

بیلیارد، دینامیک دو گوی روی یک خط، و عدد π

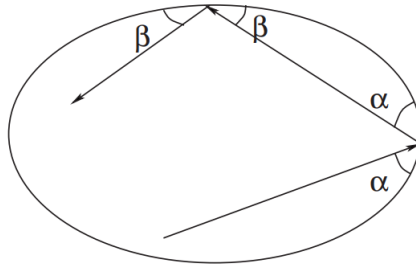
فاطمه آقائی میبدی، حسین خورشیدی، سعید علیخانی

چکیده. یک سیستم دینامیکی متشکل از دو توپ با جرم‌های مختلف روی یک خط با یک مانع کاملاً کشسان را می‌توان به وسیله یک میز بیلیارد به شکل کُنج بررسی کرد. تعداد برخوردها در این سیستم (بیلیارد گالپرین) با ارقام بسط اعشاری عدد π ارتباط پیدا می‌کند. در این مقاله به مطالعه این ارتباط جالب خواهیم پرداخت و برخی از حدس‌های معروف درخصوص بیلیارد را بیان خواهیم کرد.

۱ مقدمه

بیلیارد ریاضی شامل یک ناحیه در صفحه و یک نقطه (نقطه مادی یا توپ) است؛ این ناحیه را میز بیلیارد می‌نامند. نقطه که همان توپ بیلیارد است داخل این ناحیه آزادانه حرکت می‌کند؛ بدین معنی که آن نقطه روی یک خط راست با سرعت ثابت حرکت می‌کند تا به مرز برخورد کند. مرز کاملاً کشسان است و بازتاب در آن از قانون آشنای اپتیک هندسی پیروی می‌کند: «زاویه برخورد با زاویه بازتاب برابر است». توپ بعد از بازتاب از مرز مسیر آزاد خود را با بردار سرعت جدید ادامه می‌دهد تا دوباره به مرز برخورد کند. شکل ۱ میز بیلیاردی به شکل بیضی را نشان می‌دهد که در آن مسیر حرکت توپ، دو برخورد آن با مرز ناحیه، و زاویه‌های برخورد و بازتاب مشخص شده است. در واقع، در یک نقطه مرزی هموار توپ بیلیارد منعکس می‌شود به طوری که مؤلفه مماسی سرعت ثابت می‌ماند درحالی‌که مؤلفه قائم تغییر علامت می‌دهد و تندی بدون تغییر باقی می‌ماند. اگر توپ

عبارات و کلمات کلیدی: بیلیارد دینامیکی، سیستم‌های دینامیکی، عدد پی
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۰/۲۱



شکل ۱. بازتاب در بیلیارد [۲۲]

بیلیارد به گوشه (جایی که مشتق وجود ندارد) برخورد کند حرکت بعدی آن معنا ندارد. شکل هندسی میز بیلیارد مشخصه کیفی حرکت را تعیین می‌کند. به لحاظ تاریخی سه رده از شکل‌ها بیشترین توجه را به خود جلب کرده‌اند. نخستین رده متعلق به میزهای بیلیارد هموار و اکیداً محدب است که دینامیک حاصل از آن بیضوی است [۵]. دومین رده مربوط به میزهای بیلیارد تکه‌ای هموار و تکه‌ای مقعر است که با توجه به دلایلی دینامیک متناظر با آن‌ها دینامیک هذلولوی است [۶]. البته میزهای بیلیارد محدبی نیز وجود دارند که جزء دینامیک هذلولوی هستند. میزهای بیلیارد در رده سوم چندضلعی‌ها هستند که دینامیک متناظر با آن‌ها سهموی است [۷، ۱۲]. بحث درباره هر سه نوع بیلیارد را به‌طور جامع در [۱۱] ببینید.

در بخش دوم این مقاله به بیان مختصری از موضوع ریاضی بیلیارد و بعضی از تعریف‌ها و مسائل معروف آن می‌پردازیم و با بیلیارد ریاضی بیشتر آشنا می‌شویم. در بخش سوم، به مطالعه مسیرهای دوره‌ای و تعداد آن‌ها در صفحه بیلیارد می‌پردازیم. در بخش پایانی، به بررسی سیستم دینامیکی بیلیارد ساده با دو توپ بیلیارد به جرم‌های M و m ، منسوب به گالپیرین^۱، و شمارش تعداد برخوردها خواهیم پرداخت و ملاحظه خواهیم کرد که می‌توان نسبت جرم دو توپ، یعنی $\frac{M}{m} = b^{2N}$ ، را با N رقم اول از جزء اعشاری عدد π مرتبط ساخت [۳].

۲ آشنایی بیشتر با بیلیارد

ابتدا تعمیمی طبیعی از بیلیارد ارائه می‌دهیم. یک میز بیلیارد عملاً یک خمینه ریمانی Ω با مرز تکه‌ای هموار است. سیستم دینامیکی بیلیارد روی Ω با حرکت آزاد یک نقطه (نقطه مادی یا توپ

بیلیارد) از طریق بازتاب کشسان در مرز به وجود می‌آید، این بدین معنی است که توپ در طول یک خط ژئودزیک^۱ روی Ω با تندی واحد حرکت می‌کند تا با مرز برخورد کند. در یک نقطه مرزی هموار توپ بیلیارد منعکس می‌شود به طوری که مؤلفه مماسی سرعت ثابت می‌ماند، درحالی‌که مؤلفه قائم تغییر علامت می‌دهد که در حالت دو بُعدی این برخورد توسط قانون اپتیک هندسی توصیف می‌شود (زاویه برخورد با زاویه بازتاب برابر است). اگر توپ بیلیارد به گوشه برخورد کند، حرکت بعدی ندارد. جریان بیلیارد را می‌توان هم به‌عنوان یک مسیر زمان پیوسته و هم با در نظر گرفتن نقاط بازتاب در مرز توصیف کرد که نشانگر گسسته‌ای از جریان است و با نداشتن بیلیارد توصیف می‌شود.

گیریم Ω ناحیه‌ای در صفحه با مرز $\partial\Omega$ باشد. خم دیفرانسیل پذیر پیوسته $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ با شرط $\gamma([0, 1]) = \partial\Omega$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که خم بسته باشد، یعنی $\gamma(0) = \gamma(1)$ ، و هیچ خودتقاطع در بازه $[0, 1]$ نداشته باشد. توابع مؤلفه‌ای γ را برای $t \in [0, 1]$ به صورت $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ در نظر بگیرید که برای آن پارامتر طول قوس به صورت زیر تعریف می‌شود

$$s(t) := \int_0^t |\gamma'(\tau)| d\tau = \int_0^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} d\tau.$$

بنابراین، طول کل خم برابر $L = s(1)$ است و $\partial\Omega$ به جای $[0, 1]$ با بازه $[0, L]$ پارامتری می‌شود. از اینجا به بعد خم مرز را با همان γ نشان می‌دهیم. می‌توان نشان داد که مشتق γ نسبت به طول کمان s در برابری $1 = \left| \frac{d\gamma}{ds} \right|$ صدق می‌کند؛ بردار واحد مماس بر خم γ است.

