فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۳، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۳)، صص ۱۹۵ تا ۲۱۲

تاریخچهٔ ماتریس و دترمینان تا پیش‌از قرن بیستم

علی‌محمد نظری

چکیده. در این مقاله تاریخچهٔ ماتریس و دترمینان را از آغاز تا ابتدای قرن بیستم بررسی می‌کنیم. نظریهٔ ماتریس‌ها در قرن بیستم آن‌چنان شاخه گستراند که نوشتن تاریخچهٔ آن در این نوشته مختصر نمی‌گنجد. اینکه روش حذفی گاوس سابقه‌ای بیش‌از ۲۰۰۰ سال دارد از نکاتی است که به آن می‌پردازیم. همچنین به این موضوع خواهیم پرداخت که چه کسانی مفهوم ماتریس را قبل‌از قرن بیستم ابداع کردند و توسعه دادند و چه کسی اولین‌بار دترمینان را به کار برد. امروزه توجه به ماتریس‌ها رو به گسترش است اما دترمینان‌ها به‌دلیل حجم بزرگ محاسباتی که دارند خیلی مورد توجه نیستند. حتی اختراع کامپیوترهای رقمی هم باعث نشد که توجه‌ها دوباره به روش کرامر جلب شود، حال آنکه در دوره‌ای دترمینان خیلی بیشتر از ماتریس مورد توجه بود.

۱ مقدمه

تاریخ ریاضیات ایران باستان (ایران قبل‌از اسلام) و یونان باستان بسیار عجیب است. بیشترِ مطالب ریاضی در دوران یونان باستان به‌گونه‌ای است که نویسنده و یا کاشف آن تا حد زیادی معلوم است و نام تعداد زیادی از ریاضی‌دانان ثبت و ضبط شده است. علت آن شاید کتاب ارزشمند خلاصهٔ \اودموسی است که البته در قرن پنجم میلادی توسط پروکلوس[1] به یاد اولین تاریخ‌نگار ریاضی قبل‌از میلاد مسیح اودموس رودسی[2] نوشته شده است. اما هر کجای ریاضیات ایران باستان را مرور می‌کنیم دریغ از یک اسم! گویا برای ایرانیان آن دوره نام دانشمندان اهمیتی نداشته است زیراکه در

عبارات و کلمات کلیدی: ماتریس، دترمینان، دستگاه معادله‌های خطی
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۱/۲۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۷/۳

1. Proclus Diadochus 2. Eudemus of Rhodes

doi: 10.30504/mct.2023.1373.1963

بین این الواح خشتی بسیار زیادی که از زیر خاک بیرون آورده شده است و تعدادی از آن‌ها دارای مطالب برجستهٔ علمی هستند به اسم هیچ شخصی اشاره نشده است.

بابلیان که ساکنین منطقهٔ بین‌النهرین، منطقهٔ بین رودخانه‌های دجله و فرات، بودند در زمان تسلط هخامنشیان جزئی از قلمرو آنان شدند و وقتی از ریاضیات ایران باستان نام می‌بریم بیشتر منظورمان نتایج به دست آمده از همین منطقه است. بابلیان و بعدتر ایرانیان باستان به ریاضیات کاربردی اهمیت می‌دادند و برای آن‌ها روشْ دارای اهمیت بود و در نوشته‌های آنان «چنین کن، چنان کن» زیاد به چشم می‌خورد. اما یونانیان ریاضیات برهانی را پدید آوردند و در یک دورهٔ ۴۰۰ ساله، از سال ۶۰۰ قبل‌از میلاد و ظهور تالس میلتوسی[۱] تا حدود سال ۲۰۰ قبل‌از میلاد و کشته‌شدن ارشمیدس، بسیار درخشیدند.

در مورد دستگاه معادله‌های خطی نیز باید گفت که شروع‌کنندهٔ آن یونانیان نبوده‌اند و نسبت به شاهکارهای آن‌ها در هندسه این موضوع در آثار آنان زیاد بررسی نشده است. تنها از توماریداس پاروسی[۲] می‌توان نام برد که حدود ۳۵۰ تا ۴۰۰ سال قبل‌از میلاد می‌زیسته است، و از آثار او قاعده‌ای برای حل دستگاه‌های معادله های خطی نتیجه می‌شود [۹].

البته این از عجایب ریاضیات یونانیان است که دستگاه معادله‌های خطی که نقطهٔ شروع ماتریس‌هاست آن‌چنان که بایدوشاید مورد توجه قرار نگرفته است؛ عجیب است که حتی در آثار ارشمیدس، که هنوز جزء سه ریاضی‌دان برجستهٔ تاریخ ریاضیات است، مطلبی درخصوص حلِ دستگاه معادله‌های خطی یافت نمی‌شود. حدود ۸۰۰ سال بعد، دیوفانتوس تحقیقات جبری ارزنده‌ای انجام داد و از کتاب آریثمتیکا معلوم است که او به حل دستگاه‌های معادله‌های خطی با ضرایب صحیح و جواب‌های صحیح پرداخته است [۹]. درواقع، او دستگاهی از معادله‌های سیاله را بررسی و حل کرده است.

در ریاضیات ایرانیان دورهٔ اسلامی نیز، که سنگ بنای آن ریاضیات یونان باستان بوده است، تحقیقات جدی دربارهٔ دستگاه‌های معادله‌های خطی به چشم نمی‌خورد، و یا حداکثر حل مسائل کاربردی است که حل همان دستگاه‌های معادله‌های سیاله است. حتی در کتاب چهار جلدی و ارزشمندِ تاریخ‌دان معاصر مصری رشدی راشد که در بیش از دو هزار صفحه به زندگی و آثار ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی پرداخته است، مطلبی در مورد حل دستگاه‌های معادله‌های خطی وجود ندارد [۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲]. او در جلد اول به کارهای ابوموسی خوارزمی، ثابت بن قره حرانی و پسرش، و ماهانی،

1. Thales of Miletus 2. Thymaridas of Paros

ریاضی‌دان کرمانی، پرداخته است. در جلد دوم، سوم، و چهارم آثار ابن‌هیثم ـــ ریاضی‌دان، منجم، و فیزیک‌دان اهل بصره ـــ را مورد توجه قرار داده و به زبان امروزی نوشته است که در جای دیگری باید کارهایش مورد بررسی قرار گیرد و حتی به فارسی ترجمه شوند. در تمام مباحث این کتاب‌ها همانند ریاضیات یونان باستانْ هندسه جایگاه اول را دارد و جبر به معنای حل معادله‌های درجهٔ اول، دوم، و سوم در مرحلهٔ بعد قرار دارد و تقریباً چیزی به‌نام حل دستگاه معادله‌های خطی دیده نمی‌شود.

اگر ما ایرانیان را ممزوجی از بابلیان عصر حمورابی در نظر بگیریم باید بگوییم بابلیان اولین ابداع‌کنندگان جبرِ خطی و ماتریس‌ها بودند. اولین راه‌حل‌های معادله‌های خطی در دورهٔ «بابل قدیم» (۲۰۰۰ تا ۱۶۰۰ سال قبل‌از میلاد) در بین النهرین به دست آمده است که حل دستِکم یک دستگاه معادلهٔ خطی دومعادله و دومجهول در نوشته‌های بابلیان وجود دارد [۹]. تاریخ قدیمی‌ترین متن مکتوب بشر به حدود ۳۳۰۰ سال قبل‌از میلاد مسیح می‌رسد.

جبر خطی یکی از مباحث بسیار مهم در عالم ریاضیات است که امروزه کاربردش در سایر علوم در حال گسترش است و معلوم است که ماتریس‌ها قلب تپندهٔ جبرِ خطی‌اند و از ابتدای قرن هفدهم دترمینان‌ها هم مطرح شدند و مورد استفاده قرار گرفتند. آنچه که امروزه به‌نام ماتریس می‌شناسیم تقریباً در اواخر قرن نوزدهم مورد استفاده قرار گرفت؛ درواقع دترمینان قبل‌از ماتریس تعریف و استفاده شد.

