فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۲، شمارهٔ ۷۲ (بهار و تابستان ۱۴۰۲) صص. ۲۲۵ تا ۲۵۲

جنبه‌های احتمالاتی دانش مالی*

هانس فولمر، الکساندر شید

ترجمهٔ محمد جلوداری ممقانی

چکیده. در دهه‌های گذشته روش‌های پیشرفتهٔ احتمالاتی تأثیری مهم در زمینهٔ مالی هم از جنبهٔ نظری و هم از نظر صنعت مالی برجای نهاده‌اند. درمقابل، مسائل مالی نیز انگیزه‌بخش جهت‌های تحقیقاتی جدید در علم احتمال بوده‌اند. در این مقالهٔ مروری، برخی از این پیشرفت‌ها را بررسی می‌کنیم و به زمینه‌هایی اشاره می‌کنیم که ممکن است استحقاق تحقیقات بیشتری را داشته باشند. نخست مبانی قیمت‌گذاری آربیتراژ را با تأکید ویژه بر بازارهای ناکامل و نقش‌های مختلفی که اندازهٔ احتمال در «دنیای واقعی» و اندازهٔ مارتینگل معادل آن ایفا می‌کنند، مرور می‌کنیم. سپس بر مسئلهٔ ابهام مدل، که عدم قطعیت نایتی هم نامیده می‌شود، تمرکز می‌کنیم. دو مطالعهٔ موردی را می‌آوریم که در آن‌ها امکان کنار آمدن با عدم قطعیت نایتی[1] از طریق ابزارهای ریاضی وجود دارد. در مطالعهٔ موردی اول پوشش ریسک مشتقاتی چون سواپ‌های واریانس را به معنای اکیداً مسیری بررسی می‌کنیم. در مطالعهٔ موردی دوم با الزامات سرمایه و ترجیحاتی که سنجه‌های ریسک محدب و منسجم مشخص می‌کنند، سروکار داریم. در دو بخش آخر مسائل ریاضی ناشی از افزایش چشم‌گیر دادوستد الگوریتمی در بازارهای مالی مدرن را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱ چهرهٔ تصادفی علوم مالی و ظهور حرکت براونی

کاربرد اسلوبمند روش‌های احتمالاتی در مالیهٔ علمی[2] در اواسط دههٔ ۱۹۶۰ آغاز شد. پیش‌آهنگ

عبارات و کلمات کلیدی: دادوستد الگوریتمی، نظریهٔقیمت‌گذاری آربیتراژ، پوشش ریسک، مدل تأثیر بازار، مدل عدم قطعیت، سنجهٔ ریسک پولی، سواپ واریانس

نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۲/۲۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۸/۱۲

* Föllmer, H., Schied, A., Probabilistic aspects of finance, *Bernoulli*, **19** (4) (2013), 1306-1326.

از آقای دکتر علی صفدری وایقانی عضو گروه ریاضی دانشگاه علامه طباطبائی که بی یاری او امکان تدوین این متن با نرم افزار TeX وجود نداشت، داوران ناشناس و از انجمن ریاضی ایران بابت حمایت‌های بی‌دریغ تشکر می‌کنم.

[1]Frank Knight (1885–1972) [2]academic finance

doi: 10.30504/mct.2022.1281.1891

این کار در ام‌آی‌تی پُل ساموئلسون بود [۹۲] که با کشف مجدد رسالهٔ دکترای لویی بشیلیه [۵]، که بنابر گزارش آنری پوانکاره از آن در سال ۱۹۰۰ در پاریس دفاع کرد، رونقی عظیم پیدا کرد. در این رساله حرکت براونی به عنوان یک مدل ریاضی برای نوسانات قیمت دارایی مالی نقدشونده ظاهر می‌شود. ساموئلسون با این فرض که قیمت‌ها باید مثبت بمانند، کاربرد حرکت براونی هندسی را به جای حرکت براونی پیشنهاد کرد، و خیلی زود حرکت براونی هندسی[1] به عنوان مدل استاندارد مرجع پذیرفته شد. در این زمینه در ۱۹۷۳ بلک و شولز [۹] و مرتون [۸۲] فرمول معروف خود را در مورد قیمت اختیار خرید به دست آوردند.

علت ظهور حرکت براونی در زمینهٔ دانش مالی چیست؟ اولین دلیل ابتدایی‌اش از این قرار است: در هر زمان ثابت، قیمت سهام را می‌توان به‌عنوان موازنهٔ موقت ناشی از تصمیم به خرید یا فروش آن توسط تعداد بسیار زیادی از معامله‌گران، که به‌صورت تصادفی و کم‌وبیش مستقل اتخاذ شده‌اند، دانست. سکه‌های بسیاری پشت سر هم پرتاب می‌شوند، و بنابراین حرکت براونی باید به‌عنوان تجلی قضیهٔ حد مرکزی ظاهر شود. این «چهرهٔ شیر یا خطِ دانش مالی» است، نامی که جی. کسیدی در کتاب خود [۱۷] به آن داده است. این بحث ابتدایی را می‌توان با استفاده از فرض‌های اقتصاد خرد روی رفتار کارگزاران و روش‌هایی که آن‌ها برای تولید تقاضای تصادفی به کار می‌برند دقیق‌تر کرد، و سپس با کاربرد یک اصل ناوردایی نوعاً به توصیف نوسانات قیمت به عنوان جوابی از یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی با محرک حرکت براونی و یا، به‌صورت کلی‌تر، فرایند لوی پرداخت؛ برای مثال نگاه کنید به [۴۸] و مراجع آن.

بااین‌حال، در این لحظه یادآوری هشدار زیر از پوانکاره در [۹۰]، به‌صورتی‌که در [۷۱] نقل شده است، آموزنده است:

> وقتی مردم در تماس نزدیک با هم هستند، به هیچ‌وجه به صورت تصادفی و مستقل از هم تصمیم نمی‌گیرند، بلکه نسبت به هم واکنش نشان می‌دهند. انگیزه‌های بسیاری دخالت کرده آن‌ها را آزار می‌دهد و از این‌رو به آن رو می‌کند. اما، چیزی هست که این عوامل قادر به تخریب آن نیستند و آن تمایل آن‌ها به رفتار گله‌وار یا تقلید کورکورانه است. و این چیزی است که پابرجا می‌ماند.

بنابراین درست در آغاز کاربرد روش‌های مدرن احتمالاتی در دانش مالی، علامت هشداری می‌بینیم

[1] geometric Brownian motion

که به اثرات متقابل و گله‌ای اشاره می‌کند که ممکن است کاربردی مستقیم از قضیهٔ حد مرکزی را بی‌اعتبار کند.

دیوید کرپس در کتاب [۷۸] بحثی متفاوت را به کار می‌برد که در آن حرکت براونی هندسی به‌عنوان «تعادل انتظارات عقلانی» ظاهر می‌شود. فرض کنید که کارگزارها مطالبهٔ خود را با ماکسیمم کردن مطلوبیت مورد انتظار خود محاسبه کنند. اگر ترجیحات آن‌ها به‌وسیلهٔ توابع مطلوبیت نمایی داده شده باشد، و انتظارات شخصی آن‌ها به‌وسیلهٔ حرکت براونی هندسی توصیف شود، آنگاه، درواقع، تعادل قیمت حاصل، یک حرکت براونی هندسی خواهد بود. بنابراین حرکت براونی هندسی به‌عنوان نقطهٔ ثابت یک مسئلهٔ تجمیع مبتنی‌بر ترجیحات و انتظارات کارگزاری‌های آزمودهٔ سطح بالا است. در اینجا مجدداً، هشدار پوانکاره بر عقلانی بودن فرض‌های مستتر در این‌گونه بحث‌ها تردید می‌افکند.

خودِ بشیلیه قضیهٔ حد مرکزی را به کار نمی‌بَرد و برحسب مطلوبیت مورد انتظار نیز بحث نمی‌کند. درعوض بحث خود را با یک استدلال تعادل ساده آغاز می‌کند: «به نظر می‌رسد بازار، یعنی مجموعهٔ سوداگران، در یک لحظهٔ داده‌شده به یک افزایش یا کاهش قیمت باور داشته باشد، زیرا برای هر قیمت مشخص‌شده تعداد خریداران و فروشندگان یکی است». بنابراین «امید ریاضی سوداگر صفر است». به بیان امروزی، بشیلیه تأکید می‌کند که فرایند قیمت باید تحت یک اندازهٔ احتمال P^* که مبین تجمیع باورهای بازار است یک مارتینگل باشد. با این فرض که مسیرها پیوسته‌اند و با اضافه کردن شرط مانایی نموها، نتیجه می‌شود که درواقع فرایند قیمت یک حرکت براونی است.

چشم‌انداز جریان اصلی در حال حاضر چیست؟ نخست اینکه بین دانشکده‌های ریاضی، مالی، و اقتصاد اتفاق‌نظر میان‌رشته‌ای گسترده‌ای وجود دارد که نوسانات تنزیل‌یافتهٔ قیمت دارایی نقدشونده باید به‌صورت یک فرایند تصادفی $X = (X_t)_{\circ\leq t\leq T}$ روی فضای احتمال زمینه‌ای چون $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ در نظر گرفته شود. این برداشت نوعاً عینی‌گراست: این اندازهٔ احتمال P وجود دارد، آن را می‌توان دست‌کم به‌صورت نسبی با روش‌های آماری و اقتصادسنجی شناسایی کرد، و باید در شرایط مشخص از قبل تعیین‌شده‌ای صدق کند. این شرایط، حدی از کفایت بازار[۱] را برآورد می‌کنند. کفایت بازار، در قوی‌ترین صورتش، مستلزم این است که X نسبت به P یک مارتینگل باشد. بااین‌حال، در چشم‌انداز جریان اصلی فرض می‌کنند که یک نسخهٔ ضعیف‌تر و بسیار منعطف‌تر از کفایت بازار وجود دارد که عبارت است از نبود فرصت‌های آربیتراژ[۲] سالم (و نه فقط آماری). به‌عبارت‌دیگر، فرایند قیمت‌گذاری لزوماً نباید هر استراتژی دادوستدی را بپذیرد که

---

[1]market efficiency [2]arbitrage apportunity

یک سود مثبت مورد انتظار نسبت به بازدهٔ بدون ریسک، بدون هیچ ریسک ضرری، تولید می‌کند. اگر این نکته به‌روشنی بیان شود، نبود فرصت‌های آربیتراژ را می‌توان با وجود یک اندازهٔ مارتینگل معادل مشخص کرد، یعنی اندازهٔ احتمالی چون P^* معادل با P به‌طوری‌که فرایند تنزیل‌شدهٔ مناسب قیمت X نسبت به P^* یک مارتینگل (موضعی) باشد. معمولاً این مشخص‌سازی را قضیهٔ اساسی قیمت‌گذاری دارایی[۱] می‌نامند. صورت اولیه‌ای از این قضیه در هریسون–کرپس [۵۸] و صورت نهایی آن در دلبین و ساخرمایر [۲۷، ۲۸، ۲۹] آمده است؛ همچنین نگاه کنید به کابانوف [۶۸] و یان [۱۰۸].

بنابراین یک فرض اقتصادی، یعنی نبود فرصت آربیتراژ، درستی رابطهٔ $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$ را تضمین می‌کند، که در آن $\mathcal{P}^*$ مجموعهٔ اندازه‌های مارتینگل معادل P است. درنتیجه، بنابر قضیه‌هایی از ژاکود[۲]، یور[۳]، و دیگران در «نظریهٔ عمومی» فرایندهای تصادفی در دهه‌های ۷۰ و ۸۰، فرایند X نسبت به اندازهٔ اولیهٔ P یک نیم‌مارتینگل و درنتیجه به مفهوم بیشتِلِر[۴] و دُلاشِری[۵] یک انتگرال‌گیر تصادفی است. بنابراین می‌توانیم از حسابان ایتو[۶] استفاده کنیم. به‌علاوه، بنابر یک سری استدلال، که دوبلین [۳۲] ابداع و مونرو [۸۴، ۸۵] تکمیل کرده است، X یک حرکت براونی با تقریب یک تعویض زمان تصادفی است. به‌این‌ترتیب، حرکت براونی باز هم در این زمینهٔ کلی، هرچند به شکلی نه‌چندان صریح، ظاهر می‌شود.

