فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۲، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۲) صص. ۲۹۷ تا ۳۱۱

تاریخچهٔ مختصری از نقش ریاضیات در دانش مالی*

اردینچ آکیلدرم، خلیل مته سونر

ترجمهٔ آزاده قاسمی‌فرد

چکیده. در فهرست عوامل بی‌تقصیر در بحران‌های اخیر مالی، ریاضیات، به‌ویژه ریاضیات مالی، بدون شک به عنوان اولین عامل رتبه‌بندی شده است و کوانت‌ها ــ نامی برای ریاضی‌دانان در صنعت ــ به‌دلیل ابداع و استفاده از مدل‌های پیچیده برای تبیین تشدید بحران‌های مالی، سرزنش شده‌اند. بااین‌حال، همان‌طورکه لو و مولر اظهار داشته‌اند: «سرزنش‌کردن مدل‌های کمّی برای وقوع بحران فوق‌العاده منحرف‌کننده است و مانند محکوم کردن محاسبات و دستگاه اعداد حقیقی به‌دلیل کلاهبرداری در حسابداری است.» در طول تاریخ ریاضیات و دانش مالی همواره رابطه‌ای نزدیک داشته‌اند. از زمان بابلی‌ها تا تالس، و بعداز آن‌ها فیبوناتچی، پاسکال، فرما، برنولی، بشیلیه، وینر، کولموگوروف، ایتو، مارکویتز، بلک، شولز، مرتون، و بسیاری دیگر ضمن تلاش برای حل مسائل دانش مالی سهم عظیمی در پیشرفت ریاضیات ایفا کرده‌اند. در این مقاله دیدگاه تاریخی مختصری ارائه می‌دهیم در مورد اینکه چگونه پیشرفت نظریهٔ مالی دانش ریاضیات را تحت تأثیر قرار داده است و خود از پیشرفت آن اثر گرفته است.

یکی از اولین نمونه‌های مهندسی مالی به تالس، فیلسوفی از شهر میلتوس[1] در یونان باستان، برمی‌گردد. این مطلب از جلد اول کتاب سیاست ارسطو است: «طبق این روایت، در حالی‌که هنوز زمستان بود، او با مهارت خود در علم ستارگان، متوجه شد که سال آینده زیتون محصول بسیار خوبی دارد؛ بنابراین پول کمی را که داشت برای استفاده از تمام دستگاه‌های روغن‌گیری زیتون در

عبارات و کلمات کلیدی: ریاضی مالی، بازار مالی، قیمت‌گذاری، حرکت براونی، معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی

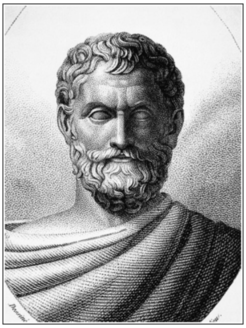
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۸/۲۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱/۱۵

* Akyıldırım, E., Mete Soner, H., A brief history of mathematics in finance, *Borsa Istanbul Rev.*, **14** (2014), 57-63.

1. Miletus

doi: 10.30504/mct.2023.1344.1937

خیوس[1] و میلتوس داد و آن‌ها را با قیمت پایین گرفت. وقتی زمان برداشت محصول فرا رسید و همه به‌یک‌باره به آن وسایل نیاز پیدا کردند، و او آن‌ها را به نرخ دلخواه خود اجاره داد. بنابراین او به جهانیان نشان داد که فیلسوفان می‌توانند به‌راحتی ثروتمند شوند، اگر بخواهند! اما جاه‌طلبی آن‌ها از نوع دیگری است». به‌این‌ترتیب ۲۵۰۰ سال پیش، آنچه تالس معامله کرد چیزی نبود جز یک قرارداد اختیار خرید روی دستگاه‌های روغن‌گیری برای زمان برداشت زیتون در بهار. همان‌طورکه ارسطو اشاره می‌کند، تالس می‌خواست نشان دهد که دانش او در مقام یک ریاضی‌دان (یا یک فیلسوف یا اخترشناس) برای کل جامعه مفید است.



تالس

در سال ۱۲۰۲، لئوناردو پیسانو[2] که به فیبوناتچی [3] مشهور است، اولین کتاب در زمینهٔ مهندسی مالی را با عنوان «لیبر آباکی»[4] (کتاب حساب) نوشت. کتاب او نه‌تنها اعداد هندی–عربی را به اروپا آورد بلکه، آن‌طورکه گوتسمن [۳] می‌گوید، علاوه‌بر ایجاد یک روش کلی برای بیان بازده سرمایه‌گذاری و حل طیف گسترده‌ای از مسائل پیچیدهٔ نرخ بهره، ارزش حال جریان‌های نقدی جایگزین را نیز محاسبه کرد. گوتسمن و راونهورست [۴] مسئلهٔ زیر از کتاب حساب را یکی از پیچیده‌ترین مسائل نرخ بهره برشمرده‌اند: «یک سرباز سالانه ۳۰۰ سکه طلا مستمری از پادشاه دریافت می‌کند که در دوره‌های سه‌ماهه، هر بار ۷۵ سکه، پرداخت می‌شود. پادشاه برنامهٔ پرداخت را به سالانه تغییر می‌دهد، یعنی ۳۰۰ سکه را در پایان سال پرداخت می‌کند. سرباز در ازای سرمایه‌گذاری ۱۰۰ سکه می‌تواند ۲ سکه در ماه به دست بیاورد (برای هر دورهٔ سه‌ماهه). خسارت مؤثر او بعداز تغییر روش پرداخت مستمری چقدر است؟» [۴]. واضح است که برای حل این مسئله باید ارزش پول را در زمان‌های مختلف بدانیم. مسئلهٔ دیگر «مبادلهٔ کالا و اجناس مشابه» در کتاب حساب است که ارتباط نزدیکی با قاعدهٔ امروزی قیمت واحد دارد (اگر دو دارایی جریان‌های نقدی یکسانی ارائه دهند، باید قیمت یکسان داشته باشند)، این مسئله به شرح زیر است: «۲۰ ارش پارچه ۳ پوند پیزایی و ۴۲ رول پنبه به‌طور مشابه ۵ پوند ارزش دارند. مطلوب است تعداد رول پنبه برای ۵۰ ارش پارچه»[۱۲].

