فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۳، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۳)، صص ۱ تا ۴۸

مصاحبه

از آنالیز تابعی خطی تا آنالیز تابعی غیرخطی: گفت‌وگویی با دکتر جعفر زعفرانی

علیرضا امینی هرندی، مجید فخار، سعید مقصودی✉

چکیده. آنالیز تابعی حاصل پیشرفت مهمی در دیدگاه ریاضی‌دانان در بررسی رفتار توابع به‌صورت یک مجموعه (فضای توابع) بود. مفهوم مهم فضای مجرد و فاصلهٔ نقاط، ابداعی فرشه در اوایل قرن بیستم، و ترکیبی از مفاهیم جبری و توپولوژیکی نهایتاً باعث تثبیت این شاخه از ریاضیات حوالی سال ۱۹۳۳ شد. اولین ریاضی‌دان ایرانی متخصص در این رشته دکتر حیدر رجوی بود که در سال‌های ۱۳۴۲–۱۳۴۷ در ایران فعالیت داشت. شاخهٔ دیگری از این حوزه موسوم به آنالیز تابعی غیرخطی است و دکتر بهزاد جعفری روحانی اولین متخصص این شاخه بود که از سال ۱۳۶۶ به بعد در کشور فعالیت داشت. یکی دیگر از افرادی که نقش بارزی در ایجاد و گسترش این شاخه در کشور داشته است دکتر جعفر زعفرانی است. در این نوشته، پس‌از بیان تاریخچهٔ آنالیز تابعی، نگاهی مختصر به آثار او در این زمینه می‌کنیم و در گفت‌وگویی با او تجربیات و روایت او را از عرصه‌های مختلف زندگی حرفه‌ایش مرور می‌کنیم.

۱ مقدمه

«سرچشمه‌های آنالیز تابعی ارتباط نزدیکی با حساب وردش‌ها[1]، حساب عملگری، و نظریهٔ معادله‌های انتگرالی دارد. پایه‌گذاری اصولی آن عمدتاً به مدد ابداع نظریهٔ مجموعه‌های کانتور، توپولوژی مجموعه‌نقاط، و تعریف دقیق فضای توابع، و نظریه‌های اصل موضوعی و ساختارهای مجرد

عبارات و کلمات کلیدی: آنالیز تابعی، آنالیز غیرخطی، نظریهٔ عملگرها، کنترل بهینه، تحقیق در ریاضی، تدریس ریاضیات، دانشگاه اصفهان
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۲/۱۵

1. calculus of variations

doi: 10.30504/mct.2024.1476.2034

ریاضیات ممکن گردید» [۱۱]. مفهوم محوری در آن «فضای توابع» است که به‌طور مسامحه‌آمیزی به معنای یک فضای توپولوژیکی است که نقاط آن تابع‌اند و بسیاری از آن‌ها مجهز به یک متریک‌اند که عموماً برحسب یک نرم تعریف می‌شود. این فضاها ساختارهای غنی جبری و توپولوژیکی دارند. مفهوم فضای توابع و به‌طور کلی ریشه‌های آنالیز تابعی را می‌توان تا اواخر قرن نوزدهم پی گرفت؛ در این باره مقالهٔ مفصل [۱۰] را مطالعه کنید. تقریباً تا سال ۱۹۳۳ این شاخه از ریاضیات شکل گرفته بود. این شاخه اکنون در بسیاری از حوزه‌ها کاربرد دارد و شاخه‌ای فعال از ریاضیات معاصر است. بعضی از موضوعات و شاخه‌های مختلفی از ریاضیات را که به آنالیز تابعی مرتبط‌اند در جدول ۱ آورده‌ایم.

آشنایی ما ایرانیان با آنالیز تابعی، صرف‌نظر از درسی به این نام در مجموعهٔ دروس کارشناسی ارشد و دورهٔ مدرسی ریاضیات که به سال‌های ۱۳۴۳–۱۳۴۴ می‌رسد، از طریق دکتر حیدر رجوی است که در سال ۱۳۴۲ به ایران آمد و اولین دوره از دانشجویان با گرایش آنالیز تابعی (نظریهٔ عملگرها) را در ۱۳۴۷ در دانشگاه شیراز فارغ‌التحصیل کرد [۵]. شاخهٔ دیگری از آنالیز تابعی که عمدتاً به مسائل عملگرهای غیرخطی می‌پردازد و به‌نوعی آنالیز غیرخطی روی فضاهای برداری توپولوژیک بی‌نهایت‌بُعدی، خمینه‌ها، و نظایر آن است تا مدت‌ها در سایهٔ روش‌های آنالیز تابعی (خطی) مانده بود زیرا تصور بر این بود که می‌توان با خطی‌سازی، مسائل غیرخطی را حل‌وفصل کرد. درواقع، از عنوان این شاخه که به‌طور سلبی تعریف شده است به نظر می‌آید که مکمل موضوع دیگری، یعنی آنالیز تابعی خطی است. اما از دههٔ ۱۹۶۰ به‌بعد روش‌هایی که در این باره، براثر کاربردها، طی سی سال گذشته ابداع شده بودند گسترش پیدا کردند و رونقی واقعی یافتند و شاخهٔ جدیدی به‌نام آنالیز تابعی غیرخطی شکل گرفت. مباحثی مانند نقطهٔ ثابت، قضیه‌های مینیماکس، روش‌های وردشی، معادله‌های عملگری، و حساب دیفرانسیل و انتگرال روی فضاهای باناخ ازجمله موضوعات مطرح این شاخه هستند [۱۶]. آشنایی اولیهٔ محافل دانشگاهی ما با این زمینهٔ علمی از طریق دکتر بهزاد جعفری روحانی بوده است که دانشجویانی (در دورهٔ کارشناسی ارشد) با این گرایش در سال‌های ۱۳۷۰–۱۳۷۵ فارغ‌التحصیل کرده و اولین مقالهٔ علمی را در این زمینه در مجلات بین‌المللی با نشانی ایران منتشر کرده است و بعداً نیز، در سال‌های ۱۳۷۹ و ۱۳۸۴، دو کتاب ([۳، ۴]) در این زمینه منتشر کرد. پس‌از او فرد دیگری که نقش برجسته‌ای در ایجاد و تثبیت آنالیز تابعی غیرخطی در کشور داشته دکتر جعفر زعفرانی است. او از طرق مختلف به رشد و گسترش این شاخه کمک کرده است.

جدول ۱. آنالیز تابعی و چند شاخهٔ دیگر با موضوع‌های مشترک (طبق آخرین رده‌بندی موضوعی انجمن‌های ریاضی آمریکا و اروپا)

کد اصلی شاخه	عنوان بعضی از موضوع‌ها
46: Functional analysis	Topological linear spaces and related structures; Normed linear spaces and Banach spaces; Banach lattices; Inner product spaces and their generalizations, Hilbert spaces; Linear function spaces and their duals; Distributions, generalized functions, distribution spaces; Measures, integration, derivative, holomorphy (all involving infinite-dimensional spaces); Topological algebras, normed rings and algebras, Banach algebras; Commutative Banach algebras and commutative topological algebras; Topological (rings and) algebras with an involution; Selfadjoint operator algebras (C^*-algebras, von Neumann (W^*-) algebras, etc.); Methods of category theory in functional analysis; Other (nonclassical) types of functional analysis; Nonlinear functional analysis; Noncommutative measure and integration; Quantum groups (operator algebraic aspects); Noncommutative differential geometry; Applications of functional analysis in optimization, convex analysis, mathematical programming, economics
47: Operator theory	Quaternionic operator theory; Operator theory over fields other than $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ or the quaternions; non-Archimedean operator theory; Nonstandard operator theory; Operator theory in probabilistic metric linear spaces; Fuzzy operator theory; Equations involving nonlinear operators; Nonlinear ill-posed problems; Abstract inverse mapping and implicit function theorems involving nonlinear operators; Nonlinear spectral theory, nonlinear eigenvalue problems; Abstract bifurcation theory involving nonlinear operators; Variational and other types of inequalities involving nonlinear operators; Variational and other types of inclusions; Iterative procedures involving nonlinear operators; Fixed-point iterations; Variational methods involving nonlinear operators; Nonlinear evolution equations;Equations with nonlinear hysteresis operators; Set-valued operators;Monotone operators and generalizations; Nonlinear accretive operators, dissipative operators, etc.; Monotone and positive operators on ordered Banach spaces or other ordered topological vector spaces; Measures of noncompactness and condensing mappings, K-set contractions, etc.; Contraction-type mappings, nonexpansive mappings, A-proper mappings, etc.; Fixed-point theorems;Degree theory for nonlinear operators; Perturbations of nonlinear operators; Semigroups of nonlinear operators; Nonlinear ergodic theorems; Particular nonlinear operators; Random nonlinear operators; Multilinear and polynomial operators; Operator ideals; Applications of operator theory in systems, signals, circuits, and control theory; Applications of operator theory to differential and integral equations
58: Global analysis, analysis on manifolds	Real-valued functions on manifolds; Set-valued and function-space-valued mappings on manifolds; Continuity properties of mappings on manifolds; Holomorphic maps on manifolds; Implicit function theorems, global Newton methods on manifolds; Differentiation theory on manifolds; Differentiable maps on manifolds; Fixed-point theorems on manifolds; Integration on manifolds; measures on manifolds; Spectral theory; eigenvalue problems on manifolds; Analysis on supermanifolds or graded manifolds; Groups of diffeomorphisms and homeomorphisms as manifolds; Groups and semigroups of nonlinear operators; Spaces of embeddings and immersions; Manifolds of mappings; Manifolds of metrics; Group actions and symmetry properties; Measures on manifolds of maps; Equations in function spaces; evolution equations; Moduli problems for differential geometric structures; Moduli problems for topological structures; Applications of manifolds of mappings to the sciences
49: Calculus of variations and optimal control; optimization	Set-valued and variational analysis; Existence theories for optimal control problems involving relations other than differential equations; Variational inequalities; Variational methods for eigenvalues of operators; Nonsmooth analysis
41: Approximations and expansions	Abstract approximation theory (approximation in normed linear spaces and other abstract spaces); Approximation by operators
35: Partial differential equations	Abstract hyperbolic equations
34: Ordinary differential equations	onlinear differential equations in abstract spaces
43: Abstract harmonic analysis	Measure algebras on groups, semigroups, etc.; L^1-algebras on groups, semigroups, etc.
30: Functions of a complex variable	Spaces of bounded analytic functions of one complex variable
32: Several complex variables and analytic space	Spaces of bounded analytic functions of one complex variable
37: Dynamical systems and ergodic theory	Fixed points and periodic points of dynamical systems; fixed-point index theory; local dynamics
22: Topological groups, Lie groups	C^*-algebras and W^*-algebras in relation to group representations
55: Algebraic topology	Degree, winding number

در این مقاله، ابتدا تاریخچه و برخی موضوعات آنالیز تابعی را بیان می‌کنیم و سپس گزارشی مختصر از آثار علمی دکتر زعفرانی در این زمینه به دست خواهیم داد. در بخش آخر نیز، ضمن گفت‌وگویی با او، با اندوخته‌های برآمده از افزون بر پنجاه سال حضور او در عرصهٔ ریاضیات کشور آشنا می‌شویم. هرسهٔ ما سال‌ها از محضر علمی او بهره‌ها برده‌ایم و این نوشته ادای دینی است به او و امثال او.

۲ آنالیز تابعی خطی و غیرخطی: تاریخچه و برخی مسائل

اگر به گفتهٔ ولترّا[1] قرن هفدهم قرن حسابان بی‌نهایت کوچک‌ها باشد، قرن نوزدهم را می‌توان قرن نظریهٔ توابع نامید و، با در نظر گرفتن گسترهٔ وسیع شاخهٔ آنالیز ریاضی، کاملاً بجا است که قرن بیستم را قرن آنالیز تابعی بنامیم. در این قرن، تغییر و تبدیل بسیاری از مفاهیم و روش‌ها در آنالیز کلاسیک و ایجاد و گسترش بسیار از شاخه‌ها در آنالیز و ریاضیات کاربردی متأثر از دیدگاه آنالیز تابعی بوده است. تغییر یادشده، به زبانی ساده، عبارت است از عطف توجه از توابع به‌صورت \انفر\ادی به فض\اه\ای توابع، به زیرمجموعهٔ چنین فضاهایی، به انواع گوناگونی از ساختارهایی که روی چنین فضاهایی یا خانواده‌هایی از این توابع وجود دارد، و به نگاشت‌هایی که از یک فضا یا خانواده به فضا یا خانوادهٔ دیگری تعریف می‌شود [۱۲].

به‌طور خلاصه می‌توان گفت تلفیق مسائل و روش‌هایی از حوزه‌های مختلف ریاضی به شکل‌گیری آنالیز تابعی منتهی شد. در زیر خطوط اصلی را به‌اختصار می‌آوریم [۱۲]. اطلاعات مفصل‌تری را می‌توان در [۱۳، ۱۵] یافت؛ مطالعهٔ [۱، ۱۷] نیز خالی از لطف نیست.

- حل مسئلهٔ دیریکله. یکی از مسائل تحلیلی در نیمهٔ پایانی قرن نوزدهم یافتن تابعی هارمونیک روی دامنه‌ای از صفحه بود که مقادیر مشخصی را روی مرز ناحیه اختیار کند؛ مسئله‌ای که به مسئلهٔ دیریکله معروف شده بود. در اوایل قرن نوزدهم، گاوس پی برده بود که اگر مسئلهٔ وردشی مینیمم‌سازی انتگرال دیریکله روی تمام توابع u صادق در شرایط مرزی و دارای خاصیت نظم روی دامنهٔ مفروض دارای جواب منظمی مثل $u_\circ$ باشد، در این صورت این تابع در مسئلهٔ دیریکله با شرایط داده‌شده صدق می‌کند. ریمان با استفاده از نتیجه‌ای که دیریکله و کلوین در این باره به دست آورده بودند توانست یک ابزار مهم برای رویکرد هندسی به توابع با متغیر مختلط ابداع کند و بعداً آن را در نظریهٔ سطوح ریمانی و انتگرال توابع جبری به کار بَرَد. ریمان با یکی کردن مباحث مرتبط با معادله‌های

1. Vito Volterra (1860-1940)

دیفرانسیل جزئی مهم در فیزیکِ ریاضی و نظریهٔ توابع تحلیلی موجب شد مسئلهٔ دیریکله و اصل دیریکله مبنی‌بر وجود جواب‌های فَرینال[۱] برای مسائل وردشی مورد توجه ریاضی‌دانان قرار گیرد. مسائل وردشی به مینیمم‌سازی عبارتی مانند

$$\int_a^b f(x, y, y')dx,$$

می‌پردازد که به تابع $y(x)$ وابسته است. این مسئلهٔ مینیمم‌سازی در ابداع آنالیز تابعی، کاربرد روش‌ها و مفاهیم حساب وردشی، و نهایتاً ابداع توپولوژی عمومی در مرکز توجه قرار داشت. درستی اصل دیریکله، چهل سال بعد، در سال ۱۹۰۰ به دست هیلبرت اثبات شد. البته ریاضی‌دانان دیگری، ازجمله سی. نویمان[۲] در ۱۸۷۰ با استفاده از روشی توانستند حل مسئله را به حل یک معادلهٔ انتگرالی تبدیل کنند و از این طریق معادله‌های انتگرالی اهمیت پیدا کردند. بعدها آدامار[۳] و پوانکاره این موضوع را ادامه دادند و در آن از نظریهٔ طیفی و پارامترهای مقادیر ویژه استفاده کردند.

• مسئلهٔ سه جسم و دستگاه معادلات خطی بی‌نهایت‌بُعدی. مسئلهٔ دیگری که در زمینه‌ای کاملاً متفاوت مورد توجه بود نظریهٔ پریشیدگی[۴] بود که در مسائل سه‌جسمِ مکانیک سماوی که توسط هیل[۵]، پوانکاره، و فون کوخ[۶] در چارچوب یک دستگاه بی‌نهایت‌بُعدی از معادلات خطی بررسی شده بود. یکی از آثاری که در این باره اهمیت تاریخی بسیار زیادی دارد مقالهٔ سال ۱۹۰۱ فردهولم[۷] است. او در این مقاله با استفاده از قضیهٔ دترمینان آدامار نشان داد که اگر g و K پیوسته باشند، معادلهٔ انتگرالی

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy$$

و یا معادلهٔ همگن متناظر

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy$$

دارای پاسخ پیوستهٔ نابدیهی‌اند. فردهولم در آن مقاله اولین قضیهٔ وجودی را با گسترهٔ وسیع کاربردی برای حل معادلات انتگرالی به دست می‌دهد. این مقاله تأثیر به‌سزایی در جلب توجه ریاضی‌دانان برجسته به این دسته مسائل و نیز آنالیز تابعی داشت. روش به کار رفته در حل این مسئله، که عبارت

1. extremal 2. Carl Gottfried Neumann (1832-1925) 3. Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) 4. perturbation 5. George William Hill (1838-1914) 6. Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924) 7. Ivar Fredholm (1866-1927)

بود از گذر از حالت متناهی به حالت نامتناهی از طریق حد، قبلاً توسط ولترّا و آدامار مطرح شده بود؛ این دو در ترویج این روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی نقش بارزی داشتند (ولترّا این مبحث را «fonctionelles des lignes» و آدامار آن را «analyse functionelle» نامیده بود).

گام مهم بعدی را هیلبرت با نوشتن تعدادی مقاله در سال‌های ۱۹۰۴ تا ۱۹۱۰ برداشت که در ضمن آن‌ها ایده‌های فردهولم را به‌صورت ملموس و فارغ از مفهوم‌سازی‌های مجرد مطرح کرد.

• «فضای» توابع اندازه‌پذیر. اف. ریس[1] و فرشه[2] با استفاده از نظریهٔ جدید انتگرال لبگ[3] (در مورد ریس، متأثر از علاقه‌ای که به مسئلهٔ گشتاورها داشت) در سال ۱۹۰۶ «فضاهای» توابع‌اندازه‌پذیر (یا همان فضاهای امروزی L^p) را تعریف کردند و نظریهٔ گشتاورها را که برخاسته از نظریهٔ احتمال بود وارد آنالیز تابعی کردند [۱۰].

• موضوع مهم دیگری که به آنالیز تابعی گره خورد ورود مفاهیمی بود که در ۱۹۰۶ مستقلاً به دست فرشه و مور[4] ابداع شد، مور آن را «آنالیز عمومی» نامید که بعدها «توپولوژی عمومی» نامیده شد. این مفاهیم، در ساده‌ترین شکل، یکی فضای متریک و دیگری حدود تعمیم‌یافتهٔ مور بودند. این امر باعث شد مفاهیم آنالیز تابعی با نظریهٔ مجرد مجموعه‌های کانتور گره بخورد. از نمونه‌های بارز این تلفیق کاربرد مستقیم مفهوم فضای متریک فرشه برای فضای توابع پیوسته بود. اولین مثال از توپولوژی روی مجموعه‌های دلخواه، در کار فرشه در سال‌های ۱۹۰۴ تا ۱۹۰۶ ظاهر شدند و او مفهوم فضای متری را در رسالهٔ دکترای خود تعریف کرد. فرشه خود را به استخراج قضیه‌های کلی در چارچوب مجرد محدود نکرد، بلکه بیش از نیمی از رسالهٔ دکترای او دربارهٔ «فضاهای متری خاص» است که در ارتباط نزدیک با آنالیز بودند. او فشردگی، کامل‌بودن، و جدایی‌پذیریِ این فضاها را تعریف و بررسی کرد.