۲ مشتقات و پارادایم پوشش کامل

یک مشتقه[۷]، یا مطالبهٔ مشروط[۸]، عایدی[۹] $H(\omega)$ را مبتنی‌بر سناریوی ω، که محقق خواهد شد، مشخص می‌کند. مثلاً عایدی اختیار خرید اروپایی[۱۰] با قیمت توافقی c و سررسید T عبارت است از $H(\omega) = (X_T(\omega) - c)^+$. سؤال این است که قیمت منصفانه‌ای که خریدارِ مطالبهٔ H باید پرداخت کند چیست؟ به‌عبارت‌دیگر، معادل تعینی منصفانه برای برآمد تصادفی H چیست؟ این سؤالی کلاسیک است و جواب رایج آن به بنیان‌گذاران نظریهٔ احتمال، به‌ویژه یاکوب برنولی، تعلق دارد. جواب حاکی از این است که به سناریوهای مختلف ω احتمال‌هایی نسبت می‌دهیم و امید ریاضی متغیر تصادفی H یعنی

$$E_P[H] = \int H dP$$

[1] fundamental theorem of asset pricing [2] Jacod [3] Yor [4] Bichteler [5] Dellacherie [6] Ito [7] derivative [8] contingent claim [9] payoff [10] European call option

را نسبت به اندازهٔ احتمال P محاسبه می‌کنیم. به پیروی از دانیل برنولی [۶]، برای اجتناب از ریسک می‌توان صرف ریسک[۱] را نیز به آن افزود. دقیق‌تر اینکه، ریسک‌گریزی را می‌توان با استفاده از تابع مطلوبیتی اکیداً صعودی و مقعر مانند u توصیف و قیمت H یعنی $\pi(H)$ را به‌عنوان معادل قطعی $u^{-۱}(E_P[u(H)])$ محاسبه کرد. بنابراین تفاوت $\pi(H) - E_P[u(H)]$ را، که بنابر نابرابری ینسن مثبت است، می‌توان به‌عنوان صرف ریسک تعبیر کرد. اما، در بحث مالی حاضر و تحت شرط یکتایی (۱)، که در زیر ملاحظه می‌کنید، چشم‌انداز اساسی بلک و شولز [۹] و مرتون [۸۲] به نتیجه‌ای کاملاً متفاوتی منتهی می‌شود. به‌ویژه هیچ دلیل قانع‌کننده‌ای باقی نمی‌ماند که بتوان به طرفداری از صرف ریسک صحبت کرد زیرا استدلال زیر نشان می‌دهد که در این حالت هیچ ریسک ذاتی[۲] وجود ندارد.

یک مدل بازار مالی با شرط $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$ را در نظر بگیرید. در بسیاری از مواقع، و به‌ویژه برای مدل‌های انتشار ساده مانند حرکت براونی هندسی، اندازهٔ مارتینگلِ معادل عملاً یکتاست، یعنی

$$|\mathcal{P}^*| = ۱. \qquad (۱)$$

یکتایی این اندازه نتیجه می‌دهد که مدل «کامل» است، به این معنی که هر مطالبهٔ مشروط را می‌توان به صورت تقریباً حتمی[۳]

$$H = V_۰ + \int_۰^T \xi_t dX_t \qquad (۲)$$

نمایش داد که در آن $V_۰$ عددی ثابت و $\xi = (\xi_t)_{۰\leq t\leq T}$ فرایندی قابل پیشگویی است با این شرط که انتگرال تصادفی وجود داشته باشد. این نمایش برای مدل‌های انتشار ساده مانند حرکت براونی هندسی از قضیهٔ ایتو نتیجه می‌شود، که بیان می‌کند که تابعک‌های حرکت براونی[۴] را می‌توان به‌صورت انتگرال‌های حرکت براونی نوشت؛ حالت کلی را در [۹۱] ببینید. چون امید انتگرال ایتو نسبت به اندازهٔ مارتینگلِ معادل P^* صفر است عدد ثابت $V_۰$ از معادلهٔ $V_۰ = E^*[H]$ به دست می‌آید.

با اصطلاحات مالی، نمایش (۲) به بازسازی بی‌کم‌وکاست مطالبه ازطریق یک سبد دادوستد دینامیک می‌انجامد. درواقع، ساخت سازوار انتگرال ایتو امکان تعبیر انتگرال تصادفی (۲) را به‌عنوان درآمد تجمعی خالص تولیدشده به‌وسیلهٔ سبد معاملاتی خودتأمینی[۵] که شامل ξ_t واحد از

[1] risk premium [2] intrinsic risk [3] almost surely [4] Brownian motion functional [5] self financing

دارایی پایه در زمان t است، فراهم می‌کند. اکنون عدد ثابت $V_{\circ}$ را می‌توان به‌عنوان ثروت اولیه‌ای در نظر گرفت که برای بازسازی بی‌کم‌وکاست یا پوشش بی‌کم‌وکاست مطالبهٔ مشروط مورد نیاز است. بنابراین قیمت بدونِ آربیتراژِ یکتای مطالبه از رابطهٔ

$$\pi(H) = V_{\circ} = E^{*}[H] \tag{۳}$$

به دست می‌آید، زیرا هر قیمت دیگری برای درآمدی بدون ریسک فرصت آربیتراژ فراهم خواهد آورد. مثلاً، اگر قیمت واقعی بالاتر باشد می‌توان مطالبه را به این قیمت فروخت، با استفاده از مبلغی کمتر از $V_{\circ}$ سبد پوششی را ساخت که مبلغ تصادفی H را که در سررسید باید پرداخت شود تولید می‌کند، و سرانجام اختلاف بین قیمت و $V_{\circ}$ را به‌عنوان درآمد بدون ریسک به دست آورد.

بنابراین، فرض یکتایی (۱) جوابی ساده برای مسئلهٔ قیمت‌گذاری و پوشش مشتقات مالی فراهم می‌کند. توجه می‌کنیم که این جواب تنها شامل اندازهٔ مارتینگلِ معادل P^{*} است. این اندازه به‌عنوان ابزاری برای بررسی سازگاری هوشمندانهٔ قیمت‌گذاری دارایی‌ها عمل می‌کند. انتظار داشتیم که اندازهٔ احتمال اصلی P این وظیفه را انجام دهد، ولی در اینجا فقط به این دلیل اهمیت دارد که دسته‌ای از مجموعه‌های با اندازهٔ صفر را تثبیت می‌کند. همان‌طورکه در بخش ۵ خواهیم دید، حتی می‌توان P را کاملاً حذف کرد مشروط بر اینکه فضای سناریوهای ممکن را محدود کنیم.

۳ بازار ناکامل منشاء مسئله‌های جدید احتمال

به محض اینکه مدل بازار واقعی‌تر شود، به این معنی که بپذیریم که تعداد منابع تصادفی در آن بیشتر از ابزارهای معامله شده است، دیگر اندازهٔ مارتینگلِ معادلْ یکتا نخواهد بود، و بنابراین $|\mathcal{P}^{*}| = \infty$. درنتیجه، پارادایم پوشش بی‌کم‌وکاست فرو می‌ریزد، و در سطح مشتقات، ریسک‌های ذاتی بروز می‌کنند. دراین‌صورت این مدل «ناکامل»[۱] نامیده می‌شود. از لحاظ ریاضی، ناکاملی به یک منشاء غنی از مسائل جدید در آنالیز تصادفی تبدیل شده است. به‌ویژه این مفهوم موجب شده است صورت‌های جدیدی از قضیه‌های تجزیه مانند تجزیهٔ کونیتا–واتانابه[۲] و تجزیهٔ دوب–مِیِر[۳] مطرح شود.

مشتقه‌ای با عایدی نامنفی H و سررسید T را در نظر بگیرید. یک سبد پوششی قابل‌قبول با سرمایهٔ اولیه‌ای مانند $V_{\circ}$ و فرایندی قابل پیش‌بینی مانند ξ طوری داده می‌شود که فرایند قیمت

[1] incomplete market [2] Kunita-Watanabe [3] Doob-Meyer

سبد با تعریف

$$V_t = V_\circ + \int_\circ^t \xi_s dX_s \qquad (۴)$$

نامنفی بماند. در سررسید T هر سبدی از این نوع مطالبه را به‌صورت $H = V_T + C_T$ تجزیه می‌کند که یک بخش آن بی‌کم‌وکاست پوشش داده می‌شود و بنابراین مانند بخش قبل با آربیتراژ قیمت‌گذاری می‌شود، و C_T بخش دیگر آن «خطای پوشش»[1] است. ترجیحات اقتصادی مختلف موجب انتخاب‌های متفاوت از سبد می‌شوند و درنتیجه تجزیهٔ فوق از مطالبه یکتا نیست.

می‌خواهیم خطای پوشش را در میانگین توان دوم نسبت به اندازهٔ احتمال دادهشدهٔ P مینیمم کنیم. یعنی اینکه در فضای $L^۲(P)$ باید تصویر H را بر زیرفضایی از انتگرال‌های تصادفی به دست آوریم. این مسئله، با پذیرفتن صورت قوی فرض بازار کارآ[2]، یعنی $P \in \mathcal{P}^*$، با استفاده از تجزیهٔ کونیتا–واتانابه در فضای مارتینگل‌های مربعی‌انتگرال‌پذیر حل می‌شود؛ نک. [۵۰]. اگر این شرط را با $P \notin \mathcal{P}^*$ جایگزین کنیم، معمولاً مسئلهٔ تجزیهٔ حاصل را می‌توانیم به کاربردی از نمایش کونیتا–واتانابه نسبت به یک اندازهٔ مارتینگلِ مینیمالِ مناسب تقلیل دهیم؛ نک. [۴۷]. به‌طورکلی روش‌های پوشش میانگین–واریانس برای بازارهای مالی منبعی از صورت‌های جدید تجزیهٔ کونیتا–واتانابه و نتایجی جدید درخصوص ویژگی‌های بستاری فضاهای انتگرال‌های تصادفی نسبت به یک نیم‌مارتینگل بوده‌اند؛ برای مثال نگاه کنید به [۴۹، ۱۰۲].

بااین‌حا ل از منظر مالی رویکرد میانگین–واریانس فاقد قدرت رسیدن به یک بی‌تقارنی بنیادی[3] است: هدف اصلی، کنترل «کمبودی» است که به‌عنوان بخش مثبت $C_T^+ = (H - V_T)^+$ از خطای پوشش تعریف می‌شود. اگر این کمبود را برابر صفر بگیریم، آنگاه به گسترشی جدید و مهم از تجزیهٔ دوب–میر می‌رسیم. شکل راست‌پیوسته‌ای چون U از فرایند

$$U_t = \operatorname{ess\,sup}_{P^* \in \mathcal{P}^*} E^*[H|\mathcal{F}_t], \qquad \circ \le t \le T. \qquad (۵)$$

را در نظر بگیرید. اکنون توجه کنید که U یک $\mathcal{P}^*$–ابرمارتینگل[4] است، یعنی ابرمارتینگلی نسبت به هر $P^* \in \mathcal{P}^*$. به‌طوری‌که در [۳۷، ۴۲، ۷۶] نشان داده شده است هر $\mathcal{P}^*$–ابرمارتینگل U نمایشی به‌صورت

$$U_t = U_\circ + \int_\circ^t \xi_s dX_s - A_t \qquad (۶)$$

[1]hedging error [2]efficient market hypothesis [3]basic asymmetry [4]supermartingale

دارد که در آن A فرایندی صعودی و اختیاری (ولی به‌طورکلی غیرقابل پیش‌بینی) است. اما، انتگرال تصادفی یک $\mathcal{P}^*$–مارتینگل موضعی است و ازاین‌رو (۶) را می‌توان به عنوان شکلی جدید از تجزیهٔ کلاسیک دوب–میر دانست که درعین‌حال به‌ازای هر $P^* \in \mathcal{P}^*$ برقرار است. در حالت خاص (۵)، این تجزیهٔ اختیاری را می‌توان یک روش «ابرپوشش»[۱] در نظر گرفت، به‌این‌ترتیب که کار خود را با سرمایهٔ اولیهٔ $V_0 = U_0$ آغاز می‌کنیم و سبد دادوستد ξ را به کار می‌بریم و به‌مرور مبلغ تجمعی A_t را از ارزش سبد V_t که توسط (۴) تعریف شده است کم می‌کنیم، این فرایند را وقتی به پایان می‌بریم که $U_T = H$ به دست آید. به‌بیان‌دیگر، U_t را می‌توان کمترین میزان ثروتی دانست که برای پوشش مطالبهٔ H، با استراتژی دادوستد دینامیک که در بازهٔ زمانی t تا T اجرا می‌شود، لازم است.