لئوناردو پیسانو به‌دلیل دستاوردهایش در نظریهٔ اعداد و دیگر زمینه‌های مرتبط یکی از معروف‌ترین افراد در ریاضیات بوده است. بااین‌حال می‌توان او را به‌دلیل نقشش در پایه‌گذاری اعتبارات و صنعت

1. Chios 2. Leonardo Pisano Bigollo 3. Fibonacci 4. *Liber Abaci*

بانکداری در اروپا از طریق محاسبات ارزش حال در دانش مالی نیز به‌مراتب تاثیرگذارتر به حساب آورد.

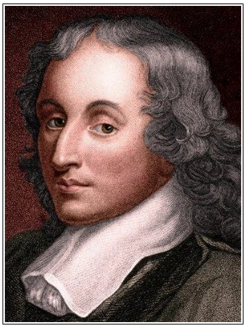
فیبوناتچی

جیرولامو کاردانو[1]، ریاضی‌دان برجستهٔ ایتالیایی دورهٔ رنسانس، در سال ۱۵۶۵ رسالهٔ خود با نام کتاب بازی‌های شانس[2] را منتشر کرد که در آن اصول اولیهٔ نظریهٔ قمار[3] پایه‌ریزی شده است. علاقهٔ او به قمار نه‌تنها او را قادر ساخت که دوران سخت بیکاری را تاب بیاورد بلکه در به دست آوردن قواعد اساسی احتمالات هم به او کمک کرد. اندرو لو[4] مطلب زیر را از کتاب او رد پایی از مفهوم بازی منصفانه[5] می‌داند که عصارهٔ مارتینگل، یکی از پیش‌زمینه‌های فرضیهٔ قدم‌زدن تصادفی[6]، است: «اساسی‌ترین اصل در قمار یکسان‌بودن شرایط است، مانند شرایط حریفان، تماشاگران، پول، وضعیت محیط، جعبهٔ تاس، و خود تاس، به‌همین‌سادگی! به هر نسبتی که شما از این برابری فاصله بگیرید، اگر به نفع طرف مقابل باشد، شما احمقید و اگر به نفع خودتان باشد، بی‌انصافید».

جیرولامو کاردانو

حدود یک قرن پس‌از کاردانو، در سال ۱۶۵۴، دو ریاضی‌دان فرانسوی، بلز پاسکال[7] و پیر دُ فرما[8] در مسیر حل مسئلهٔ مطرح‌شده توسط شوالیه دُ مر[9] (نجیب‌زاده‌ای فرانسوی که علاقه‌مند به مسائل مربوط به بازی و قمار بود) پایه‌های اولیهٔ نظریهٔ احتمالات را بنیان نهادند. مسئله‌ای که در ابتدا مطرح شده بود این بود که تصمیم بگیریم رو آمدن حداقل یک‌جفت شش در ۲۴بار پرتاب دو تاس شرط‌بندی بکنیم یا خیر؟ ظاهراً یک قاعدهٔ مرسوم در قمار دُ مر را به این فکر رسانده بود که شرط‌بندی روی یک‌جفت شش در ۲۴بار پرتاب دو تاس سودآور خواهد بود، درحالی‌که محاسبات خودش خلاف آن را نشان می‌داد [۱]. پاسکال و فرما، در نامه‌هایی که رد و بدل می‌کردند، این مسئله و مسئلهٔ نقاط را (که به «بازی ناتمام»[10] هم مشهور است) حل کردند ــ مسئله‌ای که اساساً همان مسئلهٔ قیمت‌گذاری یک اختیار خرید دیجیتال روی درخت کاکس–راس–روبینشتاین[11] است. ازاین‌رو، پاسکال و فرما نیز می‌توانند به عنوان

1. Girolamo Cardano 2. Liber de Ludo Aleae 3. gambling 4. Andrew W. Lo 5. fair game 6. random walk hypothesis 7. Blaise Pascal 8. Pierre de Fermat 9. Chevalier de Méré 10. the unfinished game 11. Cox-Ross-Rubinstein tree



بلز پاسکال

پیر دُ فرما

اولین ریاضی‌دانانی به شمار آیند که یک فرمول قیمت‌گذاری مشتقات مالی را ابداع کردند.

در پایان قرن ۱۷ و شروع قرن ۱۸ میلادی، خانوادهٔ برنولی‌های سوئیسی، طی چند نسل، کمک‌های مهمی به توسعه نظریهٔ احتمالات کردند. یاکوب برنولی[۱] اولین صورت قانون اعداد بزرگ (یعنی، اگر شما یک آزمایش را به تعداد زیاد تکرار کنید، میانگین مشاهده‌شده به میانگین مورد انتظار میل می‌کند) و نتایج اصلی مقدار مورد انتظار را در کتابش فن حدس‌زدن[۲] با موضوع ترکیبیات و احتمال ریاضی اثبات کرد. در ۱۷۳۸، دانیل برنولی[۳] در مقاله‌اش «شرحی از یک نظریهٔ جدید در مورد اندازه‌گیری ریسک»[۴] که در آن پارادوکس سنت‌پترزبورگ را مورد بحث قرار می‌دهد، گام مهمی به سوی ابداع یک نظریهٔ ریسک برداشت. متن زیر در توصیف پارادوکس سنت‌پترزبورگ از دانیل برنولی است: «پرافتخارترین پسرعموی من نیکولاس برنولی مشهور، پروفسور دانشگاه بازل، یک بار پنج مسئله را برای ریاضی‌دان برجسته مونمور[۵] مطرح کرد. این مسائل در کتاب او با نام رساله در تحلیل بازی‌های شانسی[۶] صفحهٔ ۴۰۲ بازگو شده‌اند. آخرین آن‌ها به شرح زیر است: پیتر یک سکه پرتاب می‌کند و به این کار تا زمانی که «رو» بیاید ادامه می‌دهد. او توافق می‌کند که اگر در پرتاب اول رو بیاید، به پل یک سکه بدهد، دو سکه اگر در پرتاب دوم رو بیاید، چهارتا اگر در سومی، هشت‌تا اگر در چهارمی، و به‌همین‌ترتیب، طوری‌که با هر پرتاب اضافی تعداد سکه‌هایی که باید بدهد دو برابر می‌شود. فرض کنید ما به دنبال تعیین مقدار مورد انتظار پول دریافتی پل هستیم.» این بازی به یک متغیر تصادفی با مقدار مورد انتظار بی‌نهایت منجر می‌شود و هر قمارباز عاقلی با یک قیمت ورودی متناهی وارد این بازی می‌شود. اما، در مقایسه با ارزش مورد انتظار بازی، به نظر

