فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۳، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۳)، صص ۲۱۳ تا ۲۲۷

کاربردی از جبرخطی در مسئلهٔ رده‌بندی یک لیگ ورزشی

رسول کاظمی✉، امیرحسین نخودکار

چکیده. در این مقاله، کاربردی ساده از جبر خطی در مسئلهٔ رده‌بندی بازیکن‌ها در یک لیگ ورزشی ارائه می‌کنیم. خواهیم دید در حالتی که بازیکن‌ها دوبه‌دو با هم مسابقه داده باشند چگونه می‌توان با استفاده از ویژه‌بردار خاصی از ماتریس نتایج، موسوم به ویژه‌بردار پرون، بازیکن‌ها را رده‌بندی کرد.

۱ مقدمه

در یک لیگ ورزشی چگونه بازیکن‌ها (یا تیم‌ها) را رده‌بندی کنیم؟ ممکن است پیشنهاد شما این باشد که براساس تعداد برد و باخت‌ها این کار را انجام دهیم، مثلاً هرچه تعداد برد یک بازیکن بیشتر باشد آن بازیکن در ردهٔ بالاتری قرار گیرد. در این روش رده‌بندی یک اشکال اساسی وجود دارد: درحالی‌که یک بازیکن ممکن است تعداد زیادی پیروزی در برابر بازیکن‌های ضعیف کسب کند، یک بازیکن دیگر ممکن است دارای تعداد پیروزی کمتر، اما نسبت به اولی در برابر بازیکن‌های به‌مراتب قدرتمندتری باشد. حال به نظر شما کدام‌یک قوی‌ترند؟ ممکن است بگویید خُب نتیجهٔ رقابت آن دو با هم را در نظر می‌گیریم. حال اگر دو بازیکن هیچ‌گاه با هم مسابقه نداده باشند چگونه آن‌ها را مقایسه کنیم؟ شاید بگویید خُب امتیازات کسب‌شده توسط هر بازیکن را در نظر بگیریم و غیره.

در اواسط قرن نوزدهم، نتایج مسابقات شطرنج با n بازیکن را با ماتریس مربعی M از مرتبهٔ n و درایه‌های ۰، $\frac{1}{2}$، و ۱ موسوم به ماتریس نتایج نشان می‌دادند. اعداد ۰، $\frac{1}{2}$، و ۱ در موضع (i,j) به ترتیب نشان‌دهندهٔ شکست، تساوی، یا پیروزی بازیکن iاُم در برابر بازیکن jاُم است. در

عبارات و کلمات کلیدی: مسئلهٔ رده‌بندی، ماتریس تورنمنت، ویژه‌بردار پرون، ماتریس تحویل‌ناپذیر، ماتریس اولیه
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۱/۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۶

doi: 10.30504/mct.2023.1361.1952

این صورت امتیاز هر بازیکن را می‌توان با محاسبهٔ مؤلفه iاُم بردار MX موسوم به مجموع امتیازات به دست آورد که در آن $X = (۱, \ldots, ۱)^\top \in \mathbb{R}^n$. به‌طور طبیعی، این روش ساده‌ترین روش برای رده‌بندی بازیکن‌ها است. شطرنج‌باز اتریشی گلبفوس[1] در سال ۱۸۷۳ میلادی پیشنهادی برای بهبود دقت این روش مطرح کرد به این صورت که ابتدا به هر بازیکن امتیاز اولیهٔ ۱ را نسبت بدهیم؛ که همان بردار X حاصل می‌شود. سپس هر بازیکن امتیاز جدیدی دریافت می‌کند که از جمع‌کردن مجموع امتیاز بازیکن‌هایی که شکست داده و نصف مجموع امتیاز بازیکن‌هایی که با آن‌ها مساوی کرده به دست می‌آید که بردار MX حاصل می‌شود. با تکرار این فرآیند برای بردار MX به‌جای X بردار $M^۲X$ حاصل می‌شود [۱۸].