تعریف ۱.۲. فرض کنید خم پیوسته $\mathbf{r}(t)$ در بازه $t \in [0, \infty)$ روی $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ دارای ویژگی‌های زیر است.

$$\mathbf{r}(0) \in \partial\Omega \quad (1)$$

(۲) برای هر $t > 0$ که $t \notin \partial\Omega$ و $\mathbf{r}(t)$ در t دوبار دیفرانسیل پذیر است، فرض می‌کنیم $\mathbf{r}''(t) = 0$ و $|\mathbf{r}'(t)| = 1$. این ویژگی‌ها بر وجود بردار واحد \mathbf{u} دلالت دارد به طوری که برای هر t' در همسایگی t ، $\mathbf{r}'(t') = \mathbf{u}$. از دیدگاه هندسی، یعنی \mathbf{r} شامل پاره‌خط‌هایی است که نقاط ابتدا و انتهای آن‌ها روی γ است؛

۱. مفهوم ژئودزیک در هندسه دیفرانسیل تعریف می‌شود و به زبان ساده به این صورت تعریف می‌شود که اگر خم C کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه x_0 و x_1 روی خمینه M باشد آنگاه C یک ژئودزیک روی M است [۹].

بیلیارد، دینامیک دو گوی روی یک خط / آقانی میدی، خورشیدی، علیخانی

(۳) اگر $t > 0$ و $\mathbf{r}(t) \in \partial\Omega$ ، آنگاه $\epsilon > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $t' \in (t - \epsilon, t + \epsilon)$ داریم $\mathbf{r}(t') \notin \partial\Omega$. مماس های واحد از \mathbf{r} در بازه $(t - \epsilon, t)$ و $(t, t + \epsilon)$ را به ترتیب با \mathbf{u} و \mathbf{v} نشان می دهیم، و بردار مماس بر γ را ω می نامیم که \mathbf{u} با ω زاویه ای مشابه ω با \mathbf{v} می سازد و این همان قانون بازتاب است.

هر بردار \mathbf{r} که در شرایط بالا صدق کند مسیر بیلیارد است و مجموعه همه این مسیرها سیستم دینامیکی بیلیارد در یک ناحیه تشکیل می دهد. تعریف بالا یک مدل پیوسته از سیستم دینامیکی بیلیارد است، اما بهتر است با حالت گسسته آن کار کنیم. مسیر بیلیارد \mathbf{r} و $s \in [0, L]$ را با شرط $\mathbf{r}(0) = \gamma(s_0)$ در نظر بگیرید. با این تعریف \mathbf{r} یک مسیر خطی را طی می کند تا γ را در نقطه جدید $\gamma(s_1)$ قطع کند و آنگاه در طول پاره خط جدید ادامه می یابد و با این روش دنباله ای از نقاط $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ که مسیر بیلیارد را کاملاً مشخص می کند، به دست می آیند (پاره خط های \mathbf{r} می توانند از قانون بازتاب استنتاج شوند).

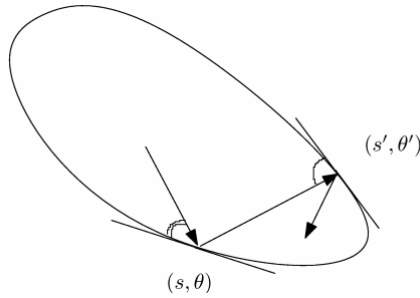
تعریف ۲.۲ (فضای فاز). فضای فاز شامل تمام حالت های ممکن از سیستم بیلیارد است، یعنی متشکل از هر نقطه به صورت $(s, \theta) \in [0, L] \times [0, \pi]$ است که مشخص کننده یک نقطه روی مرز و زاویه بین بردار $\overrightarrow{\gamma(s)}\gamma(s')$ با جهت مرز است.

اگر خم γ در بازه $[0, 1]$ پارامتری شود، چون بازه $[0, 1]$ تحت نگاشت خارج قسمتی که دو سر پاره خط بازه $[0, 1]$ را برهم منطبق می کند و خم بسته γ را پدید می آورد، می توان آن را به صورت $\mathbb{S}^1 = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ در نظر گرفت؛ در این صورت فضای فاز یک استوانه خواهد بود.

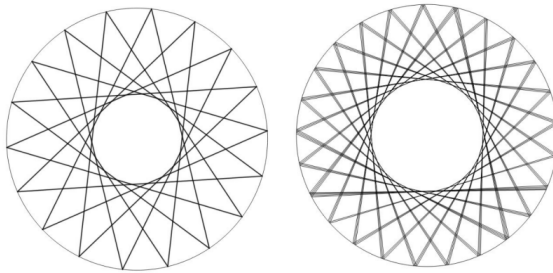
تعریف ۳.۲ (نگاشت بیلیارد). نگاشت T روی مجموعه $[0, L] \times [0, \pi]$ را به صورت $T(s, \theta) = (s', \theta')$ تعریف می کنیم. یک مسیر بیلیاردی با نقطه شروع $\gamma(s)$ و زاویه اولیه θ توسط دنباله $\{T^k(s, \theta)\}_{k=0}^{\infty}$ به دست می آید (شکل ۲ را ببینید).

یک ویژگی سودمند از میزهای بیلیارد وجود پوش شعاعی^۱ است که در تحلیل دینامیک نگاشت بیلیارد کاربردهای مهمی دارد. یک پوش شعاعی خمی است که اگر یک مسیر بیلیارد در نقطه ای بر آن خم مماس شود، آنگاه بعد از هر بازتاب نیز بر آن خم مماس خواهد بود. توجه کنید که لازم نیست پوش شعاعی خمی در داخل میز بیلیارد باشد، بلکه ممکن است نقطه تماس با ادامه دادن پاره خط

1. caustic



شکل ۲. فضای فاز



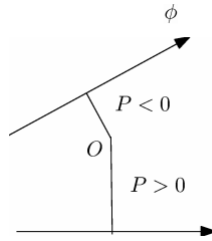
شکل ۳. θ مضرب گویایی از π است؛ θ مضربی گنگ از π است [۱۸].

مسیر در خارج از میز روی خم قرار گیرد. وانگهی، وجود پوش شعاعی برای میزهای بیلیارد یک ویژگی عمومی نیست؛ میزهایی وجود دارند که پوش شعاعی ندارند. برای مثال، میز محدب دارای انحنای صفر در نقطه‌ای از مرز خود پوش شعاعی ندارد [۱۴]. در مقابل آن، میزهایی هم وجود دارند که تعداد نامتناهی پوش شعاعی دارند، برای مثال می‌توان میزهای بیضی شکل را نام برد. پوش شعاعی در میز بیلیارد بیضی به صورت بیضی‌های هم‌کانون یا هذلولی‌های هم‌کانون است [۱۸]. در شکل ۳ مثالی از پوش شعاعی در میز بیلیارد دایره‌ای آمده است.

فرض کنید N فضای فاز معادل با تعریف ۲.۲ شامل خطوط جهت‌دار در صفحه باشد. یک خط جهت‌دار l توسط زاویه ϕ که با جهت ثابت صفحه می‌سازد و فاصله علامت‌دار p از مبدأ O به‌طور کامل مشخص می‌شود. علامت p بسته به قاب تشکیل‌شده از بردار \vec{OP} عمود بر خط و بردار جهتی l به دست می‌آید (شکل ۴ را ببینید).

