد انحرافات \اصولِ موجود، در [۲۷، ص ۱۵۲] مورد توجه قرار گرفته است.

[1] Campanus [2] [things that] participano la natura & la proprieta della quantita [4] Hermes Trismegistus
[5] philosopho, sacerdote, & Re d'Egitto

۵ کلاویوس (و همچنین رگیومونتانوس)

تحریر لاتین اصول کلاویوس نیز ــ که نخستین‌بار در سال ۱۵۷۴ منتشر شد ــ حاوی منابع تاریخی بسیار است، ازجمله فهرستی طولانی‌تر از ریاضی‌دانان پیشین[۱] (هرمس و دیوفانتوس در آن نیامده‌اند). کلاویوس به پیروی از کومّاندینو[۲]، که با قدرشناسی از او یاد می‌کند، شواهدی تاریخی را بررسی می‌کند که نشان می‌دهد اقلیدسِ ریاضی‌دان و اقلیدسِ فیلسوف افلاطونی اهل مگارا دو شخص متفاوت‌اند که در زمان و مکان متفاوتی زندگی می‌کردند. کلاویوس نیز با تأکید بر این مطلب که اصول بر سنت متنیِ ضعیفی استوار است خلاقانه به شرح مفاهیم بنیادین اصول و تبیین برهان‌های آن می‌پردازد [۴، ص ۱۰]. درواقع، کلاویوس تغییراتی را که در درک مقادیر و اعداد حسابی ایجاد می‌کند، کامل‌تر از تارتالیا توضیح می‌دهد و صریح‌تر از او تکنیک‌های جبری را بر مفاهیم عددی جدید بنا می‌کند. یکی دیگر از وجوهی که آشکارا میان تارتالیا و کلاویوس تداوم یافته بن‌مایهٔ افلاطونی است. درواقع، ستایش مبالغه‌آمیز و مصرّانه از افلاطون و فلسفهٔ او در اصول کلاویوس بیشتر از تارتالیا است [۴، ص ۶]. با آنکه کلاویوس ریاضیات را به دلیل کاربردهای عملی آن می‌ستاید، بیش از همه بر کاربردهای آموزشی و شأن فلسفی ناشی از «جایگاه ریاضیات میان «متافیزیک» و «فلسفهٔ طبیعی»[۳] در سلسله مراتب دانش تأکید می‌کند [۴، ص ۵–۶].

درک عددی یا کمّی جدید تارتالیا از مقادیر، تغییرات عمده‌ای در مفاهیم اولیه و در نتایج و برهان‌های مقاله‌های حسابی هفتم، هشتم، و نهم اصول به همراه نداشت. بااین‌حال، تحریر کلاویوس در تعاریف آغاز مقالهٔ هفتم، شامل افزوده‌هایی شگرف است و هدف همهٔ آن‌ها معرفی نظریهٔ عملیات روی کسرها (اعداد گویای مثبت امروزی) است که در کلام کلاویوس به این شکل است: «اعداد کسری و اعداد صحیح همراه کسر». تفسیر طولانی کلاویوس از معنای «ضرب» یک عدد در عدد دیگر، شامل تعریف «تقسیم» اعداد نیز می‌شود و سپس همهٔ عملیات بین اعداد حسابی را به عملیات بین کسرها تعمیم می‌دهد [۴، ص ۳۰۸–۳۰۹، ۳۱۱، ۳۱۲]. این کار با اسلوب ویژه‌ای در سراسر

[۱] فهرست کلاویوس با فیثاغورس [Pythagoras] آغاز می‌شود و شامل اسامی زیر است: آناکساگوراس[Anaxagoras]، بقراط [Hypocrates]، افلاطون [Plato]، اُئنوپیدِس [Oenopides]، زِنودوروس [Zenodorus]، بریتو [Brito]، آنتیفو [Antipho]، تئودوروس [Theodorus]، تیتِتوس [Theetetus]، آریستارخوس [Aristarchus]، اِراتوستِن [Eratosthenes]، آرکیتاس [Architas]، اقلیدس [Euclid]، سِرِنوس [Serenus]، ایپسیکِلِس [Hypsicles]، آرخیمِدِس [Archimedes]، آپولونیوس [Apollonius]، تئودوسیوس [Theodosius]، میلِئوس [Mileus]، منلائوس(مانالاوس) [Menelaus]، تئون(ثاون) [Theon]، بطلمیوس [Ptolemy]، ائوتوکیوس(اطوقیوس) [Eutocius]، پاپوس [Pappus]، پرکْلس(برقلس) [Proclus] [۴، ص ۴–۵]. برای تبیین کلاویوس در مورد هویت اقلیدس نک. ص ۶–۷ در همان اثر، و برای آگاهی از دیدگاه کومّاندینو نک. [۲۷، ص ۲۰۶].

[2] Commandino [3] scientia naturalis

تفسیر او بر مقاله‌های حسابی \اصول انجام می‌شود. علاوه‌براین، در پایان این مقالات، کلاویوس رساله‌ای کوچک پیوست کرده است که روشمند و روشنگر به عملیات روی اعداد کسری می‌پردازد: «نمایش اجزاء یا اعداد کسری»[۱] [۴، ص ۳۸۱-۳۹۴]. به بیان یاکوب کلاین، کلاویوس آشکارا مبانی نظری «حساب عملی»[۲] را در مقاله‌های حساب اقلیدس گنجانده است.

معروف است که کلاویوس درکی مبتنی‌بر حرکت از خم‌هایی ارائه می‌دهد که در آن خطوط با حرکت ثابت یا جریان (شار)[۳] یک نقطه «رسم» می‌شوند [۴، ص ۱۳،۱۴]. کلاویوس ادعا نمی‌کند که درک جدیدی از خم‌ها ارائه می‌کند، که البته چهار سال پیش از آن (نه به‌عنوان یک نوآوری) در تحریر انگلیسی هنری بیلینگزلی از \اصول آمده بود (نک. ادامه). برعکس، کلاویوس آن را به‌عنوان توصیفی از خطوط ذکر می‌کند که معمولاً «ریاضی‌دانان» برای توضیح خط ریاضی به فرد عادی استفاده می‌کنند [۴، ص ۱۳]. کلاویوس این رویکرد مبتنی‌بر حرکت را به مفهوم متوازی‌الاضلاع تعمیم می‌دهد. او متوازی‌الاضلاع را به‌عنوان حاصل «حرکت وهمی یکی از ضلع‌های آن بر ضلع دیگر» معرفی می‌کند. به گفتهٔ کلاویوس، این بهترین راه برای درک منظور اقلیدس در تعریف اول از مقالهٔ دوم است (متوازی‌الاضلاعی مستطیل گفته می‌شود که دو خط راست شامل زاویهٔ قائمه داشته باشد [۴، ص ۸۲]). بنابراین، این روشِ فیزیکی تجسمِ تولید اشکال با استفاده از مفهوم مستطیل به «ترکیب» یا «عملیات» دو پاره‌خط راست معنا می‌دهد.

کلاویوس مقادیر هندسی را نیز با توجه به درک عددی که قبلاً تارتالیا پیدا کرده بود تغییر شکل می‌دهد. به‌عبارت‌دیگر، نه‌تنها کلاویوس فرض می‌کند که خطوط مستقیم و اجسام هندسی دارای اندازه‌های عددی هستند، بلکه مُجاز است که با اجسام هندسی با رویکرد حسابی رفتار شود، به‌عنوان مثال، مُجاز است که مستطیل‌ها را «برابر» و یا «معادل» حاصل‌ضرب اضلاعش بدانیم. کلاویوس وقتی که با اعداد خالص (در مقاله‌های ۵ تا ۹) و خط‌های راست (مقالهٔ دوم) سروکار دارد، بر هم‌ارزی ساختارهای موازی و هم‌ارزی نتایج به دست آمده از عملیات روی اعداد و نتایج «عملیات»روی مقادیر تأکید می‌کند [۴، ص ۳۶۷-۳۷۰]. او در مورد «قرابت عمیق»[۴] میان شکال و اعداد با اشاره به ماهیت تبدیل‌پذیر آن‌ها و برابری مفاهیمی مانند ضرب اعداد و ساختن مستطیل از خطوط صحبت می‌کند [۴، ص ۸۳]. او همچنین با معانی فعل duco (به معنای معمولی «وارد کردن»)

---

[۱] جمع جزء که در آثار ریاضی دورهٔ اسلامی همان جزء عدد یا کسر است. در این آثار دقیقه (کسر شصتگانی) نیز گاه «جزء» خوانده می‌شد. ــم.

[2] logistics [3] fluxum [4] magnam affinitatem

و برداشت مبتنی‌بر حرکت در ساخت این اشکال اشاره می‌کند. حاصل‌ضرب اعداد را می‌توان با عبارت «از وارد کردن[1] یک عدد در عدد دیگر به وجود می‌آید» بیان کرد. با وجود این، کلاویوس تأکید می‌کند که می‌توان گفت که مستطیل‌ها نیز از وارد کردن یک ضلع بر ضلع دیگر ایجاد می‌شوند.[2] شایان ذکر است که گرگوئار اهل سن ونسان[3]، شاگرد یسوعی کلاویوس، در دهه‌های نخست سدهٔ هفدهم، تکنیک قدرتمند مربع و مکعب‌سازی‌ای به نام «وارد کردن یک سطح بر سطح دیگر»[4] ابداع کرده بود. این تکنیک بر پایهٔ این مفهوم بود که اشکال یا از خط تولید می‌شوند یا از اشکالی که بر اساس برخی قوانین مشخص در امتداد یک خط یا محور تغییر می‌کنند [۳۳، ص ۳۱۶].[5] شایسته است سرانجام تأکید شود که کلاویوس مدعی است که درک عددی مستطیل‌هایی که او از آن دفاع می‌کند قبلاً به‌خوبی توسط حساب‌دانان و هندسه‌دانان شناخته شده است، و توسط رگیومونتانوس در مقالهٔ اول «دربارهٔ مثلث‌ها»[6] نشان داده شده است» [۴، ص ۸۳].