• کار با فضاهای بی‌نهایت‌بُعدی توابع. مسیر دیگری از تحقیقات که هم‌زمان بود با مسیر قبلی، کارکردن مستقیم با خود فضاهای بی‌نهایت بُعدی توابع بود که منتهی به نظریهٔ جدید عملگرها شد. این مسیر در سال ۱۹۰۵ (تحت راهنمایی هیلبرت) با رسالهٔ دکترای اشمیت[5] دربارهٔ معادله‌های انتگرالی آغاز شد و به‌طور بارزی در آثار اف. ریس ادامه یافت. برخی عقیده دارند که این تحقیقات منتهی شد به بنیان‌های لازم برای ایجاد یک نظریهٔ مجرد عملگرها. درواقع، مقالهٔ سال ۱۹۱۴ اف. ریس دربارهٔ عملگرهای فشرده که در سال ۱۹۱۸ منتشر شد اولین بیان روشن و صورت مدرن

1. Frigyes Riesz (1880-1956) 2. René Maurice Fréchet (1878-1973) 3. Henri Léon Lebesgue (1875-1941) 4. Eliakim Hastings Moore (1862-1932) 5. Erhard Schmidt (1876-1959)

نظریهٔ فضاهای باناخ را در بر دارد [۱۲]. در کار او و دیگرانی مثل هاوسدورف[۱]، هان[۲]، باناخ[۳]، و شاگردانش مازور[۴] و شاودر[۵] به‌طور ضمنی معلوم شده بود که فقط فضای برداری نرم‌دار کامل اهمیت دارد و نظریهٔ کلی تابعک‌های خطی، آن موضوع مجردی است که نقش تعیین‌کننده‌ای دارد.

• اولین کاربردها: درونیابی عملگرها و نقاط ثابت. اولین کاربرد آنالیز تابعی در خارج از حوزهٔ اولیه‌اش یکی در کار ام. ریس[۶]، برادر کوچک‌تر اف. ریس، در زمینهٔ درونیابی عملگرهای خطی و استفادهٔ آن در آنالیز فوریه دیده می‌شود و دیگری نیز کاربرد نقاط ثابت در حل معادله‌های دیفرانسیل جزئی غیرخطی (متأثر از روش‌های جی. دی. برکوف[۷] و کِلاگ[۸]) توسط شاودر و لُره[۹] است. در این موضوعات برای اولین بار مفاهیم نظریهٔ فضاهای بی‌نهایت‌بُعدی و عملگرها روی مسائل خطی و غیرخطی به‌گونه‌ای یکدست، سازگار، و معنادار در نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیل جزئی به کار می‌رفت. این تلفیق برای پیشرفت آنالیز تابعی بسیار تأثیرگذار بود.

در اینجا نقش روش‌های پیکار[۱۰] و برنشتاین[۱۱] در حل معادله‌های دیفرانسیل جزئی را می‌توان دید. برنشتاین سعی داشت معادله‌های دیفرانسیل جزئی را با استفاده از کران‌های ازپیش تعیین‌شده حل کند. در این روش چون جواب را مفروض می‌گیریم و به دنبال خواص آن هستیم، عملاً، خانوادهٔ همهٔ جواب‌ها را در نظر گرفته‌ایم و بنابراین پای آنالیز تابعی به میان کشیده می‌شود. این روش را ابتدا شاودر بررسی و شفاف کرد. او مسائل بسیاری را در حوزهٔ معادله‌های دیفرانسیل جزئی با مفهوم نگاشت‌های غیرخطی مرتبط کرد. این امر نکتهٔ مهمی است زیرا هدف کاربرد آنالیز تابعی در هر فضایی نیست بلکه کاربرد آن در یک فضای تابعی خاص است. فضای مورد بررسی یک فضای عمومی نیست، بلکه فضایی است با ویژگی‌هایی که بتوان روش‌های آنالیز تابعی خطی و قضیهٔ نقطهٔ ثابت بروئوور[۱۲] را برای آن به کار برد؛ این قضیه را شاودر برای این حالت تعمیم داده بود. آثار دیگر شاودر و لُره در این زمینه، به کارگیری درجهٔ توپولوژیک در نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیل جزئی و عملگرهای غیرخطی را موجب شد.

• جبرهای نرم‌دار، آنالیز هارمونیک، و نظریهٔ نمایش. آنالیز تابعی وجوه جبری بسیاری دارد. جبرهای باناخ و به‌طور کلی جبرهای توپولوژیک و آنالیز هارمونیک روی گروه‌های موضعاً فشرده از این جمله‌اند؛ برای اطلاعات بیشتر [۷، ۸] را مطالعه کنید. نظریهٔ نمایش گروه‌ها که در این حوزه‌ها

1. Felix Hausdorff (1868-1942) 2. Hans Hahn (1879-1934) 3. Stefan Banach (1892-1945) 4. Stanisław Mieczysław Mazur (1905-1981) 5. Julius Schauder (1899-1943) 6. Marcel Riesz (1886-1969) 7. George David Birkhoff (1884-1944) 8. Oliver Dimon Kellogg (1878-1932) 9. Jean Leray (1906-1998) 10. Charles Émile Picard (1856-1941) 11. Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968) 12. Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)

قرار می‌گیرد موضوع بسیار مهمی در بسیاری از شاخه‌های جبر، ازجمله نظریهٔ اعداد، است.

نظریهٔ نمایش از گروه‌های متناهی مجرد شروع شد و طبیعی بود که گروه‌های فشرده اولین گروه‌های توپولوژیک مورد بررسی باشند. وایل[1] در سال ۱۹۲۵ تمام نمایش‌های خطیِ پیوسته و تحویل‌ناپذیرِ گروه‌های لیِ فشردهٔ نیم‌ساده را به دست آورد. قدم‌های اولیهٔ در زمینهٔ نظریهٔ نمایش گروه‌های فشرده را وایل با همکاری دانشجویش پیتر[2] در سال ۱۹۲۷ برداشتند که درواقع اولین کاربرد نظریهٔ طیفی در آنالیز هارمونیک است و به قضیهٔ پیتر–وایل معروف است.

آغاز آنالیز هارمونیک مجرد به سال ۱۹۳۳ بر می‌گردد که در آن سال هار[3]، ریاضی‌دان مجاری، وجود یک اندازه رادون ناوردا تحت انتقال را برای هر گروه موضعاً فشرده و شمارای نوع دوم ثابت کرد (بعداً شرط شمارای نوع دوم را وِی[4] برداشت). پونتریاگین[5] قضیهٔ پیتر–وایل را به کار گرفت تا یک مفهوم دوگانی برای گروه‌های آبلی متریک‌پذیر فشرده بیابد. آندره وی در سال ۱۹۴۰ چارچوبی برای نظریهٔ کلی مشخصه‌های گروه‌های توپولوژیک به دست داد و نشان داد که اغلب نتایج در مورد سری و انتگرال فوریه را می‌توان به گروه‌های موضعاً فشرده آبلی گسترش داد.

در سال ۱۹۲۹، فون نویمان[6]، متأثر از کاربردهای احتمالاتی در موضوع در حال گسترش فیزیک کوانتومی و گروه‌های نامتناهی، فضای هیلبرت مجرد را تعریف کرد و نظریهٔ طیفی عملگرهای نرمال و ارمیتی را تکمیل کرد. استون[7] مستقلاً این نتایج را با در نظر گرفتن عملگرهای خودالحاق (بی‌کران) به دست آورد و در کتابش با موضوع فضاهای هیلبرت منتشر کرد. فون نویمان در سال ۱۹۳۰ به پیروی از اف. ریس جبر عملگرهای کران‌دار $B(H)$ روی فضای هیلبرت جدایی‌پذیر H را مورد توجه قرار داد و توپولوژی‌های مختلفی ازجمله مفهوم توپولوژی عملگری ضعیف را تعریف و این جبر را با این توپولوژی جدید بررسی کرد (۱۹۳۶). این شیء جدید را حلقهٔ عملگرها یا W^*–جبرها می‌نامیدند و بعدها دیکسمیه[8] اصطلاح جبرهای فون نویمان را رایج کرد. جالب توجه این است که مطالعهٔ این جبرها پنج سال زودتر از نظریهٔ عمومی جبرهای نرم‌دار، که به‌مراتب نظریه‌ای ساده‌تر بود، اتفاق افتاده است.

گرچه دستاوردهای فون نویمان و دانشجویش ماری[9] دربارهٔ حلقهٔ عملگرها روی فضای هیلبرت نویدبخش نظریهٔ جبرهای باناخ بود، نظریهٔ جبرهای نرم‌دار از ابداعات ریاضی‌دان روس گلفاند[10]

---

1. Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955) 2. Fritz Peter (1899–1949) 3. Alfréd Haar (1885-1933) 4. André Weil (1906-1998) 5. Lev Semyonovich Pontrjagin (1908-1988) 6. John von Neumann (1903-1957) 7. Marshall Harvey Stone (1903-1989) 8. Jacques Dixmier (1924-) 9. Francis Joseph Murray (1911-1996) 10. Israel Moiseevich Gelfand (1913-2009)

است (۱۹۳۹). گلفاند به دنبال تعمیم نظریهٔ طیفی به جبرهای نرم‌دار بود و متوجه شد لازم است شرط کامل بودن را به این جبرها بیفزاید. او این جبرها را حلقه‌های نرم‌دار نامید (بعدها آن را جبرهای باناخ نامیدند). البته ردپای این مفهوم را حداقل می‌توان تا سال ۱۹۳۶ پی گرفت. او در دهه‌های پربار ۱۹۳۰ و ۱۹۴۰ با همکاری نائیمارک[۱] جبرهای باناخ مجهز به یک برگردان[۲] را نیز مطالعه کردند؛ چیزی که بعدها $*$–جبرها و C^*–جبرها نامیده شدند. گلفاند در یک مقالهٔ مشترک با رایکُف[۳] نشان داد که با استفاده از نتایج کلی به دست آمده در جبرهای باناخ می‌توان نتایج قبلی را به روشی بسیار ساده‌تر استنتاج کرد. درواقع، این مقاله آغازگر گسترش نظریهٔ نمایش بی‌نهایت‌بُعدی است. در اینجا باید به نظریهٔ آنالیز هارمونیک تعمیم‌یافتهٔ وینر[۴] به سال ۱۹۳۰ اشاره کنیم که تحت تأثیر تحقیقاتش در حرکت براونی به وجود آمد. او معتقد بود در بررسی این گونه پدیده‌ها که تناوب وجود ندارد آنالیز فوریه ناکارآمد است و روش جدیدی در این باره ابداع کرد. یکی از معروف‌ترین نتایج او چیزی است که امروزه قضیهٔ وینر–لوی نامیده می‌شود و به‌نوعی نشاندهندهٔ ظهور یکی از مهم‌ترین وجوه نظریهٔ جبرهای به‌اصطلاح باناخ است.

از ابداعات قرن بیستم در این حوزه که به آنالیز تابعی ارتباط نزدیکی پیدا می‌کند می‌توان از نظریهٔ جبرهای هوپف[۵] و گروه‌های کوانتومی نام برد.

• نظریهٔ توزیع‌ها. این نظریه یکی از نقاط عطف شگفت‌انگیز در کاربردهای آنالیز تابعی در معادله‌های دیفرانسیل جزئی و بررسی سری‌های فوریه است. این نظریه ایدهٔ کلی‌ای را که مدت‌ها در نظریهٔ عمومی حل معادله‌های دیفرانسیل جزئی و تبدیل فوریه مستتر بود نمایان کرد و یک زبان مشترک برای برقراری ارتباط بین آنالیزدان‌ها و ریاضی‌دانان کاربردی مهیّا کرد. در سال ۱۹۳۶ سُوبِلیف[۶] یک فرم خطی مناسب روی فضای برداری توابع هموار با تکیه‌گاه فشرده تعریف کرد و یک توصیف کلی از این تابعک‌ها ارائه کرد. البته سابقهٔ این موضوع به تعریف مشتق تعمیم‌یافتهٔ فیزیک‌دانان برای توابع هویساید و دیراک می‌رسید و انگیزهٔ اصلی سُوبِلیف نیز مطالعهٔ مسئلهٔ کوشی در تعیین جواب‌های یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی با شرایط اولیه بود. مهم‌ترین نقشی که شوارتس[۷] در سال ۱۹۴۵ ایفا کرد درک اهمیت این نکته بود که مفهوم توزیع که توسط سُوبِلیف معرفی شده بود و او به‌طور مستقل آن را کشف کرد، می‌تواند تعمیم قابل قبولی از تبدیل فوریه به دست دهد.

• بیان ایده‌های کلاسیک در قالب مفاهیم آنالیز تابعی. در بسیاری از حوزه‌های دیگر ریاضیات

1. Mark Aronovich Naimark (1909-1978) 2. involution 3. Dmitrii Abramovich Raikov (1905-1980)
4. Norbert Wiener (1894-1964) 5. Heinz Hopf (1894-1971) 6. Sergei Lvovich Sobolev (1908-1989)
7. Laurent-Moïse Schwartz (1915-2002)

در اواسط قرن بیستم شاهد بیان مفاهیم و روش‌های متداول برحسب مفاهیم نوظهور آنالیز تابعی بودیم و از این طریق یک دستگاه دقیق‌تر برای مفاهیم و روش‌های آن حوزه‌ها به وجود آمد. مثلاً در نظریهٔ احتمال و فرایندهای تصادفی در دههٔ ۱۹۵۰ مسائل فرایندهای تصادفی در چارچوب نظریهٔ نیم‌گروه‌های عملگری بیان شد و با نظریهٔ پتانسیل ارتباطهایی یافت. گرچه شروع این امر به آثار وینر در مورد حرکت براونی و انتگرال‌گیری در فضاهای تابعی در دههٔ ۱۹۲۰ و کارهای لوی[۱] در زمینهٔ نظریهٔ احتمال می‌رسد. درهرحال، نکتهٔ اصلی در اینجا تلفیق فضاهای تابعی با مسائل اصلی نظریهٔ احتمال بود.

نام‌گذاری و بنیان‌گذاران

آدامار و شاگردش فرشه در پدید آمدن آنالیز تابعی سهم عمده‌ای دارند. این دو، مفاهیم نظریه‌مجموعه‌ای را به‌صورت یک ابزار جدید در آنالیز تابعی وارد کردند. آدامار تعداد اندکی مقاله در زمینهٔ آنالیز تابعی در سال‌های ۱۸۹۷–۱۹۰۶ و فرشه نیز چندین مقاله و ازجمله رسالهٔ دکترایش (۱۹۰۶) تحت راهنمایی آدامار را در این زمینه نوشته است. آدامار در مقاله‌ای به سال ۱۹۱۲ برای اشاره به این موضوعات از اصطلاح «le calcul fonctionnel» استفاده می‌کند. فرشه نیز بعدها در مقاله‌ای به سال ۱۹۲۵ با عنوان «دربارهٔ مفهوم دیفرانسیل در آنالیز عمومی» به موضوعات این حوزه اشاره می‌کند. اما از همهٔ این‌ها مهم‌تر کتاب لوی، از دیگر شاگردان آدامار، است که در سال ۱۹۲۲ با عنوان *Leçons d'Analyse Fonctionnelle* منتشر شد و در آن برای اولین‌بار از اصطلاح «آنالیز تابعی»[۲] برای اشاره به این موضوعات استفاده شده است.

اما تثبیت و نمایش قدرت و دامنهٔ کاربرد این شاخه از آنالیز وام‌دار انتشار سه کتاب است که در سال ۱۹۳۲ منتشر شدند: کتاب مبانی ریاضی مکانیک کوانتومی[۳] اثر فون نویمان، تبدیل‌های خطی در فضای هیلبرت و کاربردهای آن در آنالیز[۴] اثر استون، و نظریهٔ عمل‌های خطی [۵] اثر باناخ[۶].

در کتاب باناخ به‌صورت منحصربفردی به سؤالات ظریف و دقیقی دربارهٔ عملگرهای خطی و تابعک‌ها روی دستهٔ وسیعی از آنچه او فضاهای B نامیده است پرداخته می‌شود: این فضاها بعداً فضاهای باناخ نامیده شدند.

باناخ «کشف» یا شاید مهم‌ترین کشف اشتاینهاوس[۷] بود به سال ۱۹۱۶، خود او یکی از شاگردان هیلبرت بود؛ برای اطلاع بیشتر [۶] را مطالعه کنید. رسالهٔ دکترای باناخ در مجلهٔ لهستانی

1. Paul Pierre Lévy (1886-1971) 2. analyse fonctionnelle 3. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* 4. *Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis* 5. *Théorie des Opérations Linéaires* 6. Stefan Banach (1892-1945) 7. Hugo Dyonizy Steinhaus (1887-1972)

Fundamenta Mathematicae منتشر شد. در آن رساله به‌درستی «نُرم» روی یک فضای برداری تعریف می‌شود. و فضاهای نرم‌دار کامل فضاهای B نامیده می‌شود. البته آن رساله کار خارق‌العاده‌ای نیست؛ در آن اصل کران‌داری یکنواخت که قبلاً در حالت‌های خاص ثابت شده بود برای فضاهای نرم‌دار کامل اثبات می‌شود. باناخ بررسی فضاهای نرم‌دار کامل را طی سال‌های بعد ادامه می‌دهد و نتایجش را با همکاری مازور در کتاب یادشده منتشر می‌کند. توجه داشته باشید که مفهوم «نرم» هم در سال‌های ۱۹۲۰ به‌نوعی در افواه وجود داشت: اف. ریس در ۱۹۱۶ نرم ماکسیمم را برای فضای توابع به کار برده بود، هلی[1] در ۱۹۲۱ تعریف اصل موضوعی نرم را در فضاهای دنباله‌ای ارائه داده بود، و وینر در ۱۹۲۲ در مقالهٔ خود مستقلاً مفهوم فضاهای نرم‌دار کامل (همان فضاهای باناخ) را تعریف کرده بود.

بد نیست چند کلمه‌ای دربارهٔ محتوای کتاب باناخ بگوییم. کتاب با مقدمهٔ مختصری بر فضاهای متریک و فضاهای برداری حقیقی شروع می‌شود و اولین صورت قضیهٔ معروف هان–باناخ در آن می‌آید. در فصل‌های بعد، فضاهای F (فضاهای فرشهٔ امروزی)، فضاهای نرم‌دار، و فضاهای B را می‌بینیم. کتاب با مباحثی در عملگرهای فشرده و کاربردهایی در معادله‌های فردهولم و ولترّا ادامه پیدا می‌کند و با طرح سؤالات حل‌نشده‌ای پایان می‌یابد. کتاب باناخ نقطهٔ اوج تحقیقاتی است که با ولترّا، آدامار، فرشه، و اف. ریس آغاز شده بود و در این کتاب به‌طرز زیبایی در یک چارچوب کلی می‌نشست. مثلاً ازجمله قضیه‌های بسیار مهم در آنالیز تابعی قضیه‌ای است که امروزه قضیهٔ گسترش هان–باناخ نامیده می‌شود. در سال ۱۹۲۷ هان صورت اولیهٔ این قضیه را برای یک فضای باناخ حقیقی ثابت کرد و نشان داد که هر تابعک خطی پیوسته بر یک زیرفضا از یک فضای باناخ حقیقی را می‌توان به یک تابعک خطی پیوسته بر آن فضا گسترش داد طوری که نرم آن تغییر نکند. یک نتیجه این قضیه آن بود که هر فضای باناخ حقیقی دارای دوگان نابدیهی است. در سال ۱۹۲۹ باناخ مستقل از هان صورت کلی‌تری از این حکم را برای فضاهای باناخ حقیقی به دست آورد و آن را در تجزیه و تحلیل عملگر الحاقی به کار گرفت. سرانجام در سال ۱۹۳۸ صورت مختلط این قضیه اثبات شد و راه را برای بررسی بیشتر پیوند آنالیز تابعی و نظریهٔ توابع مختلط هموار کرد. باناخ و اشتاینهاوس در سال ۱۹۲۷ اصل کران‌داری یکنواخت را ثابت کردند و بعداً باناخ صورت قوی‌تری از این اصل را در کتاب یادشده آورد و از آن قضیهٔ نمودار بسته را نتیجه گرفت. او همچنین قضیهٔ نگاشت باز را اثبات و در آن کتاب بیان کرد. چهار قضیهٔ هان–باناخ، اصل کران‌داری یکنواخت

---
1. Eduard Helly (1884-1943)

(یا قضیهٔ باناخ–اشتاینهاوس)، نگاشت باز، و نمودار بسته را چهار ستون آنالیز تابعی می‌نامند.

اجازه دهید بر این‌ها نکته‌ای از زبان برکوف و کرویت سیک [۱۱] بیفزاییم. «شهر لووف لهستان تحت هدایت اشتاینهاوس به مرکز اصلی آنالیز تابعی تبدیل شد و مجلهٔ لهستانی معروف *Studia Mathematica* (تأسیس ۱۹۲۹) مجلهٔ اختصاصی آن بود. تأثیر ریاضی‌دان اتریشی هانس هان و ریاضی‌دان مجاری اف. ریس بر روی این مرکز که در خاک امپراطوری اتریش–مجارستان واقع بود مشهود بود. ازجمله اینکه علاقهٔ هان و ریس به آنالیز تابعی کاملاً نظری بود و به کاربردهای آن علاقه‌ای نداشتند. به‌همین سبب در کتاب باناخ نظریهٔ طیفی تماماً به ولترّا، فردهولم، و ریس ارجاع داده می‌شود و نه به کتاب هیلبرت دربارهٔ معادله‌های انتگرالی و همچنین هیچ توجه خاصی به فضای هیلبرت $\ell^۲$ نمی‌شود.»