بنابراین، نقاط فضای N به صورت (ϕ, p) است.^۱ توجه کنید که فضای فاز M متشکل از (x, v) که $x \in \gamma$ و v بردار واحد سرعت با مبدأ x و جهت رو به داخل میز بیلیارد است، همچنین،

۱. برای آن‌ها که با صورت‌های دیفرانسیلی آشنایی دارند اشاره می‌کنیم که روی N می‌توان یک صورت مساحت به شکل $d\phi \wedge dp$ تعریف کرد [۲۲].



شکل ۴. خطوط جهت‌دار

دو فضای M و N با نگاشت $\Phi: M \rightarrow N$ به یکدیگر مرتبط می‌شوند به طوری که هر بردار v به خط جهت‌داری که در صفحه روی آن قرار می‌گیرد نظیر می‌شود. در واقع، اگر میز بیلیارد محدب باشد، آنگاه نگاشت Φ یک‌به‌یک است.

اینک فرض کنید $\psi \subset N$ فضای فاز متشکل از خطوط جهت‌داری است که میز بیلیارد γ را قطع می‌کند و $\beta \subset \psi$ مجموعه‌ای از خطوط جهت‌دار مماس به خم α پوش شعاعی باشد. در این صورت با توجه به خاصیت پوش شعاعی داریم $T(\beta) = \beta$ یعنی β یک خم ناوردا از نگاشت بیلیارد T است.

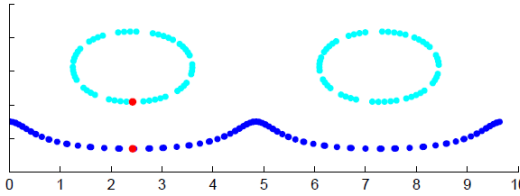
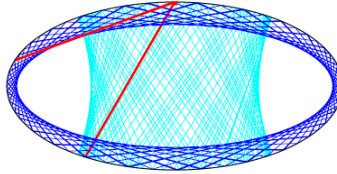
تعریف ۴.۲ (دایره ناوردا). خم‌های ناوردای $\beta \subset \psi$ که به‌طور توپولوژیکی دایره‌های انقباض ناپذیرند، اغلب، دایره‌های ناوردا نامیده می‌شوند.

لم ۵.۲ ([۱۴]). هر پوش شعاعی محدب با یک دایره ناوردا در فضای فاز متناظر است.

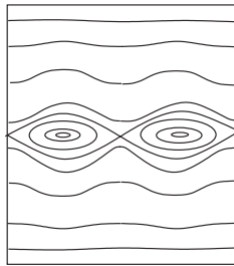
اگر α یک بیضی داخل خم بیضی γ باشد، در این صورت α یک پوش شعاعی برای خم γ است و در مسیرهای بیلیاردی که قسمتی از آن‌ها مماس بر خم α است، بقیه قسمت‌ها نیز بر آن خم مماس می‌شوند و با توجه به فضای فاز ψ هر یک از این قسمت‌ها روی یک خط جهت‌دارند و با نقطه‌ای از فضای ψ متناظرند (شکل ۵ را ببینید). نمای کلی از فضای فاز در میز بیلیارد بیضی‌شکل را در شکل ۶ ببینید.

تعریف ۶.۲ (انتگرال‌پذیری). یک میز بیلیارد انتگرال‌پذیر خوانده می‌شود هرگاه درون مجموعه دایره‌های ناوردا ناتهی باشد.

یکی از معروف‌ترین مسائل حل‌نشده در مورد بیلیاردها حدس برکوف^۱ است که بیان می‌کند



شکل ۵. هر خط جهت‌دار یک نقطه از فضای فاز است [۱۴].

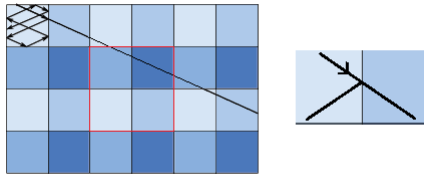


شکل ۶. فضای فاز بلیارد بیضی‌شکل [۲۲]

تنها میزهای بلیارد انتگرال‌پذیر بیضی‌ها هستند. این حدس چند سال پس از مرگ برکوف برای اولین بار در [۲۰] مطرح شد. حدس برکوف هنوز حل نشده است و در این زمینه قضیه‌ای دربارهٔ یکتایی دایره‌ها در [۴] آمده است.

قضیه ۷.۲ ([۲۲]). اگر تقریباً هر نقطه از فضای فاز نداشت بلیارد در میز بلیارد اکیداً محدب عضوی از یک دایرهٔ ناوردا باشد، آنگاه میز بلیارد دایره است.

موارد فوق و ارتباط بین آن‌ها به‌طور مفصل در [۱] آمده است. علاوه‌براین، پیشرفت‌های مهم اخیر در خصوص حدس برکوف را می‌توانید در [۲، ۱۵، ۱۳] مشاهده کنید.



شکل ۷. (چپ) مسیر توپ در شبکه‌ای از بازتاب‌های مستطیل نسبت به اضلاع آن نشان داده شده است؛ (راست) نیمه گسترده شده مستطیل که به جای بازتاب امتداد خطی که به مرز میز بیلیارد برخورد کرده در مستطیل کنار آن در نظر گرفته شده است.

۳ مسیره‌های دوره‌ای در صفحه بیلیارد و تعداد آن‌ها

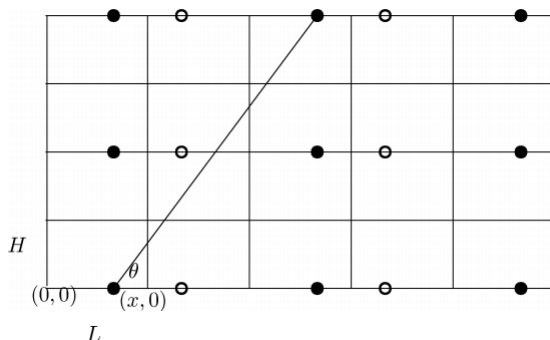
یکی از مهم‌ترین مسائل در باب میزه‌های بیلیارد یافتن مدارهای دوره‌ای (مسیره‌های دوره‌ای)^۱ است. قضیه برکوف وجود حداقل دو مدار دوره‌ای مجزا از یک دوره دلخواه در میز بیلیارد اکیداً محذب از رده C^2 را نشان می‌دهد. برهانی از آن را در [۱۴] ببینید. مدارهای دوره‌ای در دایره، حلقه مستدیر، و بیضی را در [۱۸، ۱۹] ببینید.

یکی از مسائل المپادی که در یک کارسوق در سال ۱۳۷۲ مریم میرزاخانی و چند نفر دیگر حل کردند به این صورت است: «اگر میز بیلیارد مربع‌شکلی داشته باشیم و توپ با زاویه θ از نقطه‌ای در داخل مربع به یک ضلع از مربع پرتاب شود در چه صورتی به مکان اولیه خود برمی‌گردد؟ (زاویه برخورد با زاویه بازتاب در مرز برابر است)».

