فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۷ (تابستان ۱۳۹۰) صص. ۱۵ تا ۱۷

برهان‌هایی ساده برای قضیهٔ اساسی جبر به‌کمک آنالیز مختلط و حسابان پیشرفته *

آنتون شپ

مترجم: حمیدرضا وهابی

حقیقتاً عنوان مقالهٔ ری ردهیفر [۲] واکنشی طبیعی است به مقاله‌ای دیگر دربارهٔ قضیهٔ اساسی جبر. تاکنون دست‌کم ۲۸ مقاله دربارهٔ این قضیه در مانتلی چاپ شده است. با وجود این، ما در این نوشته دو برهان برای قضیهٔ اساسی جبر آورده‌ایم که به نظر نمی‌رسد قبلاً دیده شده باشد و فکر می‌کنیم که ارزش خواندن را دارد. در اولین برهان، از قضیهٔ انتگرال کشی استفاده می‌شود که به نظر مؤلف، به‌سادگیِ برهان مشهور آن در آنالیز مختلط بر پایهٔ قضیهٔ لیوویل است (برای دیدن این برهان و سه برهان دیگر با استفاده از آنالیز مختلط، به [۳] نگاه کنید). در مسألهٔ ۵ صفحهٔ ۱۲۶ از [۱] برهانی از قضیهٔ اساسی جبر با استفاده از انتگرال مسیری مختلط ارائه می‌شود که مشابه اولین برهان ما است. اما جزئیات کاملاً یکسان نیستند. دومین برهان، تنها از انتگرال حاصل از پارامتری سازیِ انتگرالِ مسیریِ برهان اول و نتایجی از حسابان پیشرفته استفاده می‌کند. این برهان، مشابه برهان [۴] است که در آنجا ایده‌های یکسانی برای اثبات ناتهی بودن طیف عضوی از یک جبر باناخ مختلط به‌کار گرفته شده است. البته در آنجا برای اثبات قضیهٔ اساسی جبر، ماتریس متناظر با یک چندجمله‌ای به‌کار رفته است.

---

*) Schep, Anton, R., “A simple complex analysis and an advanced calculus proof of the fundamental theorem of algebra”, *Amer. Math. Monthly*, **116** (2009), 67–68.

قضیه (قضیهٔ اساسی جبر). هر چندجمله‌ای از درجهٔ $n \geq ۱$ با ضرایب مختلط در $\mathbb{C}$ ریشه دارد.

برهان. فرض کنید $p(z) = z^n + a_{n-۱}z^{n-۱} + \cdots + a_۱ z + a_۰$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n \geq ۱$ باشد به‌طوری که برای هر $z \in \mathbb{C}$، $p(z) \neq ۰$.

برهان اول. بنابر قضیهٔ انتگرال کُشی،

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{zp(z)} = \frac{۲\pi\mathrm{i}}{p(۰)} \neq ۰$$

که در آن، مسیر انتگرال‌گیری دایره‌ای در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است. از طرف دیگر

$$\left|\oint_{|z|=r} \frac{dz}{zp(z)}\right| \leq ۲\pi r. \max_{|z|=r} \frac{۱}{zp(z)} = \frac{۲\pi}{\min\limits_{|z|=r} |p(z)|} \to ۰$$

وقتی که $r \to \infty$ (چون $|p(z)| \geq |z|^n|(۱ - \frac{|a_{n-۱}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_۰|}{|z^n|})|$) که این یک تناقض است.

برهان دوم. تابع $g : [۰, \infty) \times [۰, ۲\pi] \to \mathbb{C}$ را با ضابطهٔ $g(r, \theta) = \dfrac{۱}{p(re^{i\theta})}$ تعریف کنید. در این صورت، تابع g روی $[۰, \infty) \times [۰, ۲\pi]$ پیوسته و روی $(۰, \infty) \times (۰, ۲\pi)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته است که در معادلهٔ

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \mathrm{i}r.\frac{\partial g}{\partial r}$$

صدق می‌کنند. اکنون تابع $F : [۰, \infty) \to \mathbb{C}$ را با ضابطهٔ $F(r) = \displaystyle\int_۰^{۲\pi} g(r, \theta) d\theta$ تعریف کنید. در این صورت، بنابر قاعدهٔ لایب‌نیتس برای مشتق‌گیری از تابع زیر علامت انتگرال، برای هر $r > ۰$ داریم

$$\mathrm{i}rF'(r) = \mathrm{i}r \int_۰^{۲\pi} \frac{\partial g}{\partial r} d\theta = \int_۰^{۲\pi} \frac{\partial g}{\partial \theta} d\theta = g(r, ۲\pi) - g(r, ۰) = ۰$$

در نتیجه برای هر $r > ۰$، $F'(r) = ۰$. لذا تابع F روی $[۰, \infty)$ ثابت $= F(r) = F(۰)$ $\frac{۲\pi}{p(۰)} \neq ۰$ است. از طرف دیگر، چون $|p(z)| \to \infty$ به‌طور یکنواخت وقتی که $|z| \to \infty$، پس $g(r, \theta) \to ۰$ به‌طور یکنواخت نسبت به θ، وقتی که $r \to \infty$. بنابراین $F(r) \to ۰$ وقتی که $r \to \infty$ و این تناقض است.

مراجع

[1] N. Levinson and R.M. Redheffer, *Complex Variables*, Holden-Day, San Francisco, CA, 1970.

[2] R. M. Redheffer, "What! Another note just on the fundamental theorem of algebra?",*Amer. Math. Monthly*, **71**(1964), 180-185.

[3] R. Remmert, *Theory of Complex Functions* (trans. R. B. Burckel), Graduate Texts in Mathematics, vol. 122, Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] D. Singh, "The spectrum in a Banach algebra", *Amer. Math. Monthly*, **113**(2006), 756-758.

ترجمهٔ حمیدرضا وهابی
دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد اسلامشهر
hrvahabi@yahoo.com