نوزده قضیهٔ اول مقالهٔ اول دربارهٔ مثلث‌های رگیومونتانوس فقط شامل نتایج ساده می‌شوند. همهٔ آن‌ها، به‌اصطلاح، نتایج مقاله‌های حسابی ۷ تا ۹ اقلیدس را با نتایج مقاله‌های ۲ و ۶ «ترکیب می‌کنند»، بنابراین کاربرد نتایج عددی را برای پیکربندی‌های هندسی که مقادیر آن‌ها به‌صورت عددی شناخته شده است، توجیه می‌کنند (نگاه کنید به [۲، ص ۱۳۶–۱۳۸]). از جمله قضیهٔ ۱۶ که کلاویوس برای بیان درستی تفسیر عددی خود از مقالهٔ دوم اصول ذکر کرده است. قضیهٔ ۱۶ رگیومونتانوس به شکلی پیچیده، فقط بیان می‌کند که یک مستطیلِ محاطِ میان دو خط به‌وسیلهٔ حاصل‌ضرب عددی اضلاع آن «معلوم»[7] می‌شود. شایان تأکید آنکه دربارهٔ مثلث‌های رگیومونتانوس غریب‌ترین آمیزهٔ مفاهیم قدیم و جدید حسابی و هندسی است. در تعاریف ابتدایی آن، همهٔ مقادیر یا اندازه‌گیری می‌شوند یا طول‌های قابل اندازه‌گیری‌اند. به‌عبارت‌دیگر، همهٔ مقادیر «کمیت»اند، و کمیت‌ها تنها زمانی معلوم‌اند که «توسط یک اندازهٔ معلوم مطابق عددی معلوم اندازه‌گیری شوند.»[8] یکی از اصول موضوعهٔ[9] رگیومونتانوس این است که «کمیت‌های مساوی آن‌هایی هستند که یکسان اندازه گرفته شوند»[10] [۲۶، ص ۸]. از سوی دیگر، به نظر می‌رسد که اعداد رگیومونتانوس فقط

---

[5] بحث رگیومونتانوس پیچیده است زیرا او نیاز دارد که واحدهای سازندهٔ مربع را از واحدهای سازندهٔ طول اضلاعش بسازد نک. [۲۶، ص ۱۷–۱۸]. [7] مفهوم «معلوم=شناخته‌شده» برای رگیومونتانوس در ادامهٔ همین بند آمده است و با درک امروزی ما از این واژه متفاوت است. –م.

[1] ex ductu [2] Vt nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum unius in alteram [3] Grégoire de Saint-Vincent [4] ductus plani in planum [6] De triangulis [8] Cognita uocabitur quantitas, quam mensura famosa, aut pro libito sumpta secundum numerum metiturnotum [9] axioms [10] communes animi conceptiones

صورت قدیم اعداد حسابی (مجموعه‌ای از واحدهای صحیح گسسته) باشند، زیرا فرض بر این است که هر عدد زمانی معلوم است که «عقل بتواند واحدهای درون آن را تمیز دهد» [۲۶، ص ۷]. بنابراین به نظر می‌رسد که «جهان» رگیومونتانوس از اندازه‌های گویای[۱] پیشا-ائودوکسوسی[۲] تشکیل شده است. این تصور با تعاریف او از نسبت و تناسب تقویت می‌شود، زیرا تساوی نسبت از طریق تساوی «ابعاد»[۳] آن‌ها و با این اصل که هر نسبت را می‌توان با اعداد بیان کرد تعریف می‌شود.[۴]

بااین‌حال، وقتی از تعاریف ابتدایی بگذریم، همه چیز پیچیده‌تر می‌شود. به‌عنوان مثال، قضیهٔ ۲ را در نظر بگیرید، که در آن رگیومونتانوس اثبات می‌کند که «ضلع یک مربع با مساحت معلوم، مجهول نیست.» قضیه به این مطلب منتهی می‌شود که اگر عدد اندازهٔ مربع، L، معلوم باشد، ضلع آن نیز مشخص است. اگر رگیومونتانوس برای چنین نتیجه‌گیری بی‌اهمیتی به قضیه‌ای نیاز دارد، به این دلیل است که او مجاز نیست آنچه را که دربارهٔ اعداد حسابی می‌داند، برای مربع‌ها اعمال کند. بنابراین، اولاً با فرض اینکه عدد L یک مربع کامل است، او از طریق قضیهٔ اول مقالهٔ ششم اصول (نسبت مثلث‌ها و متوازی‌الاضلاع‌های هم‌ارتفاع [به یکدیگر] همچون نسبت قاعده‌های آن‌هاست به یکدیگر) استدلال می‌کند که جذر L، اندازهٔ ضلع مربع است. بخش جالب اثبات آنجاست که L یک مربع کامل نباشد. استدلال مانند قبل است، با این تفاوت که رگیومونتانوس در اینجا، پس از تأملی اخلاقی در حدود دانش بشری (در بسیاری از مسایل ما نمی‌توانیم تمام حقیقت را به دست آوریم، بلکه فقط صورتی تقریبی از آن را می‌یابیم)، برداشت خود از «کمیت شناخته‌شده» را دوباره تعریف می‌کند؛ این‌بار با مجاز دانستن جایگزینی مقادیر تقریبی برای چنین اعدادی که نمی‌توان آن‌ها را به‌طور دقیق[۵] یافت. رگیومونتانوس برای رفع هرگونه ابهامی، که شاید خواننده از چنین ملاحظاتی احساس کند، دوباره یک درس اخلاقی ارائه می‌دهد: «بهتر است چیزی نزدیک به حقیقت بدانیم تا اینکه حقیقت را کاملاً نادیده بگیریم، زیرا فقط رسیدن به هدف تحسین‌برانگیز نیست بلکه نزدیک‌شدن به آن نیز ستودنی[۶] است» [۲۶، ص ۹]. همهٔ این‌ها به رگیومونتانوس کمک

---

[۲] Eudox؛ ائودوکسوس یکی از پنج ریاضی‌دان مشهور یونان باستان

[۴] Proportiones aequales sunt, quibus una communis est denominatio همان‌طورکه مشهور است دیمانسیون (به معنی رایج در قرون وسطی) یک نسبت مفهومی بوده است که در ریاضیات دورهٔ میانه محبوب بوده است و به سنت اصول اقلیدس تعلق ندارد. دیمانسیون نامی بود که بر طبق ساخت استادانهٔ دسته‌ای از قوانین به نسبت بین اعداد حسابی داده می‌شد. به عنوان مثال dupla و subdupla دیمانسیون‌های نسبت ۸ به ۴ و ۴ به ۸ بود. sesquitertia دیمانسیون نسبت ۴ به ۳ بود و الی‌آخر، نک. [۱۸، ۲۰، ۲۲، ۲۴]. با تعریف کردن کیفیت نسبت‌ها از طریق دیمانسیون، رگیومونتانوس تمام نسبت‌هایی که نمی‌توان به وسیله نسبت بین دو عدد حسابی در نظر گرفت را مستثنی ساخت. درواقع، این دیدگاه به‌گونه‌ای مبهم به یک اصل مبدل شده است: «هر نسبت داده شده‌ای با اعداد بیان می‌شود»: Omnem proportionem datam in numeris reperiri [۲۶، ص ۸].

[1] rational measures [3] denominations [5] praecise [6] virtuti debitur

می‌کند تا چنین استدلال کند که وقتی اندازهٔ مربع، L، یک عدد حسابی یا یک عدد کسری است که مربع کامل نیست (کسرها در اینجا برای اولین‌بار ظاهر می‌شوند)، اگر به جای L «نزدیک‌ترین» کسر یا عدد را که مربع کامل است بگیریم و سپس مانند قبل عمل کنیم، آنگاه قضیه صادق خواهد بود [۲۶، ص ۹]. توجه داشته باشید که با پای‌بندی به درک عددی مقادیر، و بدیهی دانستن اینکه عملیات عددی به مقادیر پیوسته تسرّی می‌یابد، رگیومونتانوس به جایگزینی تقریب‌های گویا[1] برای آنچه که امروزه اعداد حقیقی می‌نامیم، هدایت می‌شود. البته اعداد حقیقی هنوز وجود نداشتند، اما متن رگیومونتانوس نشان می‌دهد که هر ریاضی‌دان ماهری قبلاً حالت‌های خاص تمام طول‌های کمی یا عددی‌شدهٔ ممکن را در نظر می‌گرفته و درصورت نیاز با استفاده از تقریب‌های کسری به آن‌ها می‌پرداخته است.