نخستین تلاش‌ها برای در نظر گرفتن توان‌های سوم و بالاترِ ماتریس نتایج در رده‌بندی بازیکن‌ها توسط لانداو در [۱۱، ۱۲] انجام شد. پس‌از آنکه پرون[2] و فروبنیوس[3] نظریهٔ مشهور خود در مورد ماتریس‌های با درایه‌های مثبت را عرضه کردند مشخص شد که در نظر گرفتن توان‌های دیگر ماتریس نتایج مرتبط با ویژه‌بردار خاصی از این ماتریس است که بعدها به نام ویژه‌بردار پرون معروف شد. نزدیک به نیم‌قرن بعد سیلی [۱۶] گام‌های دیگری برای تکمیل این رده‌بندی برداشت. پس‌از آن وِی[4] در رسالهٔ دکترای خود به‌طور مستقل روش استفاده از ویژه‌بردار پرون را مطرح کرد [۱۹]. چند سال بعد کِندال در [۹] این کار را تکمیل کرد. نتیجهٔ تمام این پژوهش‌ها روشی است که اکنون به نام روش کِندال–وِی معروف است.

مهم‌ترین ویژگی روش کِندال–وِی این است که در آن پیروزی برابر بازیکن‌های قوی‌تر امتیاز بیشتری نسبت به پیروزی برابر بازیکن‌های ضعیف دارد. درواقع، رتبهٔ هر بازیکن متناسب با رتبهٔ بازیکن‌هایی است که آن‌ها را شکست داده است. روش کِندال–وِی در مقالات متعددی مورد بررسی قرار گرفته، محدودیت‌های آن بررسی و تعمیم‌های متفاوتی از آن ارائه شده است. برای مثال، دیدگاه استفاده‌شده در [۱۵] این است که همان‌طور که پیروزی برابر بازیکن‌های قوی‌تر اهمیت بیشتری نسبت به پیروزی برابر بازیکن‌های ضعیف دارد، باخت برابر بازیکن‌های ضعیف نیز باید بیشتر از باخت برابر بازیکن‌های قوی اهمیت داشته باشد. رده‌بندی انجام شده براساس این دیدگاه در [۱۵] به رده‌بندی رامانوجاچاریولو[5] معروف است. از میان سایر مقالاتی که به مسئلهٔ رده‌بندی پرداخته‌اند می‌توان به [۱۰، ۱۳، ۵، ۴، ۱۷، ۷، ۳، ۲، ۱۴] اشاره کرد.

هدف از این مقاله بیان روش کِندال–وِی به زبانی ساده و قابل‌فهم برای عموم خوانندگان است.

1. Oscar Gelbfuhs 2. Oskar Perron 3. Georg Frobenius 4. Wei 5. C. Ramanujacharyulu

مسئلهٔ رده‌بندی مورد بحث ما حالتی است که در یک مسابقه n بازیکن دوبه‌دو با هم مسابقه داده و نتیجهٔ هر بازی برای هر بازیکن پیروزی یا شکست است. ابتدا این مسئله را با مثالی در بخش دوم مطرح می‌کنیم و راه‌حلی طبیعی و اولیه برای آن می‌یابیم. پس‌از آن، در بخش سوم روش کِندال–وِی را برای همین مثال به‌طور مفصل شرح خواهیم داد. سرانجام، حالت کلی روش کِندال–وِی را در بخش پنجم بررسی خواهیم کرد. این کار مستلزم شناخت ماتریس‌هایی موسوم به ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر و اولیه است که در بخش چهارم به آن‌ها پرداخته‌ایم.