در این مقاله بنا داریم تاریخچهٔ دترمینان و ماتریس را بررسی کنیم و ریاضی‌دانانی را نام ببریم که به توسعه این شاخه از ریاضیات کمک نمودند. در پایان نیز خلاصه‌ای از زندگی اولین ریاضی‌دان ایرانی را می‌آوریم که اولین مقالهٔ علمی را دربارهٔ دترمینان‌ها نوشته است.

۲ الواح گلی بابلیان و صد سال بعد

حل معادله‌ها سابقه‌ای طولانی دارد و ابداع ماتریس و دترمینان‌ها به قرن سوم قبل‌از میلاد بر می‌گردد، اگرچه آثاری را می‌توان به قرن چهارم قبل‌از میلاد نسبت داد که نمونه‌اش آثار توماریداس است. بااین‌حال، می‌توان گفت که حدوداً در پایان قرن هفدهم بود که مفاهیم ماتریس و دترمینان دوباره ظاهر شدند و توسعه این دو به‌طور جدی آغاز شد.

تعجب‌آور نیست که ردّ ماتریس و دترمینان‌ها را باید در مطالعهٔ دستگاه‌های معادله‌های خطی یافت. تنها در شهر نیپور عراق بالغ بر نیم‌میلیون لوح گلی از زیر خاک بیرون آورده شد و از این میان

تنها ۳۰۰ لوح مربوط به علم ریاضی بود [۲]. در سایر مناطق بین‌النهرین نیز در طول قرن نوزدهم الواح دیگری به دست آمد که تعدادی از آن ها زینت‌بخش موزه‌ها و دانشگاه‌ها شدند. رمز این لوح‌ها به‌دلیل عدم آشنایی با زبان آن‌ها سالیان درازی ناشناخته ماند تا اینکه رولینسون[۱]، تاریخ‌دان و استاد دانشگاه آکسفورد، در سال ۱۸۴۹ با توجه به کتیبهٔ بیستون که متن کامل آن در کتاب هرودوت آمده بود توانست هر سه خط موجود در لوح بیستون را کشفِ رمز کند و از آن پس لوح‌های یافت‌شده در شهر نیپور و سایر مناطق و حتی لوح‌های سنگی همدان و تختِ جمشید به‌مرور خوانده شدند. بعد از این رخداد مهم، اطلاعات ما از تاریخ ریاضیات دقیق‌تر شد، مثلاً معلوم شد بابلیان هزار سال قبل‌از فیثاغورس با قضیهٔ او آشنایی داشتند، اگرچه اثبات آن را نمی‌دانستند. در بررسی این الواح مشخص گردید که ایرانیان مسائلی را مطرح کرده‌اند که حل آن‌ها منجر به حل یک دستگاه دو معادلهٔ خطی می‌شود. برای مثال یک لوح مربوط به حدود ۳۰۰ سال قبل‌از میلاد (دورهٔ حکومت سلوکیان) در [۱۳] با تبدیل واحدهایش به‌صورت امروزی چنین می‌شود:

> دو مزرعه داریم که مساحت آن‌ها ۱۸۰۰ یارد مربع است. در یکی از آن‌ها با نرخ ۲۳۳۲ بوشل[۲] و در دیگری با نرخ ۱۲۲۱ بوشل در هر یارد مربع غلات تولید می‌شود. اگر کل محصول ۱۱۰۰ بوشل باشد، مساحت هر مزرعه چقدر است؟

اگر یک مدل سادهٔ ریاضی برای این مسئله بنویسیم، روشن است که نتیجهٔ آن یک دستگاه خطی با دو معادله و دو مجهول خواهد بود.

چینی‌ها بین سال‌های ۲۰۰ تا ۱۰۰ قبل‌از میلاد، خیلی بیشتر از بابلی‌ها به مفهوم ماتریس‌ها نزدیک شده بودند. درواقع، منصفانه بگوییم، کتاب نه فصل در هنر ریاضی[۳] یک کتاب راهنمای کاربردی ریاضیات متشکل از ۲۴۶ مسئله است که برای ارائهٔ روش‌هایی برای حل مسائل روزمره مهندسی، نقشه‌برداری، تجارت، و مالیات طراحی شده است [۲]. این کتاب که در دوران سلسلهٔ هان نوشته شده است نقش اساسی در توسعهٔ ریاضیات در چین ایفا کرده است و می‌توان گفت از این نظر نقشی شبیه \اصول اقلیدس در ریاضیات یونان باستان داشته است و در آن اولین نمونهٔ شناخته شده از روش‌های ماتریسی آمده است. مسئلهٔ زیر که از این کتاب نقل می‌شود تعمیمی از

---

۲. بوشل (bushel) با حرف اختصاری .bsh یا .bu یکای اندازه‌گیری حجم در دستگاه بریتانیایی و آمریکایی است که جزء اندازه‌گیری مواد خشک محسوب می‌گردد و در این دستگاه‌ها برابر با ۴ پک (peck) یا گالون است. این یکا برای اندازه‌گیری حجم مواد خشکی که مایع نباشند در کشاورزی کاربرد دارد. (نک.: ویکی‌پدیا)

1. George Rawlinson 3. Suanshu, Jiuzhang, *The Nine Chapters on the Mathematical Art*

مسئلهٔ یادشده در بالا است.

> سه نوع ذرت داریم که مجموع سه دسته از اولی و دو دسته از دومی و یک دسته از سومی برابر با ۳۹ پیمانه است. مجموع دو دسته از اولی، سه دسته از دومی، و یک دسته از سومی ۳۴ پیمانه است و مجموع یک دسته از اولی، دو دسته از دومی، و سه دسته از سومی ۲۶ پیمانه است. چند پیمانه ذرت در یک دسته از هر نوع وجود دارد؟

نویسنده در ادامه ضرایب معادله‌ها را در جدولی روی یک «تختهٔ شمارش» می‌نویسد:

۱	۲	۳
۲	۳	۲
۳	۱	۱
۲۶	۳۴	۳۹

در روش‌های متعلق به اواخر قرن بیستم باید معادله‌های خطی را به‌صورت سطرهای یک ماتریس بنویسیم نه ستون‌ها، ولی همچنان‌که در مثال بالا مشاهده می‌کنیم چینی‌ها این کار را به‌صورت ستونی انجام می‌دادند و البته این کار در حل مسئله تفاوتی ایجاد نمی‌کند (نوشتن ستونی اعداد کاملاً طبیعی است زیرا چینی‌ها همهٔ متون را ستونی می‌نوشتند). نکتهٔ قابل‌توجه در راه‌حل این مسئله آن است که به خواننده دستور می‌دهد ستون وسط را در ۳ ضرب کند و از دو برابر ستون سمت راست کم کند و نتیجه را به‌جای ستون وسط قرار دهد، سپس همین کار را با کم‌کردن ستون سمت راست از ۳ برابر ستون سمت چپ و جانشانی نتیجه به‌جای ستون سمت چپ ادامه می‌دهد. درنتیجه، چیزی شبیه به این جدول به دست می‌آید

۰	۰	۳
۴	۵	۲
۸	۱	۱
۳۹	۲۴	۳۹

سپس ستون سمت چپ در ۵ ضرب و از ۴ برابر ستون وسط کم می‌شود. نتیجه چنین می‌شود

۰	۰	۳
۰	۵	۲
۳۶	۱	۱
۹۹	۲۴	۳۹

ضرایب دستگاه به‌شکل مثلثی تبدیل شد و آن‌ها با روش جای‌گذاری پسرو کاملاً آشنا بودند، زیرا در متن همین کتاب آورده‌اند «که از آن می‌توان تعداد پیمانه‌های ذرت نوع سوم را یافت، سپس ذرت نوع دوم، و بعداز آن ذرت نوع اول را با جای‌گذاری پسرو پیدا کرد». امروزه این راه‌حل مانند آن است که به‌جای حل دستگاه خطی $Ax = b$ ترانهادهٔ آن را با روش حذفی گاوس حل کنیم. اما روش حذف گاوسی تا اوایل قرن نوزدهم ناشناخته بود.