برخی مسائل آنالیز تابعی غیرخطی

نیرنبرگ[1] در جایی گفته است که در اوایل دههٔ ۱۹۶۰ ریاضی‌دانان «آنالیز تابعی غیرخطی» را ترکیبی تناقض‌آمیز می‌دانستند اما در اواخر آن دهه بعضی از آن‌ها از اینکه فقط حالت‌های خطی را در نظر می‌گرفتند شرمنده شده بودند. آنالیز تابعی غیرخطی اساساً گسترش قضیه‌های شناخته‌شده به موقعیت‌های غیرخطی از حالت متناهی‌بُعد به حالت نامتناهی‌بُعد است. البته باید توجه داشت که این موقعیت‌ها تحت تأثیر نیازهای کاربردی به وجود آمده است و نه مسائل زیباشناختی و سرگرمی از این گونه که مثلاً چه «زیبا» بود اگر قرینه یا مشابه فلان قضیه در آنالیز تابعی خطی را هم در آنالیز غیرخطی بیان و اثبات می‌کردیم.

به‌طور کلی، در بسیاری از علوم با سه دسته مسئلهٔ غیرخطی مواجه می‌شویم: معادله‌های دیفرانسیلی و انتگرالی غیرخطی، مسائل وردشی مربوط به عبارت‌های انتگرالی، و مسائل کلی بهینه‌سازی. صرف‌نظر از شکل عینی این مسائل می‌توان آن‌ها را در شکل‌های مجرد زیر در نظر گرفت [۱۸].

- معادلهٔ عملگری

$$F(x,y)=۰;$$

- معادلهٔ دیفرانسیلی عملگری

$$F(t,x(t),x'(t),\dots,x^{(n)}(t),y)=۰;$$

1. Louis Nirenberg (1925-2020)

- مسئلهٔ فرینال

$$\inf_{x\in M} f(x)=\alpha;$$

- مسئلهٔ مینیماکس

$$\sup_{x\in M}\inf_{y\in N} f(x,y)=\inf_{y\in N}\sup_{x\in M} f(x,y);$$

- نابرابری‌های وردشی

$$\langle F(x_\circ,y),x-x_\circ\rangle \leq f(x)-f(x_\circ) \qquad (\forall x\in M).$$

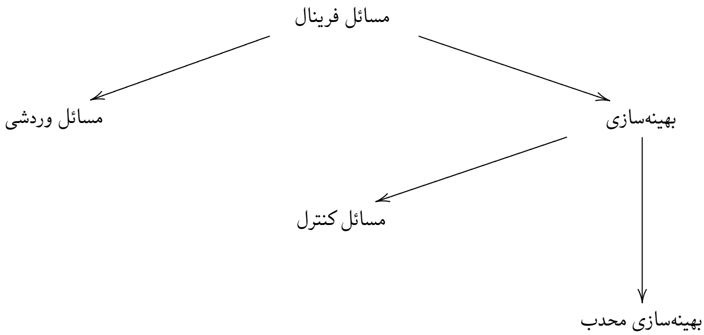
توجه کنید که در اینجا x,y اعضای فضاهای باناخ X,Y و یا حتی فضاهای کلی‌تر نظیر فضاهای موضعاً محدب، خمینه‌ها، و غیره‌اند و F نیز یک عملگر غیرخطی است (که برد آن ممکن است دوگان فضای X باشد). چنانچه x متغیری وابسته به پارامتر باشد، که اغلب زمان است، $x^{(n)}(t)$ مشتق (نسبت به t) به مفهوم مناسبی را نشان می‌دهد. همچنین، f تابعکی غیرخطی، مانند یک عبارت انتگرالی یا یک تابعک کلی هدف، و M,N مجموعه‌های مقادیر پذیرفتنی را نمایش می‌دهند.

البته باید توجه داشت که این صورت‌بندی‌ها نوعی‌اند و هریک می‌توانند بیان‌های مختلفی پیدا کنند؛ مثلاً سه مسئلهٔ زیر می‌توانند در قالب اولین نمونهٔ بالا قرار گیرند: ۱) مسئلهٔ نقطهٔ ثابت $T(x)=x$؛ ۲) مسئلهٔ ناهمگن $T(x)=y$ که در آن y معلوم و x مجهول است؛ ۳) مسئلهٔ مقدار ویژه $T(x)=\lambda x$ که در آن λ عدد است و $\lambda\neq\circ$ و x مجهول‌اند؛ ۴) مسئلهٔ نگاشت تابع ضمنی.

همچنین ترکیبی از این پنج گونه مسئله ممکن است ظاهر شود (نمودار بالا را ببینید). مثلاً در مسائل کنترل مجموعهٔ پذیرفتنی M در گونهٔ سوم مسائل بالا ممکن است به‌صورت معادلهٔ عملگری یا دیفرانسیلی عملگری داده شود. علاوه‌براین، عملگرهای یادشده در بالا ممکن است تک‌مقداری نباشند و مثلاً در مسئلهٔ نقطهٔ ثابت شکل $x\in T(x)$ و در مسائل عملگرهای دیفرانسیلی شکل $x'(t)\in T(x(t))$ را به خود بگیرند.

مسائلی که به زمان وابسته‌اند دارای ویژگی‌های خاصی هستند، زیرا در این حالت عملگرها یا مشتق نسبت به زمان روی کل دامنه تعریف شده نیست، مسائل با این ویژگی را معادله‌های تکاملی[۱] می‌نامند.

1. evolution equations



در مواجه با پنج نمونه مسائل یادشده در آنالیز تابعی غیرخطی اغلب سؤالات زیر بررسی می‌شود.

- وجود جواب؛
- یکتایی جواب؛
- پایداری جواب تحت پریشیدگی‌های کوچک پارامترها؛
- شرایط حل‌پذیری؛
- ابداع روش‌های تقریبی، بررسی همگرایی آن‌ها، و برآورد خطای آن‌ها؛
- توجیه اصل خطی‌سازی.

این بررسی‌ها وجوه مختلفی به خود می‌گیرد و از برخی روش‌های آنالیز کلاسیک نیز استفاده می‌کند و چنان‌که در جدول ۱ آمده است این بررسی‌ها به شاخه‌های مختلفی از ریاضیات ارتباط پیدا می‌کنند که برخی از آن‌ها تحت نامی خاص در کنار هم می‌نشینند، ازجمله آنالیز ناهموار (یا آنالیز بدون مشتق که در آن سروکار ما با حسابان توابع و مجموعه‌هایی است که تقریب‌های خطی مبتنی‌بر مفهوم رایج مشتق و مماس را نمی‌پذیرند) یا بخش مهمی از آن با عنوان آنالیز محدب (که به بررسی توابع محدب و مجموعه‌های محدب در کلی‌ترین حالت می‌پردازد)، آنالیز توابع مجموعه‌مقدار[1]، و نظایر آن‌ها.

قضایای نقطهٔ ثابت یکی از ابزارهای اصلی برای پاسخ به سؤالات مطرح‌شده در مسائل غیرخطی قضایای نقطه ثابت است. قضایای نقطهٔ ثابت وجود جواب‌هایی برای معادله‌هایی مثل $T(f) = f$ را تضمین می‌کنند که در آن T تبدیلی از یک «فضا» به روی خودش است. اگر T «انقباضی» باشد

۱. برخی آنالیز ناهموار و توابع مجموعه‌مقدار را مجموعاً آنالیز وردشی نامیده‌اند.

(در همسایگی‌ای از f) در این صورت دنبالهٔ کوشی از جواب‌های تقریبی f_n را می‌توان با تکرارهای f به دست آورد: f_0ای در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $f_{n+1} = T(f_n)$ و با تکرار این کار به جواب می‌رسیم؛ چیزی شبیه به روش نیوتن برای حل معادله‌های جبری. روش نویمان برای حل معادلهٔ انتگرالی (نوع دوم) $f + Kf = \varphi$ که در آن $Kf(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy$ و روش پیکار (۱۸۹۰) برای حل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول $y' = f(x,y)$ از این نوع است.

باناخ در رسالهٔ دکترای خود با الگوبرداری از روش پیکار قضیهٔ نقطهٔ ثابت برای نگاشت‌های انقباضی T، صادق در شرط $d(T(x),T(y)) \leq \alpha d(x,y)$ را که در آن $\alpha < 1$ در هر فضای متریک کامل ثابت کرد. این قضیه یکی از مهم‌ترین نتایج در آنالیز تابعی غیرخطی است و می‌توان آن را سرآغاز نظریهٔ نقطهٔ ثابت متریک دانست. قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ کاربردهای گوناگونی دارد.

ظریف‌تر از این دست قضایای نقطهٔ ثابت متریک، قضایای نقطهٔ ثابت توپولوژیک است که یکی از انواع آن قضیهٔ نقطهٔ ثابت بروئوورِ به سال ۱۹۱۲ است؛ این قضیه حاکی از این است که هر نگاشت پیوسته روی گوی بستهٔ فضای nبُعدی اقلیدسی دارای یک نقطهٔ ثابت است.

اثبات قضایای نقطهٔ ثابت در فضاهای تابعی دیگر از پیشرفت‌های آنالیز تابعی در دههٔ ۱۹۲۰ بود. چندین نوع از این قضیه‌ها را شاودر، که در ابتدا به معادله‌های دیفرانسیل جزئی علاقه‌مند بود، اثبات کرد.

قضیه (قضیهٔ نقطهٔ ثابت شاودر). هر نگاشت پیوستهٔ $\varphi : K \longrightarrow K$ از زیرمجموعهٔ محدب و فشردهٔ K از یک فضای باناخ به خودش حداقل یک نقطهٔ ثابت دارد.

قضیهٔ شاودر حوزهٔ وسیع دیگری برای کاربرد آنالیز تابعی گشود. دراصل، از این قضیه قضیه‌های وجودی بسیاری برای معادله‌های دیفرانسیل جزئی به دست آمد. این امر آغاز بسط قضیه‌های نقطهٔ ثابت توپولوژیک به‌منزلهٔ یکی از مهم‌ترین ابزارهای آنالیز تابعی غیرخطی بود. یکی از مقالات مهم در این دوره مقاله‌ای به سال ۱۹۳۴ از شاودر و لُره است.

قضایای نقطهٔ ثابت بسیار توسعه یافته‌اند و با مسائل دیگری گره خورده‌اند: برای مطالب بیشتر [۲] را ببینید. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. گوییم X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت (به اختصار FPP) است، هرگاه برای هر زیرمجموعهٔ ناتهی، بسته، محدب و کران‌دار $K \subseteq X$، هر نگاشت غیرانبساطی[۱] $T : K \to K$ دارای نقطهٔ ثابت باشد (T غیرانبساطی است اگر

1. nonexpansive

$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ برای جمیع مقادیر x و y). گوییم X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت ضعیف (به اختصار WFPP) است هرگاه برای هر زیرمجموعهٔ ناتهی، فشرده ضعیف و محدب $K \subseteq X$، هر نگاشت غیرانبساطی $T : K \to K$ دارای نقطهٔ ثابت باشد. اکنون پرسشی که مطرح می شود این است که آیا هر فضای باناخ دارای FPP است؟ در حالت کلی FPP و WFPP دو خاصیت هندسی متفاوت از فضاهای باناخ‌اند. پرسشی که از همان سال ۱۹۶۵ مطرح شد این بود که آیا هر فضای باناخ دارای WFPP است؟ پاسخ چندان ساده نبود، سال‌ها طول کشید تا در سال ۱۹۸۱ مثال نقضی یافت شد. دو پرسش اساسی در نظریهٔ نقطهٔ ثابت متری نگاشت‌های غیرانبساطی، مشخص‌سازی فضاهای باناخ دارای FPP و یا WFPP است؛ که هنوز بدون پاسخ مانده اند.

در سال ۱۹۶۵ نخستین نتایج در نظریهٔ نقطهٔ ثابت نگاشت‌های غیرانبساطی به دست آمد. در این سال براودر[۱] نشان داد که هر فضای هیلبرت دارای FPP است. سپس در همان سال نتیجه خود را تعمیم داد و نشان داد که هر فضای به‌طور یکنواخت محدب نیز دارای FPP است.

در سال ۱۹۴۸ بروتسکی[۲] و میلمن[۳] مفهوم ساختار بهنجار را در یک فضای باناخ معرفی کردند و نشان دادند که هر زیرمجموعهٔ ناتهی، فشردهٔ ضعیف و محدب K از فضای باناخ X که دارای ساختار بهنجار باشد شامل نقطه‌ای است که تحت هر نگاشت طولپا و پوشای $T : K \to K$ ثابت می‌ماند. به‌سادگی می‌توان نشان داد که هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ و محدب از یک فضای باناخ دارای ساختار بهنجار است. همچنین هر فضای به‌طور یکنواخت محدب، و درنتیجه هر فضای هیلبرت، دارای ساختار بهنجار است. کرک[۴] در سال ۱۹۶۵ قضیه براودر را تعمیم داد، این قضیه اهمیت مفهوم ساختار بهنجار در نظریهٔ نقطهٔ ثابت را آشکار می‌سازد. او نشان داد که اگر یک فضای باناخ ساختار بهنجار داشته باشد، آن‌گاه دارای WFPP است ولی می‌دانیم ممکن است دارای FPP نباشد.

سال‌ها تلاش ریاضی‌دان‌ها برای اثبات و یا رد این حدس که یک فضای باناخ دارای FPP است اگر و تنها اگر بازتابی باشد ناکام ماند تا اینکه در سال ۲۰۰۸ لین[۵] مثالی از یک فضای باناخ نابازتابی یافت که دارای FPP است. اما هوز نمی‌دانیم که آیا هر فضای باناخ بازتابی دارای FPP هست یا نه؟

قضایای ارگودیک قضایای ارگودیک به قضایای نقطهٔ ثابت پیوند می‌خورند. به‌طور کلی نظریهٔ

---
1. Felix Earl Browder (1927-2016) 2. M. S. Brodskiĭ 3. David P. Mil′man 4. William Arthur Kirk
5. Lin

ارگودیک ریشه در فرضیهٔ ارگودیک بولتسمان[۱] به سال ۱۸۷۱ و ماکسول[۲] به سال ۱۸۷۹ دارد. این فرضیه در قلب مکانیک آماری کلاسیک قرار دارد.

فون نویمان در ۱۹۳۲ متأثر از نتیجه‌ای از کوپمن[۳] یک قضیهٔ میانگین ارگودیک را در چارچوب مکانیک کلاسیک اثبات کرد.

قضیه (قضیهٔ میانگین ارگودیک فون نویمان). فرض کنید U یک عملگر یکانی روی $L^۲(U)$ باشد. در این صورت «میانگین بارست‌های» U در f، که $f \in L^۲(E)$، با تعریف $A_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=۰}^{n-۱} U^k(f)$ در میانگین (یعنی $L^۲$-نرم) به $P(f)$ همگراست که در آن P تصویر روی زیرفضای مرکب از همهٔ نقاط ثابت U است، یعنی $U(f) = f$.

اولین قضیهٔ ارگودیک غیرخطی برای نگاشت‌های انقباضی را بایون[۴] در ۱۹۷۵ اثبات کرد. ریاضی‌دانان دیگر تعمیم‌ها و کاربردهای بسیاری از نتایج او را در حالت‌های مختلف به دست آورده‌اند.

نابرابری‌های وردشی و مسائل تعادل یک صورت ساده از نابرابری‌های وردشی در حالت متناهی‌بُعد از این قرار است: فرض کنید F تابعی از مجموعهٔ محدب و بستهٔ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ باشد. می‌خواهیم نقطه‌ای مانند $x^* \in K$ پیدا کنیم که

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq ۰ \qquad (x \in K).$$

نابرابری‌های وردشی نخستین‌بار در دههٔ ۱۹۶۰ و در ارتباط با معادله‌های دیفرانسیل جزئی مطالعه شدند و از آن پس کاربردهای زیادی در اقتصاد، ریاضیات مالی، بهینه‌سازی، و نظریهٔ بازی‌ها یافتند. نخستین‌بار مسئلهٔ نابرابری وردشی را هارتمن[۵] و استمپاکیا[۶] در سال ۱۹۶۶ مطرح کردند و آن را چون ابزاری برای مطالعهٔ مسائلی در نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیل جزئی به کار گرفتند. در سال ۱۹۸۰ جانّسی[۷] نابرابری وردشی برداری را تعریف کرد که سرآغازی بود برای مطالعهٔ اصل وردشی توابع برداری‌مقدار. همچنین بائو[۸] و موردوخوویچ[۹] در سال ۲۰۰۷ یک اصل وردشی برای بهینه‌سازی چندهدفه معرفی کردند.

---

1. Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906) 2. James Clerk Maxwell (1831-1879) 3. Bernard Osgood Koopman (1900-1981) 4. Jean-Bernard Baillon 5. Philip Hartman 6. Guido Stampacchia (1922-1978) 7. Franco Giannessi 8. Truong Quang Bao 9. Boris S. Mordukhovich

یک اصل وردشی بیانگر این است که مشتق تابع در نقطه‌ای که مینیمم خود را اختیار می‌کند برابر صفر است. اِکلَند[1] در سال ۱۹۷۲ نشان داد که برای یک تابع مشتق‌پذیر که از پایین کران‌دار باشد نقاطی موجود است که مشتق در آن‌ها به‌اندازهٔ دلخواه کوچک است. او همچنین کاربردهایی از این حکم را در نظریهٔ کنترل بهینه، معادله‌های دیفرانسیل جزئی، مسائل مقادیر ویژهٔ غیرخطی، و ژئودزی‌ها روی خمینه‌ها با بُعد نامتناهی عرضه کرد. به‌عبارت‌دقیق‌تر، او ثابت کرد اگر (V, d) فضای متریک کامل و $F : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ تابع نیم‌پیوسته و دارای کران پایین باشد که مقادیرش همه‌جا برابر بی‌نهایت نیست و $\varepsilon > 0$ و $u \in V$ به‌طوری که $F(u) \leq \inf F + \varepsilon$. در این صورت برای هر $\alpha > 0$ عضو $v \in V$ موجود است به‌طوری که

$$F(v) \leq F(u), \qquad d(u, v) \leq \alpha$$

و برای $w \neq v$ داریم $F(w) \geq F(v) - \varepsilon d(u, v)/\alpha$.

قضیهٔ اِکلَند، که امروزه به نام اصل وردشی اِکلَند (EVP) معروف است، یکی از مهم‌ترین نتایج در آنالیز غیرخطی و به‌ویژه آنالیز وردشی است و عملاً نتیجه‌ای در مینیمم‌سازی غیرمحدب است. این اصل با قضیهٔ نقطهٔ ثابت کرک–کریستی[2] و قضیهٔ مینیمم‌سازی تاکاهاشی[3] هم‌ارز است و از آن می‌توان برای اثبات قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ برای نگاشت‌های انقباضی بهره برد. اصل وردشی اِکلَند همچنین کاربردهای بسیاری در شاخه‌های گوناگون ریاضی یافته است که از آن جمله می‌توان به هندسهٔ فضاهای باناخ، آنالیز ناهموار، بهینه‌سازی، نظریهٔ کنترل بهینه، نظریهٔ بازی‌ها، سیستم‌های دینامیکی، و علوم رفتاری اشاره کرد. در سال ۱۹۹۳، اوتلی[4] و تِرا[5] این اصل را برای دوتابع‌ها[6] گسترش دادند و مسائل تعادل[7] را در فضاهای متریک نامحدب بررسی کردند.

مسئله‌های تعادل در چند دههٔ گذشته نقش کلیدی در مطالعهٔ بسیاری از مسائل در آنالیز غیرخطی داشته‌اند. انگیزهٔ اولیه برای مطالعهٔ مسائل تعادل نیاز به یافتن نقاط تعادل در مسائلی چون مالیات و بیکاری بوده است.