اشاره کلاویوس به رگیومونتانوس به عنوان مرجع در این موضوع به معنای تأیید متقابل برای هر دو نویسنده بود. به‌بیان‌دیگر، متن بسیار تأثیرگذار رگیومونتانوس که در اوایل دههٔ ۱۴۶۰ نوشته شد و اولین‌بار در سال ۱۵۳۳ و سپس بارها در سدهٔ شانزدهم منتشر شد، منبعی مناسب برای ارجاع در چنین موضوعاتی بود. رگیومونتانوس نه‌تنها در نجوم، علمی ترکیبی که در آن خطوط هندسی و زوایای آن می‌باید به صورت عددی قابل استفاده بشوند، برجسته بود، بلکه همچنین برجسته‌ترین نمایندهٔ تولد دوباره و نوسازی تفکر ریاضی در غرب بود. بنابراین کلاویوس از رویه‌ای پذیرفته‌شده به قدمت حداقل صد سال استفاده می‌کرد. ازسوی‌دیگر، کلاویوس، که خود ریاضی‌دانی دانشمند و بسیار توانمند بود، روشی عملی را فرض و تأیید می‌کرد که در آن ریاضی‌دانان مشکل مقادیر هندسی را به صورت عددی حل می‌کردند، مشکلی که هنوز راه حل کامل و رضایت بخشی نداشت.

کلاویوس در پاراگراف‌های ابتدایی تفسیر خود بر مقالهٔ دوم نه‌تنها از برخی از مشکلات نظری که ریاضی‌دانان دورهٔ رنسانس با آن مواجه بودند آگاه است، بلکه پیشنهاد می‌دهد که مقالهٔ دوم می‌تواند برخی از آن‌ها را حل کند. به گفتهٔ او، نتایج این مقاله هم در هندسه و هم در «امور عملی انسان» مفید است و مهم‌ترین فایدهٔ آن این است که «قواعد شایستهٔ جبر» را اثبات می‌کند. جبر در اینجا به‌عنوان یکی از ممتازترین مخلوقات ذهن انسان تمجید می‌شود که می‌تواند مسائل دشوار را حل کند و توانایی‌های طبیعی انسان را تا حد زیادی تقویت کند [۴، ص ۸۳]. کلاویوس همچنین تأکید می‌کند که برخی از گزاره‌های همین مقاله، قواعد جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم اعداد جذری را مستدل می‌کند که «به‌هیچ‌وجه نمی‌توان آن‌ها را توضیح داد»، «حتی با قدرت الهی[2] نمی‌توان [چنین اعدادی

---
[1] rational approximations [2] potentiam

را][۱] به‌صورت عدد بیان کرد، زیرا چنین چیزی دلالت بر تناقض دارد» [۴، ص ۸۳]. بنابراین، مقالهٔ دوم به نظر کلاویوس نمونهٔ بارز جبر هندسی است. نویسندگانی که در ادامه بررسی می‌شوند، همگی کمابیش هم‌روزگار کلاویوس بودند و درک بسیار مشابهی از رابطهٔ بین جبر و مقالهٔ دوم و البته درکی کاملاً عددی از مقادیر پیوسته داشتند.

۶ بیلینگزلی و دی

تحریر انگلیسی تأثیرگذار اصول [۱۵۷۰] توسط سِر هنری بیلینگزلی، که جادوگر بدنام، جان دی بر آن مقدمه نوشته است، حاوی ترکیبی بسیار مفصل از انگیزه‌های اصلی شکل‌دهنده به دو تحریر پیشین است و ازاین‌رو به‌شکلی درخشان با سودمندی عملی، اهمیت فلسفی، و ارزش دینی و اخلاقی پیوند دارد. در چنین ترکیب پیچیده‌ای، ما شواهد روشنی از رابطهٔ مبهم میان مفاهیم حسابی و هندسی می‌یابیم و تنش‌هایی را که این تحریر در ساختار قیاسی اصول ایجاد می‌کرد می‌فهمیم.

عموماً بر این نکته تأکید شده است که مقدمهٔ دی دیدگاهی معمول از چگونگی درک ریاضیات از دیدگاه نوافلاطونی و هرمسی ارائه می‌دهد [۵، ۷، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۳۴].[۲] به گفتهٔ دی، اشیای ریاضی از ماهیتی «میانه» بین اشیای صرفاً معقول[۳] و روحانی[۴] (غیرمادی، ساده، فسادناپذیر، صرفاً قابل درک توسط ذهن، جایی که «علم» و یقین ممکن است). و اشیای محسوس (با ویژگی‌های متضاد [معقولات][۵] مُدرکِ حواس، جایی‌که احتمال و حدس حاکم است) برخوردارند. بنابراین، آن‌ها نه به اندازهٔ موارد پیشینی[۶] مطلق و عالی‌اند و نه به اندازهٔ چیزهای «طبیعی» خام و فسادپذیر [۷، [۲]]. (به شباهت میان این دیدگاه‌ها و دیدگاه‌های کلاویوس در مورد ماهیت بینابینی ریاضیات میان متافیزیک و «علم طبیعی» توجه کنید [۴، ص ۵]. در بسیاری از موارد دیگر شباهت بین دیدگاه‌های بیلینگزلی و دی (مکتوب به سال ۱۵۷۰) و کلاویوس (به سال ۱۵۷۴) چنان قوی است که نوعی ارتباط میان این دو متن را نشان می‌دهد.) «بی‌طرفی شگفت‌انگیز» و «مشارکت عجیب» اشیای ریاضی در خصوصیات هر دو نوع شیء، معقول و محسوس، هم به آن‌ها منزلت «صُوَر کلی»[۷] و

---

[۱] افزودهٔ نویسنده بر گفتار کلاویوس [۲] مقالهٔ بسیار دقیق جین مارس ماندوزی در مورد دی و اصول اقلیدس [۲۱] چیزهای دیگری در مورد تأثیر قابل توجه دی بر تحریر بیلینگزلی از اقلیدس به دست آورده است؛ اما وقتی از این مقاله آگاهی یافتم که مقالهٔ حاضر در ژوئیهٔ ۲۰۰۴ برای چاپ پذیرفته شده بود. [۳] intellectual: ذهنی، عقلی [۴] spiritual: معنوی، روحانی [۵] افزودهٔ مترجم [۶] former؛مترجم از معنای دو پهلو «پیشینی» هم به معنای معقولات، در برابر پسینی ــ که به محسوسات و مجربات اطلاق می‌شود ــ و هم برای تأمین مفهوم اشاره به موارد نخستین ــ در برابر مواردی که در این بند از پی آمده‌اند ــ استفاده کرده است. [۷] general forms: منظور صور کلی افلاطونی است. براساس طبیعیات افلاطون، صانع همهٔ اشیای جهان را با بخشیدن صورت‌های مختلف (صور کلی) به مادة الاولی (هیولا) خلق کرده است.

هم قابلیت‌های فراوانی در امور عملی، فلسفی، و اخلاقی می‌بخشد. به‌ویژه، درک نوفیثاغورسی دی از اعداد، که به تفسیر بیلینگزلی از اقلیدس تسری می‌یابد (نک. ادامه)، حساب را به علمی تبدیل می‌کند که در میان علوم پس از الهیات در جایگاه دوم از نظر «الوهیت، انتزاع، گستردگی و کلیت، ژرفا، ظرافت، سودمندی و ضرورت » قرار دارد [۷، [۱۲]]. به روشی مشابه، دی استدلال می‌کند که «اندیشهٔ» هندسی برای «انسان مسیحی» بسیار سودمند و ضروری است، زیرا آن‌ها تخیل انسان را «برای درک، گفتمان، و نتیجه‌گیری از چیزهای فکری، معنوی، ابدی مانند سعادت جاودانه‌مان تربیت می‌کنند.» [۷، [۱۵]].

دی بخش عمدهٔ دیباچهٔ خود را به ستایش از ریاضیات کاربردی و رشته‌های عملی چندگانهٔ بهره‌مند از کاربردهای ریاضیات، اختصاص می‌دهد. جالب است که تمجید او شامل انواع رشته‌ها می‌شود: از کهن‌ترین و شناخته‌شده‌ترین رشته‌ها (مانند نجوم، علم مناظر و مرایا) تا رشته‌هایی که به‌تازگی ابداع شده بودند مانند «هایپوژئودی»[۱] (یا توپوگرافی زیرزمینی). این تمجیدْ کلی‌ترین رشته‌ها (معماری، استاتیک، پنوماتیک[۲]) تا موضوعات محدودتر («trochilike» یا صناعت طراحی چرخ، «helicosophie» یا صناعت طراحی پیچ[۳] ، «menadrie» یا صناعت جرثقیل)؛ یا علوم کاملاً ریاضی (حجم‌سنجی)[۴] تا «thaumaturgike» (که به عنوان صنعت ساختن اسباب مکانیکی و نوری شگفت‌انگیز تعریف می‌شود) و «archemastrie» یا مطالعهٔ تجربی طبیعت؛ و خیلی‌های دیگر را در بر می‌گیرد. بااین‌حال، برخلاف آنچه گفته شد، به نظر نمی‌رسد که تأکید پیشگفتار دی بر فهرست طولانی و پرمعنای کاربردهای ریاضی باشد، بلکه بر وحدت عمیق ریاضیات و فلسفه و دین و مهندسی است. دیدگاه فلسفی دی به او امکان می‌دهد که نه‌تنها بر هرگونه تضاد بین تفکرات هندسی افلاطونی و مسایل مهندسی، یا بین جبر و حساب تجاری و علم‌الاعداد[۵] بوئتیوس[۶] غلبه کند، بلکه بتواند همهٔ آن‌ها را در شراکتی واحد ادغام کند. در بحث فعلی ما جالب توجه است که دیدگاه‌های جادوگری و مذهبی دی با بازنگری دربارهٔ ماهیت و قلمروی علوم ریاضی همراه است. به نظر می‌رسد که قبلاً کسی به این موضوع که دیدگاه‌های دی در پشت نوآوری‌های مفهومی نسخهٔ هِنری بیلینگزلی از اصول قرار دارند توجهی نکرده است.