کاردانو[1]، پزشک و ریاضی‌دان ایتالیایی، در سال ۱۵۴۵ کتاب فن کبیر[2] را نوشت که اولین رساله به زبان لاتینی مختص جبر بود. او قاعده‌ای برای حل یک دستگاه دو معادلهٔ خطی ارائه می‌دهد و آن را «مادر قواعد» نامید [۱۶]. این قاعده اساساً قاعدهٔ کرامر[3] برای حل یک دستگاه ۲×۲ بود، اگرچه کاردانو آخرین مرحله را انجام نمی‌داد. بنابراین، کاردانو به تعریف دترمینان دست نیافت، اما می‌بینیم که روش او به تعریف دترمینان منتهی می‌شود.

بسیاری از نتایج متداول نظریهٔ ابتدایی ماتریس‌ها برای اولین‌بار مدت‌ها قبل‌از اینکه ماتریس‌ها موضوع بررسی در ریاضیات باشد ظاهر شدند. برای مثال، یوهان دِویت[4]، ریاضی‌دان و دولتمرد هلندی قرن هفدهم میلادی، در کتاب اصول خم‌های خطی[5] که به‌عنوان بخشی از تفسیرهای نسخهٔ لاتین هندسهٔ دکارت در سال ۱۶۶۰ منتشر شد، نشان داد که معادلهٔ خطی درجهٔ اول خطوط مستقیم را نمایش می‌دهد و همان‌طور که در آن زمان معمول بود، او از مختصات منفی استفاده نکرد و فقط پاره‌خط‌ها را در ربع اول ترسیم می‌کرد (خیام نیز در حل معادله‌های درجهٔ سوم ریشه‌های منفی را نادیده می‌گرفت). او به‌دقت ساختار واقعی خطوط را برای ضرایب دلخواه توضیح داد و نشان داد که چگونه تبدیل مختصاتْ شکل متعارف معادله‌ای را برای شکل مخروطی آن به دست می‌دهد [۱۵]. این به معنای قطری‌کردن یک ماتریس متقارن است، اما دِویت هرگز به این موضوع فکر نکرده بود، زیرا نه آن زمان ماتریس‌ها به‌شکل امروزی مطرح بودند و نه ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارها تعریف شده بودند که بخواهد مباحث قطری‌سازی ماتریس‌های متقارن را مطرح کند.

۳ دترمینان

اندیشهٔ «دترمینان» قبل‌از اینکه در اروپا ظاهر شود در دورهٔ ادو در ژاپن ظاهر شده بود. در سال ۱۶۸۳ سِکی[6] کتاب روش حل مسائل شبیه‌سازی شده را نوشت که شامل روش‌های ماتریسی به‌صورت جداولی مشابه با روش‌های یادشدهٔ چینی‌ها بود. سکی بدون به کار بردن لفظی برای «دترمینان»،

1. Girolamo Cardano 2. *Ars Magna* 3. Gabriel Cramer 4. Johan de Witt 5. *Elementa Curvarum Linearum* 6. Seki Takakazu

شکل ۱. سکی، مشهور به نیوتون ژاپن، اولین ریاضی‌دانی بود که از دترمینان استفاده کرد.

دترمینان را تعریف کرد و روش‌های کلی برای محاسبهٔ آن‌ها را با مثال نشان داد. سکی با استفاده از دترمینان‌های خود توانست دترمینان ماتریس‌های تا مرتبهٔ ۵ را بیابد و آن‌ها را برای حل معادله‌ها به کار برد؛ اما نه برای دستگاه‌های معادله های خطی.[1]

اولین کاربرد از دترمینان در اروپا ده سال بعد دیده می‌شود. بسیار بعید است که ریاضی‌دانان اروپایی قرن هفدهم میلادی از آثار این ریاضی‌دان ژاپنی اطلاعی داشته باشند. اینکه دو ریاضی‌دان در دو نقطهٔ این کره خاکی تقریباً هم‌زمان به یک نتیجه رسیده باشند بسیار با سابقه است. در سال ۱۶۹۳ لایب‌نیتس، ریاضی‌دان شهیر آلمانی که چهار سالی از نیوتون کوچک‌تر بود، به هوپیتال، ریاضی‌دان فرانسوی متولد سال ۱۶۶۱ که چهل و سه‌سال بیشتر زندگی نکرد و اولین کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را نوشت که حاصل دروس خصوصی استادش یوهان برنولی بود، نامه‌ای نوشت. او توضیح داد که دستگاه معادله‌های خطی

$$\begin{aligned} 10 + 11x + 12y &= 0 \\ 20 + 21x + 22y &= 0 \\ 30 + 31x + 32y &= 0 \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

جواب دارد؛ چون

$$\begin{aligned} &10 \times 21 \times 32 \ + \ 11 \times 22 \times 30 + 12 \times 20 \times 31 \\ &\quad = \ 10 \times 22 \times 31 + 11 \times 20 \times 32 + 12 \times 21 \times 30. \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

اگر همهٔ اعداد را به یک طرف تساوی منتقل کنیم، به زبان امروزی، این نتیجه حاصل می‌شود که

۱. او در ماه مارس ۱۶۴۲ به دنیا آمد، یعنی همان سالی که نیوتون متولد شد و در دسامبر ۱۷۰۸ از دنیا رفت و قبل‌از برنولی اعداد برنولی را کشف کرد و به معرفی آن‌ها پرداخت و یک معادلهٔ درجهٔ سوم را به شیوه‌ای حل کرد که هورنر، ریاضی‌دان انگلیسی، صد سال بعد همان شیوه را پیدا کرد.

دترمینان ماتریس ضرایب ۰ است. درواقع، اگر همهٔ اعداد رابطهٔ (۲.۳) را به طرف چپ منتقل کنیم، دستور محاسبهٔ دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه خطی (۱.۳) با روش ساروس[1]، ریاضی‌دان فرانسوی قرن نوزدهم، به دست می‌آید، که لایب‌نیتس قبل‌از او به این مطلب اشاره کرده بود. توجه کنیم که در اینجا منظور لایب‌نیتس از ۲۱ درایهٔ a_{21} از ماتریس ضرایب است. او در این مثال ضرایب در (۱.۳) را به‌گونه‌ای انتخاب کرده است که هم در محاسبهٔ عددی (۲.۳) مقدار دترمینان را به دست دهد و هم فرمول مورد نظرش را برآورده سازد. لایب‌نیتس به‌خوبی می‌دانست که علامت‌گذاری ریاضی مناسب کلید پیشرفت است. بنابراین، او نمادهای مختلفی برای نمایش ضرایب دستگاه‌های معادله‌های خطی آزمایش کرد. دست‌نوشته‌های منتشرنشدهٔ او حاوی بیش از ۵۰ روش مختلف برای نوشتن ضرایب دستگاه‌های معادله‌های خطی است که در طی یک دورهٔ ۵۰ساله روی آن‌ها کار کرده است. یادآوری می‌کنیم که لایب‌نیتس استاد نمادهای قابل‌قبول در ریاضیات بود و نمادهای معرفی‌شدهٔ او برای مشتق و انتگرال از شاهکارهای نمادسازی اوست. تنها دو مقاله در سال‌های ۱۷۰۰ و ۱۷۱۰ از او حاوی نتایجی در مورد نمایش ضرایب دستگاه‌های معادله‌های خطی است و در آن‌ها از همان نمادهایی استفاده می‌کند که در نامهٔ او به هوپیتال وجود دارد.