1. Jacob Bernoulli 2. *Ars Conjectandi* 3. Daniel Bernoulli 4. Specimen theoriae novae de mensura sortis 5. Montmort 6. *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*


یاکوب برنولی

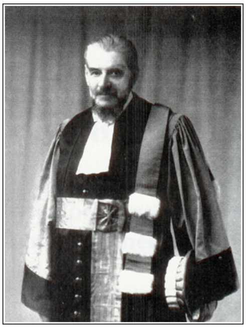

دانیل برنولی

می‌رسد تنها ارزش خیلی کمی برای سرمایه‌گذاران عاقل دارد. دانیل برنولی این پارادوکس را با معرفی تابع مطلوبیت[۱] لگاریتمی که مفهوم مطلوبیت حاشیه‌ای نزولی را در بر دارد حل کرد. به زبان خود او: تعیین ارزش یک کالا نباید بر اساس قیمت آن بلکه باید بر اساس مطلوبیتی باشد که به دست می‌دهد. شکی نیست که دریافت هزار سکه برای یک فقیر قابل توجه‌تر از یک ثروتمند است هر چند هر دو یک مبلغ به دست می‌آورند.» به نظر می‌رسد این اولین باری است که تصمیم‌گیری برای سرمایه‌گذاری بر مبنای تابع مطلوبیتی ارزیابی می‌شود که خطی نیست.

با آغاز قرن بیستم، در ۲۹ مارس ۱۹۰۰، یک دانشجوی دکترای فرانسوی به نام لوئی بشیلیه[۲] از رسالهٔ خود با عنوان «نظریه سفته بازی»[۳] دفاع کرد، رساله‌ای که امروزه گواهی تولد ریاضیات مالی مدرن محسوب می‌شود. کار استثنایی او در یکی از معتبرترین مجلات علمی فرانسوی، سالنامهٔ علمی اکول نرمال سوپریور[۴]، منتشر شده است. او عنوان اولین فردی را داراست که ریاضیات مربوط به حرکت براونی را به دست آورد و از مسیرهای موجود در آن برای مدل‌سازی دینامیک قیمت سهام و محاسبهٔ قیمت‌های اختیار معاملات استفاده کرد. شاخرمایر و تایشمان فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله بشیلیه و بلک–شولز–مرتون را با هم مقایسه کرده‌اند و نشان داده‌اند که قیمت‌ها انطباق بسیار خوبی با آن‌ها دارند. آن‌ها همچنین نشان می‌دهند که مدل بشیلیه تقریب‌های کوتاه‌مدت خوبی هم از قیمت‌ها و تلاطم‌ها به دست می‌دهد [۱۱]. اثر پیشگام او در مورد بازارهای مالی منجر به ابداع آنچه امروزه آن را فرضیهٔ بازار کارا[۵] می‌نامند و نظریه‌های مرتبط با آن مانند مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای (CAPM)[۶] شد. او در رسالهٔ خود می‌نویسد: «عوامل اثرگذاری که حرکات بازار را تعیین

1. utility function 2. Louis Bachelier 3. Théorie de la Spéculation 4. *Annales Scientiques de lE´cole Normale Supe´rieure* 5. efficient market hypothesis 6. capital asset pricing model

می‌کنند بی‌شمارند؛ رویدادهای گذشته، جاری، و حتی مورد انتظار که اغلب هیچ ارتباط آشکاری با این تغییرات ندارند . . . بنابراین غیر ممکن است که به پیش‌بینی‌پذیری ریاضی امید داشته باشیم». او ایدهٔ اصلی را در یک جمله بیان می‌کند: «امید ریاضی یک سفته‌باز[1] صفر است.» به افتخار سهم بزرگ بشیلیه در توسعهٔ حسابان تصادفی و ریاضیات مالی، یک گروه از ریاضی‌دانان مالی برجسته در سال ۱۹۹۶ «انجمن مالی بشیلیه» را تشکیل دادند تا فرصت دیدار و تبادل‌نظر را برای دانشگاهیان و افراد شاغل در صنعت فراهم آورد.



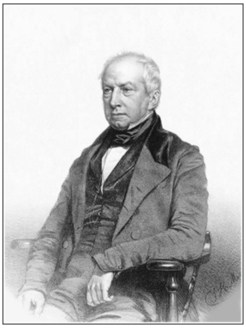
لوئی بشیلیه

کشف حرکت براونی توسط رابرت براون[2]، گیاه‌شناس اسکاتلندی، ریشهٔ بیشتر نوآوری‌های هیجان‌انگیز در تاریخ نوین ریاضیات مالی است. او در سال ۱۸۲۷ حرکت سریع و نوسانی ذرات میکروسکوپی را در یک مایع مشاهده کرد که ناشی از برخورد آن‌ها با اتم‌ها یا مولکول‌های مایع بود. اما، همان‌طورکه قبلاً ذکر شد، بشیلیه اولین کسی بود که حرکت براونی را به‌صورت ریاضی تعریف کرد و از صورت یک‌بُعدی $t \mapsto B_t$ $(t \geq ۰)$ برای مدل‌سازی دینامیک قیمت سهام استفاده کرد. آلبرت اینشتین، بدون اطلاع از کار بشیلیه، هم معادلات حرکت براونی را به دست آورد و آن را برای نظریهٔ جنبشی گرما در ترمودینامیک به کار برد. بااین‌حال نوربرت وینر اولین کسی است که ساختار ریاضی دقیق حرکت براونی را ارائه داد و به‌همین‌دلیل آن را فرایند وینر نیز می‌نامند. او وجود حرکت براونی را اثبات و اندازهٔ وینر را ، که توزیع احتمال آن را توصیف می‌کند، تعریف کرد. حرکت براونی به‌دلیل ویژگی‌های جالب فراوان آن در توصیف بسیاری از پدیده‌های فیزیکی استفاده شده است: همه‌جا پیوسته است اما هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست. در توزیع خودمتشابه[3] است، یعنی اگر یک حرکت براونی را بزرگ‌نمایی یا کوچک‌نمایی کنیم، فرایند حاصل همچنان یک حرکت براونی است. حرکت براونی یکی از مشهورترین فرایندهای لوی (فرایند تصادفی کدلگ[4] با نموهای مستقل و مانا) و همچنین یک مارتینگل است.