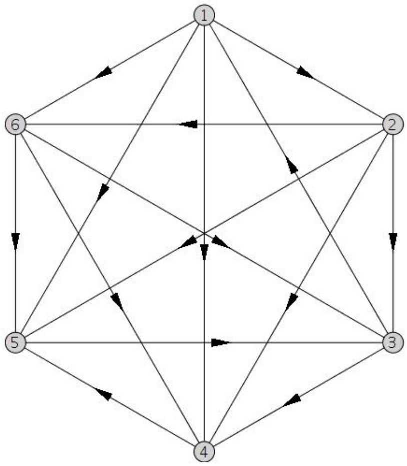
۲ روش شمارش بردهای مستقیم و با واسطه

در این بخش، مسئلهٔ رده‌بندی را با یک مثال شرح می‌دهیم و راه‌حل اولیه‌ای برای آن می‌یابیم. برای حل این مسئله باید بتوانیم رابطهٔ برد و باخت بین بازیکن‌ها را به زبان ریاضی بیان کنیم. معمولاً گراف‌ها برای مدل‌سازی چنین روابطی مناسب‌اند. به زبان ساده، یک گراف عبارت است از دوتایی (V, E) که در آن V یک مجموعهٔ ناتهی از رأس‌ها و E یک مجموعهٔ متناهی از یال‌هاست و هر یال دو رأس را با یک خط یا منحنی به هم متصل می‌کند. برای مثال، اگر یال e دو رأس $v_۱$ و $v_۲$ را به هم وصل کند می‌نویسیم $e = \{v_۱, v_۲\}$ و می‌گوییم $v_۱$ و $v_۲$ مجاورند. منظور از یک گراف سودار گرافی است که یال‌ها در آن سو دارند. پس در گراف سودار $G = (V, E)$، E زیرمجموعه‌ای از $V \times V$ است که اعضای آن یال سودار نامیده می‌شوند. برای مثال، در یک گراف سودار اگر یال e رأس $v_۱$ را به رأس $v_۲$ وصل کند می‌نویسیم $e = (v_۱, v_۲)$ و می‌گوییم $v_۱$ مقدم $v_۲$ (یا $v_۲$ تالی $v_۱$) است. در این صورت روی یال نمایش‌دهندهٔ e یک پیکان از $v_۱$ به $v_۲$ می‌گذاریم.

حال فرض کنید n بازیکن با نام‌های ۱، ۲، . . . و n در یک لیگ دوبه‌دو با هم مسابقه داده‌اند. در این صورت، اگر آن‌ها را به‌عنوان رئوس یک گراف سودار در نظر بگیریم آنگاه یالی سودار از بازیکن i به بازیکن j نشان‌دهندهٔ آن است که بازیکن i در مسابقه با بازیکن j پیروز شده است.

اکنون می‌توانیم اطلاعات اساسی مربوط به یک گراف سودار را در یک ماتریس موسوم به ماتریس مجاورت ثبت کرده و با استفاده از محاسبات ماتریس‌ها اطلاعات خاصی در مورد گراف مربوط بیابیم. ماتریس مجاورت یک گرافِ سودار با n رأس و مجموعهٔ یال E یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های صفر و یک مانند A است که در آن $a_{ij} = ۱$ اگر و تنها اگر $(i, j) \in E$.

مثال ۱.۲. فرض کنید شش بازیکن تنیس با نام‌های ۱، ۲، . . . و ۶ در یک لیگ دوبه‌دو مسابقه داده‌اند و گراف نتایج آن‌ها به‌شکل زیر است.



در این صورت ماتریس مجاورت این گراف چنین است

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}.$$

اگر $v_۱$ و $v_۲$ دو رأس ازگراف سودار G باشند، یک گشت از $v_۱$ به $v_۲$ عبارت است از دنباله‌ای از رئوس G که از $v_۱$ شروع و به $v_۲$ ختم شود به‌طوری که اگر در جایی از این دنباله uv ظاهر شد به این معنی است که از u به v یک یال سودار وجود دارد. طول یک گشت برابر با تعداد یال‌های موجود در آن است.