لایب‌نیتس از کلمهٔ «برایند»[2] برای جمع ترکیبی معین از عبارات یک دترمینان استفاده کرد. او نتایج مختلفی را در مورد «برایندها» اثبات کرد، ازجمله آنچه اساساً قاعدهٔ کرامر نامیده می‌شود. او همچنین می‌دانست که یک دترمینان را می‌توان با استفاده از هر ستونی بسط داد، نتیجه‌ای که امروزه بسط لاپلاس نامیده می‌شود. لایب‌نیتس علاوه‌بر مطالعهٔ ضرایب دستگاه معادله‌های خطی که او را به سمت دترمینان‌ها سوق داد، همچنین ضرایب دستگاه معادله‌های صورت‌های درجهٔ دوم را مطالعه کرد که اساساً به نظریهٔ ماتریس منتهی شد.

در سال ۱۷۳۰ مک‌لورن[3]، ریاضی‌دان اسکاتلندی و از شاگردان نیوتون، رسالهٔ جبر خود را نوشت. این رساله که تا دوسال بعداز وفات مک‌لورن، یعنی تا سال ۱۷۴۸ منتشر نشد، شامل اولین نتایج منتشرشده در مورد عامل‌های دترمینان است که قاعدهٔ کرامر را برای دستگاه‌های ۲ × ۲ و ۳ × ۳ اثبات می‌کند و نشان می‌دهد که در حالت ۴ × ۴ چگونه به کار می‌رود [۱۲].

کرامر در سال ۱۷۵۰ قاعده‌ای کلی برای حل دستگاه‌های معادله های خطی $n \times n$ در مقالهٔ «مقدمه‌ای بر تجزیه‌وتحلیل خم‌های جبری» ارائه کرد. او می‌خواست معادلهٔ منحنی‌ای را در صفحه بیابد که از تعدادی نقطهٔ مفروض عبور می‌کند؛ چیزی که ما امروزه به آن درونیابی می‌گوییم. این

1. Pierre Frédéric Sarrus 2. resultant 3. Colin Maclaurin

قاعده در ضمیمهٔ آن مقاله ظاهر می‌شود اما هیچ اثباتی برای آن ارائه نشده است

> مقدار هر مجهول را با تشکیل n کسری که مخرج مشترک آن‌ها به تعداد n شیء جایگشت دارد می‌یابیم.

این نوشتهٔ مهم از کرامر که اندکی مبهم به نظر می‌رسد روشی منسوب به او را در حل دستگاه معادله‌های خطی نشان می‌دهد، و اینکه در جملهٔ قبل به جایگشت n شیء اشاره شده است، منظور تعداد جملات محاسبهٔ یک دترمینان به‌شیوهٔ لاپلاس است که تعداد جملاتش برابر با $n!$ است، یعنی تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز. احتمالاً کرامر توانسته است بسط لاپلاس را حدس بزند. کرامر در ادامه توضیح می‌دهد که دقیقاً چگونه این عبارات را به‌عنوان حاصل‌ضرب ضرایب معین در معادله‌ها محاسبه می‌کند و چگونه علامت را تعیین می‌کند. او همچنین می‌گوید که چگونه می‌توان n عدد کسری را با جایگزین کردن ضرایبی معیّن در این رابطه با ضرایب ثابت پیدا کرد [۱۶].

از این زمان به بعد تحقیق روی عامل‌های دترمینان به‌طور پیوسته دیده می‌شود. در سال ۱۷۶۴ بزو[1] روش‌هایی را برای محاسبهٔ دترمینان‌ها ارائه داد، همان کاری که واندرموند[2] در سال ۱۷۷۱ انجام داد. در سال ۱۷۷۲ لاپلاس ادعا کرد که روش‌های کرامر و بزو غیرعملی است و در مقاله‌ای که در آن مدارهای سیاره‌های درونی (سیاره‌ای که مدار آن در کمربند سیارک‌ها، یعنی عطارد، زهره، زمین، یا مریخ قرار دارد) را مورد مطالعه قرار داد، در مورد حل دستگاه‌های مرتبط با سیاره‌ها بحث کرد. عجیب است که لاپلاس از کلمهٔ «برایند» برای چیزی که اکنون دترمینان می‌نامیم استفاده کرده است. چه جالب! زیرا این همان کلمه‌ای است که لایب‌نیتس به کار برده است، اما احتمالاً لاپلاس از کار او بی‌اطلاع بوده است. لاپلاس بسطی برای یک دترمینان ارائه داد که در حال حاضر به او منسوب است.

لاگرانژ، ریاضی‌دان بزرگی که در ایتالیا متولد شد و در پاریس از دنیا رفت، در مقاله‌ای در سال ۱۷۷۳ اتحادهایی را در حالت ۳×۳ برای تابع دترمینان به دست آورد. اگرچه این مطالب با نگاهی به گذشته نوشته شده بود، لاگرانژ هیچ ارتباطی بین کارش با کارهای لاپلاس و واندرموند پیدا نکرد. بااین‌حال، مقالهٔ او در سال ۱۷۷۳ در مورد مکانیک حاوی چیزی است که ما اکنون آن را تفسیر حجمی دترمینان می‌نامیم و برای اولین‌بار توسط لاگرانژ مطرح شده است. لاگرانژ نشان داد که حجم چهار وجهی با رأس‌های $O(۰,۰,۰)$، $M(x,y,z)$، $M'(x',y',z')$، و $M''(x'',y'',z'')$

1. Étienne Bézout 2. Alexandre-Theophile Vandermonde

برابر است با

$$\frac{1}{6}[z(x'y''-y'x'')+z'(yx''-xy'')+z''(xy'-yx')].$$

با کمی دقت معلوم می‌شود که این مقدار یک‌ششم دترمینان حاصل از مختصات رأس‌های M، M'، و M'' است. چهار مقالهٔ پایانی واندرموند مربوط به مطالعهٔ نظریهٔ دترمینان است.

توماس میور[1] ریاضی‌دانی اسکاتلندی بود که بیشتر به‌خاطر پنج جلد کتاب تاریخ دترمینان‌ها [۱۸]، که از سال ۱۹۰۶ تا سال ۱۹۲۳ و در مجموع با بیش از یک‌هزار صفحه منتشر کرد، معروف است. کتاب او یک دایرةالمعارف جامع و کامل در مورد دترمینان است که با آثار لایب‌نیتس در اواخر قرن هفدهم آغاز می‌شود و تا سال ۱۸۶۰ را در بر می‌گیرد و تاریخچهٔ مفصل دترمینان را براساس سال و نام نویسنده جمع‌آوری کرده است. میور در این کتاب ادعا می‌کند که واندرموند بنیان‌گذار نظریهٔ دترمینان است. دلیل ادعای میور این است که اگرچه ریاضی‌دانانی مانند لایب‌نیتس زودتر از واندرموند دترمینان را مطالعه کرده بودند، تمام آثار قبلی از دترمینان صرفاً به‌عنوان ابزاری برای حل دستگاه معادله‌های خطی استفاده می‌کردند. واندرموند دترمینان را یک تابع در نظر گرفت و ویژگی‌های آن را بررسی کرد. او تأثیر جابه‌جایی دو سطر و یا دو ستون را بررسی کرد و دریافت دترمینانی با دو سطر یا دو ستون یکسانْ برابر صفر است و همچنین نماد بسیار هوشمندانه‌ای برای دترمینان‌ها ارائه داد که متأسفانه امروزه منسوخ شده است.

اصطلاح «دترمینان» را اولین‌بار گاوس در سال ۱۸۰۱ در «تحقیقات حسابی»[2] به کار برد که در آن صورت‌های درجهٔ دوم را مورد بحث قرار می‌داد. او این اصطلاح را به این دلیل به کار برد که دترمینان ویژگی‌های صورت درجهٔ دوم را تعیین می‌کند. بااین‌حال، مفهوم دترمینان او با مفهوم دترمینان امروزی یکسان نیست. در همین اثر گاوس ضرایب صورت‌های درجهٔ دوم خود را در آرایه‌های مستطیلی قرار می‌دهد و یک گام دیگر به نمایش امروزی ماتریس نزدیک‌تر می‌شود. او ضرب ماتریسی را توصیف می‌کند (که به نظر او ترکیبی از جمع و ضرب درایه‌ها است، بنابراین هنوز به مفهوم جبر ماتریسی نرسیده بود) و وارون یک ماتریس را در زمینهٔ خاص آرایه‌های ضرایب صورت‌های درجهٔ دوم توصیف می‌کند، و با این کار به مفهوم امروزی ماتریس نزدیک‌تر می‌شود. وانگهی، به دست آوردن وارون ماتریس، حتی در حالت خاص، او را به جبر ماتریسی نزدیک می‌کند.