ممکن است رویکرد ابرپوشش از ثروتی بزرگ برای دور ماندن از ریسک استفاد بکند، بنابراین این رویکرد بسیار محافظه‌کارانه است. بااین‌حال حتی اگر مقدار صفر را برای کمبود بپذیریم، ریاضیات ابرپوشش حائز اهمیت است. مثلاً فرض کنید زیان مورد انتظار $E_P[l(C_T^+)]$ کرانی داشته باشد که برحسب یک تابع زیان محدب[۲] مانند l تعریف شده باشد. دراین‌صورت مسئلهٔ مربوط به پوشش کارآ را می‌توان به یک مسئلهٔ تصمیم آماری، که با استفاده از آزمون تصادفی‌شدهٔ φ حل می‌شود، و یک مسئلهٔ دینامیک ابرپوشش برای مطالبهٔ تغییریافتهٔ $\overline{H} = \varphi H$ تجزیه کرد؛ نک. [۴۳].

به‌طورکلی، مسئلهٔ پوشش کارآ را می‌توان در یک مسئلهٔ بهینه‌سازی سبد دینامیک برای بازارهای مالی ناکامل نشاند، که معمولاً معیار نشاندن برحسب مطلوبیت مورد انتظار صورت‌بندی می‌شود. نوشته‌های غنی در مورد این‌گونه مسائل بهینه‌سازی دینامیک هم از لحاظ کنترل‌بهینهٔ تصادفی[۳] [۶۹، ۷۰، ۱۰۴]، و هم از لحاظ دوگانی محدب[۴] [۷۴، ۷۵] وجود دارد.

توجه می‌کنیم که در این‌گونه مسئله‌های بهینه‌سازی برای بازارهای مالی ناکامل برخلاف رویکرد ابرپوششی، اندازهٔ احتمال P به‌صراحت وارد می‌شود. اما این پدیده در سطح ترجیحات[۵]، یعنی به شکل مطلوبیت مورد انتظار، رخ می‌دهد. به‌محض پذیرش عدم‌قطعیت مدل و در نظر گرفتن ترجیحات قوی همان‌طورکه در بخش ۲.۵ بیان خواهد شد، مسئله‌های جدید بهینه‌سازی قوی مطرح می‌شوند؛ مثلاً نگاه کنید به [۴۰، ۶۱، ۹۵، ۹۶] و مقالهٔ مروری [۴۶]. یک جهت تحقیقاتی نوین دیگر عبارت است از تحلیل زمانی دینامیک ساختارهای ترجیحی مانند چیزی که در [۸۶، ۸۷] مطرح شده است.

[1]superhedging [2]convex loss function [3]stochastic optimal control [4]convex duality [5]preferences

۴ P در مقابل P^*

دیده‌ایم که زمینهٔ استاندارد برای ریاضیات مالی از نوع احتمالاتی است، و این زمینه شامل دو اندازهٔ احتمال است: از یک طرف فرض بر این است که یک اندازهٔ احتمال عینی P وجود دارد که معمولاً «احتمال دنیای واقعی» یا «احتمال تاریخی» نامیده می‌شود. ازطرف‌دیگر نبود آربیتراژْ وجود یک اندازهٔ مارتینگلِ معادل P^* را ایجاب می‌کند که به‌عنوان یک دستگاه قیمتِ سازگار تعبیر می‌شود که «باور فعلی بازار» را منعکس می‌کند. از لحاظ ریاضی، وجود هم‌زمان این اندازه‌ها و توصیف صریح چگالی‌های دوجانبهٔ آن‌ها منبعی سرشار از تمرین‌های تخصصی است، همچنین تبدیل گیرسانوف[۱] امکان رفت‌وبرگشت بین P و P^* را فراهم می‌کند. بااین‌حال، از لحاظ مفهومی بین نقش‌های آن‌ها تفاوت عمده‌ای وجود دارد.

معمولاً اندازهٔ احتمال P به‌عنوان مدلی احتمالاتی در نظر گرفته می‌شود که سعی در رهگیری الگوهای مشخصی دارد که در گذشته مشاهده شده‌اند: بنابراین این اندازه تحت فرض‌های ضمنی مانایی همچون یک برنامهٔ پیشگوی آینده‌نگر به کار می‌رود. هرچند غالباً پذیرفته شده است که هر انتخاب خاص P واجد ریسک مدل قابل‌ملاحظه‌ای است، این باور که یک اندازهٔ احتمال واقعی وجود دارد و مدل‌های احتمالاتی به‌مرور بهتر شده و به واقعیت میل می‌کنند، طرفداران زیادی دارد. بااین‌حال، برونو دُ فینتّی [۲۵، ۲۶] معتقد است که مسئله بسیار بنیادی‌تر از ریسک مدل[۲] است. او در این باره اظهار تردید می‌کند که بتوان به‌نحو معنی‌داری اندازهٔ احتمال عینی $P[A]$ را به رویداد مالی A با تعریف زیر نسبت داد

$$A = \{\text{مجموعهٔ اوراق قرضهٔ دولتی با شمارهٔ ISIN } x \text{ که نکول نمی‌کند}\}.$$

ازطرف‌دیگر، همه‌روزه در بازار مالی احتمال $P^*[A]$ یا حتی امید $E^*[H]$ جریان نقدی آتی تنزیل‌یافته H را که ورقهٔ قرضه تولید می‌کند، یا مستقیماً ازطریق قیمت بازاری فعلی ورقه یا با استفاده از قیمت‌های ابزارهایی مانند سواپ‌های نکول اعتباری[۳](CDS)، که به‌منزلهٔ بیمهٔ نکول ورقه ایفای نقش می‌کنند، نسبت می‌دهیم. بنابراین احتمال P^* کل بخت‌هایی را که در بازار برای تعداد بزرگی از شرط‌بندی‌ها بسته می‌شوند منعکس می‌کند. این نکته با این ادعای دُ فینتّی مطابقت دارد که «آن احتمال وجود ندارد»، اما می‌توان شرط‌بندی‌های یک رویداد خاص با بخت‌های معین را در نظر گرفت. دُ فینتّی قواعد سازگاری برای بخت‌های تعیین‌شده در مورد شرط‌بندی‌های

[1] Girsanov [2] model risk [3] credit default swaps

مختلف اعمال می‌کند، و یک «شمای» قاطع برای تأکید بر ماهیت فاعلی اندازهٔ احتمال P^* به کار می‌برد. در سطح یک عامل منفرد می‌توان این قواعد سازگاری را به‌عنوان یک شرط خردمندانهٔ بسیار خوش‌بینانه تلقی کرد. اما اگر به جای «شمای» دُ فینتّی «بازار مالی» را قرار دهیم این شرط بسیار الزام‌آور خواهد شد، زیرا بازار در تحمیل سازگاری از طریق آربیتراژ بسیار کارآمدتر از هر فردی است. درواقع، از لحاظ مفهومی و نیز ریزه‌کاری‌های تخصصی، بین قضیهٔ بنیادی قیمت‌گذاری دارایی و بازسازی اندازهٔ احتمال دُ فینتّی با استفاده از دستگاه سازگار شرط‌بندی‌ها رابطه‌ای نزدیک وجود دارد؛ مثلا نگاه کنید به [۱۰، ۹۴].

جدای از این جنبه‌های بنیادی، تلاش برای پیشگویی پیشرفت‌های مالی برحسب یک اندازهٔ احتمال «عینی» P را، به‌ویژه با چشم‌انداز بحران‌های اخیر مالی، به‌سختی می‌توان به‌عنوان یک داستان موفقیت‌آمیز توصیف کرد. ازسوی‌دیگر، در هر لحظهٔ داده‌شدهٔ t، در مورد پیشگویی فعلی بازار از توسعه‌های آتی آن برحسب یک اندازهٔ مارتینگل P_t^* اطلاعات وسیعی در دست است. دقیق‌تر اینکه در لحظهٔ t منظرهٔ بازار با توزیع احتمال شرطی

$$P_t^*[.|\mathcal{F}_t] \quad \text{روی} \quad \hat{\mathcal{F}}_t \tag{۷}$$

داده‌می‌شود که در آن $\mathcal{F}_t$ سیگمامیدانی است که اطلاعات در دسترس در زمان t را توصیف می‌کند، و $\hat{\mathcal{F}}_t$ سیگمامیدانی است که توسط عایدی‌های مطالبات مشروط معامله‌شده با سررسیدهای $t < T$ تولید می‌شوند. قیمت‌های فعلی اختیارهای خریدوفروش با سررسید T اطلاعات مربوط به توزیع حاشیه‌ای $P_t^*[.|\mathcal{F}_t]$ را در زمان $t < T$، و قیمت‌های فعلی اختیارهای نامتعارف[1] نیز اطلاعات مربوط به حاشیه‌های چندبُعدی را تأمین می‌کنند. این آینده‌نگری «خوانش بازار»[2] بخش مهمی از تحلیل کمّی متداول است.

در هر لحظهٔ t، چشم‌اندار فعلی بازار از آینده، آن‌گونه که اندازهٔ قیمت‌گذاری شرطی $P_t^*[.|\mathcal{F}_t]$ بیان می‌کند، نسبت به مطالبات مشروطِ متفاوت سازگار است و به‌ویژه نسبت به سررسیدهای مختلف $t < T$ زمان‌سازگار[3] است. اما ممکن است این تصویر سازگاری از روز t به روز $t + ۱$ و حتی به روشی زمان‌ناسازگار تغییر کند. ممکن است زمان‌سازگاری طی زمان‌های مختلف از لحاظ عمومی مطلوب باشد و این مفهوم در نوشته‌های ریاضیات مالی مسلم تلقی می‌شود. به بیان ریاضی، زمان‌سازگاری مستلزم این است که تمام توزیع‌های شرطی فرمول (۷) به یک اندازهٔ

[1] exotic options [2] leture de marche [3] time consistant

مارتینگلِ معادل $P^* \in \mathcal{P}^*$ تعلق دارند. بنابراین در دنیای مجازیِ متشکل از یک مدل بازار مالی کامل، زمان‌سازگاری به‌علت یکتایی اندازهٔ مارتینگلِ معادل، خودبه‌خود برقرار خواهد شد. در دنیای وسیع مدل‌های بازار مالی ناکامل و بنابراین در عمل، باید منتظر زمان‌ناسازگاری باشیم. در چارچوب استاندارد خودمان، این پدیده با شاری در فضای $\mathcal{P}^*$ متشکل از اندازه‌های مارتینگل توصیف می‌شود. این شار ممکن است پیوسته باشد، و می‌تواند شامل پرش‌هایی باشد که از تغییرات ناگهانی رژیم[۱] ناشی می‌شوند.

ردهٔ اندازه‌های مارتینگل $P^* \in \mathcal{P}^*$ را به‌شرطی‌که نوسانات قیمت X نسبت به P^* مارتیگلی یکنواخت‌انتگرال‌پذیر باشد با $\mathcal{P}^*_{UI}$ نشان می‌دهیم. نوعاً مجموعهٔ $\mathcal{P}^*_{UI}$ و $\mathcal{P}^*_{NUI} := \mathcal{P}^* - \mathcal{P}^*_{UI}$ هر دو ناتهی هستند. معمولاً رفتار X نسبت به اندازهٔ $P^* \in \mathcal{P}^*_{NUI}$ را به‌عنوان حباب[۲] تعبیر می‌کنند؛ نک. [۶۶، ۶۷]. بنابراین یک تغییر رژیم از اندازهٔ مارتینگلِ اولیهٔ $P^*_{\circ} \in \mathcal{P}^*_{UI}$، که حبابی نشان نمی‌دهد، به اندازهٔ مارتینگل دیگر $P^*_{۱} \in \mathcal{P}^*_{NUI}$ همان‌گونه‌که در [۶۶] توصیف شده است، مبین وقوع ناگهانی یک حباب است. اما آن‌گونه‌که در [۷] آمده است شار نیز در فضای $\mathcal{P}^*$ می‌تواند به آهستگی از $P^*_{\circ}$ به $P^*_{۱}$ حرکت کند، و بنابراین تولد آهستهٔ یک حباب را به‌عنوان یک زیرمارتینگل القا کند.