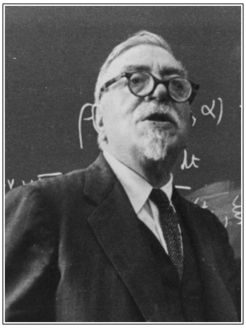
تا زمان انتشار کتاب مشهور ریاضی‌دان روسی آندرِئی نیکالاییویچ کولموگوروف[5] با نام مبانی نظریهٔ احتمال[6] در ۱۹۳۳ احتمالات به صورت علمی مرتبط با ریاضیات اما به‌نوعی متفاوت از آن

۴. càdlàg؛ فرایندی پیوسته از راست و دارای حد از چپ. ــم.

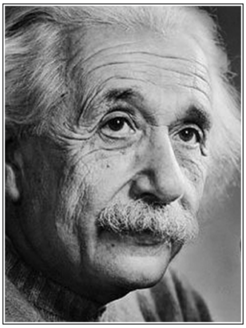
1. speculator 2. Robert Brown 3. self-similar 5. Andrey Nikolaevich Kolmogorov 6. *Foundations of the Theory of Probability*



رابرت براون

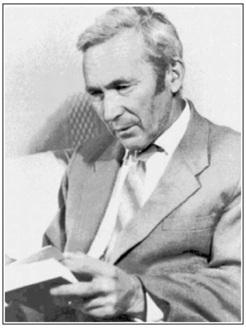


نوربرت وینر



آلبرت اینشتین

دیده می‌شد. اما کولموگوروف مانند بنای هندسه به دست اقلیدس، بر مبنای اصول موضوعه فرمول‌بندی جدیدی از نظریهٔ احتمال پدید آورد و به‌این‌ترتیب احتمالات را با ریاضیات یکپارچه کرد. او بر نظریهٔ اندازه تکیه کرد ــ نظریه‌ای که در آغاز قرن بیستم توسط آنری لبگ[1]، امیل بورل[2]، و بسیاری دیگر توسعه یافته بود ــ و اصول موضوعهٔ زیر را وضع کرد: ۱) احتمال یک پیشامد، یک عدد حقیقی نامنفی است، ۲) احتمال اینکه یک پیشامد اولیه در کل فضای نمونه اتفاق بیفتد برابر ۱ است، ۳) احتمال اجتماع پیشامدهای دوبه‌دو مجزا برابر با مجموع احتمال تک‌تک پیشامدها است. او در کتابش به سال ۱۹۳۳، ایدهٔ امید شرطی و اندازه‌های معادل را تعریف کرد؛ ایده‌ای که ریاضی‌دانان مالی را قادر ساخت فرمول‌های قیمت‌گذاری مشتقه‌های مالی را ایجاد کنند. کولموگوروف امروزه یکی از درخشان‌ترین ریاضی‌دانانی به شمار می‌آید که جهان تا به حال به خود دیده است و امکان ندارد که بتوانیم میراث ریاضی او را اینجا در یک بند خلاصه کنیم. اما دستاوردهای اساسی او نه تنها در نظریهٔ احتمال بلکه در مکانیک آماری، فرایندهای تصادفی، نظریهٔ اطلاعات، دینامیک غیرخطی، و آمار ریاضی کاربردهای بسیار جالبی در دانش مالی و اقتصاد داشته است.



آندرِئی کولموگوروف

یکی از رایج‌ترین فرمول‌های ریاضی که امروزه مهندسان مالی به کار می‌برند لم ایتو است که در سال ۱۹۵۱ توسط ریاضی‌دان ژاپنی کیوشی ایتو[3] در مقالهٔ جذابش «در مورد معادلات دیفرانسیل

1. Henri Lebesgue 2. Èmile Borel 3. Kiyoshi Itô

تصادفی»[1] به دست آمد. ایتو در تلاش برای مدل‌سازی فرایندهای مارکف، در مقالهٔ معروف دیگرش در سال ۱۹۴۲ با نام «در مورد فرایندهای تصادفی»[2] معادلات دیفرانسیل تصادفی را به‌صورت

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

نوشت که در آن W یک فرایند وینر استاندارد است، او بعدها در مقاله‌ای به سال ۱۹۵۱ نشان داد که برای هر تابع دو بار مشتق‌پذیر f رابطهٔ زیر برقرار است

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{۱}{۲}f''(X_t)d[X,X]_t.$$

واضح است که لم ایتو راهی برای ساختن معادلات دیفرانسیل تصادفی جدید از معادلات داده‌شده به دست می‌دهد. این فرمول را می‌توان به عنوان همتای تصادفی قاعدهٔ زنجیری در حساب دیفرانسیل و انتگرال نیوتنی در نظر گرفت. فرمول ایتو نه‌تنها در شاخه‌های مختلف ریاضیات بلکه در نظریهٔ میدان‌های همدیس[3] در فیزیک، نظریهٔ کنترل تصادفی در مهندسی، ژنتیک جمعیت در زیست‌شناسی، و بسیاری زمینه‌های دیگر به کار گرفته شده است. قضیهٔ نمایش ایتو[4] بیان می‌کند که هر مارتینگل مربعی‌انتگرال‌پذیر نسبت به یک پالایهٔ براونی یک صورت پیوسته دارد. ایتو پدر انتگرال تصادفی و معادلات دیفرانسیل تصادفی به شمار می‌آید که پایه‌های حسابان تصادفی را بنا گذاشتند. در سال ۲۰۰۶ به‌دلیل کار فوق‌العاده و پیشبردهای قابل توجه ایتو «جایزهٔ کارل فریدریش گاوس برای کاربرد ریاضیات» برای اولین بار به او اعطا شد.