اصول بیلینگزلی به اکثر کلمات در تعاریف و نتایج اقلیدس وفادار است، اما تنش‌هایی ناشی از

[۲] pneumatics؛ علم خواص هوا و گاز [۳] طراحی انواع ملخ و پروانه و پیچ [۵] numerology؛ عددشناسی یا علم‌الاعداد جزء علوم خفیه است.

[1] hypogeiodie [4] stereometry [6] Boethius

تغییرات واردشده در مفاهیم عدد و مقدار را نشان می‌دهد. بیلینگزلی، مانند تارتالیا و کلاویوس قابل اندازه‌گیری بودن مقادیر را مسلم می‌داند و درصورت‌نیاز اندازه‌گیری آن‌ها را بدون هیچ‌گونه تعلّلی انجام می‌دهد. جالب توجه است که درک مبتنی‌بر حرکت خطوط و سطوح که قبلاً ذکر شد، استدلالی را برای بیلینگزلی فراهم می‌کند که رابطهٔ عمیق بین مستطیل‌ها و حاصل‌ضرب اضلاع آن‌ها را نشان می‌دهد:

> متوازی‌الاضلاع به صورت کشیدن یا حرکت یکی از خطوط در طول خط دیگر تصور می‌شود. گویی که باید دو عدد، یکی در دیگری ضرب شود. [۱، گ ۶۰ ر]

بیلینگزلی دیدگاه‌های خود را با این پیشنهاد بیشتر توضیح می‌دهدکه این حرکت به فرد امکان می‌دهد که ضلعِ درحال حرکت را بر روی هر نقطه از ضلع دیگر که بر روی آن درحال حرکت است بر پا دارد و بنا کند، شکل به همان صورتی به دست می‌آید که حاصل‌ضرب اعداد حسابی، که در آن نقاط نمایندهٔ اعداد هستند، به دست می‌آید. به این صورت که نقاط موجود در یک عدد به تعداد نقطه‌هایی که در عدد دیگر یافت می‌شود تکرار می‌شوند. به همین دلیل است که مستطیل برابر حاصل‌ضرب اضلاع آن است [۱]. او هنگام معرفی مقالهٔ ششم به‌عنوان مقاله‌ای که مخصوصاً با اهداف «استفاده و کاربرد» مرتبط است، بر دستاورد شناسایی مقادیر با اندازه‌هایشان اصرار دارد. به این معنی که این کار پایهٔ نظری برای استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری چون اسطرلاب، ربع، و جز آن را فراهم می‌آورد:

> ساختار همهٔ ابزارهای اندازه‌گیری طول، عرض، یا عمق و نیز دلیل استفاده از چنین ابزارهایی، عمدتاً به قضایا و مسائل این مقاله وابسته‌اند. [۱، گ ۱۵۳ ر]

به‌طورکلی بیلینگزلی حلّ و کاربست نتایج هندسی از طریق نتایج حسابی و برعکس آن را بدیهی می‌داند و گریزهای او به جبر در ارجاعات صریح به «توافق» بین حساب و هندسه، یا اعداد و مقادیر فراوان است (برای توضیح بیشتر، نک. ادامه). بااین‌حال، بیلینگزلی همچنین می‌داند که چنین توافقی کامل نیست، زیرا اعداد و مقادیر از جنبه‌های مهمی متفاوت‌اند. درواقع، بیلینگزلی نظرات متناقضی در مورد کلیت و اهمّیت نسبی اعداد گسسته و حساب از یک طرف و مقادیر پیوسته و هندسه از طرف دیگر ارائه می‌دهد.

بیلینگزلی هنگام پرداختن به نخستین مقالهٔ حسابی \اصول، برتری حساب را بر هندسه اعلام می‌کند و این کار را با پیگیری دقیق استدلال‌های موجود در مقدمهٔ دی انجام می‌دهد. هندسه نیازمند

حساب است که «برتری و شایستگی[اش]. . . بالاتر از هندسه است.» حساب قائم به ذات است:

> حساب خودکفا است و به هیچ‌وجه نیازی به کمک هندسه ندارد، مطلق است و فقط بر خود متکی است و می‌توان آن را بدون هندسه آموخت و بدان دست یافت. [۱، گ ۱۸۳ ر]

برتری حساب برمبنای معرفت‌شناختی مستدل می‌شود، زیرا اصول و مبانی «کلیهٔ علوم و فنّ‌های دیگر» را فراهم می‌کند. علاوه‌براین، هندسه با اشیائی (خطوط، شکل‌ها، اجسام) سروکار دارد که توسط حواس درک می‌شوند درحالی‌که اعداد انتزاعی‌تر و مجردترند و فقط با ذهن گفت‌وگو می‌کنند:

> [اشیاء هندسی] خود را به حواس عرضه می‌کنند،. . . و توسط بینایی همان‌گونه که هستند، دیده می‌شوند و مورد داوری قرار می‌گیرند. اما عدد، موضوع و مادّهٔ حساب، هیچ معنایی ندارد، و با هیچ شکلی نشان داده نمی‌شود. . . و فقط با در نظر آمدن در ذهن نمایان می‌شوند. . . اکنون چیزهای محسوس در درجهٔ پایین‌تر از چیزهای معقول‌اند و ذاتاً بسیار زمخت‌تر از آن‌ها هستند. [۱، گ ۱۸۳ ر]

برتری حساب با منابع معتبر نیز مستدل می‌شود که ادعا می‌شود چنین دیدگاهی داشتند :«دانشمندترین و بهترین فیلسوفانی که زیسته‌اند، مانند فیثاغورس، تیمائوس[۱]، افلاطون و پیروان آن‌ها» که همه چیز را با عدد توضیح داده‌اند. بیلینگزلی همچنین دیدگاه بوئتیوس را که عدد «اصل . . . نگاهبان در ذهن خالق» است و نیز دیدگاه افلاطون را دربارهٔ اینکه روح از اعداد هارمونیک تشکیل شده است نقل می‌کند [۱، گ ۱۸۵ ر].

بیلینگزلی در استدلالی ظاهراً بی‌نقص، بر نقش حساب به‌عنوان مفیدترین و مورد نیازترین بخش ریاضیات در «زندگی معمول هر انسان در هر شرایطی» تأکید می‌کند [۱، گ ۱۸۵ ر]. با انجام این کار، بیلینگزلی تنها به‌طور مختصر به دیدگاهی پیشرفته و جدید از ماهیت حساب می‌پردازد که دی به‌طور مفصل در مقدمه توضیح داده بود. در اینجا حساب به‌عنوان «علمی که خواص اعداد و همهٔ عملیات با اعداد را اثبات می‌کند» معرفی می‌شود. بااین‌حال، اعداد دیگر محدود به محاسبات اقلیدسی نیستند، بلکه شامل کسرها و همچنین اعداد به دست آمده از استخراج ریشه می‌شوند، یعنی باید گفت اعدادی که «دانندگان حساب عملی عمومی، شمارگران، یا دانندگان حساب نظری»[۲]

---

[۱] Timaeus؛ در متن به اشتباه Timeus

[2] the common Logist, Reckenmaster, or Arithmeticien

استفاده می‌کنند. بنابراین به گفتهٔ دی نه‌تنها حساب کسرها و حساب اعداد جذری وجود دارند و مشروع‌اند، بلکه بخش‌های اساسی ریاضیات نیز هستند [۷، [۵]].

برتری حساب همچنین مبتنی‌بر نقش اعداد در تنظیم نسبت‌ها و تناسب است. وقتی بیلینگزلی به مقالهٔ پنجم می‌پردازد، تصدیق می‌کند که گفتار اقلیدس «هنگام بحث در مورد [نسبت‌ها و تناسب] به نظر منحصراً هندسی است، زیرا آن‌ها بر کمیت‌های پیوسته اعمال می‌شوند» و بااین‌حال او این دیدگاه را مطرح می‌کند که نسبت‌ها و تناسب «در اصل» به اعداد مربوط می‌شوند «و می‌باید در هندسه به وسیله اعداد و با نگرش عددی به کار بسته شوند»[۱]. مثال‌های بیلینگزلی دوباره نشان می‌دهد که او فقط به اعداد حسابی فکر نمی‌کند. برخی نسبت‌ها گویا[1] هستند (یعنی مسلم و معلوم هستند) اما برخی دیگر این طور نیستند. برای مثال، نسبت ضلع مربع (دراندازه‌های بیلینگزلی: ۴ اینچ) به قطر آن (که $\sqrt{۳۲}$ اندازه‌گیری می‌شود) «غیرمنطقی، مبهم، ناشناخته، نامشخص و اصمّ» است، زیرا تنها با عدد $\sqrt{۳۲}$ قابل بیان است، «با هیچ عدد معینی نمی‌توان آن را بیان کرد، بلکه فقط به صورت غیرمستقیم با ریشهٔ دوم ۳۲ می‌توان آن را بیان کرد» [۱، گ ۱۲۷ ر]. وقتی به مقالهٔ دهم می‌رسد، تأکید می‌کند که تنها تفاوت میان اعداد و مقادیر دقیقاً در آن است که هیچ دو عدد نسبت به هم اندازه‌ناپذیر[2] وجود ندارد، اما در مورد مقادیر، چنین نیست [۱، گ ۲۲۸ ر، ۲۳۱ ر]. به گفته بیلینگزلی، همهٔ این‌ها با برتری اعداد حسابی و گسسته بر هندسه و مقادیر پیوسته هم‌خوانی دارد.