یک مسئلهٔ تعادل در ساده‌ترین شکل آن از این قرار است: فرض کنید K یک مجموعه و f تابعی از $K \times K$ به $\mathbb{R}$ باشد که برای هر $x \in K$ داریم $f(x, x) = 0$. یک مسئلهٔ تعادل یافتن نقطه‌ای مانند $x^* \in K$ است به‌طوری که

$$f(x^*, y) \geq 0 \qquad (y \in K).$$

1. Ivar I. Ekeland (1944-) 2. James Caristi 3. Wataru Takahashi 4. Werner Oettli 5. Michel A. Théra 6. bifunctions 7. equilibrium

در سال ۱۹۷۲ فن[۱]، ریاضی‌دان چینی‌الاصل آمریکایی، وجود جواب را برای یک نابرابری با استفاده از لم KKM[۲] اثبات کرد که با گذشت زمان معلوم شد که نتیجه‌ای مهم در آنالیز غیرخطی است (قضیهٔ KKM که نتیجه‌ای مهم در نظریهٔ نقطهٔ ثابت است و در سال ۱۹۲۹ اثبات شد اجمالاً بیان می‌کند که در هر پوشش KKM اشتراک هر n مجموعه ناتهی است؛ منظور از یک پوشش KKM برای یک سادک $(n-1)$بُعدی با n رأس عبارت است از n مجموعهٔ بسته به‌طوری که غلاف محدب رئوس مشمول در هر انتخاب متناهی از آن مجموعه‌ها در اجتماع آن مجموعه‌ها قرار گیرد). فن خود آن را یک نابرابری مینیماکس نامید، ولی امروزه ریاضی‌دان‌ها آن را یک مسئلهٔ تعادل می‌نامند. عبارت «مسئلهٔ تعادل» را نخستین‌بار بلوم[۳] و اوتلی در سال ۱۹۹۴ به کار بردند و نشان دادند که بسیاری از مسائل مهم مانند مسائل بهینه‌سازی، نابرابری‌های وردشی، مسائل نقطهٔ زینی و مسائل نقطهٔ ثابت را می‌توان حالت‌های خاصی از مسئلهٔ تعادل در نظر گرفت.

بهینه‌سازی بهینه‌سازی ریاضی، به زبان غیرفنی، انتخاب بهترین عضو (یا بدترین عضو) از یک مجموعه مفروض (یا مجموعه‌هایی) با در نظر گرفتن شرایط و قیودی است؛ بررسی نظری و عملی روش‌های عددی بهینه‌سازی را برنامه‌ریزی ریاضی می‌نامند که شاخه‌های مختلفی دارد (برنامه‌ریزی صحیح، پویا، درجهٔ دوم، خطی، و غیرخطی). بهینه‌سازی، بسته به طبیعت مجموعه‌هایی که اعضا از آن انتخاب می‌شود، ممکن است از نوع گسسته یا پیوسته باشد. مسائل بهینه‌سازی عموماً با مجموعه‌ای از متغیرهای مستقل و پارامترها تشکیل می‌شود و شامل محدودیت‌هایی است که مقادیر پذیرفتنی برای آن متغیرها را مشخص می‌کند و قیود مسئله نامیده می‌شوند. جزء مهم دیگر از یک مسئلهٔ بهینه‌سازی یک معیار سنجش برای «خوبی یا مطلوبیت» است که به‌نوعی به متغیرها وابسته است و تابع هدف، تابع مطلوبیت، یا تابع انرژی (یا عنوان‌های مشابه) نامیده می‌شود؛ جواب(های) احتمالی مسئلهٔ بهینه‌سازی مقادیری هستند که تابع هدف را «بهینه» می‌کنند. مسئلهٔ بهینه‌سازی به زبان ریاضی مشتمل بر ماکسیمم یا مینیمم‌سازی است.

سابقهٔ این مسائل به قرن‌ها قبل از یونانیان باستان می‌رسد، ولی یکی از مهم‌ترین کشف‌های یونانیان مربوط به کشف مسیر نور بین دو نقطه از طریق آینه است که آن را می‌توان سرآغاز نورشناسی هندسی دانست. نظریهٔ کلی مقادیر فرین (یعنی ماکسیمم و مینیمم) از قرن هفدهم پدیدار شد و به‌صورت یکی از مباحث وحدت‌بخش علم در آمده است. نخستین گام‌های فرما در حساب

1. Ky Fan (1914-2010)   2. Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz lemma   3. Eugen Blum

دیفرانسیل نیز تمایل کلی او به یافتن ماکسیمم و مینیمم با روش‌های کلی بود. در قرن هجدهم نیز حیطهٔ این روش‌ها با ابداع حساب وردش‌ها گسترش یافت؛ در این دسته مسائل مقدار فرین برای یک متغیر عددی یا تعداد متناهی از این گونه متغیرها مورد نظر نیست بلکه برای یک خم یا یک تابع کامل یا حتی دستگاهی از تابع‌ها مد نظر است. بهینه‌سازی در رشته‌های مختلفی چون ریاضیات، فیزیک، مهندسی، اقتصاد، مدیریت، بازرگانی، علوم اجتماعی، و غیره کاربردهای فراوانی دارد.

بهینه‌سازی ریاضی بسته به طبیعت تابع هدف و قیود آن انواع مختلفی پیدا می‌کند، ازجمله بهینه‌سازی محدب، که تابع هدف یا قیود آن برخوردار از نوعی شرط تحدب‌اند، یا بهینه‌سازی استوار[۱]، که در آن مجموعهٔ پذیرفتنی به‌نوعی دارای عدم قطعیت است (و در آن به دنبال کسب نوعی استحکام و قطعیت در مقابل عدم قطعیت هستیم)، یعنی وابسته به یک پارامتر است که آن پارامتر روی یک مجموعهٔ عدم قطعیت تغییر می‌کند و سابقهٔ آن به دههٔ ۱۹۵۰ و نظریهٔ تصمیم می‌رسد.

نوع دیگری از بهینه‌سازی، بهینه‌سازی برداری و مجموعه‌مقدار است. در بهینه‌سازی برداری به دنبال نقاط فرین در یک فضای پیشامرتب یا مرتب هستیم. بهینه‌سازی برداری در موارد و حوزه‌های مختلفی ظاهر می‌شود ازجمله آنالیز تابعی (به‌صورت قضیهٔ هان–باناخ، اصل وردشی اِکلَند، قضیهٔ بیشاپ[۲]–فِلِپس[۳])، برنامه‌ریزی چندهدفه، نظریهٔ بازی‌ها، و نظریهٔ کنترل بهینه. ظاهراً اجورت[۴]، فیلسوف و اقتصاددان ایرلندی، و پارِتو[۵]، اقتصاددان ایتالیایی، اولین کسانی هستند که مسئلهٔ بهینه‌سازی برداری را مطرح کردند و به‌همین‌دلیل نقاط فرینه در مسائل بهینه‌سازی برداری را نقاط اجورت–پارتِو می‌نامند. این موضوع در ریاضیات تحت تأثیر مقاله‌ای از کان[۶]–تاکر[۷] به سال ۱۹۵۱ مورد توجه قرار گرفت و از اواخر دههٔ ۱۹۶۰ تحقیقات زیادی در این باره آغاز شد. در دهه‌های اخیر بهینه‌سازی برداری به مسائل نگاشت‌های مجموعه‌مقدار گسترش یافت و این حوزه از تحقیقات را بهینه‌سازی مجموعه‌مقدار می‌نامند که کاربردهای فراوانی در نابرابری‌های وردشی و بهینه‌سازی با داده‌های چندمقداری دارد.

فرض کنید Y یک فضای خطی و $K \subseteq Y$ یک مخروط محدب نوک‌دار (یعنی $K \cap -K = \{0\}$) باشد، پس ترتیب جزئی زیر القاء می‌شود

$$y_1 \leq y_2 \Longrightarrow y_1 - y_2 \in -K.$$

1. robust 2. Errett Albert Bishop (1928-1983) 3. Robert Ralph Phelps (1926-2013) 4. Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926) 5. Vilfredo Federico Damaso Pareto (1848-1923) 6. Harold William Kuhn (1925-2014) 7. Albert William Tucker (1905-1995)

هرگاه $A \subseteq Y$ در این صورت $\bar{y} \in A$ را عنصر مینیمال A یا یک نقطهٔ اجورت-پارِتو می‌نامند اگر

$$(\bar{y} - K) \cap A = \{\bar{y}\}.$$

فرض کنید X یک مجموعه و $f : X \longrightarrow Y$ تابعی باشد مسئلهٔ بهینه‌سازی برداری (VOP) $\min_{x \in X} f(x)$ به دست آوردن عضوی مثل $\bar{x} \in X$ است که $f(\bar{x})$ عنصر مینیمال $f(X)$ باشد. هرگاه $F : X \rightrightarrows Y$ یک نگاشت مجموعه‌مقدار باشد، درخصوص مسئلهٔ بهینه‌سازی مجموعه‌مقدار (SOP) $\min_{x \in X} F(x)$ دو دیدگاه برداری و مجموعه‌ای مطرح می‌شود. از دیدگاه برداری $\bar{x} \in X$ جواب مسئله است هرگاه $F(\bar{x})$ شامل یک عنصر مینیمال از $F(X)$ باشد. البته این تعبیر برای هر مسئلهٔ بهینه‌سازی با تابع هدف مجموعه‌مقدار تعبیر مناسبی نیست. در دیدگاه مجموعه‌ای لازم است یک ترتیب روی زیرمجموعه‌های Y در نظر بگیریم و سپس عنصر مینیمال (ماکزیمال) مجموعهٔ $\{F(x) : x \in X\}$ را به دست آوریم.

عملگرهای یکنوا نظریهٔ عملگرهای یکنوا در دههٔ ۱۹۶۰ بسط و گسترش یافت و تعمیم طبیعی روش‌های فضاهای هیلبرت در حل معادله‌های دیفرانسیلی و انتگرالی خطی به مسائل غیرخطی است.

عملگر نه لزوماً خطی A روی زیرمجموعهٔ D از فضای هیلبرت H را یکنوا می‌گویند اگر به ازای هر $x, y \in D$ داشته باشیم $\mathrm{Re}\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0$. یکنوائی عملگرها نقش کلیدی در مطالعهٔ مسائل تعادل و نابرابری‌های وردشی دارد. مفهوم یکنوایی یک عملگر تعریف‌شده بر یک فضای باناخ X به دوگان آن را براودر و مینتی[1] در اوایل دههٔ ۱۹۶۰ تعریف کردند. این مفهوم یکنوایی، که اغلب آن را یکنوایی مینتی-براودر می‌نامند، سنگ بنای گسترش آنالیز غیرخطی، به‌ویژه آنالیز محدب شد؛ زیرا نشان داده شد که تحدب یک تابع سرهٔ نیم‌پیوستهٔ پایینی را می‌توان با یکنوایی زیردیفرانسیل آن مشخص‌سازی کرد.

اجازه دهید یک نمونه مسئله را بیان کنیم. فرض کنید $A : X \longrightarrow X^*$ یک عملگر روی فضای باناخ X باشد و بخواهیم معادلهٔ عملگری $Au = b$ را حل کنیم. اگر A یکنوا و X بازتابی باشد؛ نگاشت $t \mapsto \langle A(u + tv), w\rangle$ روی $[0, 1]$ و برای هر u, v, w پیوسته باشد؛ و A وادارنده[2] باشد، یعنی $\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = +\infty$. اکنون قضیهٔ مینتی-براودر تضمین می‌کند

1. George James Minty 2. coercive

معادلهٔ بالا برای هر $b \in X^*$ دارای جواب است. درحالتی که فضای باناخ $\mathbb{R}$ باشد، روشن است که یک نگاشت یکنوا است اگر و تنها اگر صعودی باشد؛ نام «یکنوا» برآمده از این حالت خاص است. اطلاعات بیشتر را در [۱۹] ببینید.

در طول چند دههٔ گذشته، مفهوم یکنوایی مینتی–براودر کاربردهایی بسیاری در نظریهٔ عملگرها، معادله‌های دیفرانسیل جزئی، نظریهٔ معادله‌های تکاملی، نظریهٔ مشتق‌پذیری توابع محدب، احتمال، اقتصاد، مدیریت، و دیگر علوم کاربردی یافته است و بدین‌گونه جایگاه ارزشمند خود را در آنالیز غیرخطی نشان داده است. اجازه دهید نمونه‌ای از قضیه‌های مینتی را بیان کنیم. فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد و $D \subseteq H$. مینتی در سال ۱۹۶۲ نشان داد اگر نگاشت یکنوای A بر D غیرانبساطی باشد، A را می‌توان به نگاشتی غیرانبساطی بر H گسترش داد. در همان سال او اثبات کرد که اگر A یک نگاشت مجموعه‌مقدار یکنوا بر H باشد، آنگاه A یکنوای بیشین است اگر و تنها اگر $\operatorname{ran}(\mathrm{Id} + A) = H$.

برزیس[۱] در سال ۱۹۶۸، آنچه را ما اکنون به‌نام عملگرهای شبه‌یکنوا به مفهوم برزیس می‌نامیم، مطرح کرد؛ ردهٔ عملگرهای شبه‌یکنوا به مفهوم برزیس بسیار بزرگ و از نظر کاربرد بسیار غنی است. به‌تازگی کاربردهایی از این مفهوم در حل برخی از معادله‌های دیفرانسیل و نابرابری‌های وردشی به دست آمده است.

نظریهٔ نیم‌گروه‌های خطی و غیرخطی هیل[۲] از سال ۱۹۳۶، تحت تأثیر برخی مسائل در آنالیز ریاضی، طی مقاله‌هایی به بررسی نگاشت $t \mapsto T_t$ از مجموعهٔ $(\circ, \infty)$ به فضای عملگرهای خطی روی فضای باناخ X پرداخت که در شرط $T_{s+t} = T_t \circ T_s$ و $T_\circ = I$ صدق می‌کند. این نگاشت را نیم‌گروه تک‌پارامتری عملگرهای خطی، یا به‌اختصار نیم‌گروه خطی، می‌نامند. او تحت شرایطی به این نیم‌گروه، عملگری با تعریف $A(x) = \lim_{t \to \circ} \frac{T_t(x) - x}{t}$ (موسوم به مولد بی‌نهایت‌کوچک) نسبت داد که بعداً معلوم شد کاربردهای بسیاری در آنالیز دارد. نیم‌گروه را قوی‌پیوسته یا از ردهٔ $C_\circ$ می‌نامند اگر برای هر x داشته باشیم $\lim_{t \to \circ} T_t(x) = x$. نظریهٔ نیم‌گروه‌های خطی در سال‌های ۱۹۳۰–۱۹۶۰ با استفاده از ابزارهای آنالیز تابعی رشد فوق‌العاده‌ای کرد. البته باید توجه کرد که این نظریه ریشه در جواب نابدیهی و پیوستهٔ معادلهٔ تابعی کوشی $f(s+t) = f(s)f(t)$ به‌صورت تابع نمایی و همچنین تلاش پئانو[۳] در یافتن جواب معادلهٔ دیفرانسیل برداری مرتبهٔ اول

1. Haïm Brezis (1944-2024) 2. Carl Einar Hille (1894-1980) 3. Giuseppe Peano (1858-1932)

$u' = Au + f$ دارد که ضمن آن مجبور شد تابع نمایی را برای یک ماتریس مربعی به‌صورت یک سری توانی تعریف کند. البته استون نیز در سال ۱۹۳۰ بررسی عمل عملگرهای یکانی روی فضای هیلبرت مختلط را آغاز کرد و در طی آن به اولین نتایج در نمایش‌های بی‌نهایت‌بُعدی گروه‌ها دست یافت. او ثابت کرد که هر نمایش یکانی گروه جمعی اعداد حقیقی روی فضای هیلبرت جدایی‌پذیر به‌صورت $t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}$ است که در آن A عملگر خودالحاق دلخواهی روی آن فضای هیلبرت است. مولد بی‌نهایت‌کوچک گروه نیز در اینجا ظاهر می‌شود.

نظریهٔ نیم‌گروه‌های خطی به‌نوعی تعمیم تابع نمایی است و همان‌گونه که این توابع جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را در حالت عددی به دست می‌دهند، جواب این‌گونه معادله‌های دیفرانسیل در فضاهای باناخ (ازجمله مسئلهٔ مجرد کوشی به‌صورت $u' = Au$ با شرط $u(\circ) = x$ که در آن A عملگری روی فضای باناخ X و u تابعی با مقادیر در X است) از طریق نیم‌گروه‌های خطی قابل به دست آوردن است.

یکی از مهم‌ترین قضیه‌ها در نظریهٔ نیم‌گروه‌های خطی قضیه‌ای است که هیل و یوسیدا[۱] آن را مستقلاً در ۱۹۴۸ اثبات کردند. این قضیه شرط لازم و کافی را برای اینکه یک عملگر خطی مولدِ نیم‌گروه خطی از ردهٔ $C_\circ$ از انقباض‌ها باشد به دست می‌دهد.

قضیه (قضیهٔ هیل–یوسیدا). عملگر خطی $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ مولد بی‌نهایت‌کوچک یک $C_\circ$-نیم‌گروه از انقباض‌ها است اگر و تنها اگر A بسته و چگال‌دامنه باشد، مجموعهٔ حلّال آن شامل بازهٔ $(\circ, \infty)$ باشد، و برای هر $\lambda > \circ$ داشته باشیم $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq 1/\lambda$.

این قضیه در دههٔ ۱۹۵۰ توسط فیلیپس[۲] و دیگر ریاضی‌دانان تعمیم‌های بسیاری یافت و نظریهٔ نیم‌گروه‌های خطی به حوزه‌ای مهم در آنالیز ریاضی تبدیل شد. طبیعی است که این نظریه به عملگرهای غیرخطی نیز تعمیم داده شود. در سال ۱۹۵۳ کَتو[۳]، ریاضی‌دان ژاپنی، نظریهٔ هیل–یوسیدا را به حالتی که عملگر A به زمان t وابسته باشد تعمیم داد. از این زمان به بعد نظریهٔ معادله‌های تکاملی خطی پیشرفت کرد. در ۱۹۶۷، کومرا[۴]، ریاضی‌دان ژاپنی، با تعمیم قضیهٔ هیل–یوسیدا به انقباض‌های غیرخطی روی فضاهای هیلبرت نظریهٔ نیم‌گروه‌های عملگرهای غیرخطی را آغاز کرد؛ البته خود او اشاره می‌کند که برخی نتایج را می‌توان به‌آسانی از نظریهٔ عملگرهای یکنوای مینتی به دست آورد. بلافاصله، کَتو نتایج او را به فضاهای باناخ تعمیم داد.

---

1. Kōsaku Yosida (1909-1990) 2. Ralph Saul Phillips (1913-1998) 3. Tosio Kato (1917-1999) 4. Yukio Kōmura

در سال ۱۹۷۱، کرندال[۱] و لیگت[۲] قضیهٔ بی‌نظیری ثابت کردند: در هر فضای باناخ دلخواهی هر عملگر m–افزایندهٔ[۳] دلخواه یک نیم‌گروه غیرخطی از انقباض‌ها تولید می‌کند. این قضیه به‌همراه نتایج کومرا اساس مطالعهٔ معادله‌های تکاملی غیرخطی را تشکیل می‌دهند [۱۴].

در پنجاه سال اخیر این نظریه و نظریهٔ عملگرهای یکنوا و افزاینده (کاهنده)[۴] رشد بسیار کرده‌اند و کاربردهای بسیاری در بهینه‌سازی و آنالیز غیرخطی (به‌خصوص مسائل تکاملی غیرخطی) یافته‌اند. ازجمله در دهۀ ۱۹۹۰ تعمیم نتایج بالا به ساختارهای غیرخطی به‌جای فضاهای هیلبرت و باناخ، مانند خمینه‌های بی‌نهایت‌بُعدی یا فضاهای موسوم به CAT(0)، مورد توجه قرار گرفته است؛ مثلاً [۹] را ببینید.