ایتو در سخنرانی خود به‌مناسبت جایزهٔ کیوتو در سال ۱۹۹۸ توصیف شگفت‌انگیزی از زیبایی ریاضی ارائه داد: «در ساختارهای ریاضی دقیق، ریاضی‌دانان همان زیبایی را می‌یابند که دیگران در قطعات موسیقی دلربا یا در معماری‌های باشکوه درک می‌کنند. اما یک تفاوت بزرگ بین زیبایی ساختارهای ریاضی و هنرهای بزرگ دیگر وجود دارد. موسیقی یک آهنگساز، مثل موتسارت، حتی کسانی را که نظریهٔ موسیقی را نمی‌دانند بسیار تحت تأثیر قرار می‌دهد؛ کلیسای جامع کلن توجه همهٔ تماشاگران را جلب می‌کند حتی اگر چیزی از مسیحیت ندانند. اما زیبایی ساختارهای ریاضی بدون درک فرمول‌های عددی که قواعد منطق را بیان می‌کنند، قابل درک نیست. فقط ریاضی‌دانان می‌توانند «نت‌های موسیقی» را بخوانند که حاوی فرمول‌های عددی بسیاری است و آن «موسیقی» را در قلب خود بنوازند. برهمین‌اساس، من زمانی معتقد بودم که بدون فرمول‌های عددی،

---

1. On stochastic differential equations 2. On stochastic processes 3. conformal field theory 4. Itô's representation theorem

هرگز نمی‌توانم ملودی شیرینی را که در قلبم نواخته می‌شد به اشتراک بگذارم. معادلات دیفرانسیل تصادفی، که «فرمول ایتو» نامیده می‌شود، در حال حاضر به‌طور گسترده‌ای برای توصیف پدیده‌های نوسانات تصادفی در طول زمان استفاده می‌شود. اما زمانی که برای اولین بار معادلات دیفرانسیل تصادفی را مطرح کردم مقالهٔ من مورد توجه قرار نگرفت. بیش‌از ده سال پس‌از چاپ آن مقاله بود که دیگر ریاضی‌دانان شروع کردند به خواندن «نت‌های موسیقی» من و نواختن «موسیقی» من با سازهای خودشان. با توسعهٔ «نت‌های اصلی موسیقی» من به «موسیقی» پیچیده‌تری، این محققان سهم زیادی در توسعهٔ «فرمول ایتو» داشته‌اند.

کیوشی ایتو

تقریباً در همان زمان که ایتو پایه‌های حسابان تصادفی را بنیان می‌نهاد، هری مارکویتز[۱] مقالهٔ «انتخاب سبد مالی»[۲] خود را منتشر کرد. این مقاله اولین تحقیق تأثیرگذار در ریاضیات مالی به شمار می‌آید که بلافاصله توجه غیردانشگاهیان را جلب کرد. مقالهٔ او در سال ۱۹۵۲ با نام «انتخاب سبد مالی» در مجلهٔ مالی[۳] همراه با کتابش به سال ۱۹۵۹ با عنوان انتخاب سبد مالی: تنوع کارا در سرمایه‌گذاری[۴] زمینه‌ساز چیزی شد که امروزه با عنوان نظریهٔ سبد سرمایهٔ نوین می‌شناسیم. قبل‌از مقالهٔ مارکویتز سرمایه‌گذاران سبد مالی را با ارزیابی ریسک و بازدهٔ تک‌سهم‌ها تشکیل می‌دادند. به‌این‌ترتیب، این روش منجر به ساخت سبدهایی می‌شد که ویژگی‌های ریسک و بازدهٔ یکسان داشتند. اما مارکویتز با نشان دادن چگونگی محاسبهٔ بازدهٔ میانگین و واریانس یک سبد مفروض، استدلال کرد که سرمایه‌گذاران باید سبدها را مبتنی‌بر ویژگی‌های ریسک–بازده کل آن تشکیل بدهند. مارکویتز مفهوم مرز کارا[۵] را تعریف کرد که یک تصویر گرافیکی است از مجموعهٔ سبدهایی است که برای سطوح مختلف ریسکْ بالاترین سطح بازدهٔ مورد انتظار را دارند. این مفاهیم راه را برای سبد فوق کارا و خط بازار سرمایهٔ[۶] جیمز توبین و بیان رسمی مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای (CAPM) ویلیام شارپ[۷] گشود. در حوزهٔ برنامه‌ریزی خطی، هری مارکویتز تکنیک ماتریس‌های تُنک[۸] را برای حل مسائل بهینه‌سازی ریاضی بسیار بزرگ ابداع کرد. او به همراه برنارد هاوزر و هرب کار زبان SIMSCRIPT را در شبیه‌سازی ابداع کرد که به‌طور گسترده‌ای برای برنامه‌ریزی شبیه‌سازی‌های کامپیوتری در تولید، حمل‌ونقل،

---

1. Harry Markowitz 2. Portfolio selection 3. *Journal of Finance* 4. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments* 5. efficient frontier 6. capital market line 7. William Sharpe 8. sparse

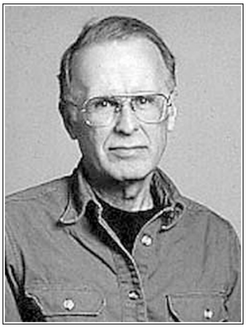
سیستم‌های کامپیوتری، و همچنین بازی‌های جنگی استفاده شده است. در ۱۹۸۹، مارکویتز برای کار خود در نظریهٔ سبدسرمایه، تکنیک ماتریس تنک و ابداع زبان SIMSCRIPT «جایزهٔ جان فون‌نویمان» را از انجمن تحقیق در عملیات آمریکا دریافت کرد. او در ۱۹۹۰ جایزهٔ نوبل اقتصاد را برای تحقیقاتش در نظریهٔ سبد مالی به‌طور مشترک دریافت کرد.