از توان‌های ماتریس مجاورت می‌توان اطلاعاتی در مورد تعداد گشت‌های با طول دلخواه در گراف به دست آورد. در مثال ۱.۲ درایهٔ $(۱,۳)$ از ماتریس $A^۲$ چنین است

$$[A^۲]_{۱۳} = \sum_{k=۱}^{۶} a_{۱k}a_{k۳};$$

هریک از جملات $a_{۱k}a_{k۳}$ در مجموع اخیر صفر یا یک است. توجه کنید که $a_{۱k}a_{k۳} = ۱$ اگر و تنها اگر $a_{۱k} = a_{k۳} = ۱$، یا به‌طور معادل یک یال از ۱ به k و یک یال از k به ۳ وجود داشته باشد. پس $a_{۱k}a_{k۳} = ۱$ اگر و تنها اگر یک گشت به طول دو از ۱ به ۳ وجود داشته باشد. با این استدلال $[A^۲]_{۱۳}$ نشان‌دهندهٔ تعداد گشت‌های به طول دو از ۱ به ۳ است. با استدلال مشابه، می‌توان قضیهٔ زیر را بیان کرد.

قضیه ۲.۲. اگر A ماتریس مجاورت گراف سودار G باشد، آنگاه درایهٔ (i,j) از ماتریس A^k نشان‌دهندهٔ تعداد گشت‌های به طول k از رأس i به رأس j است.

حال تا حدودی ابزارهای مورد نیاز برای بررسی مسئله رده‌بندی فراهم شد. گراف مثال ۱.۲ برای شش بازیکن تنیس به همراه ماتریس مجاورت آن را در نظر بگیرید. همان‌طور که پیشتر اشاره شد یک راه برای رده‌بندی بازیکن‌ها می‌تواند شمردن تعداد بردهای هر بازیکن باشد. توجه کنید که تعداد بردهای هر بازیکن برابر با مجموع درایه‌های روی سطر نظیر آن بازیکن در ماتریس مجاورت است. پس اگر $X = (۱,۱,۱,۱,۱,۱)^\top$ آنگاه مؤلفه‌های بردار AX به ترتیب تعداد بردهای بازیکن‌ها را نشان می‌دهد و درنتیجه رده‌بندی

$$AX = (۴,۴,۲,۱,۱,۳)^\top$$

حاصل می‌شود.

سؤالی که پیش می‌آید این است که در این رده‌بندی اگر دو بازیکن ردهٔ برابر داشته باشند، آیا می‌توان نتیجه گرفت که به یک اندازه قوی هستند؟ ممکن است بازیکن ۱ استدلال کند که چون ۲ را شکست داده شایستهٔ مقام بهتری از او است (البته استدلالش منطقی به نظر می‌رسد). بازیکن ۴ نیز مدعی است که چون ۵ را شکست داده شایستهٔ مقام بهتری نسبت به او است. اما استدلال ۵ نیز شنیدنی است. او می‌گوید من دو پیروزی غیرمستقیم دارم، زیرا من ۳ را شکست داده‌ام و ۳ نیز بر ۱ و ۴ پیروز شده است. این در حالی است که ۴ تنها یک پیروزی غیرمستقیم دارد (۴ از ۵ و ۵ نیز از ۳ برده است). توجه کنید که بردهای غیرمستقیم این‌چنینی (یعنی با یک واسطه) از گشت‌های به طول ۲ در گراف نظیر به دست می‌آیند. پس مجموع بردهای مستقیم و بردهای با یک واسطه را می‌توانیم از رابطهٔ زیر به دست آوریم

$$(A + A^۲)X = (۱۳,۱۱,۷,۲,۳,۷)^\top.$$

ولی متأسفانه باز هم رتبهٔ ۳ و ۶ یکسان می‌شود. با ادامهٔ این استدلال می‌توان بردهای با دو واسطه را نیز در نظر گرفت، یعنی ماتریس $A^۳$ را نیز در محاسبه وارد کرد

$$(A + A^۲ + A^۳)X = (۲۷,۲۳,۱۷,۴,۸,۱۵)^\top. \qquad (۱.۲)$$

به‌این‌ترتیب بازیکن ۳ رتبهٔ بهتری نسبت به بازیکن ۶ خواهد داشت. با استفاده از توان‌های بالاتر