۱.۲ آنالیز تابعی در ایران

همان‌طورکه تاریخ آنالیز تابعی نیز نشان می‌دهد این شاخه با شاخه‌های بسیاری ازجمله آنالیز هارمونیک (مجرد و کلاسیک)، نظریهٔ عملگرها، نظریهٔ تقریب‌ها و بسط‌ها، حساب وردشی و کنترل بهینه، توابع خاص، معادله‌های دیفرانسیل، و تبدیل‌های انتگرالی دارای موضوعات مشترک است و لازم است از ابتدا حوزهٔ بررسی خود را مشخص کنیم که چه شاخه‌هایی را تحت عنوان «آنالیز تابعی» لحاظ کرده‌ایم. مبنای کار ما رده‌بندی انجمن ریاضی آمریکا و کدهای اصلی تعیین‌شده برای شاخه‌های مختلف ریاضی است. منظور ما از «آنالیز تابعی» در این قسمت آنالیز تابعی با کد ۴۶ در کنار نظریهٔ عملگرها با کد ۴۷ و نظریهٔ تقریب‌ها و بسط‌ها با کد ۴۱ است؛ در [۷، ۸] به تفصیل به آنالیز هارمونیک مجرد و آنالیز فوریهٔ کلاسیک پرداخته شده است (در هر دوی این مقاله‌ها ذکر نام شخصی که می‌توان آن را جزو نسل سوم آنالیز هارمونیک‌کارهای ایران (و اولین متخصص در آنالیز فوریهٔ کلاسیک) دانست از قلم افتاده است: محسن تقوی (۱۹۹۱، کران‌های پایین برای همبستگی ضرایب چندجمله‌ای‌های رودین–شاپیرو، بی. اسمیت[۵]، دانشگاه ایالتی کانزاس).

در مقالهٔ [۵] ورود آنالیز تابعی (با احتساب آنالیز هارمونیک و نظریهٔ عملگرها) به ایران از زبان یکی از متقدمان این شاخه نقل شده است. جدای از

- حیدر رجوی (۱۹۶۲، ناوردایی یکانی همزمان مجموعه‌های عملگرهای کران‌دار روی یک فضای هیلبرت، گرهارت کارل کالیش[۶]، دانشگاه مینه‌سوتای آمریکا)

که در آن مقاله، به‌حق، «کاروان‌سالار آنالیز تابعی ایران» نامیده شده است، با کمی دقت می‌توان برای

1. Michael Grain Crandall (1940-) 2. Thomas Milton Liggett (1944-2020) 3. accretive 4. dissipative
5. Brent Pendleton Smith (1949-) 6. Gerhard Karl Kalisch (1914-2000)

اولین نسل «آنالیز تابعی» در ایران، که بازهٔ زمانی ۱۹۷۰/۱۳۵۰–۱۹۸۰/۱۳۶۰ را دربر می‌گیرد، از افراد زیر نام برد.

- علی‌اکبر جعفریان (۱۹۷۳، تجزیهٔ طیفی عملگرها روی فضاهای باناخ، پیتر رزنتال[۱]، دانشگاه تورنتوی کانادا)
- مهدی رجبعلی‌پور (۱۹۷۳، عملگرهایی با چند شرط رشد، چندلر دیویس[۲]، دانشگاه تورنتوی کانادا)
- ابوالقاسم میامئی (۱۹۷۳، فرایندهای تصادفی مانا با مقادیر در فضای باناخ و تجزیهٔ توابع مثبت با مقادیر عملگری روی یک فضای باناخ و تجزیهٔ طیفی عملگرها روی فضاهای باناخ، حبیب صالحی، دانشگاه ایالتی میشیگان در آمریکا)
- قدسیه وکیلی (حقانی) (۱۹۷۴، سری‌های توانی صوری و جبرهای باناخ، جی. آر. اَلن[۳]، دانشگاه لیدز انگلستان)
- جعفر زعفرانی (۱۹۷۵، فضای اندازه‌ها و توپولوژی اکید، اچ. جی. گارنیر[۴] و جی. اف. اشمتز[۵]، دانشگاه لییژ بلژیک)
- اسدالله نیکنام (۱۹۷۶، مشتق‌های بی‌کران روی C^*–جبرها، ای. سی. لانس[۶]، دانشگاه ویکتوریای منچستر انگلستان)
- طاهر قاسمی هنری (۱۹۷۶، مباحثی در جبرهای باناخ یکنواخت و جبرهای باناخ تابعی، جیمز جی. کلونی[۷]، امپریال کالج لندن)
- یدالله نژاددهقان (۱۹۷۷، اتحادهای جهتدار جبرهای موضعاً محدب ضربی، جی. آر. اَلن، دانشگاه لیدز انگلستان)
- سیدعلیرضا حسینیون (۱۹۷۸، دوگان دوم جبرهای باناخ، جی. دانکن[۸]، دانشگاه استرلینگ انگلستان)
- حسین سیفلو (۱۹۸۰، برخی جنبه‌های b–کامل‌بودن و قضیهٔ نمودار بسته، آی. توئِدل[۹]، دانشگاه استرلینگ انگلستان)

افراد زیر را می‌توان در نسل دوم «آنالیز تابعی» ایران، که بازهٔ زمانی ۱۹۸۰/۱۳۶۰–۱۹۹۰/۱۳۷۰

1. Peter Michael Rosenthal (1941–2024) 2. Horace Chandler Davis (1926–2022) 3. Graham Robert Allan (1936–2007) 4. Henri Georges Garnir (1921-1985) 5. Jean François Hubert Schmets (1940-) 6. E. Christopher Lance (1941-) 7. James Clunie (1926-2013) 8. John Duncan (1938-) 9. Ian Tweddle(1938-)

را دربر می‌گیرد، قرار داد.

- کریم صدیقی (۱۹۸۱، عملگرهای فون نویمان در $B_1(\Omega)$، جی. بی. کانوی[۱]، دانشگاه ایندیانای آمریکا)
- بهزاد جعفری روحانی (۱۹۸۱، قضیه‌های ارگودیک و دنباله‌های ناانبساطی در فضاهای هیلبرت و مسائل مرتبط، اس. کاکوتانی[۲]، دانشگاه ییِل آمریکا)
- امیر خسروی (۱۹۸۱، جبرهای باناخ جابه‌جایی، جی. آر. آلن، دانشگاه کمبریج انگلستان)
- پرویز عظیمی (۱۹۸۲، دو رده از فضاهای باناخ جدایی‌پذیر، دی. جی. هاگلر[۳]، دانشگاه کاتولیک آمریکا)
- بهمن طباطبایی شوریجه (۱۹۸۷، C^*–جبرهای وابسته به بعضی نیم‌گروه‌ها، ای. سی. لانس، دانشگاه لیدز انگلستان)
- اسماعیل انصاری (۱۹۸۸، همانی‌های تقریبی و تجزیه در جبرهای توپولوژیک، پی. جی. دیکسِن،[۴] دانشگاه شفیلد انگلستان)
- محمدحسن فاروقی (۱۹۸۹، گونا و شبه‌گوناهای جبرهای باناخ، پی. جی. دیکسِن، دانشگاه شفیلد انگلستان)

با ایجاد و گسترش دوره‌های دکترا در کشور «آنالیز تابعی» هم همچون سایر شاخه‌ها رشد کرد و تعداد فارغ‌التحصیلان دکترای آن گسترش یافت چنان‌که نسل سوم این شاخه بیش از ۱۹ نفر و نسل بعدی بیش از ۳۴ نفر جمعیت دارد [۵] و در حال حاضر شاید بیش از ۱۰۰۰ نفر فارغ‌التحصیل دکترا در این رشته در کشور موجود باشد.

اکنون بپردازیم به آنالیز تابعی غیرخطی. در ایران عرفاً هرچه را در چارچوب آنالیز تابعی خطی (منطبق با کتاب نظریهٔ عمل‌های خطی باناخ یا آنالیز تابعی رودین) قرار نگیرد جزو آنالیز تابعی غیرخطی محسوب می‌کنند ازجمله مباحث نقاط ثابت، نابرابری‌های وردشی، بررسی عملگرهای یکنوا، نگاشت‌های ناانبساطی، آنالیز ناهموار، مسائل کنترل بهینه، آنالیز محدب، و نظایر آن. البته باید توجه داشت که از نظر رده‌بندی انجمن ریاضی آمریکا آنالیز تابعی غیرخطی زیرشاخه‌ای از آنالیز تابعی (با کد ۴۶) است و برخی از موضوعات یادشده به نظریهٔ عملگرها (با کد ۴۷)، نظریهٔ کنترل بهینه (با کد ۴۹)، و نظریهٔ تقریب‌ها (با کد ۴۱) تعلق دارد. ما نیز صورت پالایش‌شده‌ای از این

---

1. John Bligh Conway (1939-) 2. Shizuo Kakutani (1911–2004) 3. James Neil Hagler (1946-) 4. Peter Grant Dixon (1945-)

شناخت عرفی را مبنا قرار می‌دهیم و عموماً موضوعاتی را که به عملگرهای غیرخطی و آنالیز غیرخطی روی فضاهای برداری توپولوژیک بی‌نهایت بُعدی مربوط می‌شود جزو آنالیز تابعی غیرخطی لحاظ می‌کنیم. در نظر ما از نشانه‌های فعالیت افراد در این حوزه، صرف‌نظر از ارائهٔ درسی با موضوع آنالیز تابعی غیرخطی، انتشار مقاله (در سمینار یا مجلات علمی) و هدایت پایان‌نامهٔ در دورهٔ تحصیلات تکمیلی است. به این اعتبار، پیشگامان آنالیز تابعی غیرخطی در ایران را می‌توان دکتر بهزاد جعفری روحانی و دکتر جعفر زعفرانی دانست و با احتساب نظریهٔ مجرد تقریب، می‌توان نام دکتر حسین محبی را نیز به این فهرست افزود.[۱]

دکتر روحانی پس‌از طی چند سالی دورهٔ پسادکترا در آمریکا و تریست ایتالیا در سال ۱۹۸۷/۱۳۶۶ ابتدا در دانشگاه تهران و سپس در دانشگاه صنعتی شریف و مدتی بعد در دانشگاه شهید بهشتی مشغول به کار شد. اولین دانشجوی کارشناسی ارشد با موضوع نگاشت‌های انقباضی را در ۱۳۷۵ و اولین دانشجوی دکترای او، هادی خطیب‌زاده، ورودی سال ۲۰۰۱/۱۳۸۰ و فارغ‌التحصیل سال ۲۰۰۷/۱۳۸۶ از دانشگاه تربیت مدرس با رساله‌ای با عنوان «جوابهای معادلات ایستایی و تحولی از نوع یکنوا» است. دکتر حسین محبی از شاگردان دکتر مهدی رجبعلی‌پور است که در سال ۱۹۹۱/۱۳۷۰ از رسالهٔ خود در نظریهٔ عملگرها با عنوان «زیرفضاهای ناوردا و خاصیت انعکاسی» دفاع کرده است و چندین سال بعد به نظریهٔ تقریب در فضاهای باناخ علاقه‌مند می‌شود. اولین دانشجوی کارشناسی ارشد با این موضوع نظریهٔ تقریب در فضاهای لبگ را در سال ۱۹۹۷/۱۳۷۶ و اولین دانشجوی دکترای او، حمید مظاهری تهرانی، فارغ‌التحصیل سال ۲۰۰۱/۱۳۷۹ با عنوان رسالهٔ «بهترین تقریب در فضاهای باناخ» است. ورود دکتر جعفر زعفرانی به حوزهٔ آنالیز غیرخطی با انتشار مقاله‌ای دربارهٔ مسئلهٔ شبه‌وردشی با عنوان «نابرابری‌های وردشی و شبه‌وردشی تعمیم‌یافته در فضاهای محدب» است که در سی‌امین کنفرانس سالانهٔ انجمن ریاضی در سال ۱۹۹۹/۱۳۷۸ ارائه کرده است. اولین دانشجوی دکترای او در این زمینه مجید فخار است که در سال ۲۰۰۳/۱۳۸۲ با موضوع مسائل تعادل فارغ‌التحصیل شده است.

دانشجویان این پیشگامان جزو نسل دوم آنالیز تابعی غیرخطی ایران‌اند: شهرام رضاپور (از دانشجویان دکتر محبی فارغ‌التحصیل ۱۳۸۱ با عنوان رساله «زیرفضاهای شبه‌چبیشف و

---

۱. چنان‌که اشاره کردیم شاخه‌های مختلفی، چه ازلحاظ موضوع و چه ازلحاظ ابزار، قرابتی با آنالیز تابعی غیرخطی دارند هرچند این نزدیکی چنان نیست که بخواهیم متخصصان آن شاخه‌ها را در اینجا ذکر کنیم، از این نمونه می‌توان از بیژن ظهوری زنگنه (۱۹۹۰، معادله‌های تکاملی تصادفی نیم‌خطی، جی. بی. والش، دانشگاه بریتیش کلمبیای کانادا) و برخی از شاگردان او نام برد.

ضعیف‌چبیشف در فضاهای باناخ»)، حمید مظاهری تهرانی، مجید فخار، و هادی خطیب‌زاده. به این نسل می‌توان نام دکتر سید منصور واعظ‌پور (از شاگردان مرحوم دکتر کریم صدیقی فارغ‌التحصیل ۱۳۷۶ با عنوان رسالهٔ «جابجاگر بعضی عملگرهای ضربی روی فضای هیلبرت توابع تحلیلی») را افزود که از سال ۲۰۰۵/۱۳۸۴ به این حوزه وارد شده است.

چنان‌که اشاره کردیم شاخهٔ حساب وردشی، کنترل بهینه، و بهینه‌سازی (با کد اصلی ۴۹)، که زیرشاخهٔ آنالیز ناهموار را در بر می‌گیرد، نیز مسائل مشترکی با آنالیز غیرخطی دارد و عموماً جزو آن لحاظ می‌شود. بررسی سابقهٔ این شاخه خارج از محدودهٔ کار ما است و فقط به ذکر پیشگامان این شاخه، که در حوزهٔ ریاضیات و نه مهندسی برق قرار می‌گیرند، بسنده می‌کنیم.

- علی وحید کامیاد (۱۹۸۸، مسائل کنترل مرزی برای معادلهٔ چندبُعدی پخش، جی. ایی. روبیو[۱] و دی. اِی. ویلسون[۲]، دانشگاه لیدز انگلستان)
- محمدهادی فراهی (۱۹۹۶، کنترل مرزی معادلهٔ موج، جی. ایی. روبیو، دانشگاه لیدز انگلستان)
- علیرضا فخارزادهٔ جهرمی (۱۹۹۶، شکل‌ها، اندازه‌ها، و معادله‌های بیضوی ، جی. ایی. روبیو، دانشگاه لیدز انگلستان)
- صغری نوبختیان (۱۹۹۹، قانون عام پسخوردی تقریباً بهینه برای بازی‌های دیفرانسیلی و کنترل ، آر. جی. استرن[۳]، دانشگاه مک‌گیل کانادا)

۳ مروری بر کارنامهٔ علمی دکتر زعفرانی

۷۴ مقالهٔ منتشرشده در مجلات علمی معتبر خارجی و بیش از ۴۵ سخنرانی در کنفراس‌های ملی و بین‌المللی در کارنامهٔ علمی دکتر زعفرانی وجود دارد که یک بازهٔ زمانی از سال ۱۹۷۴ تا اکنون را در بر می‌گیرد؛ البته یک وقفهٔ هشت‌ساله (۱۹۹۵–۲۰۰۳) در این بین وجود دارد. این آثار در شاخه‌های آنالیز تابعی خطی، آنالیز تابعی غیرخطی، و نظریهٔ بهینه‌سازی قرار می‌گیرند. یک چرخش اساسی در این آثار می‌بینیم: در بازهٔ زمانی ۱۹۷۴–۱۹۹۷ توجه او به آنالیز تابعی خطی و به‌ویژه توپولوژی فضای توابع پیوستهٔ و اندازه‌های برداری‌مقدار و توپولوژی اکید[۴] بوده است که کاملاً طبیعی است زیرا یکی از موضوعات مطرح در آن سال‌ها در آنالیز تابعی بوده است، اما از سال ۱۹۹۷/۱۳۷۶ به حوزهٔ آنالیز تابعی غیرخطی روی می‌آورد. واقعیت از این قرار است که او در سال ۱۹۹۷ به

1. J. E. Rubio (1934-) 2. D. A. Wilson 3. R. J. Stern 4. strict topology

مدت یک سال یک دوره فرصت مطالعاتی نزد جاناتان بُروین[۱] در دانشگاه سایمون فریزر کانادا[۲] می‌گذراند و در آنجا با حوزهٔ آنالیز تابعی غیرخطی و به‌طور خاص بررسی جواب نابرابری‌های وردشی و شبه‌وردشی[۳] آشنا می‌شود. ناگفته نماند که هندسهٔ فضاهای باناخ موضوعی است که این ارتباط را بین علائق قدیم و جدید او برقرار می‌کند. اولین آثار پژوهشی او در این زمینه مقاله‌ای است دربارهٔ مسئلهٔ شبه‌وردشی که در سی‌امین کنفرانس سالانهٔ انجمن ریاضی (۱۹۹۹/۱۳۷۸) ارائه داده است. اثر بعدی مقاله‌ای دربارهٔ وجود جواب نابرابری‌های وردشی در فضاهای برداری توپولوژیک است که در اولین کارگاه آنالیز غیرخطی در دانشگاه شهید بهشتی تهران در سال ۲۰۰۱/۱۳۸۰ ارائه شده است. کارگاه مذکور به همت دکتر بهزاد جعفری روحانی برگزار شده بود.

آن فرصت مطالعاتی تأثیری عمیق داشت و منجر به تغییر مسیر تحقیقات دکتر زعفرانی می‌شود. هدایت رساله‌های دکترایی عمدتاً با موضوع‌هایی در زمینهٔ آنالیز تابعی غیرخطی نتیجهٔ همین تغییر مسیر است. اولین رسالهٔ دکترا در آنالیز تابعی غیرخطی با موضوع مسائل تعادل، نابرابری‌های شبه‌وردشی، و خاصیت KKM تحت راهنمایی ایشان در خردادماه ۲۰۰۳/۱۳۸۲ به پایان می‌رسد. همچنین برگزاری و راه‌اندازی کارگاه‌ها و کنفرانس‌هایی در این زمینه نتیجهٔ همین تغییر مسیر است که باعث رشد و گسترش این شاخه از آنالیز تابعی غیرخطی در ایران شد. درواقع، پس از کارگاه آنالیز غیرخطی در دانشگاه شهید بهشتی کارگاه آنالیز غیرخطی و بهینه‌سازی دیگری در دانشگاه اصفهان با دعوت از دو ریاضی‌دان شناخته‌شدهٔ بین‌المللی (به‌نام‌های حاجیساواس[۴] و لین[۵]) توسط ایشان برگزار شد. به نظر می‌رسد نقطهٔ عطف تحقیقات در حوزهٔ آنالیز تابعی غیرخطی در ایران برگزاری کنفرانس بین‌المللی آنالیز غیرخطی و بهینه‌سازی توسط ایشان باشد که در سال ۲۰۰۷/۱۳۸۶ با دعوت از ریاضی‌دانان برجسته در این حوزه برگزار شد. در این کنفرانس تعداد زیادی از استادان دانشگاه‌های کشور و دانشجویان تحصیلات تکمیلی شرکت کردند و برگزیده‌ای از مقاله‌های آن در مجلهٔ معروف *Journal of Global Optimization* به چاپ رسید. این کنفرانس با همکاری ایشان مجدداً در سال‌های ۲۰۰۹ و ۲۰۱۵ در دانشگاه اصفهان برگزار شد. بعضی از سخنران‌های اصلی این کنفرانس‌ها عبارت‌اند از انصاری[۶]، لگاز[۷]، موردوخوویچ، حاجیساواس، فلورس–بازان[۸]، کاسی[۹]، لوک[۱۰]، نانیوویچ[۱۱]، روس[۱۲]، بگیروف[۱۳]، کوئستا[۱۴]، میکائیلیان[۱۵]، یوسم[۱۶]، زالینسکو[۱۷] برخی از

---

1. Jonathan Michael Borwein (1951–2016) 2. Simon Fraser 3. quasi-variational 4. N. Hadjisavvas 5. Lai-Jiu Lin 6. Qamrul Hasan Ansari 7. Juan Enrique Martinez Legaz 8. Fabian Flores-Bazan 9. Gabor Kassay 10. Dinh The Luc 11. Zdzislaw Naniewicz 12. Cornelis Roos 13. Adil Bagirov 14. Juan Ferrera Cuesta 15. Hayk Mikayelyan 16. Alfredo Noel Iusem 17. Constantin Zalinescu

دانشجویان شرکت‌کننده در این کنفرانس‌ها از طریق آشنایی با بعضی از مدعوین خارجی برای ادامهٔ تحصیل به خارج از کشور رفتند و در زمینه‌های آنالیز محدب و بهینه‌سازی فارغ‌التحصیل شدند و اکنون از محققان این رشته‌اند؛ ازجمله محمدحسین علیزاده که از شاگردان نیکلاس حاجیساواس و در ایران مشغول به کار است.