هری مارکوویتز

یک پیشرفت اساسی در ۱۹۷۳ هنگامی رخ داد که فیشر بلک[1] و میرون شولز[2] مقالهٔ «قیمت‌گذاری اختیار معاملات و تعهدات شرکتی»[3] را در مجلهٔ اقتصاد سیاسی[4] و رابرت مرتون مقالهٔ «در مورد قیمت‌گذاری بدهی شرکتی: ساختار ریسک نرخ‌های بهره»[5] را در مجلهٔ اقتصاد و علوم مدیریت بل[6] به چاپ رساندند. این مقالات یک روش جدید برای ارزش‌گذاری مشتقات مالی معرفی کردند و به‌ویژه مدل بلک–شولز را برای قیمت‌گذاری اختیار خرید و فروش اروپایی توسعه دادند. در همان زمان گام بزرگ دیگری در زمینهٔ صنعت با تأسیس بازار مبادلهٔ اختیارهای معاملهٔ شیکاگو[7] برداشته شد که به اولین بازار برای معامله اختیارهای ثبت‌شده تبدیل شد. این بازار حتی با سرعتی بالاتر از تصور افراد یادشده این مدل‌ها را جذب کرد. تا سال ۱۹۷۵ تقریباً تمام معامله‌گران با استفاده از مدل بلک–شولز ماشین حساب‌های دستی خود سبدهای اختیارهای معاملهٔ خود را قیمت‌گذاری می‌کردند و ریسک آن را پوشش می‌دادند. از بازار کوچکی که در سال ۱۹۷۳ تنها ۱۶ اختیار معامله در آن معامله می‌شد، ارزش اسمی بازار مشتق‌های مالی رشد عظیمی پیدا کرد و به هزاران میلیارد دلار رسید. علاوه‌بر انفجار بزرگی که در بازار مشتقه‌های مالی رخ داد کار بلک–شولز–مرتون نقش مهمی هم در گسترش اصطلاحات ریاضیات مالی ایفا کرد. امروزه مهندسان مالی عمدتاً از دو رویکرد برای محاسبهٔ قیمت اختیار معاملات استفاده می‌کنند. در اولین رویکرد، قیمت اختیار به عنوان ارزش مورد انتظار ریسک خنثای عایدی تنزیل‌یافته اختیار[8] محاسبه می‌شود. در رویکرد دوم، قیمت اختیار معامله جواب معادلهٔ دیفرانسیل جزئی معروف بلک–شولز است

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{۱}{۲}\sigma^{۲}S^{۲}\frac{\partial^{۲}V}{\partial S^{۲}}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=۰$$

1. Fischer Black 2. Myron Scholes 3. The pricing of options and corporate liabilities 4. *Journal of Political Economy* 5. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates 6. *Bell Journal of Economics and Management Science* 7. Chicago Board Options Exchange 8. risk neutral



فیشر بلک

میرون شولز

رابرت مرتون

که در آن V ارزش اختیار، S دارایی پایه، σ تلاطم، و r نرخ بهرهٔ بدون ریسک است.

قضیهٔ فاینمن–کاتس[1] با اثبات اینکه جواب کلاسیک یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی خطی سهموی[2] یک نمایش تصادفی مبتنی‌بر یک مقدار مورد انتظار است، ارتباط بین این دو رویکرد را ارائه می‌دهد. اما ابداعات افراد فوق تنها به فرمول‌های قیمت‌گذاری مشتق‌های مالی محدود نمی‌شود. به عنوان مثال، فیشر بلک برای توسعهٔ مدل‌های مالی بلک–درمین–توی[3]، بلک–کاراسینسکی[4]، بلک–لیترمن[5]، و ترینور–بلک[6] همراه با بسیاری از مدل‌های دیگری هم که با همکارانش ابداع کرده است معروف است. همچنین رابرت مرتون برای مدل مرتون، مدل جرو–ترنبول[7]، ICAPM، و مسئلهٔ سبد مالی مرتون مشهور است. در ۱۹۹۷ آکادمی علوم سلطنتی سوئد جایزهٔ نوبل اقتصاد را به مرتون و شولز اعطا کرد؛ فیشر بلک چند سال قبل‌از آن از دنیا رفته بود. روبینشتاین بهترین جمع‌بندی از نقش قابل‌توجه آن ها را داده است: «مدل بلک و شولز یکی از موفق‌ترین مدل‌ها در علوم اجتماعی و شاید، با در نظر گرفتن تعمیم دوجمله‌ای آن، پرکاربردترین فرمول احتمالاتی، در تاریخ بشر به شمار می‌آید» [۱۰].

کار بلک–شولز–مرتون به فعالیت پژوهشی عظیمی در حوزهٔ ریاضیات مالی منجر شده است که به‌سرعت در حال رشد است. ارائهٔ توصیف جامعی از این فعالیت در اینجا تلاش بیهوده‌ای است اما می‌خواهیم به یک موضوع جدید در اقتصاد مالی و ریاضیات، یعنی پوشش ریسک مستحکم[8] اشاره کنیم. استحکام ممکن است در چارچوب‌های مختلف معانی متفاوتی داشته باشد اما در کلی‌ترین بیان این اصطلاح، کیفیت یا وضعیت مستحکم و قوی‌بودن در شکل، ترکیب اجزاء، یا ساختمان

---

1. Feynman-Kac 2. parabolic 3. Black-Dermane-Toy 4. Black-Karasinski 5. Black-Litterman 6. Treynore-Black 7. Jarrow-Turnbull 8. robust hedging

اشاره دارد. در اقتصاد، استحکام مرتبط است با پایداری یک مدل اقتصادی تحت مفروضات، پارامترها، و شرایط اولیهٔ متفاوت و همچنین کارایی یک سیستم مالی در بازارهای مختلف و شرایط مختلف بازار. وودوارد[۱] چهار مفهوم متفاوت از استحکام را در اقتصاد طبقه‌بندی کرده است [۱۳]. منظور از استحکام استنتاجی[۲] این است که به هنگام استنتاج از یک سری دادهٔ مفروض، درجات مختلفی از وابستگی به اصول موضوع وجود دارد و استحکام اشتقاقی[۳] اشاره دارد به اینکه آیا یک نتیجهٔ نظری مفروض به فرضیات مدل‌سازی متفاوت بستگی دارد یا خیر. استحکام اندازه‌گیری[۴] به معنای مثلث‌بندی یک کمیت یا یک مقدار با ابزارهای مختلف (علّی) اندازه‌گیری است. استحکام علّی[۵]، ازطرف‌دیگر، به وابستگی‌های علّی در جهان می‌پردازد [۷]. این کلمه به لطف کتاب \استحکام نوشتهٔ دو اقتصاددان کلان برجستهٔ لارس پیتر هانسن[۶] (یکی از برندگان جایزهٔ نوبل اقتصاد ۲۰۱۳) و توماس جی. سارجنت[۷] (یکی از برندگان جایزهٔ نوبل اقتصاد ۲۰۱۱) محبوبیت بیشتری پیدا کرده است. آن‌ها تکنیک‌های کنترل مستحکم را با کاربردهای مختلف در مسائل اقتصاد کلان پویا توسعه دادند. این تکنیک‌ها وقتی که مدل‌های اقتصادی به‌طور کامل قابل اعتماد نیستند یا وقتی که مشخصات نادرست یا فرضیات اشتباه (یا گاهی‌اوقات خیلی قوی) در مدل‌سازی اقتصادی وجود دارد به کمک اقتصاددانان کلان می‌آیند.