برای درک عمیق‌تر دینامیک اندازهٔ احتمال P^*_t از لحاظ اقتصادی لازم است درکی درست از ریزساختار بازارهای مالی، یعنی، رفتار دینامیک عاملان با ترجیحات و انتظارات ناهمگن و تأثیرات متقابل آن‌ها، با تأکید خاص بر اثرات «گله‌ای» که محرّک حباب‌ها و ریزش‌ها هستند، داشته باشیم. پیش از این، مدل‌های نمونه مانند مدل‌های موجود در [۴۱] و مراجع آن، سعی کرده‌اند برخی از این اثرات را شناسایی کنند، اما مدل‌های ریزساختار قانع‌کننده که امکانات جدی برای پیش‌بینی دنیای واقعی ارائه دهند، هنوز دور از دسترس است.

بااین‌حال نیاز فزاینده‌ای وجود دارد تا تصویر اقتصاد خرد کلاسیک از معامله‌گران نوفه[۳] و معامله‌گران اطلاعات[۴] با در نظرگرفتن مجموعه‌ای متنوع از الگوریتم‌هایی که عملاً در بازار مالی به کار می‌روند، تکمیل شود. دراین‌صورت ممکن است تحلیل دینامیک قیمتِ حاصل بسیار قابل پی‌گیری باشد، زیرا ساختار الگوریتم‌های معامله بسیار شفاف‌تر و ساده‌تر از رفتار کارگزاران منفرد است. هرچند ممکن است مطلوبیت اجتماعی این نوع الگوریتم‌ها جای بحث داشته باشد، مهم این است که اثرات آن‌ها را به زبان ریاضی تا حد ممکن به‌روشنی بفهمیم. به‌ویژه چنین فهمی برای هر

[1]abrupt regime changes [2]bubble [3]noise trader [4]information trader

کوششی جهت طراحی چارچوب تنظیم مقرارات هوشمند که فرصت‌های جدید آربیتراژ و بنابراین منابع جدید ناپایداری مالی ایجاد نکند، بسیار حیاتی است. در بخش‌های ۶ و ۷ برخی از ساده‌ترین مسائلی را که دررابطه‌با تداخل الگوریتم‌های معامله پدید می‌آیند مورد بحث قرار می‌دهیم.

۵ عدم‌قطعیت نایتی

در سال‌های اخیر، آگاهی فزاینده‌ای در میان دانشگاهیان و فعالان بازار نسبت به مسائلی پیدا شده است که از اتکای روزافزون به یک مدل احتمالاتی و «توهم کنترل» ناشی از آن، الهام می‌گیرند؛ برای نمونه نگاه کنید به بخش ۴.۹ در [۶۰]. درنتیجه روی مسئلهٔ عدم قطعیت مدل[۱] یا ابهام مدل[۲] که به افتخار فرانک نایت [۷۳]، که وجه تمایز بین «ریسک» و «عدم قطعیت» را در زمینهٔ نظریهٔ تصمیم اقتصادی ابداع کرد، «عدم قطعیت نایتی» هم نامیده می‌شود تمرکز جدیدی سازمان یافته است. در اینجا «ریسک» به موقعیت‌هایی اشاره دارد که چیزی در مورد اندازهٔ احتمال P معلوم است («مجهولات معلوم»)، درحالی‌که «عدم قطعیت» به موقعیت‌هایی اشاره دارد که این مورد برقرار نیست («مجهولات نامعلوم»). ترنر ریویو [۱۰۵] در تحلیل خود از بحران‌های وام‌های کم‌اعتبار[۳] بین «ریسک قابل‌مدل‌سازی ریاضی» و عدم‌قطعیت نایتی تمایز قائل می‌شود، و بنابراین به نظر می‌رسد که این نکته را مطرح می‌کند که عدم قطعیت نایتی مفهومی ماورای محدودهٔ آنالیز ریاضی است. البته ما این نتیجه‌گیری را قبول نداریم، برعکس، عدم قطعیت نایتی را سرچشمه‌ای غنی از مسائل جدید ریاضی می‌دانیم. این موضوع را با بیان دو پیشرفت جدید که در آن‌ها عدم‌قطعیتِ مدل به‌صراحت در نظر گرفته می‌شود، تشریح می‌کنیم. در بخش ۱.۵ چگونگی توسعهٔ برخی مباحث اصلی پوشش ریسک در ریاضیات مالی را بدون توسل به اندازهٔ احتمال بررسی می‌کنیم. مثال دوم تعیین شرایط سرمایه و ترجیحات برحسب سنجهٔ ریسک محدب است که در بخش ۲.۵ ارائه می‌شود. در اینجا تحلیل به انتخاب مشخصی از اندازهٔ احتمال گره نخورده است. درعوض ردهٔ کل مدل‌های احتمالاتی را در نظر می‌گیرند و رویکرد محافظه‌کارانهٔ بدترین‌حالت را پیش می‌برند.

۱.۵ پوشش بدون احتمال

بازاری مالی با دو دارایی، یکی ریسکی و دومی بدون ریسک، را در نظر بگیرید. معمولاً در جریان کلی نظریهٔ مالی مدل تحولات قیمت دارایی ریسکی را فرایندی تصادفی در نظر می‌گیرند که روی

[1] model uncertainity [2] model ambiguity [3] subprime

یک فضای احتمال تعریف شده است. اما ما در این مقاله مطالعه را در یک زمینهٔ اکیداً مسیری پیش خواهیم برد. کل فرض ما این است که تحولات قیمت‌های دارایی با یک مسیر پیوستهٔ نامنفی $(X_t)_{\circ\leq t\leq T}$ داده می‌شود. مثل قبل، برای سادگی کار فرض می‌کنیم که قیمت‌های دارایی بدون ریسک، یا «اوراق قرضه»، توسط $B_t = ۱$ به‌ازای‌هر t داده می‌شود.

اکنون امکان معاملهٔ دینامیک در این بازار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای این منظور سبد مالی $(\xi_t, \eta_t)_{\circ\leq t\leq T}$ را در نظر بگیرید که در آن ξ_t معرف تعداد سهام دارایی ریسکی و η_t معرف تعداد سهام اوراق قرضه موجود در سبد در لحظهٔ t است. ارزش این سبد عبارت است از

$$V_t = \xi_t X_t + \eta_t B_t = \xi_t X_t + \eta_t. \tag{۸}$$

برای بحث در مورد سبدهای سرمایه‌گذاری یا پوششی در این چارچوب، تعریف سبدهای معاملاتی خودتأمین ضروری است. با عبور از چارچوب گسسته‌زمان به حد پیوسته‌زمان به این نتیجه می‌رسیم که سبد $(\xi_t, \eta_t)_{\circ\leq t\leq T}$ را خودتأمین بنامیم مشروط بر اینکه فرایند ارزش (۸) در رابطهٔ

$$V_t = V_\circ + \int_\circ^t \xi_s dX_s, \qquad \circ \leq t \leq T \tag{۹}$$

صدق کند، که در اینجا انتگرال برابر حد مجموع‌های ریمان سازوار[1] است:

$$\int_\circ^t \xi_s dX_s = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{t_i^n \leq t} \xi_{t_{i-۱}^n}(X_{t_i^n} - X_{t_{i-۱}^n}). \tag{۱۰}$$

در اینجا می‌توان اعداد t_i^n را به‌صورت $i۲^{-n}$ انتخاب کرد. بنابر قضیه‌های [۳۸] این گزاره برقرار است وقتی‌که مسیر X دارای وردش درجه دوم[2] پیوستهٔ

$$[X]_t = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{t_i^n \leq t} \xi_{t_{i-۱}^n}(X_{t_i^n} - X_{t_{i-۱}^n})^۲, \qquad \circ \leq t \leq T,$$

باشد و ξ به‌صورت $\xi_t = g(X_t, A_t^۱, \ldots, A_k^t)$ باشد که در آن g تابعی پیوسته و نسبت به متغیر اول مشتق‌پذیر و برای مسیرهای پیوستهٔ $(A_t^i)_{\circ\leq t\leq T}$ با تغییر کراندار است. با این شرایط در [۳۸] نشان داده شده است که فرمول ایتو برای هر تابع f که به ردهٔ $C^۲$ تعلق داشته باشد به مفهوم اکیداً مسیری،

$$f(X_t) = f(X_\circ) + \int_\circ^t f'(X_s)dX_s + \frac{۱}{۲}\int_\circ^t f''(X_s)d[X]_s, \tag{۱۱}$$

[1]nonanticipative [adapted] [2]quadratic variation

برقرار است. توجه می‌کنیم که انتگرال دوم در این رابطه را می‌توان به‌صورت یک انتگرال اشتیلتیس تعریف کرد زیرا $[X]_t$ تابعی نانزولی از t است.

درنتیجه همان‌گونه‌که در [۳۹] ثابت شده است، باید وردش درجهٔ دوم مسیر غیرثابت X نابدیهی باشد تا جلوی امکان فرصت‌های آربیتراژ گرفته شود. دراصل، درغیراین‌صورت (۱۱) به صورت رایج قضیهٔ بنیادی حسابان، $f(X_t) = f(X_\circ) + \int_\circ^t f'(X_s)dX_s$، تقلیل می‌یابد، و بنابر (۹) سبد خودتأمین $\xi_t = ۲(X_t - X_\circ)$ و $\eta_t = (X_t - X_\circ)^۲ - \xi_t X_t$ ثروت اکیداً مثبت $V_t = (X_t - X_\circ)^۲$ را از ثروت اولیهٔ $V_\circ = \circ$ تولید خواهد کرد.

چارچوب معاملاتی بدون احتمال را که در بالا اشاره شد می‌توان برای تحلیل خطای پوشش و استحکام سبدهای پوششی مختصِ مدل نظیر سبدهای مورد مطالعه در [۳۶، ۹۸] به کار برد. حتی در برخی موارد خاص می‌توان سبدهای پوششی کاملاً مستقل از مدل پیدا کرد. اکنون این نکته را با انتقال مباحث از [۳۳، ۸۸] به زمینهٔ بدون احتمالِ مورد بحث در اینجا برای سواپ واریانس بیان می‌کنیم. سواپ واریانس یک مشتقهٔ مالی وابسته به مسیر با عایدی

$$H = \sum_{i=۱}^{n} (\log X_{t_{i+۱}} - \log X_{t_i})^۲$$

در لحظهٔ T است، که در آن $\circ < t_۱ < \ldots < t_n = T$ زمان‌های ثابت‌اند. معمولاً این زمان‌ها را طوری انتخاب می‌کنند که قیمت پایانیِ دارایی ریسکی در انتهای روز معاملاتی iاُم برابر X_{t_i} باشد. برای آشنایی بیشتر در مورد سواپ‌های واریانس نگاه کنید به [۱۴، ۱۵، ۵۳]. بنابراین وقتی n به‌قدرکافی بزرگ باشد می‌توان عایدی سواپ واریانس را با وردش درجهٔ دوم $\log X$، یعنی

$$H \approx [\log X]_T = \int_\circ^T \frac{۱}{X_t^۲} d[X]_t, \tag{۱۲}$$

تقریب زد. توجه می‌کنیم که برابری موجود در این رابطه از گزارهٔ ۱۰.۲.۲ در [۱۰۸] نتیجه می‌شود. ازسوی‌دیگر، با استفاده از لم ایتو در مورد تابع $\log x$ به دست می‌آوریم

$$\log X_T - \log X_\circ = \int_\circ^T \frac{۱}{X_t} d[X]_t - \frac{۱}{۲} \int_\circ^T \frac{۱}{X_t^۲} d[X]_t. \tag{۱۳}$$

با تلفیق (۱۲) و (۱۳) به دست می‌آوریم

$$H \approx \int_\circ^T \frac{۱}{X_t^۲} d[X]_t = ۲\log X_\circ - ۲\log X_T + ۲\int_\circ^T \frac{۱}{X_t} dX_t. \tag{۱۴}$$

انتگرال ایتوی طرف راست (۱۴) را می‌توان به‌عنوان ارزش نهایی سبد معاملاتی خودتأمینی در نظر گرفت که سرمایه‌گذاری اولیهٔ آن صفر است و در غیراین‌صورت شامل تعداد $\xi_t = \frac{۲}{X_t}$ دارایی ریسکی در زمان t است. برای تعبیر دو جملهٔ لگاریتمی موجود در (۱۴) فرمول بریدن–لیتسن‌برگر[1]

$$\begin{aligned} h(X_T) =& h(X_\circ) + h'(X_\circ)(X_T - X_\circ) \\ &+ \int_\circ^{X_\circ} (K - X_T)^+ h''(K) dK + \int_{X_\circ}^{\infty} (X_T - K)^+ h''(K) dK \end{aligned} \tag{۱۵}$$

(مثلاً نگاه کنید به تمرین ۳.۳.۱ در [۴۵]) را در مورد تابع $h(x) = \log x$ به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} H \approx& -\frac{۲}{X_\circ}(X^T - X_\circ) + \int_\circ^{X_\circ} (K - X_T)^+ \frac{۲}{K^۲} dK \\ &+ \int_{X_\circ}^{\infty} (X_T - K)^+ \frac{۲}{K^۲} dK + ۲\int_\circ^T \frac{۱}{X_t} dX_t. \end{aligned} \tag{۱۶}$$

بنابراین H را می‌توان با کنار هم نهادن دو سبد، یکی شامل فروش تعداد $\frac{۲}{X_\circ}$ قرارداد آتی ویژه[2] صفرقیمت، خرید تعداد $\frac{۲}{K^۲}dK$ اختیار فروش[3](OTM)، و خرید همان تعداد اختیار خرید OTM با سررسید T و قیمت توافقی K، و دیگری سبدی خودتأمین با دارایی $\xi_t = \frac{۲}{X_\circ}$ بازسازی کرد. مهم‌ترین ویژگی این رویکرد بازسازی، استقلال آن از مدل است. به این معنا که (۱۶) مستقل از دینامیک بالقوهٔ فرایند قیمت X معتبر است. بنابراین سبد بازسازی‌کننده از ریسکِ مدل، که ممکن است ناشی از انتخاب نامناسب دینامیک تخصیص‌یافته به دارایی رسک‌دار باشد، مستثنا است.