A به نتایج زیر می‌رسیم

$$(A + A^۲ + \cdots + A^۴)X = (۵۴, ۴۸, ۳۳, ۹, ۱۸, ۳۲)^\top,$$
$$(A + A^۲ + \cdots + A^۵)X = (۱۱۱, ۹۶, ۶۵, ۱۹, ۳۴, ۶۳)^\top,$$
$$(A + A^۲ + \cdots + A^۶)X = (۲۱۶, ۱۸۵, ۱۳۲, ۳۵, ۶۶, ۱۲۱)^\top,$$

که رده‌بندی به دست آمده در (۱.۲) را تأیید می‌کند. می‌توان دید با ادامهٔ این روند هم تغییر خاصی در رده‌بندی رخ نمی‌دهد.

ممکن است به نظر برسد در حالت کلی استفاده از سری

$$(A + A^۲ + A^۳ + \cdots)X$$

می‌تواند برای رده‌بندی مناسب باشد. اما واضح است که این سری ممکن است واگرا باشد. بررسی همگرایی این سری در حالت کلی دشوار است. بعضی از حالت‌های خاص در [۱۸] بررسی شده است. برای اینکه با مسائل همگرایی مواجه نشویم روش اصلی مورد بحث، یعنی روش کِندال–وِی، را در بخش بعد می‌آوریم.

۳ روش کِندال–وِی

در این بخش، روش کِندال–وِی را برای رده‌بندی بازیکن‌های مثال ۱.۲ بیان می‌کنیم. بدین منظور به هر بازیکن، مثلاً بازیکن iاُم، عدد مثبت r_i را متناظر می‌کنیم به‌طوری که اگر $r_i > r_j$، آنگاه نتیجه بگیریم که بازیکن iاُم در رده‌بندی ما جایگاه بهتری از بازیکن jاُم دارد. فرض می‌کنیم برای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۶$ داشته باشیم $۰ \leqslant r_i \leqslant ۱$ و $r_۱ + r_۲ + \cdots + r_۶ = ۱$. همچنین بردار رده‌بندی را به‌صورت $R = (r_۱, r_۲, r_۳, r_۴, r_۵, r_۶)^\top$ در نظر می‌گیریم. منطقی به نظر می‌رسد که ردهٔ هر بازیکن باید متناسب با ردهٔ بازیکن‌هایی باشد که بر آن‌ها پیروز شده است. پس دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید که در آن α همان ضریب تناسب ذکر شده است.

$$\begin{cases} r_۱ = \alpha(r_۲ + r_۴ + r_۵ + r_۶) \\ r_۲ = \alpha(r_۳ + r_۴ + r_۵ + r_۶) \\ r_۳ = \alpha(r_۱ + r_۴) \\ r_۴ = \alpha r_۵ \\ r_۵ = \alpha r_۳ \\ r_۶ = \alpha(r_۳ + r_۴ + r_۵) \end{cases}$$

اگر این دستگاه را به زبان ماتریسی بنویسیم داریم $R = \alpha AR$، پس $AR = \frac{1}{\alpha}R$. یعنی R ویژه‌بردار ماتریس A نظیر ویژه‌مقدار $\frac{1}{\alpha}$ است. یادآوری می‌کنیم که ویژه‌برداری از ماتریس مربعی M از مرتبهٔ n، بردار ناصفر $X \in \mathbb{C}^n$ است به‌طوری که عدد $\lambda \in \mathbb{C}$ وجود داشته باشد که $MX = \lambda X$. در این صورت λ را ویژه‌مقدار و X را ویژه‌بردار نظیر λ برای M می‌نامیم.