همان‌طورکه از تحولات اخیر در تاریخ اقتصاد مشخص است، استحکام در حال تبدیل شدن به یک مفهوم مهم است که به پیشینهٔ ریاضی نیز نیاز دارد. این مفهوم ابتدا در ریاضیات مالی در قالب قیمت‌گذاری و پوشش ریسک مستحکم اختیار معاملات ظاهر شد و پیشینهٔ آن به مقالهٔ معروف «قیمت‌گذاری با لبخند» برونو دوپایر[۸] به سال ۱۹۹۴ باز می‌گردد. رویکرد استاندارد برای قیمت‌گذاری اختیار این است که فرض کنیم قیمت دارایی پایه، جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی است و سپس استدلال‌های ریسک–خنثا نتیجه می‌دهند که قیمت یک مطالبهٔ مشروط از ارزش مورد انتظار تنزیل‌یافتهٔ عایدی مشروط تحت اندازهٔ مارتینگل معادل به دست می‌آید. به‌بیان‌دیگر، در روش قیمت‌گذاری کلاسیک اختیار ابتدا مدلی برای رفتار دارایی پایه پیشنهاد می‌شود و سپس قیمت منصفانه و استراتژی پوشش ریسک متناظر آن از این مدل به دست می‌آید. بااین‌حال، دوپایر، در مقالهٔ پیشگامانه خود تنها فرض می‌گیرد که قیمت دارایی پایه یک فرایند انتشار است و اختیار خریدهایی با تمام سررسیدها و قیمت‌های توافقی ممکن معامله می‌شوند. او با مهندسی معکوس،

1. Woodward 2. inferential 3. derivational 4. measurement 5. causal 6. Lars Peter Hansen 7. Thomas J. Sargent 8. Bruno Dupire

توزیع دارایی‌های پایه را از قیمت‌های مشاهده‌شده اختیارهای خرید استخراج می‌کند و هر محصول مالی دیگری را با عایدی مشروط به ارزش نهایی دارایی می‌توان از روی این توزیع‌ها قیمت‌گذاری و پوشش ریسک داد. شهود پشت این رویکرد کاملاً مستدل است: امروزه اختیارهای خرید به قدری نقدشونده هستند که می‌توانند به عنوان دارایی‌های اولیه برای قیمت‌گذاری ابزارهای مالی پیچیده‌تر به‌کار گرفته شوند. در همین زمینه، هابسون[۱] در سال ۱۹۹۸ از استنتاج اطلاعات در مورد توزیع بالقوه قیمت دارایی‌ها از قیمت اختیار خرید بهره گرفت و کران‌های مستقل مدل و استراتژی‌های پوشش ریسک متناظر مشتقات نامتعارف[۲] را، به‌ویژه، در اختیار گذشته‌نگر[۳] به دست آورد. در دههٔ گذشته پوشش ریسک مستحکم یک حوزه فعال تحقیقاتی بوده است و ما خواننده را برای اطلاعات بیشتر به نوشتهٔ عالی هابسون [۶] ارجاع می‌دهیم.

همان‌طورکه در بالا به تفصیل توضیح داده شد، پوشش ریسک مستحکم در ریاضیات مالی به استفاده از ابزارهای مالی نقدشونده برای کاهش ریسک مورد نظر اشاره دارد. در بازار اختیارهای معاملهٔ شیکاگو (CBOE) محاسبهٔ شاخص تلاطم (VIX)[۴] نمونهٔ خوبی از پوشش ریسک مستحکم است. VIX برای محاسبهٔ تلاطم ضمنی ۳۰ روز تقویمی آیندهٔ اختیار معاملات شاخص S& P 500 (SPX)، شاخص اصلی سهام ایالات متحده، ایجاد شده است. طیف گسترده‌ای از قیمت‌های توافقی اختیارهای خرید و فروش SPX در محاسبهٔ VIX استفاده می‌شود. این شاخص در رسانه‌ها و انتشارات مالی پیشرو، شاخص ترس هم نامیده می‌شود. همان‌طورکه CBOE بیان می‌کند «چون تلاطم اغلب آشفتگی مالی را نشان می‌دهد، VIX اغلب به عنوان «عیار ترس سرمایه‌گذاران» تعبیر می‌شود.» این اندازه را خواه‌ناخواه، هر دو طرف خرید و فروش بازار دنبال می‌کنند چون اطلاعات مهمی در مورد احساسات سرمایه‌گذاران نشان می‌دهد که در ارزیابی نقاط عطف بالقوه بازار مفیدند. در سال ۲۰۰۴، CBOE اولین قرارداد آتی VIX قابل معامله در بورس را معرفی کرد و دو سال بعد، در ۲۰۰۶، CBOE اختیارهای VIX را به راه انداخت که موفق‌ترین محصول جدید در تاریخ بورس محسوب می‌شوند.

یکی از مسائل مرتبط به مسئلهٔ پوشش ریسک مستحکم در ریاضیات و اقتصاد مسئلهٔ انتقال بهینهٔ مونژ–کانتوروویچ[۵] است. این مسئله ابتدا توسط مونژ [۹] برای جابجایی خاک در حین ساخت قلعه‌ها و جاده‌ها با حداقل هزینهٔ حمل‌ونقل فرمول‌بندی شد. به بیان ریاضی، با فرض دو اندازهٔ μ و ν با جرم مساوی، ما به دنبال یک نگاشت انتقال بهینه مانند S، یعنی یک نگاشت دوسویی بهینه

1. Habson 2. exotic 3. look-back option 4. Volatility Index 5. Mongee-Kantorovich

روی $\mathbb{R}^d$، هستیم به‌طوری‌که $S_{\#}\nu = \mu$ برای هر تابع پیوسته ϕ

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(S(x))\mathrm{d}\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(S(x))\mathrm{d}\mu(x).$$

هدف مینیمم‌سازی

$$\int_{\mathbb{R}^d} c(x, \varphi(S(x)))\mathrm{d}\nu(x)$$

است برای تابع هزینهٔ داده‌شدهٔ c به‌ازای همهٔ نگاشت‌های دوسویی S.