نتایجی مشابهٔ این نتایج برای سواپ‌های معروف به گاما یا سواپ‌های آنتروپی با عایدی

$$\sum_{i=۱}^{n} X_{t_i}(\log X_{t_{i+۱}} - \log X_{X_{t_i}})^۲$$

و نیز برای سواپ‌های واریانس کریدور[1] با عایدی

$$\sum_{i=۱}^{n} ۱_{\{A \le X_{t_i} \le B\}}(\log X_{t_{i+۱}} - \log X_{X_{t_i}})^۲$$

---
[1]Breeden-Litzenberger [2]forward contract [3]out of the money [1]corridor variance swaps

که در آن A و B اعدادی حقیقی هستند و $A < B$ نیز برقرار است؛ برای تعمیم‌های بیشتر نگاه کنید به [۲۴].

توجه کنید که فرمول بریدن–لیتسن‌برگر را می‌توان به‌عنوان یک استاتیک ساده، و بنابراین یک پوشش بدون مدل، برای اختیار $h(X_T)$ برحسب اختیارهای خرید و فروش و اختیارهای «وانیلی ساده»[۲] در نظر گرفت. در مواردی پوشش‌های استاتیک (یا فراپوشش‌ها) را نیز می‌توان برای مشتقه‌های وابسته به مسیر، نظیر اختیارهای با مانع[۳] و پس‌نگر[۴]، به دست آورد؛ نک. [۱۲، ۲۳، ۶۲].

همچنین می‌توانیم رویکرد اکیداً مسیری را برای فرمول‌بندی بحث مهم مربوط به پوشش در بخش ۲ به روش بدون احتمال به‌کار ببریم مشروط بر اینکه عدم‌قطعیت به ردهٔ مناسبی از سناریوها محدود شود. برای این منظور، تابع تلاطم[۵] $\sigma(x,t) > 0$ را روی $[0,\infty) \times [0,T]$ تثبت و سناریوهای ممکن را به مجموعهٔ Ω_σ متشکل از تمام توابع پیوسته و نامنفی ω روی $[0,T]$ محدود می‌کنیم به‌طوری‌که وردش درجهٔ دوم پیوستهٔ فرایند مختص $X_t(\omega) = \omega(t)$ به‌صورت $d[X(\omega)]_t = \sigma^2(X_t(\omega),t)X_t(\omega)^2$ باشد. مشتقهٔ $H = h(X_T)$ را در نظر بگیرید. اکنون همان‌طورکه در [۸، ۳۹] بیان شده است می‌توانیم تعمیم وابسته به مسیرِ فرمول ایتوی مسیری (۱۱) را برای ساختن یک پوشش کامل به‌صورت $\xi_t(\omega) = F_x(X_t(\omega),t)$ به کار ببریم که در آن F جواب یک معادلهٔ سهموی مشخص با شرط مرزی $F(x,T) = h(x)$ است. به‌علاوه، قضیه‌ای از پل لوی بیان می‌کند که تنها یک اندازهٔ احتمال P^* روی Ω_σ وجود دارد که X نسبت به آن مارتینگل است. دراین‌صورت می‌توان قیمت مشتقهٔ H را که به‌عنوان هزینهٔ اولیهٔ پوشش کامل تعریف می‌شود، مانند (۳) به‌عنوان امید ریاضی H، یعنی $E^*[H]$، نسبت به P^* محاسبه کرد.

برای توسعهٔ روش فوق به اختیارهای غیرعادی بیشتر، می‌توان از صورت اکیداً مسیری حسابان مالیاوَن[۶]، به‌گونه‌ای‌که اخیراً در [۳۴، ۲۱] آمده است، استفاده کرد. برای رویکرد مسیری دیگر برحسب مسیرهای خام[۷] نگاه کنید به [۵۲، ۸۰].

۲.۵ سنجهٔ ریسکِ پولی

شرط لازم سرمایهٔ وابسته به سود و زیان (P & L) یک موضع مالی داده شده عبارت است از کمترین سرمایه‌ای که باید به این موضع اضافه شود تا آن موضع از نظر کارگزار ناظر[۱] قابل قبول باشد. این

[2]plain vanilla options [3]barrier option [4]lookback option [5]volatility function [6]Malliavin [7]rough paths [1]supervising agency

مفهوم را می‌توان با استفاده از مفهوم سنجهٔ پولی ریسک[۲] به‌صورت زیر صورت‌بندی کرد.

P & L عبارت است از درآمد پولی خالص نامطمئن در انتهای یک دورهٔ معاملاتی معلوم، ازاین‌رو مدل آن را به‌صورت یک تابع حقیقی‌مقدارِ اندازه‌پذیر X روی یک فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{F})$ متشکل از سناریوهای ممکن در نظر خواهیم گرفت.

فضای خطی $\mathcal{X}$ متشکل از این‌گونه P & Lها و زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ وابسته به موضع‌هایی را که قابل‌قبول شناخته می‌شوند در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که $\mathcal{X}$ شامل تمام اعداد ثابت باشد و همچنین $Y \in \mathcal{A}$ اگر Xای متعلق به $\mathcal{A}$ یافت شود که $Y \geq X$. دراین‌صورت، تابعک

$$\rho(X) := \inf\{m \in R | X + m \in \mathcal{A}\} \tag{۱۷}$$

سنجهٔ ریسکِ پولی و عدد $\rho(X)$ سرمایهٔ مورد نیاز برای موضع مالی P & L آن X نامیده می‌شود.

مثال استاندارد سنجهٔ ریسک پولی «ارزش در معرض ریسک»[۳] در سطح اطمینانی مانند $\lambda \in (۰, ۱)$ است. به‌ازای یک مدل احتمالاتی که با اندازهٔ احتمال P بر $(\Omega, \mathcal{F})$ تعریف شده است، X برای این ارزش در معرض ریسک، قابل‌قبول نامیده می‌شود اگر احتمال نارسایی $P(X < ۰)$ بزرگ‌تر از λ نباشد. حالا سنجهٔ ریسک از رابطهٔ (۱۷)، صرف‌نظر از یک علامت منها، توسط λـ‌چندک‌ام توزیعِ X نسبت به P تعریف می‌شود. ارزشِ در معرض ریسک کاربردهای بسیاری دارد؛ ولی کاستی‌هایی هم دارد. به‌ویژه، اندازهٔ زیانِ ممکن را در نظر نمی‌گیرد و بنابراین متنوع‌سازی[۴] را جریمه و محدودسازی ریسک را تشویق می‌نماید. تشخیص این نارسایی‌ها موجب شد که رویکرد اصل موضوعی به نظریهٔ عمومی سنجه‌های ریسکِ پولی که توسط آرتزنر، دلباین، ابر، و هیث در اواخر دههٔ ۱۹۹۰ ابداع شد تقویت شود [۳]. اما نارسایی‌های دیگری نیز وجود دارد. مثلاً در واکنش به بحران‌های اخیر مالی، گزارش ترنر [۱۰۵] بر اتکای بیش از حد روی فقط یک مدل احتمالاتی P تأکید و بنابراین عدم‌قطعیت نایتی را مطرح می‌کند.

اکنون برخی عناصر اصلی نظریهٔ سنجه‌های ریسکِ محدب را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همان‌طورکه خواهیم دید توجه این نظریه فقط به این موضوع نیست که متنوع‌سازی نباید با نیازهای سرمایه محدود شود. بلکه این نظریه یک مطالعهٔ موردی دربارهٔ نحوهٔ رفتار با عدم اطمینان نایتی در یک چارچوب ریاضیاتی را نیز عرضه می‌کند.

---

[2] monetary risk measure [3] value at risk [4] diversification

برای رسیدن به این نکته که متنوع‌سازی باید توسط سنجهٔ ریسکِ پولی به جای تحدید تشویق شود، لازم است که مجموعهٔ قبول $\mathcal{A}$ محدب باشد. دراین‌صورت سنجهٔ ریسک پولی ρ که توسط رابطهٔ (۱۷) تعریف می‌شود، L سنجهٔ ریسک محدب نامیده می‌شود، زیرا تحدب $\mathcal{A}$ با تحدب ρ هم‌ارز است. وقتی $\mathcal{A}$ یک مخروط محدب باشد ρ را یک L سنجهٔ ریسک منسجم می‌نامند. مفهوم سنجهٔ ریسک منسجم در مقالهٔ بنیادی [۳] معرفی شد، تعمیم بعدی از سنجهٔ ریسک منسجم[1] به سنجه‌های ریسک محدب[2] به‌صورت مستقل در [۵۱، ۵۹، ۴۴] مطرح شده است. دوگانی محدب ایجاب می‌کند که فرمول سنجهٔ ریسک محدب نوعاً به‌صورت

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\rho} \{E_Q[-X] - \alpha(Q)\} \tag{۱۸}$$

باشد که در آن $\mathcal{Q}_\rho$ رده‌ای از اندازه‌های احتمال و $\alpha : \mathcal{Q}_\rho \to R \cup \{+\infty\}$ یک تابع جریمه است. بنابراین سرمایهٔ مورد نیاز به‌صورت زیر تعیین می‌شود: زیان مورد انتظار هر موضع به‌ازای هریک از اندازه‌های احتمال $Q \in \mathcal{Q}_\rho$ و جریمهٔ مربوط یعنی $\mathcal{Q}_\rho$ را محاسبه می‌کنیم، سپس بدترین زیان مورد انتظار جریمه‌شده روی $\mathcal{Q}_\rho$ را انتخاب می‌کنیم. این روش را در رابطه با عدم‌قطعیت مدل می‌توان به‌صورت زیر توصیف کرد. هیچ اندازهٔ احتمالی پیشاپیش تثبیت نمی‌شود، ولی اندازهٔ احتمال $Q \in \mathcal{Q}_\rho$ از طریق دوگانی محدب وارد می‌شود و نقش آزمون‌های تنش[3] را ایفا می‌کند. مجموعهٔ $\mathcal{Q}_\rho$ را می‌توان به‌عنوان رده‌ای از مدل‌های احتمالاتی در نظر گرفت، که در آن هر مدل $Q \in \mathcal{Q}_\rho$ بسته به اندازهٔ $\alpha(Q)$ کم‌وبیش جدی در نظر گرفته و بنابراین عدم‌قطعیت مدل بررسی می‌شود. در حالت خاص، ریسک منسجم تابع جریمه روی $\mathcal{Q}_\rho$ صفر می‌شود، و بنابراین فرمول (۱۸) در بدترین حالت زیان مورد انتظار، روی $\mathcal{Q}_\rho$ به

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\rho} E_Q[-X] \tag{۱۹}$$

تبدیل می‌شود.