روش حذفی گاوس را، که برای اولین‌بار در یک کتاب چینی مربوط به دورهٔ باستان در ۲۰۰

1. Thomas Muir 2. *Disquisitiones Arithmeticae*

سال قبل‌از میلاد ظاهر شده بود، گاوس حین مطالعهٔ مدار سیارک پالاس ابداع کرد. او با استفاده از مشاهدات پالاس بین سال‌های ۱۸۰۳ تا ۱۸۰۹ دستگاهی با شش معادلهٔ خطی و شش مجهول به دست آورد و یک روش نظام‌مند برای حل چنین دستگاهی ارائه کرد که امروزه روش حذفی گاوس نامیده می‌شود.

در سال ۱۸۱۲ کوشی، ریاضی‌دان فرانسوی، از «دترمینان» در معنای امروزی آن استفاده کرد. کوشی کامل‌ترین بررسی را در مورد عامل‌های دترمینان تا آن زمان انجام داد. او نتایج قبلی را تأیید و آن‌ها را از نو اثبات کرد و نتایج جدید خود را در مورد کهادها و هم‌عامل‌ها اثبات کرد. در سال ۱۸۱۲ کوشی مقاله‌ای منتشر کرد که در آن قضیهٔ ضرب دترمینان‌ها برای اولین‌بار ثابت می‌شود. هم‌زمان با این مقاله ریاضی‌دان فرانسوی دیگری نیز با نام بینه[۱] مقاله‌ای منتشر کرد که اثبات قضیهٔ ضرب دترمینان‌ها را در بر داشت [۱۴]. این دو ریاضی‌دان هر دو در پاریس و هر دو یک نتیجه را به دست آورده بودند بدون اینکه از کار یکدیگر اطلاعی داشته باشند.

کوشی[۲] در سال ۱۸۲۶ در زمینهٔ صورت‌های درجهٔ دوم nمتغیری از اصطلاح «جدول» برای ماتریس ضرایب استفاده کرد. او ویژه‌مقدارهای ماتریس را یافت و نتایجی در مورد قطری‌شدن ماتریس‌ها پیدا کرد. کوشی همچنین مفهوم ماتریس‌های متشابه (بدون به کار بردن این اصطلاح) را تعریف کرد و نشان داد که اگر دو ماتریس متشابه باشند معادلهٔ مشخصهٔ یکسانی دارند. او همچنین ثابت کرد که هر ماتریسِ متقارنِ حقیقی قطری‌شدنی است.

استورم[۳]، ریاضی‌دان سوئیسی، تعمیمی از مسئلهٔ ویژه‌مقدارها را در زمینهٔ حل دستگاه‌های معادله‌های دیفرانسیل معمولی مطرح کرد. درواقع، مفهوم ویژه‌مقدار ۸۰ سال قبل‌از او در تحقیقات راجع‌به دستگاه معادله‌های دیفرانسیل خطی توسط دالامبر[۴]، ریاضی‌دان فرانسوی، در ضمن حل مسئلهٔ تار مرتعش تعریف شده بود.

باید تأکید کرد که نه کوشی و نه استورم به کلیت مفاهیمی که تعریف کردند پی نبردند و آن‌ها را فقط در زمینه‌هایی خاص مفید می‌دانستند. ژاکوبی[۵] از حدود سال ۱۸۳۰، کرونکر[۶]، و وایرشتراس[۷]

۲. اکتبر آن سال آبل، ریاضی‌دان نروژی، مقاله‌ای در مورد حل‌ناپذیری معادله‌های درجهٔ پنجم در فرهنگستان علوم فرانسه ارائه درکرد. کوشی یکی از داوران این مقاله بود و او که خود سرگرم مسائل زیادی بود، به‌سهو یا به‌عمد، مقالهٔ آبل را گم کرد و باعث عدم تمدید بورسیه او شد. آبل آخرین سکه‌اش را خرج کرد و مجبور شد به کشورش بر گردد و در فقر و تنگدستی دو سال آخر عمر خود را با تدریس خصوصی بگذراند [۳].

1. Jacques Philippe Marie Binet 3. Jacques Charles-François Sturm 4. Jean d'Alembert 5. Carl Gustav Jacob Jacobi 6. Leopold Kronecker 7. Karl Weierstrass

نیز در دهه‌های ۱۸۵۰ و ۱۸۶۰ به ماتریس‌ها پرداخته‌اند، اما در یک زمینهٔ خاص که این بار به خلق مفهوم تبدیل خطی منجر شد. ژاکوبی در سال ۱۸۴۱ سه رساله در مورد دترمینان‌ها منتشر کرد که در آن‌ها برای اولین‌بار تعریف دترمینان به روشی الگوریتمی ساخته شود و دترمینان تابعی از درایه‌های خود تعریف می‌شود. این سه مقالهٔ ژاکوبی مفهوم دترمینان را به‌طور گسترده‌ای رایج کرد و باعث آشنایی ریاضی‌دانان با این مفهوم شد.

آرتر کیلی[۱] در سال ۱۸۴۱ مقاله‌ای نوشت؛ این مقاله اولین مقالهٔ ریاضی‌دانان انگلیسی در نظریهٔ دترمینان‌ها به حساب می‌آید. او در آن مقاله از دو خط عمودی در دو طرف آرایه برای نشان دادن دترمینان استفاده می‌کند؛ نمادی که اکنون متداول شده است. او بعداً در سال ۱۸۴۵ بسط دترمینان را بدون علامت منفی در نظر گرفت و آن را «ماندگار»[۲] نامید، در اینجا همانند بسط لاپلاس جملات دترمینان را می‌نویسیم و همهٔ علامت‌های بسط را مثبت در نظر می‌گیریم [۱۰].

آیزنشتاین[۳]، ریاضی‌دان آلمانی که زندگیِ در فقر و مرگ نابهنگامش در جوانی بر اثر بیماری سلِ بسیار شبیه آبل است، در سال ۱۸۴۴ جانشینی‌های[۴] خطی را با یک حرف مشخص کرد و نشان داد که چگونه می‌توان آن‌ها را مانند اعداد معمولی، به‌استثنای خاصیت جابه‌جایی، جمع و ضرب کرد. منصفانه است که بگوییم آیزنشتاین اولین کسی بود که به جانشینی‌های خطی به‌عنوان یک جبر می‌اندیشید، همان‌طور که در این نقل قول از مقالهٔ او به سال ۱۸۴۴ مشاهده می‌شود [۸]:

> اساس یک الگوریتم محاسباتی به کار بردن اعمال ضرب، تقسیم، و به توان رساندن معادله‌ها در دستگاه معادله‌های خطی است، معادله‌هایی با نماهای صحیح همواره به دست می‌آید و تنها ممکن است ترتیب عوامل تغییر کند.

۴ ماتریس

اولین کسی که اصطلاح «ماتریس» را به کار برد سیلوستر[۵] و در سال ۱۸۵۰ بود. سیلوستر ماتریس را آرایش مستطیلی از درایه‌ها تعریف کرد.سیلوستر پس‌از ترک آمریکا و بازگشت به انگلستان در سال ۱۸۵۱ به وکالت پرداخت و با آرتر کیلی، که او نیز وکیل شده بود، همکار و آشنا شد. جالب این است که کیلی هم به ریاضیات علاقه داشت. سیلوستر کار مهمی در نظریهٔ ماتریس‌ها انجام داد؛ این موضوعی بود که در طول پیاده‌روی با کیلی به آن علاقه‌مند شد. کیلی هم به‌سرعت اهمیت مفهوم ماتریس را دریافت و تا سال ۱۸۵۳ یادداشتی منتشر کرد که در آن برای اولین‌بار وارون یک

1. Arthur Cayley 2. permanent 3. Gotthold Eisenstein 4. substitution 5. James Joseph Sylvester

ماتریس تعریف می‌شد.