برای پاسخ به این مسئله فرض کنید میز بیلیارد مستطیل‌شکلی با طول L و عرض H داریم و توپی با زاویه θ به یکی از اضلاع برخورد می‌کند. می‌توان با گسترده^۲ مسیر را به صورت یک خط راست در نظر گرفت (شکل ۷ را ببینید).

اگر بخواهیم مسیره‌های دوره‌ای را در صفحه با توری مستطیل‌شکل بیابیم باید به دنبال نقاط مشابه در اولین برخورد با ضلع مستطیل باشیم (شکل ۸ را ببینید). دایره‌های توخالی نقاطی هستند که توسط تقارن با تعداد فرد در مستطیل کوچک پایین سمت چپ در (\circ, \circ) به وجود آمده‌اند و اگر مسیری تا این نقاط را در نظر بگیریم حتماً از این گوشه عبور می‌کند. چون در گوشه‌ها قانون بازتاب مشخصی نداریم قرارداد می‌کنیم که مسیر ادامه نیابد، بنابراین این نقاط را «نقاط بد» می‌نامیم و به حساب نخواهیم آورد. برای روشن‌تر شدن موضوع، اگر نقطه شروع را با مختصات (x, \circ) در نظر

۱. اگر توپ بیلیارد با زاویه مشخص θ به مرز برخورد کند و پس از N مرتبه برخورد با مرز به مکان اولیه خود بازگردد، در این صورت مسیر توپ در دوره‌ای با دوره N می‌نامند.



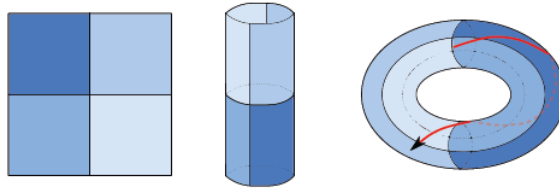
شکل ۸. نقاط مشابه در یک مسیر دوره‌ای

بگیرید، هر دایره توخالی دارای مختصات به صورت $(2kL - x, 2k'H)$ است که در آن k و k' اعداد صحیح مثبت‌اند، بنابراین مختصات نقطه میانی به صورت $(kL, k'H)$ است که مختصات نقاط گوشه است. اینک به دایره‌های توپر و مسیر رسم‌شده در شکل ۸ توجه کنید و مثلث قائم‌الزاویه به وجود آمده را که دارای زاویه θ است در نظر بگیرید، در این حالت

$$\tan \theta = \frac{2nH}{2mL} = \frac{nH}{mL}, \quad n, m \in \mathbb{Z}^+$$

که در آن \mathbb{Z}^+ نشان‌دهنده اعداد صحیح مثبت است. حال اگر میز مربع شکل باشد، در این صورت $\tan \theta = \frac{n}{m}$ و $H = L$ عددی گویا است. بنابراین اگر زاویه θ چنان باشد که تاثرات آن عددی گویا شود در این صورت مسیر دوره‌ای خواهد بود و توپ به نقطه اولیه خود برمی‌گردد.

از جمله مسائل جالب و مورد توجه دیگر در بیلیارد این است که چه تعداد مسیر دوره‌ای با طول کمتر از ℓ وجود دارد؟ مسیرهای دوره‌ای در دسته‌ای از مسیرهای موازی ظاهر می‌شوند. به عبارت دیگر، کافی است به خطوط موازی (با طول‌های برابر) در صفحه توری شکل که از گسترده میز بیلیارد به وجود می‌آید توجه کنیم. از این‌رو مسیرهای دوره‌ای موازی را معادل می‌گویند. تعداد مسیرهای دوره‌ای غیرمعادل با حداکثر طول ℓ در یک صفحه بیلیارد P را با $n_P(\ell)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید مربعی با ابعاد 1×1 دارید و با گسترده آن، بخشی از صفحه را پُر کرده‌اید و مبدأ را مکان اولین برخورد توپ با دیواره داخلی میز در نظر بگیرید. طول مسیر گسترده‌شده از مبدأ به نقطه (p, q) برابر با $\sqrt{p^2 + q^2}$ است. بنابراین، تعداد مسیرهای دوره‌ای با طول کمتر از ℓ برابر تعداد اعداد صحیح نامنفی است که در رابطه $p^2 + q^2 < \ell^2$ صدق می‌کند که دایره‌ای به شعاع ℓ است. به طور تقریبی این عدد برابر تعداد نقاط با مختصات صحیح درون دایره یادشده است.



شکل ۹. از یکی کردن اضلاع روبه‌رو در مربع $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{Z}^2$ یک چنبره به دست می‌آید که خطوط شبکه (مسیرهای بیلیارد) به ژئودزیک‌های آن تبدیل می‌شوند.

اگر میز بیلیارد یک مستطیل دلخواه باشد، می‌توان با چهار مستطیل متمایزی که در صفحه به وجود می‌آید شبکه‌ای تشکیل داد و آن را با \mathbb{Z}^2 یکی گرفت به طوری که هر ناحیه به شکل مربع $[n, n+1] \times [m, m+1]$ در \mathbb{R}^2 اجتماعی از چهار صفحه بیلیارد از انواع مختلف باشد (شکل ۹ را ببینید). در این حالت با تعداد نقاط با مختصات صحیح در دایره یا بیضی به مساحت $\lambda P \ell^2$ برابر است که در آن λP ثابتی وابسته به مستطیل انتخاب شده است.

با یکی کردن اضلاع مقابل یکی از مربع‌های 1×1 که توسط $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ مشخص می‌شود، به یک چنبره دارای یک حفره (این حفره‌ها را گونا^۱ می‌نامند) می‌رسیم که با فضای خارج قسمتی $\frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$ یکریخت است. مسیر توپ در واقع مسیری مستقیم یا به عبارت دیگر یک ژئودزیک روی این چنبره است و $n_P(\ell)$ تعداد ژئودزیک‌های بسته غیرمعادل با طول حداکثر ℓ را نشان می‌دهد که به طور مجانبی با $c\ell^2$ برابر است.

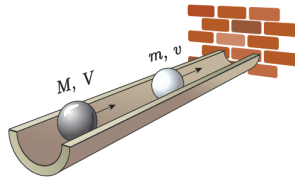
حدس (۱): برای هر صفحه بیلیارد چندضلعی P با زاویه‌های گویا (نسبت به π) با بزرگ شدن ℓ رفتار مجانبی $n_P(\ell)$ با رابطه $n_P(\ell) \sim c_P \ell^2$ معین می‌شود که در آن c_P مقداری ثابت وابسته به چندضلعی P است.

این حدس همچنان مسئله‌ای حل نشده است، اما نتایج مهمی درخصوص این حدس به دست آمده است. در میان آن‌ها می‌توان به قضیه‌ای از مس^۲ اشاره کرد.

قضیه ۱۰۳ ([۱۷، ۱۶]). برای هر چندضلعی P با ضرایب گویا اعداد ثابت c_1 و c_2 وجود دارند به طوری که

$$c_1 \ell^2 < n_P(\ell) < c_2 \ell^2.$$

قضیه زیر بهترین نتیجه درباره حدس (۱) و یکی از دستاوردهای زندیاد مریم میرزاخانی است.