روشن است که در زمینهٔ مدل بازار مالی ناکامل، مدلی که بدون آربیتراژ و احتمالاً ناکامل است، سنجهٔ ریسکِ فراپوششی

$$\rho(X) = \sup_{P^* \in \mathcal{P}^*} E^*[-X]$$

[1] coherent risk measure [2] convex risk measure [3] stress test

منسجم است. مجموعهٔ قبول متناظر $\mathcal{A}$ از تمام Xهایی تشکیل شده است که بتوان برای هریک از آن‌ها یک سبد پوششی دینامیک با ارزش اولیهٔ $V_\circ = \circ$ و درآمد نهایی V_T پیداکرد به‌طوری‌که عایدی موضع مرکب $X + V_T$ با احتمال ۱ نامنفی شود.

همان‌طورکه اشاره شد، در زمینهٔ ریاضیات مالی تاریخچهٔ ریسک منسجم و سنجهٔ ریسک محدب با مقالهٔ اساسی [۳] آغاز می‌شود. اما این مفاهیم در زمینهٔ وسیع‌تر ریاضیاتی، مثلاً نظریهٔ بازی‌ها و انتگرال‌گیری شوکه[۱] [۳۰، ۹۹]، آمار استوار[۲] [۶۳، ۶۴]، و اصول بیمهٔ بیم‌سنجی[۳] [۳۱، ۵۷]، پیشینهٔ قابل‌ملاحظه‌ای دارند.

همچنین سنجه‌های ریسک در نظریهٔ اقتصاد خردِ ترجیحات به‌صورت ضمنی ظاهر شده‌اند. معمولاً ترجیحات روی فضای $\mathcal{X}$ را با تابعک مطلوبیت U روی $\mathcal{X}$ نشان می‌دهند. این تابعک تحت اصول موضوعهٔ عقلانیت که فون نویمان و مورگنشترن [۱۰۰] و سَویج [۶۳] صورت‌بندی کرده‌اند به‌صورت مطلوبیت مورد انتظار

$$U(X) = E_P[u(X)] \tag{۲۰}$$

به‌ازای تابعی صعودی و پیوسته‌ای مانند u و یک اندازهٔ احتمال P بر $(\Omega, \mathcal{F})$ بیان می‌شود. به‌طوری‌که گیلبوآ و اشمایدلر در اواخر دههٔ هشتاد ثابت کرده‌اند [۵۶]، تعدیلی طبیعی از اصول موضوعهٔ منطقی ایجاب می‌کند که باید سنجهٔ ریسک کلی

$$U(X) = -\rho(u(X)) = \inf_{Q \in Q_\rho} E_Q[u(X)]$$

جایگزین سنجهٔ ریسک خطی $-E_P[\cdot]$ در (۲۰) گردد. در همین اواخر نیز ماکّرونی، مارینانّچی، و روستّینی [۸۱] اصول موضوعهٔ منطقی را باز هم تعدیل کردند. اکنون در مجموعهٔ اصول آن‌ها ρ یک سنجهٔ ریسک است، و بنابراین نمایش عددی ترجیحات به‌شکل

$$U(X) = -\rho(u(X)) = \inf_{Q \in Q_\rho} \{E_Q[u(X)] + \alpha(Q)\}$$

در می‌آید. هرچند ریسک‌گریزی کلاسیک را می‌توان با تقعر تابع مطلوبیت u رهگیری کرد، اما، تقعر ρ متناظر است با یک فرض رفتاری‌گریز مدل از عدم‌قطعیت؛ نک. [۸۱، ۵۶، ۴۵].

---
[1] Choquet [2] robust statistics [3] actuarial premium principles

۶ شکل‌گیری قیمت، ریزساختار بازار، و ظهور دادوستد الگوریتمی

وقتی لویی بشیلیه و پل ساموئلسون مدل‌های فرایندهای قیمت دارایی را صورت‌بندی می‌کردند، سفارشات معمولاً با علامت‌های کارگزاران در محوطه‌های معاملاتی بازار مالی صورت می‌گرفت. اما در سال‌های اخیر روش کار این بازارها به‌شدت تغییر یافته است. اکنون برخی از چالش‌های ریاضیات مالی را در ارتباط با این تغییرات مورد بحث قرار می‌دهیم.

نخستین بازار الکترونیکی جهان (نزدک)[1] در ۱۹۷۱ فعالیت خود را آغاز کرد. در دهه‌های بعدی آشنایی با سنجه‌های مقررات‌زدایی[2] و پیشرفت‌های فنّاوری موجب شد محوطه‌های معاملاتی جای خود را به بورس‌های کاملاً الکترونیکی بدهند. اساساً چنین بازار الکترونیکی‌ای با دو نوع سفارش متفاوت سروکار دارد، سفارش‌های محدود[3] و سفارش‌های بازار[4]. سفارش محدود سفارشی است برای خرید یا فروش تعدادی معیّن از سهمی به قیمتی معیّن. این سفارش‌ها در کتابچهٔ الکترونیکی شفارشات حدی جمع می‌شود تا زمانی‌که یک سفارش خرید یا فروش با شرایط معیّن‌شده مطابقت داشته باشد. سفارشِ بازار سفارشی است برای خرید یا فروش تعدادی معیّن از سهمی به بهترین قیمتِ جاریِ در دسترس. بنابراین، این بازار، سفارش‌های حدی را برحسب اولویتِ قیمت مصرف می‌کند. وقتی حجم کلی تمام سفارشاتِ حدی با بهترین قیمت از حجمِ سفارشِ واردهٔ بازار بزرگ‌تر باشد، سفارش‌های حدی طبق قاعدهٔ «ورودی اول خروجی اول است» اجرا می‌شوند. بنابراین در این سطح میکروسکوپیک، دینامیک‌های قیمتِ دارایی با یک فرایند انتشار یک‌بُعدی نمایش داده نمی‌شود بلکه با تحولات دفترِ کلِ سفارش، که از لحاظ ریاضی می‌تواند به‌عنوان یک دستگاه صفِ پیچیده تلقی شود، نمایش داده می‌شود. بنابراین اصولاً می‌توان مدل ریاضی آن را به دست آورد. می‌توان با در دست داشتن مدلی مناسب، تصویر میکروسکوپیک را «بزرگ‌نمایی»[5] کرد و دینامیک حدی قیمت متوسط (یعنی میانگین بهترین قیمت‌های خرید و فروش حدی) را در یک مقیاس انتشار متوسط به دست آورد. این کار یا می‌تواند به تأیید پارادایم مدل‌سازی استاندارد ریاضیات مالی یا به کشف انواع جدیدی از دینامیک‌های قیمت‌های دارایی منجر شود. مطالعات اولیه در رابطه با این مسائل در [۴، ۱۱، ۱۹، ۲۰، ۲۲] انجام شده است و مثلاً [۱۹] مدلی از نوع بشیلیه در حد انتشار پیدا کرده است.

ورود جایگاه‌های معاملهٔ الکترونیکی به بازار امکان استفاده از رایانه‌ها برای ثبت سفارش را

[1] NASDAQ [2] market deregulation [3] limit order [4] market order [5] zoom-out

فراهم کرد، و خیلی زود پدیده‌های «معاملات الگوریتمی»[1] و «معاملات با فراوانی بالا»[2] به وجود آمدند. امروزه دفترهای ثبت سفارشِ حدی در بازه‌های زمانی یک‌هزارم ثانیه بروز می‌شوند طوری‌که احتمالاً هیچ‌کس نمی‌تواند تغییرات قیمت دارایی‌های نقدشوندهٔ سریع را دنبال کند. بنابراین استفاده از رایانه برای بازارسازان و بسیاری از معامله‌گران دیگر ممنوع است. درنتیجه اکنون سفارش‌های بسیار بزرگ در بازارهای سهام با الگوریتم‌های رایانه‌ای انجام می‌شود. توصیف خوبی از وضعیت جاری بازار الکترونیک در [۷۹] داده شده است.

رایانه‌ای‌کردن بازارهای مالی اثرات بالقوه سودمندی داشته است. مثلاً تأمین نقدینگی توسط بازارسازان با فراوانی بالا و رقابت بین تعداد فزایندهٔ جایگاه‌های دادوستد الکترونیکی موجب شد که دامنک پیشنهادی به‌طور قابل‌ملاحظه‌آی کاهش و بنابراین هزینه‌های سرمایه‌گذاران معمولی تقلیل یابد. همچنین این امیدواری پیدا شد که برنامه‌های رایانه‌ای، منطقی‌تر از آدم‌ها عمل خواهند کرد. اما، این امیدها خیلی زود با «سقوط ناگهانی بازار»[3] ششم می سال ۲۰۱۰ به چالش کشیده شدند. آن روز یک سفارشِ فروش در بازاری هراسان موجب شد که بازی «سیب‌زمینی داغ» میان الگوریتم‌های معاملاتی معامله‌گران با فراوانی بالا (HFT) در بگیرد، درنتیجه قیمت دارایی‌ها با تندترین شیب نزول کرد و بی‌درنگ در مدت ۲۰ دقیقه اوضاع به‌سرعت به حال اول بازگشت. نکتهٔ زیر از صفحهٔ سوم [۱۸] اشاره می‌کند که عملاً این ریزش سریع در نتیجهٔ بازخورد سریز[4] بین چند الگوریتم معاملاتی شکل گرفته است:

> معامله‌گران با فراوانی بالا به‌سرعت شروع کردند به خرید قراردادها و سپس فروش آن‌ها به یکدیگر ــ به‌این‌ترتیب تأثیر حجم «سیب‌زمینی داغ» را با حرکت سریع همان موضع‌ها به عقب و جلو شکل دادند. HFTها در بازهٔ زمانی ۲:۴۵:۱۳ تا ۲:۴۵:۲۷ تعداد ۲۷۰۰۰ قراردادْ معامله کردند که تقریباً ۴۹ درصد حجم کل معاملات بود، درحالی‌که فقط ۲۰۰ قرارداد خالص اضافی خریده بودند.

فهمیدن دلایلی که چرا معاملات الگوریتمی تعاملی[5] می‌تواند به چنین «بازی سیب‌زمینی داغی» منجر شود و بازتولید آن به‌صورت یک مدل ریاضی چالش جذابی است. همان‌طورکه در بخش آتی خواهیم دید نتایج اولیهٔ موجود ممکن است با این پدیده مرتبط باشد.

علاوه‌بر تولید سناریوهای ممکن، معاملات الکترونیک جنبه‌های دیگری هم دارد که بالقوه

[1]alghoritmic trading [2]high-frequency trading [3]Flash-Crash [4]overflow feedback [5]intracting trading algorithm

مسئله‌دارند. مثلاً الگوریتم‌های معاملاتی شکارچی (متجاوز) علائم سفارش نمونه‌هایی را که از انجام معامله‌های بزرگ حاصل می‌شوند ردیابی می‌کنند. به‌محض اینکه چنین معاملهٔ بزرگی انجام شود، الگوریتم معاملاتی شکارچی سعی می‌کند با ساختن موضعی که ارزش آن به‌وسیلهٔ تأثیرات قیمتی ناشی از این معاملهٔ بزرگ صعود خواهد کرد سودی به جیب بزند؛ نک. [۱۳، ۱۶، ۱۰۱]. برای رهایی از تأثیرات نامطلوب ضربات قیمت و معاملات شکاری[1] سیاری از سرمایه‌گذاران به استخرهای به‌اصطلاح تاریک، که در آن‌ها سفارشات برای سایر فعالان بازار غیرقابل مشاهده است، متوسل می‌شوند. اما این نکته که بسیاری از استخرهای تاریک قیمت عملیاتی سفارشات را از بازار شفاف[2] به دست می‌آورند، روش‌های معاملاتی شکاری مانند سرقت دیجیتالی[3] را که مبتنی‌بر معاملات قیمت در بازار شفاف است، امکان‌پذیر می‌کند؛ نک. [۷۲، ۷۷، ۸۳].