بااین‌حال، در بخش‌های دیگر تحریر بیلینگزلی از \اصول، مفاهیم و اصول هندسه به نظر کلی‌تر و اساسی‌تر از حساب هستند. به نظر می‌رسد چنین دیدگاهی بر تفسیر بیلینگزلی بر مقالهٔ دوم، که با معرفی هندسه به‌عنوان زیربنای عملیات‌های حسابی و جبری آغاز می‌شود، حاکم است:

> حساب‌دان نیز از این مقاله بسیاری از قوانین مختصر و مفید حساب و بسیاری از قوانین جبر و معادلات آن را حاصل می‌کند. مبانی آن قوانین نیز در بیشتر موارد توسط همین مقالهٔ دوم نشان داده شده است. [۱، گ ۶۰ ر]

بیلینگزلی ۱۰ قضیهٔ اول این مقالهٔ دوم را با ارجاع به قواعد جبری یا نتایجی که می‌توان از آن‌ها استنباط کرد تبیین می‌کند [۱، گ ۶۰ ر، ۶۷ پ، ۶۹ ر]. هدف او این است که خواننده ارتباط نزدیک بین حساب و هندسه را درک کند یا به قول او:

---
[1] rational [2] incommensurable

«توافق صناعت هندسه با علم حساب ــ و چه مهربان و دوست‌داشتنی‌اند این دو خواهر[1] ــ درکنار یکدیگر که یکی با عیبِ بزرگِ بی‌دیگری بودن، نمی‌تواند باشد.»[۱، گ ۶۲ ر]

بااین‌حال، بیلینگزلی تأکید می‌کند که این توافق به معنی یکی بودن آن‌ها نیست، زیرا برخی از مسائل را در هندسه می‌توان حل کرد که در حساب نمی‌توان حل کرد، مانند یافتن نسبت طلایی:

«و بدون شک دیدن چگونگی تضاد دو کمیت یکی گسسته یا عدد و دیگری پیوسته یا مقدار شگفت‌انگیز است . . . درحالی‌که آن دو در خواصی یکسان با هم مشترک‌اند که این اشتراک در موارد و ویژگی‌ها بسیار است و البته نه در همهٔ آن‌ها. زیرا می‌توان یک پاره‌خط را به این ترتیب تقسیم کرد که نسبت کل به قطعهٔ بزرگ‌تر برابر باشد با نسبت قطعهٔ بزرگ‌تر به قطعهٔ کوچک‌تر؛ اما در اعداد چنین نیست.» [۱، گ ۶۲ ر]

به نظر می‌رسد که منظور بیلینگزلی این است که نه‌تنها هندسه پایه‌های بسیاری از قواعد حساب و جبر را فراهم می‌کند، بلکه عمومی‌تر است زیرا مسائل بیشتری را نسبت به حساب حل می‌کند. بنابراین، اقلیدسِ بیلینگزلی شواهد بسیار خوبی از مشکلات ناشی از معرفیِ درکی عددی از مقدار را در پیکرهٔ اصول ارائه می‌کند.

این سه تحریر بررسی‌شده از اصول نشان می‌دهند که داده‌های جبر و کاربردهای عملی ریاضیات برای تغییر مفاهیم عدد و مقدار در تحریرهای سدهٔ شانزدهمی اصول چقدر مهم بوده است. درعین‌حال، همهٔ آن‌ها می‌پذیرند که هندسه و حساب می‌توانند تلفیق شوند به روشی که با ریاضیات کلاسیک یونانی بیگانه است، و در درک عددی از مقادیر و ذهنیت بازشان نسبت به انواع جدید اعداد نیز با هم موافق‌اند. بااین‌حال، همهٔ آن‌ها، همان‌طورکه، به‌ویژه، در متن بیلینگزلی مشهود است، تعاریف، بدیهیات و فرضیات قدیمی را که منشأ مشکلات اساسی‌اند، حفظ می‌کنند. اولین تلاش برای مقابله با چنین مشکلاتی با انتقاد صریح از مفاهیم کلاسیک توسط سیمون استوین منتشر شد.

۷ استوین

کار جامع استوین در مورد حساب و جبر با نام حساب[2] برای اولین‌بار در سال ۱۵۸۵ منتشر شد

[1] nere and deare sisters؛ بلینگزلی این دو خواهر را با این دو صفت وصف کرده است. جالب است بدانید که واژهٔ nereid در (افسانه‌های یونان) نام هریک از پنجاه پری دریایی است که دختران نروس بوده‌اند.

[2] L'Arithmétique

و سپس در سال‌های ۱۶۲۵ و ۱۶۳۴ تجدید چاپ شد. همان‌طورکه اِ. ی. دیکسترهویس[۱] سال‌ها پیش اشاره کرد، بیشتر آثار استوین (ازجمله این یکی) کتاب‌های درسی‌اند تا تک‌نگاری‌های علمی–تخصصی [۸، ص ۱۶]. از این نکته روشن می‌شود که چرا استوین مفهوم جدید عدد و به‌خصوص نقد خود بر برخی خصوصیات مفهوم قدیمی از عدد را به شکل غیررسمی ارائه کرد. از سویی دیگر، اگر کتاب او به‌عنوان کتابی درسی نوشته شده باشد ــ که درنتیجه برای ریاضی‌دانان خبره نبوده است ــ آنگاه مباحثات استوین اطلاعاتی در مورد آنچه در آن زمان «دانش حسابی رایج» بود به ما می‌دهد.[۲] نقطهٔ آغاز استوین دارای دو بخش است. نخست، او تأکید می‌کند که خاستگاه مفهوم «عدد» نمی‌تواند با خاستگاه مفاهیم دیگر متفاوت باشد. بنابراین، همان‌طورکه درگذشته «انسان‌ها» (les Hommes) مفهوم عمومی «پرنده» را برای قرار دادن گونه‌های عقاب، کبوتر، یا مرغ مقلد ایجاد کردند، بنابراین آن‌ها همچنین مفهوم عمومی «عدد» را برای فرض یک، دو، سه، یک دوم، یک سوم، و غیره ایجاد کردند [۲۹، ص ۲]. دوم، او همهٔ اعداد ممکن را به‌وسیلهٔ تمام اندازه‌های ممکن معرفی می‌کند: «عدد آن چیزی است که به‌وسیلهٔ آن مقدار هر چیز توضیح داده می‌شود» [۲۹، ص ۱]. او این تعریف ــ شمارهٔ یک ــ از حساب را از طریق طرح‌ها[۳] و نقد و تفسیرهای مختلف گسترش می‌دهد. در میان مهم‌ترین آن‌ها، نقدهای قوی بر اصول قدیمی مثل «واحد عدد نیست» و «اعداد کمیت‌های گسسته‌اند» و سپس دفاع از کمیت‌های مجذور به‌عنوان اعداد کاملاً مشروع را می‌یابیم. درواقع، استوین اولین تعریف خود را تصدیق[۴] نمی‌کند («عدد چیزی است که با آن می‌توان مقدار هر چیزی را تشخیص داد»)، زیرا برای او خویشاوندی و شباهت عدد و مقدار (اندازه) به‌عنوان هویتی نسبی آشکار است و از تصوّر[۵] مستقیم ماهیت آن‌ها ناشی می‌شود. این درک شهودی نیز خود بر درک فیزیکی قوی از مقادیر استوار است که استوین در لفافهٔ استعارهٔ معروف خود «آب و رطوبت» قرار می‌دهد:

> عدد در مقدار است همان‌طورکه رطوبت در آب است، زیرا همان اتفاقی که با رطوبت می‌افتد با عدد نیز می‌افتد، همان‌طورکه رطوب همه و همهٔ قسمت‌های آب را فرا

[۲] برای اطلاع از گزارش‌های اخیر در مورد مباحثات استوین در مورد مفهوم عدد ببینید: [۲، ص ۱۳۸–۱۴۱] و [۲۵، ص ۳۶] [۴] تصدیق و تصور دو اصطلاح عمده در منطق برای تقسیم دوگانهٔ علم حصولی است. تصور آن صورت ذهنی است که از حکم خالی باشد، اما نه به این معنا که مقید به نداشتن حکم و تجرد از آن باشد، بلکه به این معنا که همراهی یا عدم همراهی آن با حکم در نظر گرفته نشود. تصدیق عبارت از تصوری است که همراه آن حکمی وجود داشته باشد، یا مقارن حکم باشد (برای جزئیات بیشتر نک. دایرةالمعارف بزرگ اسلامی، تصور و تصدیق). ــم. [5] نک. پانویس قبل

[1] E. J. Dijksterhuis [3] thesis

می‌گیرد، عددی که به هر مقدار اختصاص داده می‌شود، همه و هر قسمت از مقدار را فرا می‌گیرد. [۲۹، ص ۳]

به قدرت چنین استعاره‌ای در محیط فکری استوین توجه کنید، در آن فضای فکری «رطوبت» یکی از ویژگی‌های تعیین‌کنندهٔ ماهیت عنصر ارسطویی «آب» بود (آب سرد و تر بود، زمین سرد و خشک، و جز آن). استوین از طریق چنین ارجاع فلسفی به‌طور مؤثر نشان می‌دهد که عدد اساساً به ماهیت مقدار تعلق دارد. این بحث کلیدی در حملهٔ او به این باور قدیمی ظاهر می‌شود که «واحد» یک عدد نیست، بلکه تنها اصل یا منشأ اولیهٔ آن است، که صادقانه در تحریرهای تارتالیا، بیلینگزلی، و کلاویوس نیز آمده است.