شکل ۱۰. بیلپارد گالپرین [۳]

قضیه ۲.۳ ([۸]). حدس (۱) برای هر چندضلعی P با زاویه‌های گویا به‌طور میانگین برقرار است. به‌عبارت‌دیگر، حد زیر وجود دارد

$$c_P = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \ell} \int_0^\ell \frac{n_P(x)}{x^3} dx.$$

۴ دینامیک دو گوی روی یک خط

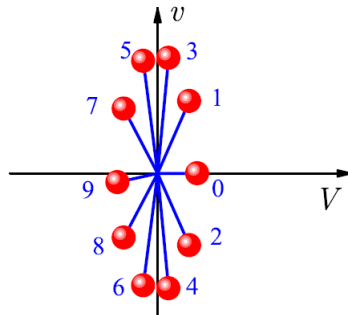
این سیستم دینامیکی که به بیلپارد گالپرین معروف است شامل دو توپ با جرم‌های متفاوت در یک بُعد است که توسط دیوار محکمی محدود شده است (شکل ۱۰ را ببینید). توپ سنگین‌تر با سرعت اولیه V از دور به سمت توپ سبک‌تر حرکت می‌کند درحالی‌که توپ سبک‌تر بین دیوار و توپ سنگین در حالت ایستاده قرار دارد و برخوردهای توپ به توپ و توپ به دیوار کاملاً کشسان است.

جرم و مکان توپ سنگین را به ترتیب با M و X و جرم و مکان توپ سبک‌تر را به ترتیب با m و x نشان می‌دهیم و سیستم مختصاتی به این صورت است که دیوار در مبدأ مختصات است و مکان توپ‌ها در هر لحظه در رابطه $X \leq x \leq 0$ صدق می‌کند. به‌نوعی مانند یک حامل نیرو توپ سبک بین توپ سنگین و دیوار رفت‌وآمد می‌کند و به‌طور مؤثر واسطه تعامل دافع‌های را ایجاد می‌کند که در نهایت حرکت توپ سنگین را معکوس می‌کند و برخوردها ادامه پیدا می‌کند تا اینکه یکی از حالت‌های زیر رخ دهد.

(۱) اگر آخرین برخورد توپ به توپ باشد، آنگاه تعداد برخوردها فرد است؛

(۲) اگر آخرین برخورد توپ به دیوار باشد، آنگاه تعداد برخوردها زوج است.

اگر مختصات مکان توپ سبک و سنگین را به ترتیب روی محور افقی و عمودی در دستگاه دکارتی رسم کنیم و تغییر مختصات مناسبی را اعمال کنیم به‌میز بیلپاردی به‌شکل کُنج خواهیم رسید که رابطه برابری زاویه برخورد و بازتاب روی هر ضلع آن برقرار است.



شکل ۱۱. مختصات داده شده برای حالت $b = 3$ و $N = 1$ و مثالی برای $\Pi = 9$ است [۳].

۱.۴ مختصات بیلیارد و تعداد برخوردها

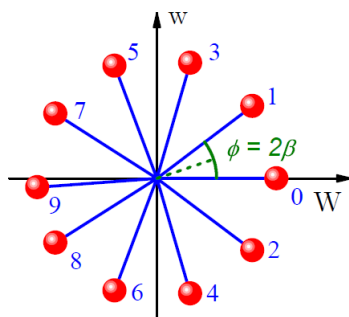
برخورد توپ سنگین با توپ سبک در حالت ایستاده و تعداد برخورد Π برای نسبت جرم‌های مختلف توپ سنگین به سبک شمارش می‌شود. گالپرین نشان داد که تعداد برخوردها با عدد π ارتباط نزدیکی دارد و اولین ارقام این عدد گنگ را به دست می‌دهد. مثلاً برای جرم‌های برابر $M = m$ تعداد برخوردها برابر ۳ است که مربوط به اولین رقم عدد π است. برای جرم‌های $M = 100m$ تعداد برخوردها برابر ۳۱ است و دو رقم اول عدد π را به دست می‌دهد و به همین صورت برای $M = 10000m$ تعداد برخوردها برابر ۳۱۴ است.

اگر سرعت توپ‌ها را روی دو محور مختصات در نظر بگیریم، قوانین پایستگی از برخوردهای کشسان توپ به توپ و توپ به دیوار نتیجه می‌شوند و در دستگاه مختصات سرعت‌ها، شکل هندسی ساده‌ای را به وجود می‌آورند. توجه کنید که انرژی جنبشی کل سیستم ثابت و به صورت زیر است

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV^2$$

که در دستگاه مختصات سرعت، یعنی (V, v) ، یک بیضی است. برای مثال، نمودار سرعت برای حالت $b = 3$ و $N = 1$ را در شکل ۱۱ ببینید که در آن آخرین برخورد به صورت توپ به توپ است.

برخلاف گالپرین [۱۰]، مختصات بیلیارد را با ریشه دوم کلی متناسب می‌کنیم که این کار با کمک تبدیل توسط زاویه $\tan \beta = \sqrt{m/M}$ انجام می‌شود. در این صورت تغییر مختصات



شکل ۰۱۲. بردارهای سرعت پس از تغییر مختصات [۳]

برای مکان به صورت زیر است

$$Y = \sqrt{\frac{M}{M+m}} X = (\cos \beta) X, \quad y = \sqrt{\frac{m}{M+m}} x = (\sin \beta) x.$$

باتوجه به اینکه سرعت برابر مشتق مکان نسبت به زمان است، فرمول‌های سرعت چنین می‌شود

$$\begin{aligned} W &= \frac{dY}{dt} = \cos \beta \frac{dX}{dt} = (\cos \beta) V \\ w &= \frac{dy}{dt} = \sin \beta \frac{dx}{dt} = (\sin \beta) v. \end{aligned} \tag{۱.۴}$$

بنابراین، باتوجه به پایستگی انرژی جنبشی داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2 &= \frac{1}{2} M \frac{W^2}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{2} m \frac{w^2}{\sin^2 \beta} \\ &= \frac{1}{2} M \frac{W^2}{\frac{M}{M+m}} + \frac{1}{2} m \frac{w^2}{\frac{m}{M+m}} = T \end{aligned}$$

که در آن T مقداری ثابت است و در نتیجه داریم

$$\frac{M+m}{2} (W^2 + w^2) = T$$

که یک دایره به شعاع $W_0 = (\cos \beta) V$ است.

اگر سرعت‌های توپ‌های بلیارد را به صورت زوج مرتب $\vec{W} = (W, w)$ در نظر بگیریم، آنگاه با توجه به قانون پایستگی انرژی جنبشی اندازه $|\vec{W}|$ در برخوردها همواره ثابت می‌ماند و در هر دو

بیلیارد، دینامیک دو گوی روی یک خط / آقانی میدی، خورشیدی، علیخانی

نوع برخورد فقط زاویه ϕ بین \vec{W} و محور افقی تغییر می‌کند. در شکل ۱۲ تغییر مختصات سرعت برای حالت $b = 3$ و $N = 1$ نشان داده شده است.