با نگاهی به آثار تحقیقی منتشرشدهٔ دکتر زعفرانی می‌توان آن‌ها را در چهار دسته تقسیم‌بندی کرد. الف) هندسهٔ فضاهای باناخ و نظریهٔ عملگرها (موضوعاتی مثل عملگرهای p–دانفورد–پتیس روی فضاهای باناخ، همگرایی ضعیف در ایده‌آل‌های عملگری، قضیهٔ باناخ–استون و ردهٔ توابع بِر و بورل، عملگرهایی که نرم خود را اختیار می‌کنند)، ب) نظریهٔ نقطهٔ ثابت توپولوژیکی (موضوعاتی مثل قضیه‌هایی دربارهٔ نقطهٔ ثابت توابع تک‌مقداری و چندمقداری)، ج) بهینه‌سازی (موضوعاتی مثل بهینه‌سازی برداری برای توابع مجموعه‌مقدار، نابرابری‌های وردشی و بهینه‌سازی، خوش‌وضعی تعادل، توابع کوژناوردای[1] عددی و برداری، روابط بین توابع محدب و زیردیفرانسیل‌های مرتبهٔ دوم آن‌ها، مشخص‌سازی تحدب‌های مختلف برحسب زیردیفرانسیل‌های آن‌ها، تحدب تقریبی و یکنوایی)، د) آنالیز وردشی و مسائل تعادل (موضوعاتی مثل نابرابری‌های وردشی تعمیم‌یافته، مسائل تعادل برداری و کاربردهای آن، اصول وردشی و کاربرد آن‌ها در اقتصاد، و قضیهٔ اشتراک و شبه‌تعادل برداری تعمیم‌یافته).

ازجمله آثار مهم او در آنالیز تابعی خطی می‌توان از (۱)، (۲)، (۵)، و (۱۷)[۲] نام برد که در آن توپولوژی اکید، خاصیت شور برای زیرمجموعهٔ خاصی از فضای عملگرها، و ویژگی‌های توابع بِر برداری‌مقدار مورد بررسی قرار گرفته است.

اما در زمینهٔ آنالیز غیرخطی باید توجه داشت که موضوعات یادشده در فهرست بالا بی‌ارتباط با هم نیستند. دراصل، جواب‌های یک مسئلهٔ بهینه‌سازی معادل وجود جواب یک مسئلهٔ وردشی است و مسئلهٔ شبه‌وردشی یک مسئلهٔ وردشی مقید به یک نگاشت مجموعه‌مقدار است، وجود جواب این مسئله معادل است با وجود نقطهٔ ثابت برای قید مسئله‌ای که در یک نابرابری وردشی صدق می‌کند. بنابراین بررسی وجود نقطهٔ ثابت برای نگاشت مجموعه‌مقدار از دیدگاه توپولوژیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و بخشی از آثار دکتر زعفرانی و رساله‌های دانشجویانش در نظریهٔ نقطهٔ ثابت توپولوژیکی است؛ از آثار قابل‌توجه او در این زمینه می‌توان به (۶)، (۸)، و (۱۵) اشاره کرد.

---

۲. ارجاع‌ها به بخش «برگزیدهٔ مقالات» است.

1. invex

همچنین یک حالت کلی از مسئلهٔ نابرابری‌های وردشی و شبه‌وردشی مسئلهٔ تعادل و شبه‌تعادل است که برخی از آثار دکتر زعفرانی در این حوزه است و ابزار اصلی برای پرداختن به آن‌ها قضایای اشتراک ناتهی یا لم معروف به KKM است که در برخی از مقالات او تعمیم‌های بسیار مفیدی از این لم به دست آمده است و با استفاده از آن نتایج وجودی بسیار کارآمدی از مسئلهٔ تعادل ارائه شده است (ازجمله مقالات (۳)، (۴)، (۱۱)، (۱۳)، و (۱۴) را ببینید).

مسائل بهینه‌سازی برداری، نابرابری‌های وردشی و مطالعهٔ یکنوایی نگاشت‌های مجموعه‌مقدار و بررسی یکنوایی زیردیفرانسیل‌های یک تابع و ارتباط آن با تحدب تابع که از اهمیت ویژه‌ای در نظریهٔ بهینه‌سازی برخوردار است در برخی آثار دکتر زعفرانی مورد توجه قرارگرفته است که برجسته‌ترین آن‌ها مقالهٔ (۷)، (۹)، (۱۰)، (۱۲)، (۱۶)، و (۱۸) است. موضوع بهینه‌سازی به‌همراه یک پریشیدگی که، درواقع، همان اصل وردشی اِکلَند است یکی دیگر از موضوعاتی است که او در سال‌های اخیر با همکاری یکی از محققان فرانسوی و همکاران دیگر به آن پرداخته است، ازجمله نگاه کنید به (۱۹) و (۲۰)؛ این تحقیقات کاربردهایی در علوم رفتاری دارند.

آثار اشاره شده اکثراً مستخرج از رساله‌های دکترایی است که تحت راهنمایی دکتر زعفرانی (یا مشترک با دیگران) انجام گرفته‌اند. نام، عنوان رساله، و سال فارغ‌التحصیلی این دانشجویان را در جدول ۲ آورده‌ایم. بد نیست اشاره کنیم که ایشان در پنج رسالهٔ دکترا هم عنوان استاد مشاور را داشته‌اند: ۱- محبوبه رضایی (یکنوایی و تحدب تقریبی، ۱۳۸۷)؛ ۲- سمیه عشقی‌نژاد (اصل تغییراتی اکلند و کاربردهای آن، ۱۳۹۱)؛ ۳- حمیدرضا حاجی‌شریفی (قضایای نقطه ثابت و بهینه‌سازی سراسری از دیدگاه متری، ۱۳۹۳)؛ ۴- مالك عباسی (بهینه‌سازی نگاشت‌های مجموعه‌مقدار و نابرابری‌های شبه تغییراتی برداری، ۱۳۹۶)؛ ۵- زهراسادات میرصانعی (مشخصه‌سازی انواع عملگرهای یکنوای بیشین و توسیع‌هاي آنها، ۱۳۹۷). همچنین در ۳۸ پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد استاد راهنما و در ۲۶ پایان‌نامهٔ دیگر نقش استاد مشاور را داشته‌اند، ازجمله محمدرضا پوریای ولی (۱۳۶۹)، صغری نوبختیان (۱۳۷۰)، بهرام رنگی‌پور (۱۳۷۶)، مجید گازر (۱۳۷۸)، عبدالرزاق وحیدی (۱۳۷۸، مشاور)، حمیدرضا تبریزی دوز (۱۳۸۱)، نوشین موحدیان عطار (۱۳۸۲)، مریم توتونچی (۱۳۸۸، مشاور)، سمیه رهنما (۱۳۸۷، مشاور).

با عنایت به آنچه آمد می‌توان گفت که نقش دکتر زعفرانی در گسترش آنالیز تابعی غیرخطی در ایران انکارنشدنی است و فعالیت‌های علمی ایشان از طریق انتشار مقالات پژوهشی بین‌المللی و برگزاری کنفرانس، کارگاه، سخنرانی‌های بین‌المللی و داخلی، و پرورش دانشجویان و محققان زبده در پاگیری و تثبیت این شاخه در ایران بسیار مؤثر بوده است.

جدول ۲. دانشجویان دکترا

نام دانشجو و سال فارغ‌التحصیلی	عنوان رساله
محسن علیمحمدی (۷۳–۷۷)	خاصیت پایداری فضاهای اندازه‌های با مقدار برداری و فضاهای عملگرها
محمد مشتاقیون (۷۲–۷۸)	همگرایی ضعیف در ایده‌آل عملگری و دوگان آن
مجید فخار (۷۵–۸۲)	تعادلها یا نابرابریهای تغییراتی تعمیم‌یافته و نقطه ثابت
حمیدرضا شاطری (۷۷–۸۳)	کلاسهای بئروبرل و قضیه باناخ استون
علیرضا امینی هرندی (۷۸–۸۴)	خاصیت نقطه ثابت برای توابع تک‌مقداری و چندمقداری
طوبی جبروتیان (۷۹–۸۵)	توابع حقیقی و برداری اینوکس
علی پناه فرج‌زاده (۸۰–۸۵)	مسئله تعادل برداری و کاربردهای آن
مهدی چینایی (۸۲–۸۸)	بهینه‌سازی مقید در توابع مجموعه مقدار با استفاده از فضای تصویر
مرتضی اویسی‌ها (۸۵–۹۰)	مشخص‌سازی انواع تحدب‌ها توسط زیردیفرانسیل‌های تعمیم‌یافته و کاربردهاي آن در بهینه‌سازی
مرضیه دارابی بردشاهی (۸۶–۹۳)	مسئله خوش‌حالتی تعادل، نابرابری تغییراتی و بهینه‌سازی
مریم لطفی‌پور فرد (۸۷–۹۲)	قضایای اشتراک ناتهی و مسئله شبه‌تعادل برداری تعمیم‌یافته
زینب سلطانی رنانی (۸۷–۹۱)	قضایای نقطه انتهایی و نقطه ثابت برای نگاشت‌های مجموعه‌مقدار
محمدتقی نادی (۸۹–۹۸)	روابط بین تعمیم‌های نگاشت‌های محدب و زیردیفرانسیل‌های مرتبه دوم آن‌ها
محمدرضا خداخواه (۹۱–۱۴۰۰)	اصل‌های تغییراتی و کاربردهای آنها در اقتصاد
مریم سلیمانی (۹۱–۹۹)	عملگرهای نرم‌گرا و خاصیت BPB در فضاهای باناخ
سحر عطارزاده (۹۱–۹۸)	بهینه‌سازی ناهموار با روش آنالیز فضای تصویر
محمدرضا مهیاری‌نیا (۹۲–۹۶)	بهینه‌سازی استوار و کاربردها
مرتضی علیخانی (۹۲–۹۸)	عملگرهای p–حددار و p–دانفورد–پتیس روی فضاهای باناخ و زیرفضاهای متم‌دار از فضای عملگرهای خطی کراندار
سمانه لطفی (۹۸–)	تعمیم‌هایی از اصل تغییراتی و عقلانیت تغییراتی
اکرم احدی‌زاده (۹۸–)	توسیع‌های زیردیفرانسیل و کاربردهای آنها در بهینه‌سازی

برگزیدهٔ مقالات

(1) Schmets, J., Zafarani, J., Topologie stricte faible et mesures discrètes, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **43** (1974), 405–418.

(2) Moshtaghioun, S. M., Zafarani, J., Weak sequential convergence in the dual of operator ideals, *J. Operator Theory*, **49** (2003), no.1, 143–151.

(3) Fakhar, M., Zafarani, J., Generalized equilibrium problems for quasimonotone and pseudomonotone bifunctions, *J. Optim. Theory Appl.*, **123** (2004), no.2, 349–364.

(4) Fakhar, M., Zafarani, J., Generalized vector equilibrium problems for pseudomonotone multivalued bifunctions, *J. Optim. Theory Appl.*, **126** (2005), no.1, 109–124.

(5) Shatery, H. R., Zafarani, J., Vector valued Baire functions, *Z. Anal. Anwendungen*, **24** (2005), no.3, 649–656.
(6) Amini, A., Fakhar, M., Zafarani, J., KKM mappings in metric spaces, *Nonlinear Anal.*, **60** (2005), no.6, 1045–1052.
(7) Jabarootian, T., Zafarani, J., Generalized invariant monotonicity and invexity of non-differentiable functions, *J. Global Optim.*, **36** (2006), no.4, 537–564.
(8) Amini, A., Fakhar, M., Zafarani, J., Fixed point theorems for the class S-KKM mappings in abstract convex spaces, *Nonlinear Anal.*, **66** (2007), no.1, 14–21.
(9) Rezaie, M., Zafarani, J., Vector optimization and variational-like inequalities, *J. Global Optim.*, **43** (2009), no.1, 47–66.
(10) Chinaie, M., Zafarani, J., Image space analysis and scalarization of multivalued optimization, *J. Optim. Theory Appl.*, **142** (2009), no.3, 451–467.
(11) Farajzadeh, A. P., Zafarani, J., Equilibrium problems and variational inequalities in topological vector spaces, *Optimization*, **59** (2010), no.3-4, 485–499.
(12) Oveisiha, M., Zafarani, J., Vector optimization problem and generalized convexity, *J. Global Optim.*, **52** (2012), no. 1, 29–43.
(13) Fakhar, M., Lotfipour, M., Zafarani, J., On the Brézis Nirenberg Stampacchia-type theorems and their applications, J. *Global Optim.*, **55** (2013), no. 4, 751–770.
(14) Darabi, M., Zafarani, J., Tykhonov well-posedness for quasi-equilibrium problems, *J. Optim. Theory Appl.*, **165** (2015), no. 2, 458–479.
(15) Fakhar, M., Soltani, Z., Zafarani, J., The Lefschetz fixed point theorem and its application to asymptotic fixed point theorem for set-valued mappings, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **17** (2015), no. 2, 287–300.
(16) Fakhar, M., Mahyarinia, M. R., Zafarani, J., On nonsmooth robust multiobjective optimization under generalized convexity with applications to portfolio optimization, *European J. Oper. Res.*, **265** (2018), no.1, 39–48.
(17) Alikhani, M., Fakhar, M., Zafarani, J., p -convergent operators and the p-Schur property, *Anal. Math.*, **46** (2020), no. 1, 1–12.
(18) Nadi, M. T., Zafarani, J., Second-order optimality conditions for constrained optimization problems with C^1 data via regular and limiting subdifferentials, *J. Optim. Theory Appl.*, **193** (2022), no. 1-3, 158–179.
(19) Fakhar, M., Khodakhah, M., Mazyaki, A., Soubeyran, A., Zafarani, J., Variational rationality, variational principles and the existence of traps in a changing environment, *J. Global Optim.*, **82** (2022), no. 1, 161–177.
(20) Fakhar, M., Khodakhah, M. R., Soubeyran, A., Zafarani, J., Robust Ekeland variational principles, Application to the formation and stability of partnerships, *Optimization*, **72** (2023), no.1, 215-239.

۴ مصاحبه

جناب دکتر زعفرانی از اینکه قبول زحمت فرمودید بسیار سپاسگزارم. طبق معمول، اگر اجازه بفرمایید با شرح‌حال مختصری از شما آغاز کنیم.

زمینهٔ خانوادگی و تحصیلات

مختصری از شرح‌حال خود بگویید. تحصیلات ابتدایی تا متوسطه را کجا طی کردید؟ آیا شخصی در این دوران تأثیری بر علائق و انگیزه‌های شما داشت؟ آیا افراد دیگر خانواده هم مثل شما تحصیلات عالی کرده‌اند؟

ــ در سال ۱۳۲۶ درمحلهٔ چهارسوق شیرازی‌های اصفهان به دنیا آمدم. به‌دلیل فعالیت کودکانهٔ زیاد در منزل در سن پنج‌سالگی به‌توصیهٔ مادر به مکتب رفتم. لازم بود هر کودکی یک فرش کوچک برای نشستن روی آن و یک کیف حاوی لوازم‌التحریر با خود داشته باشد. روز اول مکتب، چون درخت انگور «خانم سید» پر از انگور بود، من پس‌از چند دقیقه به قصد خوردن انگورها به‌سمت درخت رفتم، هنوز کاملاً نزدیک نشده بودم که خانم سید با چوب دنبال من گذاشت و گفت هنوز روز اول نیامده چه کارهایی می‌کند، من از ترس اینکه ایشان دنبالم می‌کرد از درِ مکتب فرار کردم و حتی فرش و کیفم را هم جا گذاشتم که بعداً آن‌ها را پس گرفتند. چند روزی در خانه بودم ، به پدرم گفتم من دوست دارم به همان مدرسه‌ای که برادرم می‌رود بروم، آن موقع پنج‌ساله بودم. لذا من در دبستان خصوصی مفید اسلامی کلاس تهیه (که همان دورهٔ آمادگی فعلی است) ثبت‌نام شدم.

دو هفته گذشته بود که معلم کلاس، مرحوم آقای دادنکویی، به من گفت که فردا به پدرت بگو بیاید مدرسه. معمولاً شاگردهایی که خطای بدی می‌کردند که عواقب آن از تنبیه بدنی بیشتر بود پدرشان را می‌خواستند، لذا ترسیده بودم و به پدرم نگفتم و تنها به مادرم گفتم. فردای آن روز با مادرم به مدرسه رفتیم. آقای دادنکویی به مادرم گفت جعفر لازم نیست کلاس تهیه باشد، ایشان برود کلاس اول. آن موقع برای ورود به دبستان‌های دولتی باید هفت‌ساله می‌بودید، ولی در دبستان خصوصی مفید اسلامی با موافقت مرحوم تهرانی، مدیر مدرسه، این امر امکان‌پذیر شد. به‌هرحال دورهٔ تحصیلات ابتدایی را در دبستان مفید اسلامی گذراندم. شهریهٔ این مدرسه سالیانه ۵۰ ریال بود و تنها در زمستان لازم بود مبلغ ۵ ریال برای هزینهٔ سوخت بپردازیم.

چون در امتحان سراسری آن زمان تصدیق (ششم دبستان) معدل کتبی من از ۱۷ بیشتر بود توانستم در دبیرستان سعدی اصفهان ادامه تحصیل دهم. دبیرستان سعدی در آن موقع یکی از بهترین دبیرستان‌های اصفهان بود. در دبیرستان سعدی رقابت سالمِ علمی بین دانش‌آموزان بسیار جالب بود به‌طوری که از دو کلاس ریاضی حدود ۸۰ درصد این دانش‌آموزان جهت ادامهٔ تحصیل به دانشگاه راه یافتند. من یادم هست قبل‌از کنکور ما به‌طور دسته‌جمعی روزها در بیشه‌های کنار رودخانه و شب‌ها

در دروازه‌شیراز آن زمان که اطرافش فقط چندتا کارخانه بیشتر نبود به‌طور گروهی درس می‌خواندیم. البته همگی دوچرخه داشتیم. از دبیران باتجربهٔ ریاضی آن زمان ازجمله مرحوم جمالی، تقوی، و مرحوم نوربخش مشوق این‌جانب در ادامهٔ تحصیل در رشتهٔ ریاضی بودند. لازم است از آن‌ها یادی کنم.

در پاسخ به قسمت آخر سؤال شما عرض کنم که پدرم، مرحوم عبدالوهاب زعفرانی، تکنیسین نساجی در کارخانهٔ بافت‌ناز (شهناز سابق) و سرپرست پست اول سالن‌های نساجی بودند. ایشان خیلی علاقه داشتند که ما جهت ادامه تحصیل به آلمان برویم حتی برادر بزرگ‌تر من کارهای اعزامش را تقریباً انجام داد ولی در انتها خود برادرم انصراف داد و به کار تجارت روی آورد. ما چهار برادر و یک خواهریم. من دومین فرزند خانواده و برادر بعدی کارشناسی‌ارشد آمار از انگلیس و برادر آخری حسابرس است. خواهرم نیز علاقه زیادی به علوم قرآنی دارد.