به گفتهٔ استوین، ازآنجایی‌که «یک» واحد اندازه‌گیری است، می‌بایست یک عدد باشد. او به روشی مشابه به «کمیت‌های گسسته»، که یکی از ویژگی‌های مهم اعداد کلاسیک است، می‌پردازد. باز هم، چنین تفکیکی دربارهٔ کمیت‌ها به‌طورکلی و در اعداد به‌طورخاص در تارتالیا، بیلینگزلی، و کلاویوس یافت می‌شود.

استوین می‌گوید هیچ عددی ناپیوسته یا گسسته نیست، زیرا اعداد «اندازه»اند و همهٔ اندازه‌ها لزوماً پیوسته‌اند: «اگر چیزی کمیت باشد، ناپیوسته نتواند بود». استعارهٔ «آب و رطوبت» او دوباره به او کمک می‌کند: «همان‌طورکه آب پیوسته با رطوبت پیوسته مطابقت دارد، بنابراین مقدار پیوسته با عدد پیوسته مطابقت دارد» [۲۹، ص ۳]. هریک از اعداد کامل از نظر استوین می‌توانند به طرق مختلفی تجزیه شود، دقیقاً همان‌طورکه برای پاره‌خط و مقدار ممکن است بنابراین اعداد نمی‌تواند به‌عنوان مجموعه‌ای از واحدهای گسسته درک شود.

هدف بحث استوین در مورد وضعیت اعداد گنگ،حذف برچسب‌های زیر از این اعداد است: «پوچ»، «کمتر کامل»، «غیرقابل بیان» یا به هر جهت کمیتی که نباید عدد «کامل» یا تمام یا مشروع در نظر گرفته شود. اینکه «هر ریشه ــ هرچه باشد ــ عدد است [۲۹، ص ۸].» نیز نتیجهٔ شناسایی اعداد و اندازه‌گیری است: برای مثال، ازآنجایی‌که $\sqrt{۸}$ بخشی از ۸ است، باید با ۸ ماهیت یکسانی داشته باشد و بنابراین باید یک عدد باشد.

علاوه‌براین، برای چنین اعدادی، ما می‌دانیم که چگونه مقدار آن را با هر تعداد تقریب مورد نیاز تخمین بزنیم. استوین با مشکل معنایی رادیکال‌ها مانند $\sqrt{۸}$ مواجه است. در پاسخ به پرسش لفّاظانهٔ « $\sqrt{۸}$ چیست؟» استوین با اشاره به تمام شباهت‌های بین اعداد رادیکال و کسری پاسخ می‌دهد؛ به‌ویژه قابل‌فهم بودن عددی مثل ۳/۴، که از تجسّم چیزی که به قسمت‌های مساوی تقسیم

شده است، را با قابلیت تجسّم $\sqrt{۸}$ به‌عنوان اندازهٔ ضلع مربعی به اندازهٔ ۸ است مقایسه می‌کند. استوین می‌گوید، اندازه‌پذیری[1] ۳/۴ نسبت به ۱ تفاوتی با $\sqrt{۸}$ ندارد، زیرا $\sqrt{۸}$ نیز نسبت به $\sqrt{۲}$، و $\sqrt{۳۲}$ و بی‌نهایت اعداد دیگر اندازه‌پذیر است.[2]

توجه شود که اگرچه طرح‌های استوین بسیار واضح‌تر و از نظر درونی سازگارتر از آن‌هایی است که در آثار تارتالیا، کلاویوس، و بیلینگزلی یافت می‌شود، بااین‌حال پیوستگی قوی میان همهٔ این آثار را نمی‌توان نادیده گرفت.

تعریف استوین از عدد مستلزم وجود اندازه‌گیری عددی در جهان مادی است، چیزی که قبلاً توسط تارتالیا، کلاویوس، و بیلینگزلی مسلّم انگاشته شده بود. این پیش‌فرض استوین هیچگاه مورد سؤال واقع نمی‌شود همچنان‌که هیچ ریاضی‌دانان دورهٔ رنسانس چنین نکرد. همچنین توجه شود که اعداد استوین صرفاً «انتزاعاتی» نیستند که مستقیماً از اشیاء مادی به دست آیند، بلکه برعکس، این اعداد مفهوم اندازه‌گیری را انتزاع می‌کنند ــ آن هم به‌صورت عملیاتی که بر روی اشیاء انجام می‌شود ــ به جای آنکه اشیاء خام را انتزاع کنند. در نهایت، توجه شود که استوین با خروج جسورانه از بدیهیات حساب و هندسهٔ اقلیدس، اصول موضوعهٔ خود را جایگزین اصول موضوعهٔ قدیم نمی‌کند، بلکه او بیشتر به «شیوهٔ رایج» مفهوم‌سازی متوسل می‌شود ــ همان‌طورکه دکارت ۴۰ سال بعد انجام داد. به نظر می‌رسد این یکی از اولین موارد در دوران مدرن است که در آن ریاضی‌دانی طراز اول آشکارا اصول و تعاریف \اصول اقلیدس را به عنوان پایه‌های متعارف برای ساختار قیاسی ریاضیات انکار کرد.

استوین به چه دلایلی جرأت مخالفت با اقتدار چندصدسالهٔ اقلیدس را دارد؟ اچ. باس[3] اخیراً به‌درستی به تأثیر احتمالی پیئر دُ لا رامه[4]، اصلاح‌طلب تأثیرگذار اوگنویی[5]، بر استوین اشاره کرده است [۲، ص ۱۳۸]. سرنخ دیگری (کاملاً سازگار با تأثیرات راموسی[6]) در دیدگاه‌های استوین در مورد تاریخ تمدن یافت می‌شود. این تأثیر در متنی آمده است که اکنون به‌عنوان «عصر حکیمان»[7] شناخته می‌شود. درواقع، استوین آن را به‌عنوان رساله‌ای مجزّا ننوشت، بلکه نخست بخشی از پیشگفتار کتاب جغرافیای[8] او بود که دراصل به زبان هلندی در دو جلد با عنوان خاطرات ریاضیات[9] در سال ۱۶۰۵

[2] کتاب استوین شامل توضیحات طولانی‌تری با مباحثات ضمیمه‌شدهٔ دیگری نیز هست؛ نک. [۲۹، ص ۸-۱۰].
[5] Huguenot؛ به فرانسه اوگنو، گروهی قومی-مذهبی و پروتستان در سده‌های شانزدهم و هفدهم میلادی ـم.
[6] Ramist؛ آموزه‌های راموس براساس مخالفت با ارسطوگرایی و حمایت از منطق جدید آمیخته با بلاغت ـم.

[1] commensurable with [3] H. Bos [4] Pierre de la Ramée [7] De Wysentyt [8] Geography [9] Wisconstighe Ghedachtenis

منتشر شد.[۱] استوین مردی عملگرا بود که علایق و سهم قابل‌توجه او در مکانیک، هیدرواستاتیک، و ریاضیات محصول تحصیل در مهندسی و مشاغل او است. بااین‌حال، «عصر حکیمان»، توجه او را به اندیشهٔ اعتقاد به انسان آگاه در سنت هرمسی گم‌شدهٔ عصر زرین نشان می‌دهد. در این نگاه، در خاستگاه تمدن بشری، هرمس و سایر فیلسوفان دانشور، «فلسفهٔ باستانی»[۲] و «ریاضیات باستانی»[۳] را به انسان آموختند که بعداً در جریان زوال اخلاقی و مذهبی عمومی خراب شد و از بین رفت.