چون برخوردهای توپ به توپ کشسان است، بنابراین تکانه^۱ در برخورد توپ به توپ ثابت

است، یعنی $mv + MV = p$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} m\left(\frac{w}{\sin \beta}\right) + M\left(\frac{W}{\cos \beta}\right) &= m\frac{\sin \beta}{\sin \beta} \frac{w}{\sin \beta} + M\frac{\cos \beta}{\cos \beta} \frac{w}{\cos \beta} \\ &= m\frac{w \sin \beta}{\frac{m}{M+m}} + M\frac{W \cos \beta}{\frac{M}{M+m}} = p. \end{aligned}$$

پس

$$(M + m)(W \cos \beta + w \sin \beta) = p$$

که در آن تکانه p مقداری ثابت است. با فرض $u = |V - v|$ ، بنابر (۱.۴) داریم

$$u^2 = \left| \frac{W}{\cos \beta} - \frac{w}{\sin \beta} \right|^2 = \frac{W^2 + w^2 - (W \cos \beta + w \sin \beta)^2}{\sin^2 \beta \cos^2 \beta}.$$

به این ترتیب، u سرعت نسبی پایسته است. اینک با دو کمیت ثابت p و u یک سیستم مختصاتی عمود برهم را با دو بردار زیر می‌سازیم

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}, \quad \hat{u} = \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}.$$

سیستم مختصاتی تعریف شده با \hat{p} و \hat{u} در واقع مختصات (W, w) را به اندازه زاویه β دوران می‌دهد. در برخورد توپ به توپ پایستگی تکانه موجب می‌شود که تصویر $\vec{W} \cdot \hat{p}$ از بردار سرعت بیلیارد روی محور تکانه ثابت بماند و علامت تصویر $\vec{W} \cdot \hat{u}$ روی محور سرعت نسبی تغییر کند. به عبارت دیگر هر برخورد توپ به توپ روی \vec{W} مانند یک تقارن محوری نسبت به خطی که با محور W ، زاویه β می‌سازد، عمل کند. برای یافتن این تقارن ابتدا دوران به اندازه $-\beta$ سپس تقارن نسبت به محور اول و در آخر دوران به اندازه β را انجام می‌دهیم. این تبدیل خطی در دستگاه متعامد جدید \hat{p} و \hat{u} روی بردار $\vec{W} = (W, w)$ را با ماتریس S_{BB} به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

۱. اگر هیچ نیروی خارجی بر سیستم اثر نکند یا برابند نیروهای خارجی وارد بر سیستم صفر باشد، آنگاه تکانه خطی سیستم با گذشت زمان ثابت می‌ماند که آن را قانون پایستگی تکانه خطی می‌نامند.

در برخورد توپ به دیوار از ماتریس

$$S_{BW} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

استفاده می‌شود که یک تقارن محوری نسبت به محور W را پدید می‌آورد. به‌طور معادل ماتریس S_{BB} زاویه ϕ را به $2\beta - \phi$ و ماتریس S_{BW} زاویه ϕ را به $-\phi$ می‌برد که در آن زاویه بین بردار \vec{W} و محور W است.

به‌طور کلی اگر n عددی فرد باشد برخورد توپ به توپ است و $\phi_n = (n + 1)\beta$ ، و اگر n عددی زوج باشد برخورد توپ به دیوار است و $\phi_n = -n\beta$ (در اینجا ϕ_n زاویه بین بردار n ام و محور W است و در واقع زاویه ϕ_n سرعت‌ها را بعد از n بار برخورد به دست می‌دهد).

چند نمونه از تغییرات بردار سرعت \vec{W} را در نمودار سرعت شکل ۱۲ بیان می‌کنیم.

(۱) وقتی $n = 0$ قبل از هر برخورد اتفاق می‌افتد، جسم سبک‌تر ایستا است و $\vec{W}_0 = (W_0, 0)$ نشانگر بردار افقی با زاویه $0 = \phi_0$ است؛

(۲) اگر $n = 1$ ، اولین برخورد توپ به توپ اتفاق می‌افتد و بازتاب بردار \vec{W}_1 نسبت به خط $\phi = \beta$ رخ می‌دهد که نتیجه آن $\vec{W}_1 = S_{BB}\vec{W}_0$ با زاویه $\phi_1 = 2\beta$ است؛

(۳) وقتی $n = 2$ ، اولین برخورد توپ به دیوار اتفاق می‌افتد و بازتاب بردار \vec{W}_2 به‌طور عمودی رخ می‌دهد که نتیجه آن $\vec{W}_2 = S_{BW}\vec{W}_1$ با زاویه $\phi_2 = -2\beta$ است؛

(۴) وقتی $n = 3$ ، دومین برخورد توپ به توپ اتفاق می‌افتد و بازتاب بردار \vec{W}_3 دوباره نسبت به خط $\phi = \beta$ رخ می‌دهد که نتیجه آن $\vec{W}_3 = S_{BB}\vec{W}_2$ با زاویه $\phi_3 = 4\beta$ است؛

(۵) وقتی $n = 4$ ، دومین برخورد توپ به دیوار اتفاق می‌افتد و بازتاب بردار \vec{W}_4 دوباره به‌طور عمودی رخ می‌دهد که نتیجه آن $\vec{W}_4 = S_{BW}\vec{W}_3$ با زاویه $\phi_4 = -4\beta$ است.

در طی هر برخورد توپ به توپ از سرعت V توپ سنگین کم می‌شود و در نهایت توپ سنگین متوقف و جهت حرکتش معکوس می‌شود، زمانی که زاویه ϕ از $\pi/2$ بیشتر شود سرعت توپ سنگین منفی می‌شود و به‌عبارت‌دیگر توپ از دیوار دور می‌شود و با هر برخورد دیگر توپ کوچک اندازه سرعت توپ سنگین افزایش می‌یابد و برخوردها ادامه می‌یابد تا جایی که $\pi \leq \phi_{II} < \pi + \beta$ (که در آن II تعداد کل برخوردها است) و توپ سبک بایستد و یا با سرعتی کمتر از توپ سنگین دیوار دور شود. پس از آن، تکرارها پایان می‌یابد، ادامه بیشتر منجر به کاهش سرعت جرم سنگین می‌شود که از نظر فیزیکی غیرممکن است.

۲.۴ رابطه تعداد برخوردها با عدد π

با استفاده از مسیر حرکت توپ‌ها در فضای پیکربندی^۱ می‌توان یک تفسیر هندسی ساده ارائه داد که ارتباط بین تعداد برخوردها با زاویه کُنج را نشان می‌دهد [۱۰، ۲۲].