کانتوروویچ این مسئله را به‌صورت زیر ساده‌سازی کرد.

$$\text{مینیمم‌سازی} \qquad \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} c(x,y)\mathbb{Q}(\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y)$$

به‌ازای همهٔ اندازه‌های احتمال $\mathbb{D} \in \mathbb{M}(\nu, \mu)$، یعنی

$$(\mathrm{Proju}_x)\,\#\mathbb{D} = \nu, \qquad \left(\mathrm{Projy}_y\right)\#\mathbb{D} = \mu,$$

یا به‌طور معادل، برای هر دو مجموعهٔ بورل $A, B \subset \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{Q}\left(A \times \mathbb{R}^d\right) = \nu(A), \qquad \mathbb{Q}\left(\mathbb{R}^d \times B\right) = \mu(B).$$

این فرمول‌بندی یک برنامهٔ خطی است و به‌وضوح دارای یک جواب است. علاوه‌براین، دوگان محدب آن عبارت است از

$$\text{مینیمم‌سازی} \qquad \left[\int g(x)\nu(\mathrm{d}x) + \int h(y)\mu(\mathrm{d}y)\right]$$

به‌ازای هر $g \in \mathbb{L}^1\left(\mathbb{R}^d, \nu\right), h \in \mathbb{L}^1\left(\mathbb{R}^d, \mu\right)$ که در شرط $g(x)+h(y) \geq c(x,y), \forall x, y$ صدق می‌کنند.

ارتباط بین مسائل مونژ–کانتوروویچ و پوشش ریسک مستحکم در [۲] به‌صورت زیر توضیح داده شده است. یک ارتباط بهینه باید بین دو اندازه ساخته شود یعنی اندازه‌های توزیع اولیه و نهایی فرایند سهام در مسئلهٔ پوشش ریسک مستحکم. اما در حالت کلی، تابعک هزینه به کل مسیر این ارتباط بستگی دارد و نه صرفاً به مقدار نهایی آن. ازاین‌رو، به‌جای نگاشت‌های S باید فرآیندها را در نظر گرفت. توزیع احتمال این فرآیند توزیع‌های حاشیه‌ای مشخصی در زمان‌های اولیه و پایانی دارد. بنابراین شباهت مستقیمی با اندازهٔ کانتوروویچ دارد.

مراجع

[1] Apostol, T. M., Calculus, vol. II, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1969.

[2] Dolinsky, Y., Soner, H. M., Martingale optimal transport and robust hedging in continuous time, *Probab. Theory Related Fields*, **160** (2014), 391-427.

[3] Goetzmann, W. N., Fibonacci and the financial revolution, 2004 (working paper), available at `http://www. nber.org/papers/w10352`.

[4] Goetzmann, W. N., Rouwenhorst, K. G., The Origins of Value: The Financial Innovations That Created Modern Capital Markets, Oxford University Press, USA, 2005.

[5] Hobson, D. G., Robust hedging of the lookback option, *Finance Stoch.*, **2** (4) (1998), 329-347.

[6] Hobson, D. G., The Skorokhod embedding problem and model-independent bounds for option prices, in *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010*, Springer-Verlag, Berlin, 2011, 267-318.

[7] Kuorikoski, J., Lehtinen, A., Marchionni, C., Economics as robustness analysis, 2007 (working paper), available at `http://philsci-archive.pitt.edu/3550/1/econrobu.pdf`.

[8] Lo, A. W., Mueller, M. T., Warning: physics envy may be hazardous to your wealth! (2010), available at `arXiv:1003.2688`.

[9] Monge, G., Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais, *Mem. Math. Phys. Acad. Royale Sci.*, (1781), 666-704.

[10] Rubinstein, M., From Black-Scholes to Black Holes: New Frontiers in Options, Risk Magazine, London, 1992.

[11] Schachermayer, W., Teichmann, J., How close are the option pricing formulas of Bachelier and Black–Merton–Scholes?, *Math. Finance*, **18** (1) (2008), 155-170.

[12] Sigler, L. E., *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Springer, New York, 2002.

[13] Woodward, J., Some varieties of robustness, *J. Econom. Methodology*, **13** (2) (2006), 219-240.

آزاده قاسمی‌فرد: دانشگاه مازندران، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه ریاضی کاربردی

رایانامه: `a.ghasemi@umz.ac.ir`

Mathematical Culture and Thought
Volume 42, Number 2, Fall/Winter 2023, Pages 297–311
doi: 10.30504/mct.2023.1344.1937

A Brief History of Mathematics in Finance*

E. Akyıldırım, H. Mete Soner
Translated by A. Ghasemifard[1]

Department of Applied Mathematics, University of Mazandaran, Iran

Abstract. In the list of possible scapegoats for the recent financial crises, mathematics, in particular mathematical finance has been ranked, without a doubt, as the first among many and quants, as mathematicians are known in the industry, have been blamed for developing and using esoteric models which are believed to have caused the deepening of the financial crisis. However, as Lo and Mueller (2010) state "Blaming quantitative models for the crisis seems particularly perverse, and akin to blaming arithmetic and the real number system for accounting fraud." Throughout the history, mathematics and finance have always been in a close relationship. Starting from Babylonians, through Thales, and then Fibonacci, Pascal, Fermat, Bernoulli, Bachelier, Wiener, Kolmogorov, Ito, Markowitz, Black, Scholes, Merton and many others made huge contributions to the development of mathematics while trying to solve finance problems. In this paper, we present a brief historical perspective on how the development of finance theory has influenced and in turn been influenced by the development of mathematical finance theory.

Keywords: mathematical finance, financial market, pricing, Brownian motion, stochastic differential equations
Article history: Recieved 12 November 2022; Accepted 4 April 2023
Article type: translation

* Akyıldırım, E., Mete Soner, H., A brief history of mathematics in finance, *Borsa Istanbul Rev.*, **14** (2014), 57-63.
1. a.ghasemi@umz.ac.ir