> ما دورانی را «عصر حکیمان» می‌نامیم که در آن یادگیری خارق‌العاده‌ای در بشر بوده است، واقعیتی که ما به یقین از نشانه‌های خاص آن می‌فهمیم، اما بدون اینکه بدانیم در میان چه کسانی، کجا و چه زمانی بوده است. [[۳۱، ص ۵۹۳]، تأکید در اصل است]

نظرات استوین در رنسانس به‌هیچ‌وجه خاص نبود. «عصر حکیمان» فهرستی بلند از ارجاعات منابع معتبر قدیمی را شامل می‌شود ــ که همگی گواه بر دانشی بزرگ است که استوین مدت‌ها پیش ــ از حقوقدان فرهیخته و انسان‌گرا، هوگو گروتیوس[۴] به دست آورده است [۳۰، ص ۱۰۹-۱۱۰]. ما همچنین می‌دانیم که پیئر دُ لا رامه معتقد بود که اقلیدس نویسندهٔ \اصول نیست، بلکه فقط گزارشگری غیرقابل اعتماد از دانش ریاضی موجود در زمان خود است. تحریر اقلیدس، طبق گفته پیئر، «ریاضیات باستانی» واقعی را خراب کرد، ریاضیاتی که پیش از زمان یونان شناخته‌شده بود و در \اصول اصلیِ مفقود موجود بود. همچنین مشخص است که بسیاری از نویسندگان دورهٔ رنسانس (که لزوماً دیدگاه‌های تندروانهٔ پیئر را ندارند) معتقد بودند که برهان‌های \اصول از آن اقلیدس نیست؛ [۳] و [۲۷، ص ۱۶۲-۱۶۵]. بدیهی است که چنین دیدگاه‌هایی زمینه‌ساز ارجاعات تارتالیا و کلاویوس به فسادِ \اصول واقعی و نیاز به اصلاح تحریرهای مخدوشِ در دسترس آن‌ها به‌وسیلهٔ

---

[۱] در سال ۱۶۰۸ که ترجمهٔ لاتینی اسنل [W. Snell] با عنوان Hypomnemata mathematica پدید آمد، Wisconstighe Ghedachtenissen تجدید چاپ شد. در همان سال چاپ ترجمهٔ فرانسه قسمتی از آن توسط تونینگ [J. Tuning] با عنوان Mathematical memoirs دیده شد. در سال ۱۶۳۴ قسمت‌هایی از Wisconstighe Ghedachtenissen (شامل De Wysentyt) توسط شاگرد استوین، آلبرت ژیرار [Albert Girard]، به فرانسه ترجمه شد و با عنوان عملیات ریاضی سیمون استوین (Les Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin) منتشر شد. در همین جا است که de wysentyt به عنوان le siecle sage ترجمه شد. در جریان جنبش‌های روشنفکرانه‌ای که دههٔ ۱۶۳۰ را از سال‌های ابتدایی سدهٔ ۱۷ جدا می‌کند، ژیرار در سال ۱۶۳۴ حداقل در دو جا De Wysentyt استوین را دستکاری می‌کند تا از علاقه و همدلی استوین نسبت به سنت هرمسی و جادوگری بکاهد و آن را تعدیل کند. من همچنین از ترجمهٔ فرانسوی ژیرار با عنوان [۳۰] نقل قول کرده‌ام ولی در همهٔ جاهایی که نقل‌قول از متن انگلیسی استوین در دسترس بود از [۳۱] استفاده کرده‌ام.

[2] prisca philosophia [3] prisca mathematica [4] Hugo Grotius

ویرایش انتقادی است.

به گفتهٔ استوین، نشانه‌های بسیار در دست است که دانش سترگ ستاره‌شناسی روزگار هیپارخوس و بطلمیوس «تقریباً از میان رفته است» [۳۰، ص ۱۰۶–۱۰۷]. این فکر نه تنها در «عصر حکیمان» یافت می‌شود، بلکه بیش از یک‌بار در رسالهٔ نجومی استوین، حرکات آسمانی[۱]، آمده است. به گفتهٔ استوین، شواهدی نیز وجود دارد که «انسان قبلاً دانش شگفت‌انگیزی از حساب، به‌ویژه، جبر داشته است»:

> جبر را می‌توان یکی از ویژگی‌های عجیب و غریب [حساب] دانست که بار دیگر سالیانی پیش، در آثار عربی ظاهر شد. از نوشته‌هایی که دانشمندان دورهٔ اسلامی به جای گذاشته‌اند، معلوم می‌شود که موضوع جبر برای کلدانیان، عبرانیان، یونانیان ... یا رومی‌ها شناخته‌شده نبوده‌است و این اقوام ریاضی‌دانی که در خور ذکر باشد نداشتند. [۳۱، ص ۵۹۹]

بنابراین حساب نیاز به اصلاحی داشت که آن را به کمال بکر خود بازگرداند. به بیان استوین، منابع دیگر کنار منابع یونانی، به‌ویژه منابع عربی، باید مورد توجه قرار گیرند، زیرا آن‌ها حاوی نکات و باقی‌مانده‌هایی از حساب هستند، پیش از اینکه قربانی زوال عمومی شود و اقلیدس آن را آکنده از کاستی به ما برساند. مراجع شایسته که باید در دانش حساب از آن‌ها پیروی شود، حساب‌دانان عصر حکیمان‌اند و نه یونانیان:

> ازحساب‌دانان ماهر عصر حکیمان [پیروی کنید] و نه از یونانیان. زیرا آنان به دلیل نبود [درک] مناسب از اعداد، نه حساب‌دان بودند و نه می‌توانستند چنین باشند... زیرا اگرچه اقلیدس قضایای حسابی ظریفی را که از عصر حکیمان به او رسیده بود می‌نویسد، اما آن‌ها مسائل و تمرین‌های حساب را شامل نمی‌شوند...، قضایای اقلیدس شاهدی بر عصر حکیمان است [دانشی] که قبلاً وجود داشته است ولی دیگر وجود ندارد. [۳۱، ص ۶۰۱]

برای مثال، در زمان اقلیدس، این تصور «غیرعقلانی» که مقادیر مجذور «غیرمنطقی، نامنظم، غیرقابل توضیح، عجیب، و بی‌معنی» هستند، کاملاً پذیرفته شده بود و بنابراین چنین مقادیری از اصول حذف شدند. به‌ویژه، استوین می‌گوید که درک مقالهٔ دهم آن اکنون بسیار دشوار است،

[۱] Hemelloop (حرکات آسمانی) در جلد سوم کتاب The Principal Works [آثار اصلی] تا حدی بازتولید و به انگلیسی ترجمه شده است (نگاه کنید به [۳۱]). برای ارجاع به دانش از دست رفتهٔ حکیمان، رجوع کنید به ص ۵۵، ۱۲۰، ۲۰۹ از همان کتاب.

زیرا اگرچه کار در اصل با اعداد جذری آغاز شده بود، بااین‌حال، مدتی بعد، تنها خطوط هندسی باقی ماندند، و اکنون این خطوط هندسی چیزهایی «ناقص»اند که کار با آن‌ها دشوار است، زیرا از اعداد جذری که در ابتدا برای «اختراع و توصیف» آن‌ها استفاده شده است، بی‌بهره‌اند [۲۹، ص ۲۱۳-۲۱۴]. استوین همچنین معتقد است که وضع قضایای هندسی به ارث رسیده از منابع دیگر نیز چنین است هرچند که اصول در مورد این قضایا وفادارتر از کتاب‌های حساب است، به‌ویژه، حافظ نظم قیاسی خوبی است که برای سازمان‌دهی ریاضیات لازم است: «در [اصول] علاوه‌بر مبحث هندسه، چیز بسیار عجیب، خارق‌العاده، و مفیدی نیز باید به یاد سپرده و آموخته شود، یعنی نظم روشمندی که در عصر حکیمان برای ریاضیات رعایت شده است» [۳۱، ص ۶۰۵]. بنابراین استوین با اطمینان، درک جدیدی از مفهوم عدد ارائه می‌کند، با این فرض صریح که او درحال احیای «ریاضیات باستانیِ» عصر حکیمان است.

۸ سخنان پایانی

تحریرهای سدهٔ شانزدهمی اصول که در اینجا بررسی شدند ترکیبی از سنت‌های عملی و آموزشی ریاضی‌اند. این تحریرها هم حاوی ارجاعات صریح و مناسب به فلسفه و صُور ایدئال افلاطون است و هم کاربرد ریاضیات را در انواع مسائل فنی تحسین میکنند. در این متون هیچ تضادی میان فلسفهٔ ریاضیات افلاطونیِ متمرکز بر انتزاع و تأمل در اشکال منتزع از جهان مادی، و درک فایده‌گرایانه از ریاضیات دیده نمی‌شود. آن‌ها همچنین اطلاعات بسیار در مورد منشأ و فلسفهٔ ریاضیات و همچنین علاقه‌ای نوعاً انسان‌گرایانه برای بهبود تحریرهای مخدوش متون کلاسیک در بر دارند.

براساس این تحریرها می‌توان نتیجه گرفت که همهٔ آن‌هاا علاقمندی به کاربردهای عملی روزافزونِ ریاضیات را برانگیختند و به ترکیب جدیدی از درک عدد و مقدار کمک کردند؛ این چیزی است که در رساله‌های جبر سده‌های میانه و رنسانس اولیه به عنوان بدیهیات در نظر گرفته شده بود ولی نتوانسته بودند که آن را به طور واضح تبیین کنند. به‌ویژه در تحریرهای اصول مورد مطالعه در اینجا، فرض بر این است که مقالهٔ دوم حاوی «جبر هندسی» است که درواقع پایه‌های قواعد جبری را فراهم می‌کند. بنابراین، این تحریرها با بازکردن راه برای درک جدید استوین از اعداد به‌عنوان اندازه‌گیری کمیت‌ها، اولین تلاش روشمند برای بزرگ‌تر کردن چارچوب مفهومی عددی اصول بودند.