در ابتدا مختصات توپ‌ها به ناحیه $|x| \leq |X|$ محدود می‌شود و مرز $x = 0$ متناظر با برخورد توپ سبک با دیوار است و $x = X$ برخورد توپ به توپ را نشان می‌دهد. زاویه کُنج برای این فضای پیکربندی (X, x) برابر 45° است. زمانی که مسیر با خط $x = 0$ برخورد می‌کند (این برخورد متناظر با برخورد توپ به دیوار است) بازتاب آن از قانون اپتیک پیروی می‌کند؛ زیرا مؤلفه مماسی سرعت که متناظر با V است تغییر نمی‌کند. درحالی‌که جهت مؤلفه قائم، یعنی بردار v ، برعکس می‌شود. اما بازتاب از خط $x = X$ از قانون اپتیک پیروی نمی‌کند و زاویه برخورد با بازتاب متفاوت است. این کار را با تبدیل به مختصات Y و y می‌توان اصلاح کرد و در این حالت زاویه کُنج برابر β می‌شود و برای خط $y = Y \tan \beta$ قانون بازتاب احیا می‌شود بدون اینکه قانون بازتاب از $y = 0$ نقض شود (شکل ۱۵ را ببینید). علت این است که بردار واحد \hat{p} جهت مماس به خط $y = Y \tan \beta$ است و مؤلفه متناظر بردار سرعت بیلیارد $\vec{w} \cdot \hat{p}$ با اندازه تکانه کلی متناسب است و چون تکانه در طول برخوردهای توپ به توپ ثابت است داریم

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \hat{p} &= (W, w) \cdot (\cos \beta, \sin \beta) = W \cos^2 \beta + v \sin^2 \beta \\ &= W \cos \beta + w \sin \beta = \frac{p}{m + M}\end{aligned}$$

و در نتیجه مؤلفه مماسی سرعت در برخورد و در بازتاب با هم برابرند.

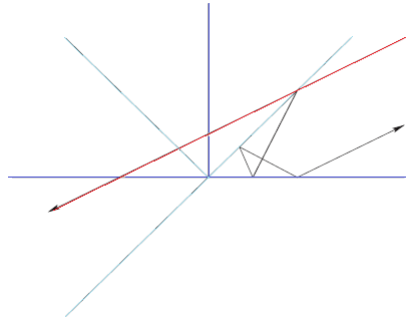
به‌طور مشابه، جهت قائم (یعنی جهت عمود بر خط $y = Y \tan \beta$) با بردار واحد \hat{u} هم‌راستا است و جهت مؤلفه قائم بردار سرعت متناسب با $\vec{w} \cdot \hat{u}$ است که در طی برخوردها معکوس می‌شود. بنابراین قانون بازتاب در خط $y = Y \tan \beta$ برقرار است

$$\vec{w} \cdot \hat{u} = \cos \beta \sin \beta (v - V) = \cos \beta \sin \beta \left(\frac{w}{\sin \beta} - \frac{W}{\cos \beta} \right) = \pm cu$$

که در آن u سرعت نسبی و $c = \cos \beta \sin \beta$ مقداری ثابت است.

به‌این ترتیب مسئله اصلی دو گوی به مسئله حرکت یک توپ تنها در بیلیارد کُنج‌وار با زاویه β که دارای قانون بازتاب از ضلع‌های آن است تبدیل می‌شود.

۱. یک زوج مرتب $(X(t), x(t))$ که موقعیت مکانی توپ‌ها را در لحظه t نشان می‌دهد یک نقطه پیکربندی و مجموعه تمام این نقاط را فضای پیکربندی می‌نامیم.



شکل ۱۳. گسترده مسیر [۲۲]

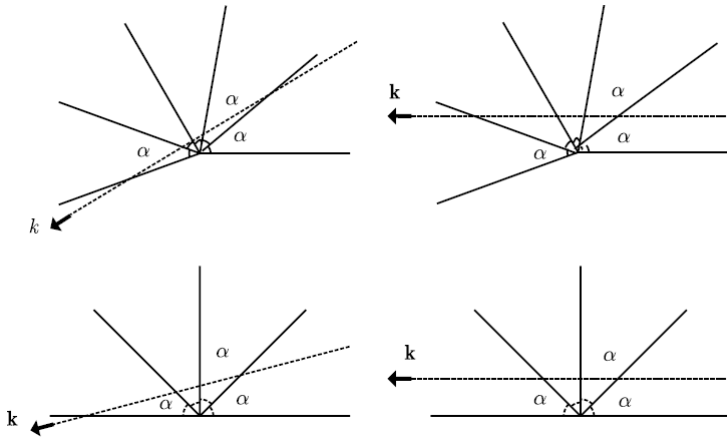
حال که می‌توان حرکت توپ سبک بین توپ سنگین و دیوار را با میز بیلیارد گنج‌وار همانندسازی کرد، با گسترده به جای اینکه بازتاب مسیر بیلیاردی را بعد از برخورد به دیواره میز رسم کنیم میز را نسبت به دیواره قرینه می‌کنیم، بنابراین باید مسیر روی خط راست را بررسی کرد (شکل ۱۳ را ببینید).

قضیه ۱.۴ (تعداد بازتاب‌ها در یک میز بیلیارد گنج‌وار با زاویه α ، $[1^\circ]$). (۱) ماکسیمم تعداد داد بازتاب‌های یک نقطه بیلیاردی درون یک میز بیلیارد گنج‌وار با زاویه α برای همه مسیرهای بیلیاردی متناهی است:

(۲) اگر عددی صحیح باشد، این تعداد برابر با $\frac{\pi}{\alpha}$ است و اگر $\frac{\pi}{\alpha}$ عدد ناصحیح باشد، آنگاه این تعداد برابر $1 + \lfloor \frac{\pi}{\alpha} \rfloor$ است (که در آن $\lfloor \cdot \rfloor$ نماد جزء صحیح است)؛

(۳) اگر بخش اولیه از مسیر بیلیارد موازی با یکی از ضلع‌های میز بیلیارد گنج‌وار باشد، آنگاه تعداد کل بازتاب‌ها برای این مسیر خاص یکی کمتر از ماکسیمم است (یعنی اگر $\frac{\pi}{\alpha} \in \mathbb{Z}$ آنگاه برابر $1 - \frac{\pi}{\alpha}$ و اگر $\frac{\pi}{\alpha} \notin \mathbb{Z}$ آنگاه برابر $\lfloor \frac{\pi}{\alpha} \rfloor$ است).

اثبات. با استفاده از عمل گسترده مسیر γ در میز بیلیارد گنج‌وار به خط راست k ، مطابق شکل ۱۴، تبدیل می‌شود. تعداد برخوردها با ضلع‌های تقارن‌یافته میز بیلیارد گنج‌وار برابر تعداد بازتاب‌های مسیر γ از آن است، بنابراین تعداد بازتاب‌ها متناهی است. اگر n برابر تعداد ماکسیمم بازتاب‌ها باشد، آنگاه $\pi = n\alpha$ یا $n\alpha < \pi < (n+1)\alpha$. در حالت اول، $n = \frac{\pi}{\alpha}$ و در حالت دوم $n = \lfloor \frac{\pi}{\alpha} \rfloor + 1$. اگر خط k موازی با یکی از اضلاع میز بیلیارد گنج‌وار باشد، آنگاه برخورد با ضلع پایانی از دست می‌رود و در نتیجه از تعداد ماکسیمم بازتاب یکی کمتر می‌شود. \square



شکل ۱۴. گسترده‌ترین مسیر بیلیارد [۱۰]