پنج سال بعد در سال ۱۸۵۸، کیلی کتاب یادداشت‌های نظریهٔ ماتریس‌ها را منتشر کرد که به‌دلیل عرضهٔ اولین تعریف انتزاعی از ماتریس قابل‌توجه است. او نشان داد که آرایه‌های ضرایبی که قبلاً برای صورت‌های درجهٔ دوم و برای تبدیل‌های خطی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند مواردی خاص از تعریف کلی او هستند. کیلی یک جبر ماتریسی مشتمل‌بر جمع، ضرب، ضرب اسکالر، و وارون ارائه داد. او دستور صریحی برای وارون یک ماتریس با استفاده از دترمینان‌ها به دست آورد. در این سال تسیفو[1] نیز ضرب تانسوری را تعریف کرد که بعداً به ضرب کرونکر معروف شد [۲۳].

کیلی همچنین ثابت کرد که ماتریس‌های ۲ × ۲ در معادلهٔ مشخصهٔ خود صدق می‌کنند. او اظهار داشت که نتیجه را برای ماتریس‌های ۳ × ۳ نیز بررسی کرده است و می‌نویسد: «در مورد ماتریس‌ها از مرتبهٔ دلخواه لازم نیست اثبات رسمی قضیه را بنویسیم.» اینکه هر ماتریس در معادلهٔ مشخصهٔ خود صدق می‌کند قضیهٔ کیلی–هامیلتون نامیده می‌شود، بنابراین منطقی است که بپرسیم چه ارتباطی با هامیلتون دارد. درواقع، هامیلتون یک حالت از قضیه، حالت ۴ × ۴، را با استفاده از چهارگانه‌های هامیلتون ثابت کرده بود.

در سال ۱۸۷۰ صورت متعارف ژوردان در رسالهٔ جایگزینی و معادلات جبری نوشتهٔ ژوردان[2] ظاهر شد. یک صورت متعارف برای جانشینی‌های خطی روی یک میدان متناهی وقتی ظاهر می‌شود که مرتبهٔ آن اعداد اول باشد. فروبنیوس[3] در سال ۱۸۷۸ مقالهٔ مهمی دربارهٔ ماتریس‌ها به نام «جانشانی‌های خطی و صورت‌های دوخطی» نگاشت و به نظر می‌رسد که او در آن زمان از کار کیلی در این باره بی‌اطلاع بوده است. فروبنیوس در آن مقاله به ضرایب صورت‌های دوخطی می‌پردازد ولی اصطلاح «ماتریس» را به کار نبرده است. بااین‌حال، او نتایج مهمی را دربارهٔ ماتریس‌های متعارف به‌عنوان نماینده‌های رده‌های هم‌ارزی ماتریس‌ها ثابت می‌کند. او در این زمینه به آثار کرونکر و وایرشتراس اشاره می‌کند که حالت‌های خاصی را به‌ترتیب در سال‌های ۱۸۷۴ و ۱۸۶۸ منتشر کرده‌اند. فروبنیوس همچنین این نتیجهٔ کلی را ثابت می‌کند که هر ماتریس در معادلهٔ مشخصهٔ خود صدق می‌کند. مقالهٔ فروبنیوس همچنین حاوی تعریف رتبهٔ یک ماتریس است که او در مطالعات خود در مورد صورت‌های متعارف و تعریف ماتریس‌های متعامد از آن استفاده کرده است.

سیلوستر در سال ۱۸۸۴ پوچی یک ماتریس مربعی را تعریف کرد. او پوچی ماتریس A را با $n(A)$ نشان داد و آن را بزرگ‌ترین عدد i تعریف کرد به‌طوری که هر کهاد ماتریس A از مرتبه

1. Johann Georg Zehfus 2. Camille Jordan 3. Ferdinand Georg Frobenius

$n - i + ۱$ صفر باشد. سیلوستر به ناوردایی ماتریس‌ها علاقه‌مند بود، یعنی ویژگی‌هایی را مورد توجه قرار می‌داد که تحت تبدیل‌های خاص تغییر نمی‌کنند. او همچنین رابطهٔ معروف زیر را ثابت کرد

$$\max\{n(A), n(B)\} \leq n(AB) \leq n(A) + n(B).$$

در سال ۱۸۹۶ فروبنیوس از نوشته‌های سال ۱۸۵۸ کیلی دربارهٔ نظریهٔ ماتریس‌ها آگاهی یافت و پس‌از آن شروع به استفاده از اصطلاح ماتریس کرد. علی‌رغم اینکه کیلی قضیهٔ کیلی–هامیلتون را فقط برای ماتریس‌های ۲ × ۲ و ۳ × ۳ اثبات کرده بود فروبنیوس سخاوتمندانه نتیجه را به کیلی نسبت می‌دهد، حال‌آنکه فروبنیوس اولین کسی بود که قضیه را در حالت کلی اثبات کرد.

وایرشتراس در بعضی از درس‌هایش یک تعریف اصل موضوعی برای دترمینان به کار می‌برد. یادداشت‌های او درباره نظریهٔ دترمینان در سال ۱۹۰۳ پس‌از مرگ او منتشر شدند. در همان سال درس‌گفتارهای کرونکر در مورد دترمینان نیز منتشر شد و تعجب‌آور اینکه آن‌ها نیز پس‌از مرگ او منتشر می‌شدند [۱۶]. با انتشار آثار وایرشتراس و کرونکر در مورد دترمینان نظریهٔ نوین دترمینان‌ها مورد قبول جامعهٔ ریاضی قرار گرفت، اما پذیرش کامل نظریهٔ ماتریس‌ها کمی طول کشید. یک متن مقدماتی مهم که نظریهٔ ماتریس‌ها را به جایگاه مناسب خود در ریاضیات رساند کتاب مقدمه‌ای بر جبر عالی به سال ۱۹۰۷ نوشتهٔ بوخر[۱] بود. این کتاب اولین نوشتهٔ یک ریاضی‌دان آمریکایی در این زمینه بود.

کولموگوروف در روسیه و هاوس‌هولدر و گیونز در ایالات متحده و ویلکینسون در انگلستان از افراد تأثیرگذار بر پیشرفت نظریهٔ ماتریس‌ها در قرن بیستم به شمار می‌روند. از اینجا به بعد باید تاریخ نظریهٔ ماتریس‌ها در قرن بیستم مورد بررسی قرار گیرد که خارج از محدودهٔ کار ماست.

۵ ماتریس و دترمینان در ایران

در مقدمه اشاره کردیم که موضوع ماتریس‌ها شروعی ایرانی–بابلی دارد و بعداز آن، حتی در دورهٔ درخشان تمدن اسلامی، خبری از مباحث جبر خطی نداریم، اگرچه دانشمندان اسلامی در علم جبر به آثار دیوفانتوس توجه جدی نشان دادند و در حل معادله‌های درجهٔ دوم و درجهٔ سوم شاهکارهایی ارزنده آفریدند. ازآنجاکه ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی عمدتاً مترجم و ادامه‌دهندهٔ راه ریاضیات یونانیان بودند، تقریباً کاری جدّی در حل دستگاه‌های معادله‌های خطی انجام ندادند. اگرچه توماریداس