۷ اثر قیمتی و اجرای سفارش

کلید فهم معاملات الگوریتمی و فواید و ریسک‌های بالقوهٔ آن در پدیدهٔ «اثر قیمتی» نهفته است، به این معنا که اجرای یک سفارش بزرگ در قیمتِ دارایی پایه تأثیر می‌گذارد. این یکی از مهم‌ترین سازوکارهای پایه‌ای است که به‌وسیلهٔ آن عاملان با بازار و بنابراین با یکدیگر تعامل می‌کنند. موارد خاصی که در آن‌ها اثر قیمتی نقشی مهم داشته است عبارت‌اند از رسوایی متال‌گزل‌شافت[4] در ۱۹۹۳، بحران LTCM در ۱۹۹۸، نقدکردن سبد ژِرُم کِرویئل[5] توسطر سوسیته ژنرال[6] در ۲۰۰۸. اما اثر قیمتی در معاملات بسیار کوچک‌تر هم اهمیت دارد، و در کسب‌وکار روزانهٔ خیلی از مؤسسات مالی وجود دارد.

قدم نخست برای فهم اثر قیمتی در انجام دادن یک معاملهٔ تکی نهفته است، مسئله‌ای که می‌توان آن را در مقیاس‌های بسیاری مشاهده کرد. در مقیاس میکروسکوپی معاملهٔ موردنظر به‌قدر کافی کوچک است و باید با ثبت یک سفارش در دفتر سفارش محدود انجام شود. وقتی این سفارش به‌عنوان سفارش بازار ثبت شود، با کاهش سفارش‌های محدود بر دفتر سفارشات محدود تأثیر خواهد گذاشت، و اگر به‌قدرکافی بزرگ باشد بهترین قیمت متناظر را جابه‌جا و دامنک خریدوفروش را وسیع‌تر خواهد کرد؛ نک. [۱، ۸۹، ۱۰۷]. وقتی این معامله شامل ثبت یا لغو یک سفارش محدود باشد، تبیین تأثیر کمّی آن چندان آسان نیست، اما درهرحال وجود دارد. درهرحالت، اثر یک معامله گذرا است و سرانجام محو می‌شود، نکته‌ای که در سطح مزوسکوپیک (متوسط)[1] بعدی حائز اهمیت

[1] predatory trading [2] lit market [3] fishing [4] Metallgesellschaft [5] Jérôme Kerviel [6] Société Générale
[1] mesoscopic level

است.

بسیاری از معاملات آن‌قدر بزرگ‌اند که با یک سفارش تکی قابل اجرا نیستند و بنابراین لازم است که به سفارش‌های کوچک‌تر موسوم به «بچه‌سفارش‌ها»یی تجزیه شوند که بعداً در یک بازهٔ زمانی مشخص توزیع می‌شوند. در این مقیاس مزوسکوپی، الگوریتم‌های معاملاتی برای تعیین حجم و زمان‌بندی هر بچه‌سفارش مورد استفاده قرار می‌گیرند. این الگوریتم‌ها نوعاً مبتنی‌بر یک مدل اثر قیمتی هستند، یعنی، مدلی تصادفی برای قیمت‌های دارایی که اثرات پس‌خور استراتژی‌های معاملاتی را در نظر می‌گیرند. برای دیدن برخی مدل‌ها که هم‌اکنون در دسترس‌اند به [۵۵] رجوع کنید. مسئلهٔ تعیین استراتژی‌های بهینهٔ اجرای سفارش‌ها برای یک معیار هزینهٔ داده‌شده در یک مدل مشخص، ساختاری غنی دارد و معمولاً به سؤالاتی که جذابیت ریاضی ذاتی دارند می‌انجام‌اند. برای مثال این مسئلهٔ مرتبط است با مباحث ریاضیِ کنترل سوخت محدود، نظریهٔ ظرفیت شوکه، ابرفرایندهای داوسون–واتانابه[2] مورد آخری را آن‌طورکه در [۹۷] تشریح شده است قدری توضیح می‌دهیم. هنگام صورت‌بندی مسئلهٔ اجرای بهینهٔ معامله به‌صورت یک مسئلهٔ کنترل بهینه، شرط نقد کردن به یک شرط نهایی تکینه برای معادلهٔ همیلتون–ژاکوبی–بلمن تبدیل می‌شود. این معادله را می‌توان ساده‌تر کرد و معادلهٔ دیفرانسیل جزئی سهموی شبه‌خطی با بی‌نهایت شرط نهایی به دست آورد. اما بنابر [۳۵] این‌گونه معادلات با تابعک‌های لاپلاسِ ابرفرایندهای داوسون–واتانابه مرتبط‌اند.

همچنین، بود یا نبود یک ساختار بهینه برای استراتژی‌های اجرای بهینهٔ معاملات می‌تواند اطلاعاتی در مورد کارآیی مدل اثر بازار زمینه و حتی شاید در مورد ماهیت خود اثر قیمتی اطلاعاتی ارائه دهد؛ نک. [۲، ۵۴، ۶۵]. مثلاً در [۲] نشان داده شده است که اثر قیمتی سفارش‌های تک‌دارایی به‌عنوان تابعی محدب از زمان کاهشی باشد تا راهبردهای اجرای معاملات نوسانی را که تا حدی یادآور «بازی سیب‌زمینی داغ»اند، حذف کند.

باید اشاره کنیم که مدل‌های اثر قیمتی که اکنون در دسترس‌اند، نسبتاً ساده‌اند. به‌ویژه، هنوز مدلی وجود ندارد که به‌طریقی واقعاً قانع‌کننده گذرایی و غیرخطی‌بودن اثر قیمتی را با هم ترکیب کند. در مقیاس کلان، به نظر می‌رسد که اجرای معامله با رفتار سایر عاملان ـــ یا الگوریتم‌های ـــ بازار مرتبط است. به‌طوری‌که پیش از این گفتیم، این نکته که عاملی در حال انجام یک معاملهٔ بزرگ است می‌تواند مثلاً از طریق علائمی که توسط الگوریتم اجرا تولید می‌شود، برای رقبا افشا شود. وقتی رقیبی از اجرای معامله‌ای بزرگ آگاه می‌شود، عموماً عقیده بر این است که معاملهٔ شکاری،

[2] Dawson-Watanabe superprocesses

همان‌طورکه در بالاگفته شد، متناظر است با راهبرد ماکسیمم‌کنندهٔ سود. این مطلب همچنین در [۱۶] از تحلیل یک زمینهٔ مربوط در نظریهٔ بازی‌ها هم به دست آمده است. اما، با کمی تعمیم این وضعیت در [۱۰۱] ثابت شده است که ممکن است معاملهٔ شکاری در بازارهایی که به‌قدر کافی «کششی»[1] هستند، به این معنا که اثر قیمتی سفارش‌ها به سرعت زوال می‌یابد، زیربهینه[2] باشد. در این نوع بازارها برای رقبا بهتر است با معامله‌گر بزرگ به جای رقابت همکاری کرده و نقدینگی مبادله کنند. اما وقتی اثر قیمتی (تدریجاً) گذرا است یک الگوی کاملاً متفاوت رخ می‌دهد. شونِبورن در [۱۰۰] نشان داده است که در یک مدل گسسته‌زمان با اثر قیمتی خطی و با زوال نمایی[3] معامله‌گر بزرگ و رقیب‌اش وارد یک بازی «سیب‌زمینی داغ» می‌شوند که بسیار شبیه چیزی است که در «سقوط ناگهانی بازار» دیده شد.

مراجع

[1] Alfonsi, A., Fruth, A., Schied, A., Optimal execution strategies in limit order books with general shape functions, *Quant. Finance*, **10** (2010), 143–157.

[2] Alfonsi, A., Schied, A., Slynko, A., Order book resilience, price manipulation, and the positive portfolio problem, *SIAM J. Financial Math.*, **3** (2012), 511–533.

[3] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., Heath, D., Coherent measures of risk, *Math. Finance*, **9** (1999), 203–228.

[4] Avellaneda, M., Stoikov, S., High-frequency trading in a limit order book, *Quant. Finance*, **8** (2008), 217–224.

[5] Bachelier, L., *Theorie de la Speculation: Theorie Mathematique du Jeu*, Les Grands Classiques, Gauthier-Villars, Paris, 1995.

[6] Bernoulli, D., Specimen theoriae novae de mensura sortis, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, **5** (1738), 175–1926.

[7] Biagini, F., Föllmer, H., Nedelcu, S., Shifting martingale measures and the birth of a bubble as a submartingale, 2011 (unpublished manuscript).

[8] Bick, A., Willinger, W., Dynamic spanning without probabilities, *Stochastic Process. Appl.*, **50** (1994), 349–374.

[9] Black, F., Scholes, M., The pricing of options and corporate liabilities, *The Journal of Political Economy*, (1973), 637–654.

[10] Borkar, V. S., Konda, V. R., Mitter, S. K., On De Finetti coherence and Kolmogorov probability, *Statist. Probab. Lett.*, **66** (2004), 417–421.

[11] Bovier, A., Černý, J., Hryniv, O., The opinion game: Stock price evolution from microscopic market modeling, *Int. J. Theor. Appl. Finance*, **9** (2006), 91–111.

[12] Brown, H., Hobson, D., Rogers, L. C. G., Robust hedging of barrier options, *Math. Finance*, **11** (2001), 285–314.

[13] Brunnermeier, M. K., Pedersen, L. H., Predatory trading, *J. Finance*, **60** (2005), 1825–1863.

[14] Bühler, H., Consistent variance curve models, *Finance Stoch.*, **10** (2006), 178–203.

---

[1] elastic [2] suboptimal [3] exponential decay

[15] Bühler, H., Volatility markets: Consistent modeling, hedging and practical implementation, Ph.D. thesis, TU, Berlin, 2006.

[16] Carlin, B. I., Lobo, M. S., Viswanathan, S., Episodic liquidity crises: Cooperative and predatory trading, *J. Finance*, **65** (2007), 2235–2274.

[17] Cassidy, J., *How Markets Fail: The Logic of Economic Calamities*, Farrar, Straus & Giroux, New York, 2009.

[18] CFTC-SEC, Findings regarding the market events of May 6, 2010, Technical report, 2010.

[19] Cont, R., de Larrard, A., Linking volatility with order flow: Heavy traffic approximations and diffusion limits of order book dynamics, 2010 (unpublished manuscript).

[20] Cont, R., de Larrard, A., Price dynamics in a Markovian limit order market, *SIAM J. Financial Math.* (to appear).

[21] Cont, R., Fournie, D. A., Functional Ito calculus and stochastic integral representation of martingales, *Ann. Probab.*, **41** (2013), 109–133.

[22] Cont, R., Kukanov, A., Stoikov, S., The price impact of order book events, 2010 (unpublished manuscript), available at `arXiv:1011.6402`.

[23] Cox, A. M. G., Oblòj, J., Robust hedging of double touch barrier options, *SIAM J. Financial Math.*, **2** (2011), 141–182.

[24] Davis, M., Oblòj, J., Raval, V., Arbitrage bounds for weighted variance swap prices, *Math. Finance.* (to appear).

[25] de Finetti, B., *Theory of Probability: A Critical Introductory Treatment, Vol. 1*, Wiley Classics Library, Wiley, Chichester, 1990.

[26] de Finetti, B., *Theory of Probability: A Critical Introductory Treatment, Vol. 2*, Wiley Classics Library, Wiley, Chichester, 1990.

[27] Delbaen, F., Schachermayer, W., A general version of the fundamental theorem of asset pricing, *Math. Ann.*, **300** (1994), 463–520.

[28] Delbaen, F., Schachermayer, W., The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes, *Math. Ann.*, **312** (1998), 215–250.

[29] Delbaen, F., Schachermayer, W., *The Mathematics of Arbitrage*, Springer Berlin, 2006.

[30] Dellacherie, C., Quelques commentaires sur les prolongements de capacités, in *Séminaire de Probabilités, V (Univ. Strasbourg, Année Universitaire 1969–1970),* Lecture Notes in Math., vol. 191, Springer, Berlin, 1971, 77–81.

[31] Deprez, O., Gerber, H. U., On convex principles of premium calculation, *Insurance Math. Econom.*, **4** (1985), 179–189.

[32] Doeblin, W., Sur L'équation de Kolmogoroff, Par W. Doeblin, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, Math.*, **3** 31 (2000).

[33] Dupire, B., Model art, *Risk*, **6** (1993), 118–124.

[34] Dupire, B., Functional Itô Calculus, Bloomberg Portfolio Research paper, (2009).

[35] Dynkin, E. B., Superdiffusions and parabolic nonlinear differential equations, *Ann. Probab.*, **20** (1992), 942–962.

[36] El Karoui, N., Jeanblanc-Picquè, M., Shreve, S. E., Robustness of the Black and Scholes formula, *Math. Finance*, **8** (1998), 93–126.