مختصری از شروع تحصیلات عالی و استادان و متونی که داشتید بگویید. چطور شد به رشتهٔ ریاضی وارد شدید؟

ــ در سال ۱۳۴۴ به تحصیل در رشتهٔ ریاضی دانشگاه تهران پرداختم. علاوه‌بر درس‌خواندن، همراه با دو نفر از هم‌کلاسی‌های دبیرستان که در رشتهٔ اقتصاد بودند، در آزمون ورودی دارایی شرکت کردیم و هر سه با نمرهٔ بالا قبول شدیم. در مصاحبه برگهٔ پایان‌خدمت را جویا شدند که من گفتم در اطلاعیه نوشته بودید که ازنظر نظام‌وظیفه اشکالی نداشته باشید و من که هنوز ۱۸ سالم نشده است که سربازی بروم. مصاحبه‌کنندگان قبول کردند که به‌طور مشروط تا آوردن پایان‌خدمتم بتوانم با دارایی به‌عنوان امین‌وصول همکاری نمایم. پس‌از دو سال به‌دلیل نداشتن پایان‌خدمت استعفا دادم. از اینجا به بعد من سعی کردم بیشتر به ریاضی بپردازم به‌طوری که معدل سال سوم حدود ۳٫۵ ازچهار و سال آخر حدود ۴ شد. از استادان بزرگوار این دوره که ما را به استفاده از کتب انگلیسی راهنمایی کردند مرحوم دکتر قینی (کتاب‌های پارزن در احتمال)، مرحوم دکتر افضلی‌پور (کتاب چرچیل در توابع مختلط)، و مرحوم دکتر آل بویه (کتاب تنسور آنالیز) بودند. از استادان توانمند دیگر مرحوم دکتر بهفروز، دکتر جوانشیر، و پروفسور فاطمی را می‌توانم یاد کنم. تعدادی ازهم‌کلاسی‌های دانشگاه تهران عبارت‌اند از مرحوم دکتر امیرخانبان، دکتر روحانی، دکتر سلماسی، دکتر فریدون قهرمانی، دکتر کرمزاده، دکتر گلبابایی، و دکتر مالک‌نژاد.

چطور شد به خارج از کشور رفتید و در چه سالی؟ شیوهٔ تحقیق و تدریس استادانتان

در خارج از کشور چطور بود؟ رساله را با کی گذراندید؟ از هم‌درس‌های دوران دکترایتان نیز نام ببرید.

ـ مرحوم دکتر بهفروز، مرحوم دکتر هشترودی، و مرحوم دکتر جوانشیر به‌طور حق‌التدریس هر دوهفته‌ای یک بار به دانشگاه اصفهان می‌آمدند. از قرار اطلاع، دانشگاه اصفهان جهت تکمیل عضو هیئت علمی خود در کلیهٔ رشته‌ها فارغ‌التحصیلان خوب کارشناسی را جهت اجرای طرح سربازی به عنوان کمک مربی و مربی استخدام می‌کرد و پس‌از پایان خدمت به خارج از کشور بورس می‌کرد. من هم با معرفی استادان یادشده در سال ۱۳۴۸ جهت انجام طرح سربازی به دانشگاه اصفهان آمدم. در مدت طرح سربازی علاوه‌بر رفتن کلاس در هفته‌هایی که این استادان به اصفهان نمی‌آمدند دروس دیگری مثل ریاضیات عمومی و حتی آمار و احتمال را درس می‌دادم. در این مدت خوشبختانه پروفسور گارنیر مدیر مرکز تحقیقاتی آنالیز تابعی و کاربرد آن در دانشگاه دولتی لییژ بلژیک از اصفهان و از دانشگاه اصفهان بازدید کرد و به گروه ریاضی دانشگاه اصفهان هم آمد. ایشان از من سؤالاتی درخصوص آنالیز ریاضی و توپولوژی کرد و بعد دربارهٔ مرکز مذکور توضیحاتی داد و ادامه داد که من می‌توانم در این مرکز متریز (معادل کارشناسی ارشد) و دکترا بخوانم. بعداً با مشورت با همکاران تقاضای ادامه تحصیل را ارسال کردم که از دانشگاه پذیرش مستقیم به دورهٔ دکترا دریافت کردم و در بهمن سال ۱۳۵۱ عازم بلژیک شدم.

در این مرکز متخصصان در رشتهٔ آنالیز تابعی ازجمله پروفسور مارک دُ ویلد[1]، که قضایای معروف او در زمینهٔ نمودار بستهٔ گروتندیک در کتاب‌های آنالیز تابعی آمده، و پروفسور جان اشمتز در زمینهٔ فضای توابع و تعداد زیادی محقق دیگر فعالیت داشتند. در دورهٔ دکترای دولتی لازم بود من چند سری درس انتخاب کنم که سه درس من در زمینهٔ آنالیز تابعی یکی در زمینهٔ فضاهای موضعاً محدب و دیگری در زمینهٔ فضاهای توابع و دیگری در مورد عملگرها بود. یک درس در زمینهٔ هندسهٔ منیفلد، یک درس در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در فضای هیلبرت و درس دیگر در همین زمینه در مورد نظریهٔ توزیع شوارتس بود که این دروس را گذراندم. علاوه‌بر پایان‌نامه که در زمینهٔ توپولوژی‌های اکید بود یک پایان‌نامه ضمیمه نیز لازم بود انجام بدهم که آن در زمینهٔ فضاهای توپولوژیک برداری بود. استادان راهنمای من آقایان پروفسور گارنیر و پروفسور اشمتز بودند.

از هم‌درس‌های دورهٔ دکترای من می‌توان از این افراد نام برد: شوود[2]، لوبن [3]، ژرارد[4]، و هو–وان[5]، که ظاهراً فقط لوبن تحقیقات در ریاضیات را ادامه داده است.

1. Marc De Wilde 2. Paul Chauveheid 3. Pascal Laubin 4. Paul Gérard 5. Thi-si Ho-Van

دکتر گارنیر (در حال پرسیدن سؤال)

دُ ویلد و اشمتز هر دو از شاگردان گارنیر بودند، و خود گارنیر شاگرد بورو[1] که اصلاً تخصصش هندسهٔ دیفرانسیل و توابع مختلط بود، درست است؟ در ضمن، زبان فرانسه را آنجا یاد گرفتید؟ آیا کلاس اجباری داشتید یا به‌طور خودآموز بود؟

ــ تخصص بورو آنالیز مختلط و نظریهٔ معادلات با مشتقات جزئی بود. در جواب قسمت دوم سؤال شما باید بگویم که من در اصفهان کلاس‌های انجمن زبان ایران و فرانسه را شرکت می‌کردم و در دانشگاه لییژ هم عصرها در کلاس‌های تخصصی ادبی زبان فرانسه شرکت می‌کردم.

رسالهٔ دکترای شما در زمینهٔ آنالیز تابعی خطی است. چه کسان دیگری قبل از شما در ایران در این زمینه دکترا داشتند؟ و چه افرادی در گسترش آنالیز تابعی در ایران مؤثر بودند؟

ــ درمورد آنالیز تابعی قبل از من همکاران ارجمندم در ابتدا آقای دکتر رجوی سپس آقای دکتر رجبعلی‌پور و مرحوم دکتر جعفریان در نظریهٔ عملگرها فعالیت می‌کردند و بعدها آقایان دکتر میامئی و دکتر خرقانی. سپس آقایان دکتر نیکنام، دکتر سیفلو، دکتر دهقان، دکتر قاسمی، مرحوم دکتر پرویز عظیمی، و افراد دیگر به جمع آنالیزدان‌ها پیوستند و خوشبختانه به‌تدریج به همکاران در این رشته افزوده شد.

واژه‌گزینی و ترجمه

جناب‌عالی چندتا کتاب و تعدادی مقاله هم ترجمه کرده‌اید. کتاب اصول آنالیز حقیقی نوشتهٔ بارتل به ترجمهٔ شما در سال ۱۳۶۶ کتاب سال کشور شد، و به‌حق ترجمهٔ روان

1. Florent-Joseph Bureau (1906-1999)

دکتر اشمتز (نفر سوم از سمت راست) در سیزدهمین سمینار آنالیز ریاضی و کاربردهای آن، ۱۳۸۱، دانشگاه اصفهان

و دقیقی دارد؛ این کتاب ظاهراً ثمرهٔ همکاری شما با مرکز نشر دانشگاهی است. اول بفرمایید زبان انگلیسی را به‌طور جدی چطور آموختید، خودخوان بود یا دورهٔ خاصی دیدید؟ در ترجمه هم آیا الگویی داشتید و این اولین تجربهٔ شما بود؟ با دقت در ترجمه‌های شما به نظر می‌رسد واحد ترجمه را جمله می‌گیرید و نظری هم به بیان آن در زبان مقصد دارید. به نظر می‌رسد انسی با ادبیات هم داشته باشید، در این باره نیز توضیح بفرمایید.

ـ من در کلاس‌های انجمن زبان ایران و آمریکا شرکت می‌کردم و گواهی‌نامهٔ پایان دوره را هم گرفتم.

در ترجمهٔ متون درصورت گویا نبودن باید از ترجمهٔ تحت‌اللفظی به‌نیت حفظ اصالت پرهیز کرد. به نظر من مترجم با توجه به تسلط موضوع مورد ترجمه، لازم است جمله‌ای را که گویای مطلب باشد جایگزین نماید.

در انتخاب سه کتابی که ترجمه کردم وقت بسیاری صرف کردم. کتاب بارتل را با هدایت و حمایت مرحوم جناب آقای دکتر منوچهر وصال انتخاب کردم ایشان به‌حق یکی از پیش‌کسوتان آنالیز ریاضی در کشور بودند. متأسفانه وقتی من دانشجوی دانشگاه تهران شدم ایشان به دانشگاه شیراز منتقل شده بودند و من نتوانستم شاگرد ایشان باشم ولی خوشبختانه به‌دلیل ویرایش ترجمهٔ

کتاب بارتل توسط ایشان از تجربیات ارزندهٔ ایشان بهره بردم. در دوران تعطیلی دانشگاه‌ها (انقلاب فرهنگی)، بنده از سال ۱۳۵۹ تا ۱۳۶۲ عضو کمیتهٔ ترجمه و تألیف مرکز نشر دانشگاهی با مدیریت مرحوم دکتر جعفریان بودم. کتاب مباحثی از هندسهٔ دیفرانسیل پیشنیاز جالبی برای آن دانشجویانی است که می‌خواهند بعدها هندسهٔ منیفلد را انتخاب کنند و کتاب مبانی توپولوژی نوشتهٔ سیمز برای تدریس یک درس جامع در دورهٔ کارشناسی مناسب است.

به‌هرحال من هم مانند بسیاری از ایرانیان به ادبیات کشورمان علاقه‌مندم و در مواقعی از فرصت‌هایی که به دست می‌آید به مطالعهٔ آن می‌پردازم.

می‌دانم در زمینهٔ تهیهٔ واژه‌نامهٔ ریاضی هم فعالیتی داشته‌اید و در سال ۱۳۶۰ مسئول کمیتهٔ بازنگری واژه‌نامهٔ اولیهٔ انجمن ریاضی (واژه‌نامهٔ جبر و آنالیز) بودید. به‌علاوه، در این زمینه صاحب ذوق فراوانی هم هستید (کافی است به واژه‌نامهٔ آخر کتاب‌هایی که ترجمه کرده‌اید نگاهی بیندازیم تا متوجه این موضوع بشویم). روش کار شما چگونه بود و آیا مطالعاتی در این زمینه داشتید؟

ـ مبنای اولیهٔ من کتاب‌های ریاضی استادان دکتر آل بویه، دکتر افضلی‌پور و واژه‌نامه‌هایی بود که قبلاً فرم مقدماتی آن‌ها توسط انجمن ریاضی تهیه شده بود. علاوه‌بر این من مطالعاتی در واژه‌نامه‌هایی که توسط سایر رشته‌های علوم پایه و به‌ویژه فیزیک انجام شده بود داشتم.

در زمینهٔ واژه‌نامهٔ انجمن ریاضی ایران وقتی که مرحوم آقای دکتر جعفریان رئیس انجمن ریاضی بودند کمیتهٔ واژه‌نامه با دبیری این‌جانب و عضویت خود ایشان و آقای دکتر رجبعلی‌پور تشکیل شد. روش کار برای تهیهٔ فرم مقدماتی آن این طور شروع شد که ما در ابتدا، واژه‌نامهٔ کلیهٔ کتب فارسی ریاضی را جمع‌آوری کردیم همراه با دو واژه‌نامهٔ کوچکی که انجمن ریاضی با مدیریت دکتر للّهی تهیه کرده بود. آنگاه در طی جلسات متعدد با استفاده از فرهنگ دهخدا، فرهنگ معین، فرهنگ‌های لغت معتبری مثل دیکشنری آریان‌پور و تعاریف ریاضی آن در دایرةالمعارف ریاضی انگلیسی واژهٔ مناسب انتخاب می‌شد. زمانی‌که فرم مقدماتی تهیه شد خوشبختانه مصادف بود با وقتی‌که آقای دکتر بهزاد مسئول قسمت ریاضی مرکز نشر بودند و این فرم مقدماتی یک بار دیگر مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت و به چاپ رسید.

تدریس و تحقیق

از آغاز رسمی کارتان در دانشگاه اصفهان بفرمایید.

ـ اواخر سال ۱۳۵۵ پس از اخذ مدرک دکترا به دانشگاه اصفهان برگشتم. چند ماهی نگذشته بود که مدیر گروه ریاضی شدم و به همراه آقای دکتر احمد مأموریان، معاون گروه، و اعضای جوان‌تر آقایان دکتر محمدعلی انصاری، مرحوم دکتر لشکری‌زاده، و مرحوم آقای ناهید، که در آن موقع در مرتبهٔ مربی بودند، اقدامات اساسی در گروه به‌تدریج آغاز شد. با آمدن همکاران جدید، آقای دکتر محمدی، و بورسیه‌های گروه، آقایان مرحوم دکتر خاتون‌آبادی و دکتر دانایی، این روند سرعت بیشتری گرفت.

از تاریخچه و سیر تغییر و تحول گروه ریاضی دانشگاه اصفهان بگویید. در چه سالی تأسیس شد و چه کسانی اعضای رسمی و مدعو بودند؟ ظاهراً استادان خارجی هم در آنجا تدریس می‌کردند و شما در مواردی مترجم حضوری درس بوده‌اید. در این زمینه توضیح بفرمایید.

ـ گروه ریاضی دانشگاه اصفهان در سال ۱۳۴۳-۱۳۴۴ با تعدادی از دبیران مجرب آموزش و پرورش فعالیت خود را آغاز کرد. سپس با استفاده از استادان حق‌التدریس از سایر دانشگاه‌ها به فعالیت خود ادامه داد. بعدها دکتر سری‌واستاوا و دکتر طارق نصیرالدین از هندوستان و افرادی دیگر به اعضای هیئت علمی گروه اضافه شدند. البته یک استاد دیگر هندی جوان نیز بود که بیش از شش ماه دوام نیاورد. تا سال ۱۳۵۱ که هنوز به بلژیک نرفته بودم، گهگاه در درس دکتر سری‌واستاوا، که توپولوژی درس می‌داد، برای دانشجویان در ترجمه و تهیهٔ تمرینات کمک می‌کردم. اعضای هیئت علمی ایرانی گروه شامل آقایان دکتر دانایی (آن زمان مربی بودند)، مرحوم دکتر محسن نقشینهٔ ارجمند (آن زمان مربی بودند)، مرحوم دکتر خاتون‌آبادی (آن زمان مربی بودند)، دکتر فیاض، آقای اصفهانی، آقای زینی، آقای پردل (از سال ۱۳۵۱ تا ۱۳۵۷)، مرحوم دکتر اسرافیلیان (آن زمان در تربیت مدرس بودند) و بعدها آقای دکتر احمد مأموریان (که یک سال زودتر از من در سال ۱۳۴۷ از دانشگاه تهران کارشناسی ریاضی گرفته بودند و در سال ۱۳۴۹ با بورس تحصیلی از کشور لهستان در دانشگاه ورشو در رشتهٔ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای دکترا گرفتند و در سال ۱۳۵۳ به اصفهان آمدند)، مرحوم حسین ناهید (که در سال ۱۳۵۳ به استخدام گروه ریاضی در آمدند)، سپس مرحوم آقای دکتر لشکری‌زاده (که در سال ۱۳۵۳ به عنوان مربی استخدام شده بودند)، آقای دکتر محمدعلی انصاری (آن زمان مربی بودند و بعداً در زمینهٔ نظریهٔ عملگرها دکترا گرفتند و فعلاً در دانشگاه پنسیلوانیا هستند)، و آقای دکتر انشایی (که در سال ۱۳۵۲ به عنوان مربی استخدام شدند و بعد با بورس

تحصیلی عازم انگلستان شدند) بود. آقایان دکتر دانایی و دکتر محسن نقشینهٔ ارجمند در سال ۱۳۵۱ و مرحوم آقای دکتر خاتون‌آبادی در سال ۱۳۵۲ به دانشگاه اصفهان آمده بودند و در اواخر سال ۱۳۵۵ که این‌جانب پس از اخذ دکترا به دانشگاه اصفهان برگشتم. در آن موقع همگی همکاران مذکور با بورس تحصیلی به خارج از کشور رفته بودند. از برگشتن من به ایران چند ماهی نگذشته بود که مدیر گروه ریاضی شدم و به‌همراه آقای دکتر مأموریان، معاون گروه، و همکاران جوان که قبلاً ذکر کردم اقدامات اساسی در گروه به‌تدریج انجام شد. با آمدن همکاران جدید یعنی آقایان دکتر محمدی (که از فارغ‌التحصیلان گروه ریاضی در سال ۱۳۴۹ بودند و در سال ۱۳۵۵ از دانشگاه ولز در نظریهٔ گروه‌ها دکترا گرفتند و در زمان مدیریت این‌جانب به گروه پیوستند)، مرحوم دکتر خاتون‌آبادی، و دکتر دانایی این روند سرعت بیشتری گرفت. به‌تدریج با آمدن بورسیه‌های دیگر گروه و همکاران جدید مرحوم دکتر لشکری‌زاده، دکتر رجالی (که در ۱۳۵۷ به صورت طرح سربازی در گروه بودند و بعداً در ۱۳۶۷ در زمینهٔ آنالیز هارمونیک از شفیلد دکترا گرفتند)، دکتر پوریای ولی (از ۱۳۶۸ به عنوان مربی)، دکتر علی‌اصغر علیخانی کوهپایه‌ای (از ۱۳۶۹، دکترا در توابع حقیقی از دانشگاه کالیفرنیا)، دکتر اعظم (از ۱۳۶۹ به عنوان مربی و بعداً در ۱۳۷۶ دکترا گرفتند)، خانم دکتر نوبختیان (از ۱۳۷۲ به عنوان مربی)، دکتر عبدالهی (از ۱۳۸۰)، دکتر اسداللهی، دکتر سالاریان، دکتر فخار (از ۱۳۸۲)، و دکتر امینی (از ۱۳۹۳) گروه به سطح ایده‌آل خود نزدیک شد و خوشبختانه با اضافه شدن اعضای هیئت علمی جوان دیگر این روند سرعت بیشتری گرفت.

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان یک کتابخانهٔ تخصصی مخصوص به خود داشت که انصافاً غنی و کارآمد بود. بفرمایید چگونه تأسیس شد و اعتبار لازم را چطور فراهم می‌کرد؟

ـ اما کتابخانهٔ تخصصی ریاضی. همان‌طورکه در بالا اشاره کردم در سال ۱۳۶۶ ما کارشناسی‌ارشد ریاضی را شروع کردیم و به دنبال آن می‌خواستیم برای دورهٔ دکترا نیز برنامه‌ریزی کنیم اما متأسفانه منابع علمی کتابخانه کافی نبود. لذا بر آن شدیم که به تمام ناشرهای بین‌المللی و انجمن‌های علمی نامه بنویسیم که قرار است دانشگاه اصفهان دورهٔ دکترای ریاضی را راه‌اندازی کند و لیست کتب منتخب و شماره‌های چاپ‌شدهٔ تعدادی از مجلات را نوشتیم. در آن زمان مرحوم آقای دکتر خاتون‌آبادی مدیر گروه بودند و مسئول تهیهٔ فهرست کتب و مجلات با همکاری اعضای هیئت علمی گروه من بودم و مرحوم آقای حسین ناهید نامه‌ها را تهیه می‌کردند. لیست پیش‌فاکتورها آمد و خوشبختانه رئیس وقت

دانشگاه، آقای دکتر رزمجو، علاقه‌مند به راه‌اندازی دکترا در دانشگاه اصفهان بود. متأسفانه تخصیص ارز برای خرید کتاب و مجله‌ها به اندازهٔ کافی نبود. من به تهران رفتم و با آقای دکتر عبدالحمید ریاضی، دانش‌آموخته کارشناسی ریاضی دانشگاه اصفهان با رتبهٔ اول سال ۱۳۵۱ و معاون آموزشی وقت وزارت علوم، تماس گرفتم و شرح ماوقع را خدمتشان گفتم. خوشبختانه پس‌از مدت دوسه ماه با پیگیری ایشان تخصیص ارز انجام شد و با کمک معاون مالی اداری وقت دانشگاه، آقای دکتر انشایی که عضو هیئت علمی گروه ریاضی بودند، کلیهٔ پیش‌فاکتورها تأمین اعتبار شد. با ورود تدریجی مجلات و اشتراک مجلات و منابع علمی در سال تحصیلی ۱۳۷۱–۱۳۷۲ اولین دورهٔ دکترا در دانشگاه اصفهان در گروه ریاضی با یک دانشجو آغاز شد.