1. Maxime Bôcher

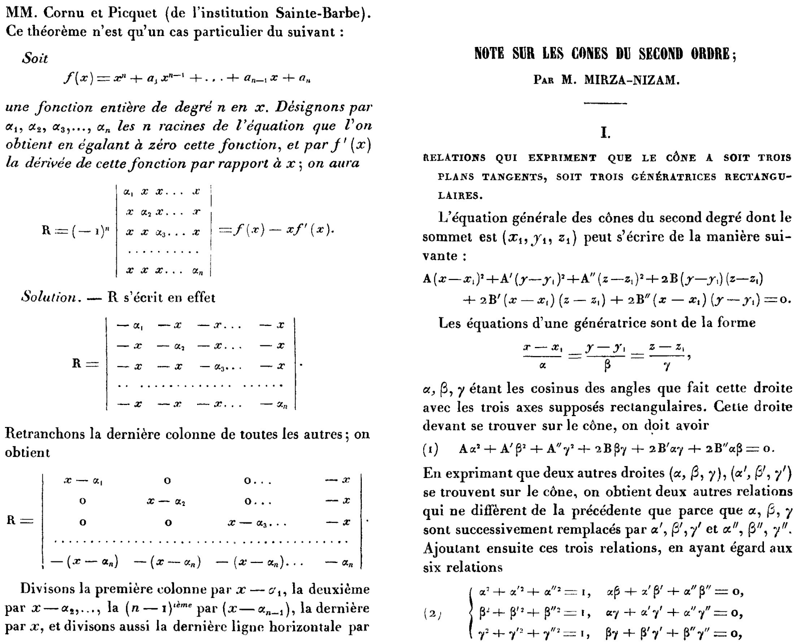
شکل ۲. نظام‌الدین غفاری اولین ریاضی‌دان ایرانی که مقاله‌ای دربارهٔ دترمینان‌ها نوشت.

موضوع حل دستگاه‌های معادله‌های خطی را مطرح کرد، بعداز او در تمام آن ۴۰۰ سالِ درخشان دوران یونان باستان، این موضوع به‌هیچ‌وجه مورد نظر یونانیان نبود. درواقع، یونانیان باستان دون شأن خود می‌دانستند که به ریاضیات محاسباتی، مانند حل دستگاه معادله‌های خطی، بپردازند و آن را جزو لوجستیک یا حساب و کتاب تجاری طبقه‌بندی می‌کردند [۲].

اما داستان دوران جدید نوع دیگری است. در دوران قاجار و به ابتکار نایب‌السلطنه عباس میرزا و قائم مقام فراهانی اولین دورهٔ اعزام محصلان ایرانی به فرنگ صورت گرفت؛ بار اول در سال ۱۱۹۰ خورشیدی دو نفر و چهار سال بعد دو بار و هر بار پنج نفر به انگلستان اعزام شدند. پس‌از آن در سال ۱۲۳۷ خورشیدی (۱۸۵۹ میلادی) یعنی ۷ سال پس‌از قتل امیرکبیر و افتتاح دارالفنون در روزگار امپراتوری ناپلئون سوم، فرّخ‌خان امین‌الملک غفاری (بعدها امین‌الدوله) سفیر ایران در پاریس مأمور اعزام محصلان ایرانی به فرنگ شد. فرّخ‌خان از ۴۲ نفر محصل اعزامی به فرنگ ۹ نفر را از شهر کاشان اعزام کرد که میرزا نظام‌الدین مهندس‌الممالک غفاری یکی از آن‌ها بود [۶] (شکل ۲ را ببینید). وجود فرّخ‌خان که خود کاشانی بود و مزرعهٔ فرح‌آباد از تیول کلّه از آن ایشان بود، علت اصلی اعزام کاشانی‌ها و ازجمله نظام‌الدین به فرنگ بود.

میرزا نظام‌الدین اهل روستای بُرزآباد کاشان در زمان اعزام به فرانسه فقط ۱۵ سال داشت. بُرزآباد از توابع شهرستان نیاسر و نزدیک روستای کَلّه محل تولد کمال‌الملک است که اینک به نام ایشان خوانده می‌شود. روستای بُرزآباد و کلّه محل اقامت طایفهٔ غفاری‌ها بوده است و این نشان می‌دهد که کمال‌الملک و میرزا نظام‌الدین را باید قرابتی در بین باشد. میرزا نظام‌الدین سه‌سالِ مقدمات را در مدرسهٔ بندر دی‌یپ[۱] تحصیل کرد و امتحان دانش‌آموختگی مقدماتی را در شهر روئان[۲] در شمال غربی فرانسه داد و به پاریس رفت. او در پاریس علوم متوسطه را در مدرسهٔ سن

1. Dieppe 2. Rouen



MM. Cornu et Picquet (de l'institution Sainte-Barbe).
Ce théorème n'est qu'un cas particulier du suivant :

Soit

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

une fonction entière de degré n en x. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ les n racines de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro cette fonction, et par $f'(x)$ la dérivée de cette fonction par rapport à x; on aura

$$R = (-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & x & x \ldots & x \\ x & \alpha_2 & x \ldots & x \\ x & x & \alpha_3 \ldots & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x & x \ldots & \alpha_n \end{vmatrix} = f(x) - x f'(x).$$

Solution. — R s'écrit en effet

$$R = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & -x & -x \ldots & -x \\ -x & -\alpha_2 & -x \ldots & -x \\ -x & -x & -\alpha_3 \ldots & -x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -x & -x & -x \ldots & -\alpha_n \end{vmatrix}.$$

Retranchons la dernière colonne de toutes les autres; on obtient

$$R = \begin{vmatrix} x-\alpha_1 & 0 & 0 \ldots & -x \\ 0 & x-\alpha_2 & 0 \ldots & -x \\ 0 & 0 & x-\alpha_3 \ldots & -x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -(x-\alpha_n) & -(x-\alpha_n) & -(x-\alpha_n) \ldots & -\alpha_n \end{vmatrix}.$$

Divisons la première colonne par $x - \alpha_1$, la deuxième par $x - \alpha_2, \ldots$, la $(n-1)^{ième}$ par $(x - \alpha_{n-1})$, la dernière par x, et divisons aussi la dernière ligne horizontale par

NOTE SUR LES CONES DU SECOND ORDRE;

PAR M. MIRZA-NIZAM.

I.

RELATIONS QUI EXPRIMENT QUE LE CÔNE A SOIT TROIS PLANS TANGENTS, SOIT TROIS GÉNÉRATRICES RECTANGULAIRES.

L'équation générale des cônes du second degré dont le sommet est (x_1, y_1, z_1) peut s'écrire de la manière suivante :

$$A(x-x_1)^2 + A'(y-y_1)^2 + A''(z-z_1)^2 + 2B(y-y_1)(z-z_1) + 2B'(x-x_1)(z-z_1) + 2B''(x-x_1)(y-y_1) = 0.$$

Les équations d'une génératrice sont de la forme

$$\frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma},$$

α, β, γ étant les cosinus des angles que fait cette droite avec les trois axes supposés rectangulaires. Cette droite devant se trouver sur le cône, on doit avoir

$$(1) \quad A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\alpha\gamma + 2B''\alpha\beta = 0.$$

En exprimant que deux autres droites (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ se trouvent sur le cône, on obtient deux autres relations qui ne diffèrent de la précédente que parce que α, β, γ sont successivement remplacés par α', β', γ' et $\alpha'', \beta'', \gamma''$. Ajoutant ensuite ces trois relations, en ayant égard aux six relations

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0, \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, & \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0, \end{cases}$$

شکل ۳. صفحه‌های اول از مقالهٔ دوم و سوم نظام‌الدین غفاری دربارهٔ دترمینان و تقاطع مخروط‌ها و خط‌ها

لوئی فرا گرفت و در امتحان آخر آن سال بالاترین نمره را در تمام دروسی که در آن مدرسه به وی تعلیم داده شده بود به دست آورد و پاداش این شاگرد اول این بود که توانست بدون آزمون وارد مدرسه پلی‌تکنیک پاریس گردد. مدرسه پلی‌تکنیک پاریس یکی از مهم‌ترین دانشگاه‌های علمی آن زمان بود و ورود به آن بسیار دشوار بود؛ نکتهٔ تاریک در تاریخ این مدرسه این است که گالوا، که یکی از نابغه‌های عصر بود، نتوانست از پس امتحان ورودی آن برآید (نابغه‌ای بزرگ که توسط ممتحنی متوسط رد شد [۳]). میرزانظام‌الدین در مدرسهٔ پلی‌تکنیک به فراگیری ریاضیات پرداخت و به‌علت هوش وافری که داشت هم‌زمان با تحصیل و علی‌رغم جوانی در مدرسه پلی‌تکنیک پاریس به سِمَت معلمی هندسهٔ تحلیلی در مدرسه سن لوئی رسید [۶].