[37] El Karoui, N., Quenez, M. C., Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market, *SIAM J. Control Optim.*, **33** (1995), 29–66.

[38] Föllmer, H., Calcul d'Itô sans probabilités, in *Seminar on Probability, XV (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1979/1980)*, Lecture Notes in Math., vol. 850, Springer, Berlin, 1981, 143–150.

[39] Föllmer, H., Probabilistic aspects of financial risk, in *European Congress of Mathematics, (Barcelona, 2000)*, Progr. Math., vol. 201 Birkhäuser, Basel, 2001, 21–36.

[40] Föllmer, H., Gundel, A., Robust projections in the class of martingale measures, *Illinois J. Math.*, **50** (2006), 439–472.

[41] Föllmer, H., Horst, U., Kirman, A., Equilibria in financial markets with heterogeneous agents: A probabilistic perspective, *J. Math. Econom.*, **41** (2005), 123–155.

[42] Föllmer, H., Kabanov, Y. M., Optional decomposition and Lagrange multipliers, *Finance Stoch.*, **2** (1998), 69–81.

[43] Föllmer, H., Leukert, P., Efficient hedging: Cost versus shortfall risk, *Finance Stoch.*, **4** (2000), 117–146.

[44] Föllmer, H., Schied, A., Convex measures of risk and trading constraints, *Finance Stoch.*, **6** (2002), 429–447.

[45] Föllmer, H., Schied, A., *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*, third revised and extended ed., de Gruyter, Berlin, 2011.

[46] Föllmer, H., Schied, A., Weber, S., Robust preferences and robust portfolio choice, in *Mathematical Modelling and Numerical Methods in Finance*, P. Ciarlet, A. Bensoussan, Q. Zhang, eds., Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2009, 29–88.

[47] Föllmer, H., Schweizer, M., Hedging of contingent claims under incomplete information, in *Applied Stochastic Analysis (London, 1989)*, Stochastics Monogr., vol. 5, Gordon and Breach, New York, 1991, 389–414.

[48] Föllmer, H., Schweizer, M., A microeconomic approach to diffusion models for stock prices, *Math. Finance*, **3** (1993), 1–23.

[49] Föllmer, H., Schweizer, M., The minimal martingale measure, in *Encyclopedia of Quantitative Finance*, R. Cont, ed., Wiley., Hoboken, NJ, 2010, 1200–1204.

[50] Föllmer, H., Sondermann, D., Hedging of nonredundant contingent claims, in *Contributions to Mathematical Economics*, Amsterdam, 1986, 205–223.

[51] Frittelli, M., Rosazza Gianin, E., Putting order in risk measures, *Journal of Banking & Finance*, **26** (2002), 1473–1486.

[52] Friz, P. K., Victoir, N. B., *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 120, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[53] Gatheral, J., *The Volatility Surface. A Practitioner's Guide*, Wiley, Hoboken, NJ, 2006.

[54] Gatheral, J., No-dynamic-arbitrage and market impact, *Quant. Finance*, **10** (2010), 749– 759.

[55] Gatheral, J., Schied, A., Dynamical models of market impact and algorithms for order execution, in *Handbook on Systemic Risk*, J.-P. Fouque, J. Langsam, eds., Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[56] Gilboa, I., Schmeidler, D., Maxmin expected utility with nonunique prior, *J. Math. Econom.*, **18** (1989), 141–153.

[57] Goovaerts, M. J., De Vylder, F., Haezendonck, J., *Insurance Premiums: Theory and Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[58] Harrison, J. M., Kreps, D. M., Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *J. Econom. Theory*, **20** (1979), 381–408.

[59] Heath, D., Back to the Future, Plenary Lecture in First World Congress of the Bachelier Finance Society, Paris, 2000.

[60] Hellwig, M., Systemic risk in the financial sector: An analysis of the subprimemortgage financial crisis, *De Economist*, **157** (2009), 129–207.

[61] Hernández-Hernández, D., Schied, A., A control approach to robust utility maximization with logarithmic utility and time-consistent penalties, *Stochastic Process. Appl.*, **117** (2007), 980–1000.

[62] Hobson, D. G., Robust hedging of the lookback option, *Finance Stoch.*, **2** (1998), 329–347.

[63] Huber, P. J., *Robust Statistics*, Wiley, New York, 1981.

[64] Huber, P. J., Strassen, V., Minimax tests and the Neyman–Pearson lemma for capacities, *Ann. Statist.*, **1** (1973), 251–263.

[65] Huberman, G., Stanzl, W., Price manipulation and quasi-arbitrage, *Econometrica*, **72** (2004), 1247–1275.

[66] Jarrow, R. A., Protter, P., Shimbo, K., Asset price bubbles in complete markets, in *Advances in Mathematical Finance*, Birkh¨auser, Boston, MA, 2007, 97–121.

[67] Jarrow, R. A., Protter, P., Shimbo, K., Asset price bubbles in incomplete markets, *Math. Finance*, **20** (2010), 145–185.

[68] Kabanov, Y. M., On the FTAP of Kreps–Delbaen–Schachermayer, in *Statistics and Control of Stochastic Processes (Moscow, 1995/1996)*, World Scientific, River Edge, NJ, 1997, 191–203.

[69] Karatzas, I., Lehoczky, J. P., Shreve, S. E., Optimal portfolio and consumption decisions for a "small investor" on a finite horizon, *SIAM J. Control Optim.*, **25** (1987), 1557–1586.

[70] Karatzas, I., Shreve, S. E., *Methods of Mathematical Finance*, Springer, New York, 1998.

[71] Kirman, A., The economic crisis is a crisis for economic theory, *CESifo Economic Studies*, **56** (2010), 498–535.

[72] Kl¨ock, F., Schied, A., Sun, Y., Price manipulation in a market impact model with dark pool, 2011 (unpublished manuscript).

[73] Knight, F., *Risk, Uncertainty, and Profit*, Houghton Mifflin, Boston, 1921.

[74] Kramkov, D., Schachermayer, W., The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets, *Ann. Appl. Probab.*, **9** (1999), 904– 950.

[75] Kramkov, D., Schachermayer, W., Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets, *Ann. Appl. Probab.*, **13** (2003), 1504–1516.

[76] Kramkov, D. O., Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets, *Probab. Theory Related Fields*, **105** (1996), 459–479.

[77] Kratz, P., Sch¨oneborn, T., Optimal liquidation in dark pools, 2010 (unpublished manuscript).

[78] Kreps, D. M., *Three Essays on Capital Markets*, Stanford University, 1979.

[79] Lehalle, C. A., Market microstructure knowledge needed to control an intra-day trading process, in *Handbook on Systemic Risk*, J.-P. Fouque, J. Langsam, eds., Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[80] Lyons, T., Qian, Z., *System Control and Rough Paths*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.

[81] Maccheroni, F., Marinacci, M., Rustichini, A., Ambiguity aversion, robustness, and the variational representation of preferences, *Econometrica*, **74** (2006), 1447– 1498.

[82] Merton, R. C., Theory of rational option pricing, *Bell J. Econom. and Management Sci.*, **4** (1973), 141–183.

[83] Mittal, H., Are you playing in a toxic dark pool? A guide to preventing information leakage, *Journal of Trading*, **3** (2008), 20–33.

[84] Monroe, I., On embedding right continuous martingales in Brownian motion, *Ann. Math. Statist.*, **43** (1972), 1293–1311.

[85] Monroe, I., Processes that can be embedded in Brownian motion, *Ann. Probab.* **6** (1978), 42–56.

[86] Musiela, M., Zariphopoulou, T., Portfolio choice under dynamic investment performance criteria, *Quant. Finance*, **9** (2009), 161–170.

[87] Musiela, M., Zariphopoulou, T., Stochastic partial differential equations and portfolio choice, in *Contemporary Quantitative Finance*, Springer, Berlin, 2010, 195–216.

[88] Neuberger, A., The log contract, *The Journal of Portfolio Management*, **20** (1994), 74–80.

[89] Obizhaeva, A., Wang, J., Optimal trading strategy and supply/demand dynamics, *J. Financial Markets*, **16** (2013), 1–32.

[90] Poincaré, H., Science et méthode, *Revue Scient.*, (5) **10** (1908), 417–423.

[91] Revuz, D., Yor, M., Continuous Martingales and Brownian Motion, 3rd ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin, 1999.

[92] Samuelson, P. A., Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly, *Industrial Management Review*, **6** (1965).

[93] Savage, L. J., *The Foundations of Statistics*, revised ed., Dover, New York, 1972.

[94] Schervish, M. J., Seidenfeld, T., Kadane, J. B., The fundamental theorems of prevision and asset pricing, *Internat. J. Approx. Reason.*, **49** (2008), 148–158.

[95] Schied, A., Optimal investments for robust utility functionals in complete market models, *Math. Oper. Res.*, **30** (2005), 750–764.

[96] Schied, A., Optimal investments for risk- and ambiguity-averse preferences: A duality approach, *Finance Stoch.*, **11** (2007), 107–129.

[97] Schied, A., A control problem with fuel constraint and Dawson–Watanabe superprocesses. *Ann. Appl. Probab.* (to appear).

[98] Schied, A., Stadje, M., Robustness of delta hedging for path-dependent options in local volatility models, *J. Appl. Probab.*, **44** (2007), 865–879.

[99] Schmeidler, D., Integral representation without additivity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **97** (1986), 255–261.

[100] Schöneborn, T., Trade execution in illiquid markets. Optimal stochastic control and multi-agent equilibria, Ph.D. thesis, TU Berlin, 2008.

[101] Schöneborn, T., Schied, A., Liquidation in the face of adversity: Stealth vs. sunshine trading, 2009 (unpublished manuscript).

[102] Schweizer, M., Mean-variance hedging, in *Encyclopedia of Quantitative Finance*, R. Cont, ed., Wiley, 2010, 1177–1181.

[103] Sondermann, D., *Introduction to Stochastic Calculus for Finance: A New Didactic Approach*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 579, Berlin, Springer, 2006.

[104] Stoikov, S. F., Zariphopoulou, T., Dynamic asset allocation and consumption choice in incomplete markets, *Australian Economic Papers*, **44** (2005), 414–454.

[105] Turner, A., The Turner Review: A regulatory response to the global banking crisis, FSA, March, 2009.

[106] von Neumann, J., Morgenstern, O., Theory of Games and Economic Behavior, 3rd ed., Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.

[107] Weber, P., Rosenow, B., Order book approach to price impact, *Quant. Finance*, **5** (2005), 357–364.

[108] Yan, J. A., A numeraire-free and original probability based framework for financial markets, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. III, 2002.

محمد جلوداری ممقانی: دانشگاه علامه طباطبائی، دانشکدهٔ ریاضی، گروه ریاضی

رایانامه: J_mamaghani@atu.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 42, Number 72, Spring/Summer 2023, Pages 225–252
doi: 10.30504/mct.2022.1281.1891

Probabilistic Aspects of Finance*

H. Föllmer, A. Schied
Translated by M. J. Mamaghani[1]

Department of Mathematics, Allameh Tabataba'i University, Iran

Abstract. In the past decades, advanced probabilistic methods have had significant impact on the field of finance, both in academia and in the financial industry. Conversely, financial questions have stimulated new research directions in probability. In this survey paper, we review some of these developments and point to some areas that might deserve further investigation. We start by reviewing the basics of arbitrage pricing theory, with special emphasis on incomplete markets and on the different roles played by the "real-world" probability measure and its equivalent martingale measures. We then focus on the issue of model ambiguity, also called Knightian uncertainty. We present two case studies in which it is possible to deal with Knightian uncertainty in mathematical terms. The first case study concerns the hedging of derivatives, such as variance swaps, in a strictly pathwise sense. The second one deals with capital requirements and preferences specified by convex and coherent risk measures. In the final two sections we discuss mathematical issues arising from the dramatic increase of algorithmic trading in modern financial markets.

Keywords: algorithmic trading, arbitrage pricing theory, coherent risk measure, convex risk measure, hedging, incomplete market, Knightian uncertainty, market impact model, model uncertainty, monetary measure of risk, pathwise Itˆo calculus, price impact, superhedging, variance swap
Article history: Recieved 14 May 2022; Accepted 3 November 2022
Article type: translation

*Föllmer, H., Schied, A., Probabilistic aspects of finance, *Bernoulli*, **19** (4) (2013), 1306-1326.
[1] J_mamaghani@atu.ac.ir