روش شما در تدریس در دوره‌های مختلف چگونه بوده است؟ آیا اصرار بر تکمیل سرفصل دارید با بیان تمام جزئیات و غیره؟ ترجیح می‌دهید از متن‌های کلاسیک استفاده کنید یا متن‌های جدید را هم به کار بگیرید؟ در کلاس شما به‌نوعی دانشجو احساس می‌کرد که برای اولین بار مطلب در حال کشف شدن است، که روش جالبی است در تدریس. همچنین مطالب تاریخی و مرتبط با جزئیات مختصر از ریاضی‌دان مربوط ذکر می‌شد. این روش را جایی دیده بودید یا به‌طور ناخودآگاه به کار می‌بردید؟ البته شما استاد نمونهٔ کشوری در سال ۱۳۷۱ هم شده‌اید که دلیلی بر وجود این برجستگی‌های آموزشی–پژوهشی است.

ـ در کلاس‌های پروفسور گارنیر که شرکت می‌کردم این موضوع برای من جلب توجه می‌کرد که ایشان هر مطلبی را که می‌خواست ارائه نماید در ابتدا تاریخچهٔ کوچکی از ابتدا تاکنون را ارائه می‌کرد و حتی به راه‌حل‌های قدیم آن نیز اشاره‌ای می‌کرد من هم به‌عنوان شاگرد ایشان بالطبع این شگرد را یاد گرفتم.

من البته سال‌ها درس‌های آنالیز ۱، ۲، و ۳ را درس می‌دادم ولی به‌هرحال همکاران دیگر نیز علاقه‌مند به تدریس این دروس بودند. من به تدریس آنالیز ۳ بیشتر علاقه‌مند بودم و دروس توپولوژی و هندسهٔ دیفرانسیل و هندسهٔ منیفلد را تا زمانی که آقای دکتر پوریا نیامده بودند درس می‌دادم. درعین‌حال در دوره‌های تحصیلات تکمیلی من صرفاً دروس تخصصی را درس می‌دادم. همان‌طورکه فرمودید همیشه در این دروس سعی می‌کردم از جدیدترین منابع علمی استفاده کنم.

دربارهٔ شروع دورهٔ دکترا و ارشد ریاضی درگروه ریاضی دانشگاه اصفهان هم توضیحاتی

بدهید که از چه سالی و چه افرادی این دوره را آغاز کردند. اساساً ارزیابی شما از دورهٔ دکترای داخل کشور پس‌ازگذشت چهار دهه چیست؟ ارزیابی شما از وضع ریاضیات ایران چیست: تعداد زیاد فارغ‌التحصیل از دوره‌های تکمیلی، انتشار تعداد مجلات زیاد، سطح نه چندان مطلوب آموزش، مقاله‌محوری در تربیت دانشجوی دکترا و پژوهش‌هایی که به‌نوعی تعمیم جزئی نتایج دیگران‌اند؟

ـ در سال ۱۳۶۶ اولین دورهٔ کارشناسی‌ارشد گروه ریاضی در دانشگاه اصفهان آغاز شد و سپس در سال ۱۳۷۱ دورهٔ دکترای ریاضی گروه اولین دانشجوی دکترا را پذیرفت.

به‌هرحال با ایجاد دوره‌های تحصیلات تکمیلی و دکترا، ریاضیات ایران با توجه به رده‌بندی IMU الان در ردهٔ چهارم است و این امر نشان می‌دهد علی‌رغم چالش‌هایی که در مورد کیفیت برخی از مقالات داریم نکات مثبت هم داریم. به نظر من در دورهٔ دکترا یک دانشجو باید حداقل یک مقاله در ژورنال‌های بین‌المللی از چارک اول داشته باشد. یک موقع بود که دانشگاه‌های کشورمان جواب‌گوی سیل عظیم دانشجو در کشور نبود و در آن موقع شورای عالی انقلاب فرهنگی پیشنهاد تأسیس دانشگاه‌های غیرانتفاعی را داد اما متأسفانه رشد بی‌رویه دانشگاه‌ها مشکلاتی را ایجاد کرد.

شما در زمینهٔ پژوهش هم فعال بوده‌اید. یک تغییر در زمینهٔ پژوهشی شما دیده می‌شود که از آنالیز خطی به آنالیز غیرخطی تغییر مسیر می‌دهید. واضح‌تر اینکه، بین سال‌های ۱۹۹۵–۱۹۹۹ کار پژوهشی از شما نمی‌بینیم و در سال ۱۹۹۹ اولین کار پژوهشی شما با موضوع نابرابری‌های شبه‌وردشی (در زمینهٔ آنالیز غیرخطی) را می‌بینیم. بفرمایید چگونه و چرا این اتفاق افتاد؟ و آیا شما اولین شخصی بودید که آنالیز تابعی غیرخطی را در کشور وارد کردید یا از طریق افراد دیگری مثل دکتر روحانی، که شاگرد کاکوتانی بود، این شاخهٔ آنالیز وارد کشور شد؟ در کل به نظرتان چرخش یا تغییر در حوزهٔ پژوهشی در گذر زمان و باتوجه به الزامات روز مهم و یا لازم‌اند؟

ـ به‌هرحال دورهٔ دکترای این‌جانب تحت تأثیر سه جلد کتاب *آنالیز تابعی* گارنیر، دُ وبلد، و اشمتز بود. تمرکز پژوهشی من هم در آن زمان بیشتر بر روی فضای توابع و توپولوژی اکید بود. من به دنبال همین زمینه اولین فرصت مطالعاتی خودم را در دانشگاه لییژ بلژیک متمرکز بر فضای توابع برداری گذراندم. در این مدت که در بلژیک بودم در کنفرانس آنالیز که در بروکسل برگزار شده

بود شرکت کردم و سخنرانی‌های بورگَن[۱] به نظرم جالب آمد و علاقه‌مند به هندسهٔ فضاهای باناخ شدم و لذا برای فرصت مطالعاتی بعدی خود نزد جو دیستل[۲] در کنت آمریکا رفتم. در آمریکا در کنفرانس‌ها و سخنرانی‌های متعددی شرکت کردم و بیشتر به هندسهٔ فضاهای باناخ علاقه پیدا کردم. در این مدت سعی کردم دروس مربوط به این زمینه را ارائه دهم و در بین مقالات در هندسهٔ فضای باناخ به مقالات جاناتان بروین برخورد کردم که کاربرد هندسهٔ فضای باناخ را در بهینه‌سازی نشان می‌داد. لذا در فکرم این بود که برای فرصت مطالعاتی بعدی اگر نتوانستم به اوستین آمریکا بروم، به کانادا و نزد بروین بروم. خوشبختانه ویزای آمریکا طول کشید و من به کانادا، دانشگاه سایمون فریزر، رفتم. در طول این مدت آنالیز غیرخطی را مطالعه کردم و در سمینارها و کنفرانس‌های مربوط شرکت کردم.

در مورد آن وقفه که اشاره کردید زمانی بود که به دانشگاه سایمون فریزر کانادا رفتم. از آن زمان به بعد به مطالعه و پژوهش در آنالیز تابعی غیرخطی هم پرداختم. من البته بازهم در آنالیز تابعی کارهایی انجام داده‌ام. در طول این مدت به مطالعه و تحقیق در آنالیز تابعی غیرخطی نیز می‌پرداختم.

دربارهٔ ورود آنالیز غیرخطی به ایران باید بگوییم البته که آقای دکتر بهزاد جعفری روحانی در آنالیز تابعی غیرخطی کارهای ارزنده‌ای انجام داده‌اند ولی متأسفانه ایشان پس‌از مدتی به دانشگاه تگزاس رفتند. پس از ایشان آقای دکتر محبی در آنالیز تابعی غیرخطی و سپس کاربرد آن در بهینه‌سازی کارهای ارزنده‌ای انجام داده‌اند.

به نظرم محدود شدن تنها در یک زمینهٔ تحقیقی همیشه مناسب نیست و شاید نگاه به زمینه‌های دیگر ریاضی نزدیک نیز می‌تواند جالب باشد.

موضوع رساله‌های دکترا را چگونه انتخاب می‌کردید؟ آیا روش خاصی در هدایت رسالهٔ دکترا داشتید؟

ـ در مورد موضوع پایان‌نامه، من با مطالعه، دوسه‌تا مقاله در زمینه‌های تحقیقاتی جدید به دانشجو می‌دهم و فرصت مطالعه به دانشجو می‌دهم تا تصمیم بگیرد در کدام زمینه می‌خواهد تحقیق کند و پایان‌نامه خود را بنویسد. در مواردی هم خود دانشجو زمینه‌ای را پیشنهاد می‌کند که با بحث و تبادل‌نظر با دانشجو تصمیم می‌گیریم. من که در بلژیک بودم، اشمتز دو زمینه را به من پیشنهاد کرد و من توپولوژی‌های اکید را پس‌از مطالعه انتخاب کردم.

1. Jean Louis, baron Bourgain (1954-2018) 2. Joseph Diestel (1943-2017)

شما از مؤسسان دانشگاه غیرانتفاعی شیخ‌بهایی اصفهان هستید. اولاً از چه سالی این مؤسسه تأسیس شد و با چه رشته‌هایی؟ البته هم‌زمان با شما شاهد تأسیس دانشگاه شهید اشرفی اصفهانی توسط همکار شما دکتر انشایی در همان سال در اصفهان هستیم. فلسفهٔ وجودی آن مؤسسات هم در زمان قبل و هم در حال حاضر با وجود این‌همه دانشگاه‌های متفاوت چیست؟ الان در بسیاری از رشته‌ها صندلی خالی و پذیرش با سوابق تحصیلی داریم.

ـ در سال ۱۳۷۵ با تعدادی از همکاران در دانشگاه اصفهان که از تجربهٔ اجرایی و علمی برخوردار بودند با توجه به متقاضیان زیاد ورود به دانشگاه و ادامه تحصیل بر آن شدیم که کمکی به این دسته از متقاضیان تحصیل بنماییم. این همکاران عبارت بودند از دکتر محمدحسن تحریریان (استاد نمونهٔ کشوری در رشتهٔ آموزش زبان انگلیسی)، دکتر مصطفی عمادزاده (استاد نمونهٔ کشوری در رشتهٔ اقتصاد)، مرحوم دکتر مهدی جمشیدیان (معاون پژوهشی دانشگاه اصفهان در سال‌های ۱۳۷۴–۱۳۷۶)، مرحوم دکتر محمدحسن فیض (رئیس دانشکده‌های علوم و سپس مهندسی دانشگاه اصفهان) دکتر علی‌اکبر محمدی (استاد نمونهٔ کشوری)، دکتر ناصر قاسم آقایی (پژوهشگر نمونهٔ استان در رشتهٔ کامپیوتر) دکتر علی دانایی (رئیس مرکز محاسبات دانشگاه و مدیر گروه ریاضی)، مرحوم دکتر محمود خاتون‌آبادی (مدیر بعدی گروه ریاضی)، و بالاخره بنده. البته سعی کردیم دانش‌آموختگانی با کیفیت مطلوبی به جامعه ارائه کنیم. در آن زمان تعداد کل این دانشگاه‌ها و مؤسسات در کل کشور ۵۲تا بود ولی در زمان دولت نهم بنابر ملاحظاتی به ۳۲۱ مؤسسه رسید و البته هم‌زمان پردیس‌های دانشگاه‌های دولتی و واحدهای دانشگاه آزاد اسلامی جهت پذیرش دانشجو دست به کار شدند. نتیجه این روند به این امر منتج شد که در دانشگاه‌ها و مؤسسات کشور با رشته‌هایی مواجه هستیم که دانشجو ندارد. شاید با اجرای صحیح طرح آمایش سرزمین این معضل حل شود.

می‌دانم در امور اجرائی هم فعالیت‌هایی داشته‌اید، در این باره هم توضیح بدهید.

ـ من چندین سال مدیر گروه ریاضی، عضو شورای عالی برنامه‌ریزی، عضو شورای اجرایی انجمن ریاضی ایران، و عضو شورای گسترش وزارت علوم (۱۳۸۵–۱۳۸۹)، عضو هیئت ممیزه و شورای پژوهشی دانشگاه اصفهان بودم. من از همان آغاز کار (۱۳۶۶) در کمیتهٔ ریاضی شورای عالی برنامه‌ریزی عضو بودم و تقریباً سه دورهٔ متوالی با این کمیته همکاری می‌کردم، پس‌از وقفهٔ چند ساله دوباره در دورهٔ قبل نیز با این کمیته همکاری می‌کردم.

در برگزاری سمینارها هم جناب‌عالی فعال بودید. اگر چیزی در خاطرتان مانده است بفرمایید. نقش این گردهمایی‌ها چیست؟

ـ در برگزاری دو کنفرانس ملی انجمن ریاضی ایران و چند سمینار آنالیز ریاضی و کاربردها و چند سمینار آنالیز غیرخطی به‌نحوی مشارکت داشتم. به نظرم وجود سخنرانان شاخص ریاضی دنیا یکی از فوائد آشنایی با توان بالای ریاضی‌دانان جوان و برجسته ایران عزیز است.

پایان سخن

آیا فرزندان شما علاقه و یا استعدادی در رشتهٔ ریاضی داشتند و آیا راه شما را ادامه دادند؟

ـ فرزندانم همگی دیپلم ریاضی دارند ولی هر سه در رشتهٔ کامپیوتر و مهندسی صنایع مشغول به کار هستند. در اینجا لازم می‌دانم به این مطلب اشاره کنم که این‌جانب مدیون زحمات ارزنده همسر عزیزم چه در زندگی روزمره و چه در مورد تربیت فرزندان هستم.

در چه سالی بازنشسته شدید و اکنون مشغول چه کاری هستید؟ خارج از حوزهٔ ریاضی چه دلبستگی‌های دیگری دارید و به چه کارهایی می‌پردازید؟

ـ من در سال ۱۳۸۸ به تقاضای شخصی، علی‌رغم عدم تمایل مدیریت دانشگاه، بازنشسته شدم ولی ارتباطم را با دانشگاه اصفهان قطع نکردم، عضویت در هیئت ممیزهٔ دانشگاه و بعضاً تدریس هم داشته‌ام ولی هنوز دانشجوی دکترا دارم. به‌هرحال دانشگاه احتیاج به نیروهای جوان دارد. فعلاً در دانشگاه شیخ‌بهایی هستم و خودم را از محیط دانشگاهی دور نمی‌کنم. بله من از تدریس و تحقیق لذت می‌برم و از هم‌نشینی و صحبت با نسل جوان لذت می‌برم.

خارج از رشتهٔ ریاضی من علاقهٔ ویژه‌ای به تاریخ و فرهنگ ایران و بالطبع به ادبیات ایران‌زمین دارم و گهگاه این منابع را مطالعه می‌کنم.

چه کارهایی دوست داشتید انجام بدهید ولی فرصت انجام آن‌ها را پیدا نکردید؟

ـ همواره شکرگزار خداوند متعال هستم که تا حدی آن کارهایی را که آرزو داشتم، نه به‌صورت صددرصد بلکه به‌طور نسبی، انجام دادم.

مراجع

[۱] امینی، سید مسعود؛ پورمحمد، حسن، مروری بر تاریخچهٔ آنالیز تابعی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، **۶۸** (۱۴۰۰)، ۱۷۱-۱۵۷.

[۲] امینی هرندی، علیرضا، نظریهٔ نقطهٔ ثابت نگاشت‌های ناافزا: پرسش‌ها و یافته‌ها، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، **۶۷** (۱۳۹۹)، ۱۷۹-۱۵۷.

[۳] برزیس، حییم، آنالیز تابعی؛ نظریه و کاربردها، ج ۱، ترجمهٔ بهزاد جعفری روحانی، مرکز انتشارات علمی دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ۱۳۷۶.

[۴] جعفری روحانی، بهزاد، نگاشتهای انبساطی، مسئلهٔ نیرنبرگ و نظریهٔ ارگودیک انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ۱۳۸۴.

[۵] رجبعلی‌پور، مهدی، با کاروان حله، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، **۶۴** (۱۳۹۸)، ۱-۱۶.

[۶] صال‌مصلحیان، محمد؛ اسماعیل‌زاده، محمد، استفان باناخ، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، **۳۸** (۱۳۸۶)، ۶۷-۷۴.

[۷] مقصودی، سعید، دکتر محمود لشکری‌زاده بمی: زندگی و آثار، ریاضی و جامعه، **۱** (۱۴۰۰)، ۱-۲۶.

[۸] مقصودی، سعید، سیری در آنالیز فوریه: گفت‌وگویی با دکتر مهدی هرمزی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، **۷۲** (۱۴۰۲)، ۱-۴۶.

[9] Bacak, M., *Convex Analysis and Optimization in Hadamard Spaces*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 22, De Gruyter, Berlin, 2014.

[10] Bernkopf, Michael, The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory, *Arch. History Exact Sci.*, **3** (1966), 1-96.

[11] Birkhoff, G., Kreyszig, E., The establishment of functional analysis, *Historia Math.*, **11** (1984), no.3, 258–321.

[12] Browder, F. E., The relation of functional analysis to concrete analysis in 20th century mathematics, *Historia Math.*, **2** (1975), 577–590.

[13] Dieudonné, J., *History of Functional Analysis*, North-Holland Math. Stud., vol. 49, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981.

[14] Miyadera, I., *Nonlinear Semigroups*, Transl. Math. Monogr., vol. 109, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

[15] Pier, Jean-Paul, *Mathematical Analysis During the 20th Century*, Oxford University Press, New York, 2001.

[16] Schwartz, Jacob T., *Non-Linear Functional Analysis*, Gordon & Breach Science Pub., New York, 1969.

[17] Smithies, Frank, The shaping of functional analysis. *Bull. London Math. Soc.*, **29** (1997), no.2, 129-138.

[18] Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, I, Fixed-point Theorems*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[19] Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/B, Nonlinear Monotone Operators*, Springer-Verlag, New York, 1990.

علیرضا امینی هرندی: دانشگاه اصفهان، دانشکدهٔ ریاضی و آمار

رایانامه: a.amini@sci.ui.ac.ir

مجید فخار: دانشگاه اصفهان، دانشکدهٔ ریاضی و آمار
رایانامه: fakhar@sci.ui.ac.ir
سعید مقصودی: دانشگاه زنجان، گروه ریاضی
رایانامه: s_maghsodi@znu.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 43, Number 1, Spring/Summer 2024, Pages 1–48
doi: 10.30504/mct.2024.1476.2034

From Linear Functional Analysis to Nonlinear Functional Analysis: An Interview with Professor Jafar Zafarani

A. Amini-Harandi[1], M. Fakhar[2], S. Maghsoudi[3]✉

[1,2] Faculty of Mathematics and Statistics, University of Isfahan, Iran
[3]Department of Mathematics, University of Zanjan, Iran

Abstract. Functional analysis was an important development in the viewpoint of mathematicians in examining the behavior of functions as a set (space of functions). The important concept of single space and the distance of its points, invented by Fréchet in the early 20th century, and the fusion of algebraic and topological concepts eventually led to the establishment of this branch of mathematics around 1933. The first Iranian mathematician to make a mark in this field was Heydar Radjavi, who contributed to the field in Iran from 1963 to 1968. Another branch of this field is called nonlinear functional analysis, and Behzad Djafari-Rouhani was the first specialist in this branch who worked in the country from 1987 onwards. Another key figure in the development and expansion of this branch in the country is Jafar Zafarani. This article, after outlining the history of functional analysis, will provide a brief overview of his contributions to this field. Through a conversation with him, we will delve into his experiences and insights from various aspects of his professional life.

Keywords: functional analysis, nonlinear analysis, operator theory, optimal control, research in mathematics, teaching mathematics, University of Isfahan
Article history: Recieved 3 April 2024; Accepted 4 May 2024
Article type: interview

1. a.amini@sci.ui.ac.ir
2. fakhar@sci.ui.ac.ir
3. s_maghsodi@znu.ac.ir