او در حوالی بیست تا بیست و سه سالگی توانست سه مقالهٔ علمی دربارهٔ ریاضیات بنویسد که دومین آن‌ها دربارهٔ رابطه‌ای است که یک چندجمله‌ای و مضربی از مشتق آن با دترمینان یک ماتریس خاص پیدا می‌کند. مقالهٔ سوم او به برخورد خطوط و مخروط و یافتن محل تلاقی آنان ارتباط دارد که باز به حل یک دستگاه معادله‌های خطی تبدیل می‌شود. او ازجمله اولین ایرانیانی است که مقاله‌ای به سبک‌وسیاق جدید دربارهٔ دترمینان‌ها نوشته است؛ شکل ۳ را ببینید. اینکه چرا میرزا نظام‌الدین به نوشتن مقاله‌ای در باب دترمینان‌ها پرداخته است را باید از روی حجم مطالب

کتاب‌های میور [۱۸] دربارهٔ دترمینان حدس زد؛ احتمالاً بحث دترمینان‌ها بحث روز ریاضی‌دانان اروپایی بوده است و میرزا نظام‌الدین نیز تحت تأثیر این موضوع قرارگرفته است. میور به مقالهٔ او دربارهٔ دترمینان‌ها اشاره نموده است. در سامانهٔ مقالات آن کالج ارجاعات فراوان به مقاله‌های میرزا نظام‌الدین را می‌بینیم و این ارزش نوشته‌های او را نمایان‌تر می‌کند.

میرزا نظام‌الدین بعداز دو سال که به ریاضیات مشغول بود و موفقیتش در این زمینه بسیار بود به دستور ناصرالدین‌شاه در امتحان ورودی «مدرسهٔ معدن» شرکت کرد و به رشته معدن در آن مدرسه وارد شد. شاید اگر او تحقیقاتش را در زمینهٔ ریاضیات ادامه می‌داد برای جامعهٔ ریاضی بسیار مفید می‌بود. او ۹ سال در فرانسه بود و بعداز آن در سن ۲۴سالگی به ایران مراجعت نمود و با ساخت جادهٔ شوسه هَراز در عرض سه سال به کسب لقب مهندس‌الممالک نائل آمد! او دو جلد کتاب در باب جبر و المقابله، یک جلد در مثلثات، یک جلد در هندسهٔ تحلیلی، دو جلد در حساب تفاضلی، و چندین کتاب دیگر در فیزیک و سایر علوم نوشت و اولین نفری است که علامات و اصطلاحات ریاضی را نام برده و اسم‌گذاری کرده است؛ برای اطلاعات بیشتر [۵، ۶] را ببینید. مطالعهٔ مقالهٔ ارزشمند و جامع [۱] در زمینهٔ آثار ریاضی و جنبه‌هایی از زندگی او توصیه می‌شود.

مراجع

[۱] اصغری، امیر، مهندس‌الممالک غفاری: تنهاترین ریاضی‌دان تاریخ، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، **۴۲** (۱۴۰۲)، شماره ۲، ۲۲۱–۲۶۳.

[۲] ایوز، هاوارد و.، آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمهٔ قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۵.

[۳] بل، اریک تمپل، ریاضی‌دانان نامی، ترجمهٔ حسن صفاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۶۰.

[۴] رجبعلی‌پور، مهدی، با کاروان حله، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، **۶۴** (۱۳۹۸)، ۱-۱۶.

[۵] سادات بیگدلی، سید محمود؛ شریف‌زاده، اکبر، روزنامهٔ خاطرات مهندس‌الممالک غفاري، دو فصلنامه علمی کاشان شناسی، **۲۲** (۱۳۹۸)، ۱۱۵–۱۴۲.

[۶] مدرسی چهاردهی، مرتضی، بزرگترین دانشمند ریاضی عصر ناصری ــ میرزا نظام الدین غفاری ــ مهندس الممالک، ارمغان، **۲۶** (۱۳۳۶)، شماره ۳، ۱۰۳–۱۱۰.

[۷] نظری، علی‌محمد؛ نظامی، عطیه، تاریخچهٔ مسئلهٔ مقدار ویژهٔ معکوس ماتریس های نامنفی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، **۶۷** (۱۳۹۹)، ۱۲۵–۱۴۰.

[8] Biermann, K.- R., Eisenstein, Ferdinand Gotthold Max, in *Dictionary of Scientific Biography*, C. C. Gillispie, ed., Charles Scribner's Sons, New York, 1970–1980, vol. 14, 219-224.

[9] Brezinski, C., Meurant, G., Redivo-Zaglia, M., *A Journey Through the History of Numerical Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2023.

[10] Cayley, A., On the theory of linear transformations, *Cambridge Math. J.*, **5** (1845), 193-209.

[11] Fischer, G., *Analytische Geometrie* (in German), 4th ed.,Vieweg, Wiesbaden, 1985.

[12] Grabiner, J. V., Was Newton's calculus a dead end? The continental influence of Maclaurin's treatise of fluxions, *Amer. Math. Monthly*, **104** (5) (1997), 393-410.

[13] Grattan-Guinness, I., Ledermann, W., Matrix theory, in *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, I. Grattan-Guinness, ed., London, 1994, 775-786.

[14] Hawkins, T. W., Cauchy and the spectral theory of matrices, *Historia Math.*, **2** (1975), 1-29.

[15] Japikse, N., *Johan de Witt*, Amsterdam, 1915.

[16] Knobloch, E., From Gauss to Weierstrass : determinant theory and its historical evaluations, in *The Intersection of History and Mathematics*, Springer, Basel, 1994, 51-66.

[17] Mirza-Nizam, M., Théorème sur les déterminants, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, **4-5** (1865), 500-504.

[18] Muir, T., *History of Determinants*, Dover Publication, New York, 1920.

[19] Rashed, R., El-Bizri, N., *Founding Figures and Commentators in Arabic Mathematics*, Routledge, London, 1996.

[20] Rashed, R., *Ibn al-Haytham, New Astronomy and Spherical Geometry: A History of Arabic Sciences and Mathematics*, vol. 2, Routledge, London, 2013.

[21] Rashed, R., *Ibn al-Haytham, New Astronomy and Spherical Geometry: A History of Arabic Sciences and Mathematics*, vol. 3, Routledge, London, 2013.

[22] Rashed, R., *Ibn al-Haytham, New Astronomy and Spherical Geometry: A History of Arabic Sciences and Mathematics*, vol. 4, Routledge, London, 2014.

[23] Zehfuss, J. G., Über eine gewisse Determinante, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, **3** (1858), 298-301

علی‌محمد نظری: دانشگاه اراک، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

رایانامه: a-nazari@araku.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 43, Number 1, Spring/Summer 2024, Pages 195–212
doi: 10.30504/mct.2023.1373.1963

A History of Matrices and Determinants Prior to the 20th Century

A. M. Nazari[1]

Department of Mathematics, Arak University, Iran

Abstract. In this article, the history of matrix and determinants from the beginning to the beginning of the 20th century is studied. But in the 20th century, the theory of matrices has spread so much that writing a history about it will probably be very voluminous and a separate history should be written for each of the topics. The fact that the Gaussian elimination method has a history of more than 2000 years is one of the points we will address. We want to know by whom matrices were introduced and developed before the 20th century. We will also introduce the first person who used determinants and study his influence on the work of later mathematicians. Today, matrices are expanding, but determinants are not much considered because of the large amount of calculations they have, and the invention of digital computers did not cause us to return to Cramer's method, but at one time, determinants were much more interested than matrices.

Keywords: matrix, determinant, systems of linear equations
Article history: Recieved 18 February 2023; Accepted 25 September 2023
Article type: survey

1. a-nazari@araku.ac.ir