باید بر نقش تعیین‌کننده‌ای که زمینه‌های فکری و اجتماعی در دگرگونی مفاهیم عدد و مقدار در رنسانس ایفا کردند تأکید شود. بسیاری از گفتمان‌های هرمسی و غیره، که سودمندی عملی ریاضیات را ستایش می‌کردند، دیدگاه تجاری و مهندسی در حساب و هندسه را مشروعیت بخشیدند. چنین

دیدگاهی، همان‌طورکه انواع مختلف روش‌های اندازه‌گیری مورد نیاز را ایجاب می‌کند معرفی انواع اعداد را نیز آسان می‌کند. افزون‌براین، افسانهٔ چندوجهی و همه‌جانبهٔ سدهٔ شانزدهمی فساد و تولد دوبارهٔ دانش نیز در بازنویسی \اصول اقلیدس در دورهٔ رنسانس و همچنین در انحراف بنیادی استوین از اعداد و مقادیر اقلیدس نقشی قاطع دارد. سرانجام توجه شود درحالی‌که تحریرکنندگان رنسانسی اصول در اینجا برخی از سوءتفاهم‌ها مربوط به سدههای میانه را تصحیح کردند، سوءتفاهم‌ها خود را نیز افزودند. بدین‌ترتیب باید گفت که «انسان‌گرایی ریاضی»، همان‌طورکه در تحریرهای \اصولِ یادشده در اینجا مصداق یافته است. این تحریرها بازسازی واژه‌شناسانهٔ کلمات و معانی \اصول اقلیدس نبود، بلکه ساختن اقلیدس جدیدی بودند که نیازهای ریاضی‌دانان رنسانس را برآورده می‌کرد. توسعهٔ مفهومی ریاضیات در سدهٔ شانزدهم به دشواری می‌توانست از بازسازی وفادارانهٔ \اصول (از دیدگاه ما) سود برد. چنین کاری منجر به روایتی می‌شد که در آن شکاف میان اعداد گسسته و مقادیر پیوسته به جای پر شدن، بیشتر می‌شد و نتایج چنین اقدامی (وفاداری به محتوای \اصول) برای ریاضی‌دانان رنسانسی بی‌فایده، پیچیده، و نامفهوم بود.

مراجع

[1] Billingsley, H., *Euclides, The Elements of Geometrie*, London, 1570.

[2] Bos, H. J. M., *Redefining Geometrical Exactness*, Springer, New York, 2001.

[3] Cifoletti, G., The creation of the history of algebra in the sixteenth century, in *L'Europe mathématique, Histoires, Mythes, Identités*, Editions de la Maison des Sciences de l'Homme, C. Goldstein, J. Gray, J. Ritter, eds., Paris, 1996, 121-142.

[4] Clavius, C., *Commentaria in Euclidis Elementa Geometrica*, Mainz. Repr. Olms-Weidmann, Hildesheim, 1999.

[5] Clulee, N. H., *John Dee's Natural Philosophy: Between Science and Religion*, Routledge, London, 1988.

[6] Crapulli, G., *Mathesis universalis, Genesi di una idea nel XVI secolo*, Edizioni dell' Ateneo, Roma, 1969.

[7] Dee, J., *The Mathematical Preface of the Elements of Geometrie of Euclid of Megara* (1570), introduction by A.G. Debus, Science History Publications, New York, 1975.

[8] Dijksterhuis, E. J., *Simon Stevin, Science in the Netherlands Around 1600*, Martinus Nijhoff, The Hague, 1970.

[9] Drake, S., Galileo Gleanings XXII: Velocity and Eudoxian proportion theory, *Physis*, **15** (1973), 49-64.

[10] Freguglia, P., Algebra e geometria in Viète, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, **9** (1989), 49-90.

[11] Freguglia, P., L'Aritmétique di Simon Stevin e gli sviluppi dell'algebra nella seconda metà del Cinquecento, in *La matematizzazione dell'universo*, L. Conti, ed., Porziuncola, Assisi, 1992, 131-151.

[12] French, P. J., *John Dee: The World of an Elizabethan Magus*, Routledge/Kegan Paul, London, 1972.

[13] Giusti, E., Numeri, grandezze e Géométrie, in *Descartes: Il metodo e i saggi*, Vol. II, G. Belgioioso, et al., eds., Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma, 1990, 419-439.

[14] Harkness, D. E., *John Dee's Conversations with Angels: Cabala, Alchemy, and the End of Nature*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[15] Heath, T. L., ed., *Euclid, The Thirteen Books of The Elements*, Dover, New York, 1956.

[16] Heilbron, J. L., *John Dee on Astronomy: Propaedeumatica aphoristica (1558 and 1568)*, University of California Press, Berkeley, 1978.

[17] Klein, J., *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra* (trans. by E. Brann), MIT Press, Cambridge, MA, 1968.

[18] Mahoney, M. S., Mathematics, In *Science in the Middle Ages*, D. C. Lindberg, ed., The University of Chicago Press, Chicago, 1978, 145-178.

[19] Malet, A., Numbers, polynomials, and algorithms, in *Stevin's Arithmétique* (1585), to appear.

[20] Malet, A., Changing notions of proportionality in pre-modern mathematics, *Asclepio* 4**2** (1990), 183-211.

[21] Mandosio, J.-M., Des "mathématiques vulgaires" à la "monade hiéroglyphique": Les Éléments d'Euclide vus par John Dee, *Revue d'histoire des sciences*, **56** (2003), 475-491.

[22] Molland, A. G., The geometrical background to the Merton school, *British Journal for the History of Science*, **4** (1968–1969), 108-125.

[23] Murdoch, J. E., The medieval language of proportions: Elements of the interaction with Greek foundations and the development of new mathematical techniques, in *Scientific Change*, A. C. Crombie, ed., Heinemann, London, 1963, 237-271.

[24] Murdoch, J. E., The medieval Euclid, *Revue de Synthèse*, **89** (1968), 67-94.

[25] Neal, K., *From Discrete to Continuous, The Broadening of Number Concepts in Early Modern England*, Kluwer Academic, Dordrecht, 2002.

[26] Regiomontanus, J., De triangulis omnimodis (1533), Nuremberg, Repr. with trans. and commentary in *Regiomontanus on Triangles*, B. Hughes, ed., The University of Wisconsin Press, Madison, WI., 1967.

[27] Rose, P. L., *The Italian Renaissance of Mathematics*, Droz, Geneva, 1975.

[28] Sasaki, C., The acceptance of the theory of proportion in the sixteenth and seventeeth centuries, *Historia Scientiarum*, **29** (1985), 83-116.

[29] Stevin, S., L'Arithmetique (1585), In *Les Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin* (Leyde, 1634), Part I, A. Girard, ed., 1-101.

[30] Stevin, S., [Le siècle sage.] A. Girard, transl., 1634, in *Les Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin* (Leyde, 1634), Part II, A. Girard, ed., 104-128.

[31] Stevin, S., De Wysentyt, The Age of the Sages, Partially reproduced with English translation, in *The Principal Works of Simon Stevin*, vol. III. D. J. Struik, et al., eds., C.V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam, 1961, 591-623.

[32] Tartaglia N., *Euclide megarense philosopho: solo introduttore delle scientie mathematice: diligentemente reassettato, et alla integrita ridotto*... Secondo le due Tradottioni, Venice,1543.

[33] Whiteside, D. T., Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century, *Archive for History of Exact Sciences*, **1** (1961), 179-388.

[34] Walton, M. T., Walton, P. J., The geometrical Kabbalahs of John Dee and Johannes Kepler: The Hebrew tradition and the mathematical study of nature, In *Experiencing Nature*, P. H. Theerman, K. H. Parshall, eds., Kluwer Academic, Dordrecht, 1997, 43-59.

هدی اویارحسین: دانش آموختهٔ تاریخ علم، دانشگاه تهران، پژوهشکدهٔ تاریخ علم
رایانامه: oyarhoseyn@ut.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 42, Number 72, Spring/Summer 2023, Pages 165–191
doi: 10.30504/mct.2023.1340.1934

Renaissance Notions of Number and Magnitude *

A. Malet
Translated by H. Oyarhoseyn[1]

Graduated in history of science from Institute for the History of Science, University of Tehran, Iran

Abstract. In the 16th and 17th centuries the classical Greek notions of (discrete) number and (continuous) magnitude (preserved in medieval Latin translations of Euclid's *Elements*) underwent a major transformation that turned them into continuous but measurable magnitudes. This article studies the changes introduced in the classical notions of number and magnitude by three influential Renaissance editions of Euclid's *Elements*. Besides providing evidence of earlier discussions preparing notions and arguments eventually introduced in Simon Stevin's *Arithmétique* of 1585, these editions document the role abacus algebra and Renaissance views on the history of mathematics played in bridging the gulf between discrete numbers and continuous magnitudes.

Keywords: history of arithmetic, Renaissance algebra, Euclid, Niccoló Tartaglia, Christopher Clavius, Regiomontanus, Henry Billingsley, John Dee, Simon Stevin
Article history: Recieved 31 October 2022; Accepted 3 January 2023
Article type: translation

*Malet, A., Renaissance notions of number and magnitude, *Historia Math.*, **33** (2006), no. 1, 63-81.
[1] oyarhoseyn@ut.ac.ir