یادآوری می‌کنیم که $\tan \beta = \sqrt{m/M}$. حال اگر $M/m = b^{2N}$ را با پارامتر b (عدد صحیح یا ناصحیح) به‌عنوان عدد پایه و عدد نامنفی N ، که مربوط به جزء اعشاری می‌شود، در نظر بگیریم آنگاه

$$\Pi = \lfloor \frac{\pi}{\arctan(b^{-N})} \rfloor.$$

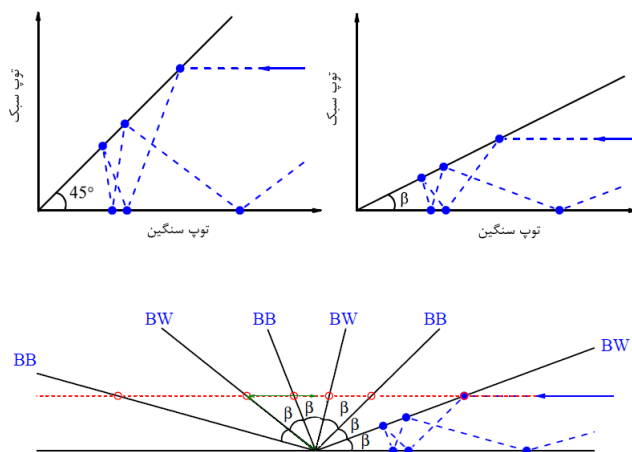
اگر b و N را بزرگ در نظر بگیریم، در آن صورت $\arctan b^{-N} \approx b^{-N}$ و در نتیجه داریم

$$\Pi(b, N) \approx \lfloor \pi b^N \rfloor.$$

این معادله عبارتی را برای عدد π در سیستم‌های دارای پایه صحیح یا ناصحیح b نشان می‌دهد و برای $b = ۱۰$ ارقام π به‌طور معمول به دست می‌آید.

در شکل ۱۵ مثالی را می‌بینیم که توضیح هندسی ساده‌ای را برای تعداد برخوردها به‌عنوان تعداد دفعاتی که زاویه β می‌تواند زاویهٔ ماکسیمم ۱۸° درجه را بپوشاند به دست می‌دهد.

سپاسگزاری بر خود لازم می‌دانیم که از داوران محترم سپاسگزاری کنیم که با دقت کم‌نظیر مقاله را در سه بار داوری کردند و هربار باعث ارتقای بیشتر آن شدند.



شکل ۱۵. ارتباط تعداد برخوردها با عدد π [۳]

مراجع

- [۱] آقائی میبدی، فاطمه، ویژگی‌هایی از دینامیک بیلیارد، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه یزد، ۱۳۹۹.
- [2] Avila, A., De Simoi, J., Kaloshin, V., An integrable deformation of an ellipse of small eccentricity is an ellipse, *Ann. of Math. (2)*, **184** (2016), 527-558.
- [3] Aretxabaleta, X. M., Gonchenko, M., Harshman, N. L., Jackson, S. G., Olshanii, M., As-trakharchik, G. E., The dynamics of digits: Calculating pi with Galperin's billiards, *Mathematics*, **8** (4) (2020), 509.
- [4] Bialy, M., Convex billiards and a theorem by Hopf, *Math. Z.*, **214** (2) (1993), 147-154.
- [5] Birkhoff, G. D., *Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1927.
- [6] Bunimovich, L., On the ergodic properties of certain billiards, *Funct. Anal. Appl.*, **8** (1974), 254-255
- [7] Cipra, B., Hanson, R., Kolan, E., Periodic trajectories in right-triangle billiards, *Phys. Rev.*, **E52** (1995), 2066-2071.
- [8] Eskin, A., Mirzakhani, M., Mohammadi, A., Isolation, equidistribution, and orbit closures for the $SL(2, \mathbb{R})$ action on Moduli space, *Ann. of Math. (2)*, **182** (2015), 673-721.
- [9] Fomenko, A. T., Mishchenko, A. S., *A Short Course in Differential Geometry and Topology*, Cambridge Scientific Publishers, New York, 2009.
- [10] Galperin, G., Playing pool with π (the number π from a billiard point of view), *Regul. Chaotic Dyn.*, **8** (2003), no. 4, 375-394.
- [11] Gutkin, E., Billiard dynamics: An updated survey with the emphasis on open problems, *Chaos*, **22** (2012), 026116-1-026116-13.
- [12] Gutkin, E., Billiards in polygons, *Physica*, **D19** (1986), 311-333.
- [13] Hezari, H., Zelditch, S., One can hear the shape of ellipses of small eccentricity, *Ann. of Math. (2)*, **196** (2022), 1083-1134.
- [14] Himmelstrand, M., Wilén, V., A survey of dynamical billiards, Technical report, Department of Mathematics, Royal Institute of Technology (KTH), 2013.

- [15] Kaloshin, V., Sorrentino, A., On the local Birkhoff conjecture for convex billiards, *Ann. of Math.* (2), **188** (2018), 315-380.
- [16] Masur, H., The growth rate of trajectories of a quadratic differential, *Ergodic Theory Dynam. System*, **10** (1990), 151-176.
- [17] Masur, H., Lower bounds for the number of saddle connections and closed trajectories of a quadratic differential, in *Holomorphic Functions and Moduli I*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol 10, Springer, New York, 1988, 215-228.
- [18] Park, S. W., An introduction to dynamical billiards, available at <https://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Park.pdf>.
- [19] Pecker, D., Poncelet's theorem and Billiard knots, *Geom. Dedicata*, **161** (1) (2012), 323-333.
- [20] Poritsky, H., The billiard ball problem on a table with a convex boundary- An illustrative dynamical problem, *Ann. of Math.* (2), **51** (1955), 446-470.
- [21] Tabachnikov, S., *Billiards*, Soc. Math. de France, Paris, 1995.
- [22] Tabachnikov, S., *Geometry and Billiards*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [23] Wright, A., From rational billiards to dynamics on moduli spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1) (2015), 41-56.

فاطمه آقائی میبدی: دانشگاه یزد، دانشکده علوم ریاضی

رایانامه: aghaeifatemeh@stu.yazd.ac.ir

حسین خورشیدی: دانشگاه یزد، دانشکده علوم ریاضی

رایانامه: khoshidi@yazd.ac.ir

سعید علیخانی: دانشگاه یزد، دانشکده علوم ریاضی

رایانامه: alikhani@yazd.ac.ir

Billiards, Linear Dynamics with Two Spheres, and the Number π

F. Aghaei¹, S. Alikhani²✉, H. Khorshidi³

^{1,2,3} Department of Mathematical Sciences, Yazd University, Iran

Abstract. A dynamic system consisting of two balls of masses m and M located on a line and a perfectly elastic barrier (wall) can be examined by means of a wedge billiard table. This issue, called Galperin's billiards, relates the number of collisions to pi digits. In this article, we will study this interesting connection and its preliminaries, and we will express some famous conjectures in the setting of billiards, mentioning a few prerequisites.

Keywords: dynamical billiard, dynamical system, pi number

Article history: Received 18 March 2023; Accepted 11 January 2024

Article type: survey

1. aghaeifatemeh@stu.yazd.ac.ir

2. alikhani@yazd.ac.ir

3. khorshidi@yazd.ac.ir