بردار رده‌بندی R ویژه‌برداری از A موجود است که همهٔ درایه‌های آن حقیقی و مثبت‌اند، چنین برداری را یک بردار مثبت می‌نامیم. همچنین این ویژه‌بردار باید نظیر یک ویژه‌مقدار حقیقی مثبت باشد (یعنی همان $\frac{1}{\alpha}$). با محاسبهٔ ویژه‌مقدارهای A می‌بینیم که A شش ویژه‌مقدار دوبه‌دو متمایز دارد. از میان این شش ویژه‌مقدار چهار عدد غیرحقیقی با ویژه‌بردارهای غیرحقیقی هستند که در این بحث از آن‌ها نمی‌توان استفاده کرد. دو ویژه‌مقدار حقیقی A (به‌طور تقریبی) به ترتیب برابرند با $\lambda_۱ = -۰/۴۹۳$ و $\lambda_۲ = ۱/۹۱۷$. ویژه‌بردارهای متناظر با این دو مقدار نیز (به‌طور تقریبی) به ترتیب برابرند با

$$X_۱ = (۰/۷۳۶,\ -۱/۰۲۹,\ -۰/۱۶,\ -۰/۶۵۷,\ ۰/۳۲۴,\ ۱)^{\top},$$
$$X_۲ = (۱/۷۵۸,\ ۱/۵۲۲,\ ۱/۰۶۹,\ ۰/۲۹۱,\ ۰/۵۵۷,\ ۱)^{\top}.$$

بنابراین تنها انتخاب ممکن برای بردار رده‌بندی R بردار نرمال‌شدهٔ $\frac{۱}{\|X_۲\|_۱}X_۲$ است که در آن $\|X_۲\|_۱$ برابر با مجموع قدرمطلق‌های مؤلفه‌های $X_۲$ است، یعنی

$$R = (۰/۲۸۴,\ ۰/۲۴۶,\ ۰/۱۷۲,\ ۰/۰۴۷,\ ۰/۰۹۰,\ ۰/۱۶۱)^{\top}.$$

توجه کنید که این بردارْ رده‌بندی به دست آمده در بخش قبل را تأیید می‌کند.

سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا در حالت کلی ماتریس Aی حاصل از یک لیگ دلخواه دارای ویژه‌مقداری حقیقی و مثبت است؟ در صورت مثبت‌بودن پاسخ آیا ویژه‌مقداری حقیقی و مثبت وجود دارد که ویژه‌بردار نظیرش نیز مثبت باشد؟ همچنین آیا ممکن است دو ویژه‌بردار مثبتِ خطی‌مستقل داشته باشیم؟ توجه کنید که این حالت مطلوب نیست، زیرا در این صورت مشخص نیست کدام بردار برای رده‌بندی مناسب است. برای پاسخ به این سؤال‌ها به مقدماتی نیاز داریم که در بخش بعد به آن‌ها می‌پردازیم.

۴ ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر و اولیه

در این بخش ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر و اولیه را تعریف و برخی از ویژگی‌های آن‌ها را بررسی

می‌کنیم. خواهیم دید که این ماتریس‌ها نقش مهمی در مسئلهٔ رده‌بندی دارند. ماتریس مربعی P را یک ماتریس جایگشتی می‌نامیم هرگاه سطرهای آن جایگشتی از سطرهای ماتریس همانی باشند. به‌عبارت‌دیگر ماتریس جایگشتی P ماتریسی با درایه‌های صفر و یک است که در هر سطر و هر ستون از آن دقیقاً یک درایه برابر ۱ است. هر ماتریس جایگشتی $n \times n$ را می‌توان به‌صورت

$$\begin{pmatrix} e_{\pi(۱)} \\ e_{\pi(۲)} \\ \vdots \\ e_{\pi(n)} \end{pmatrix}$$

نوشت که در آن $\pi \in S_n$ یک جایگشت و e_i بردار سطری یکهٔ استاندارد iاُم $\mathbb{R}^n$ است. برای مثال، دور $\pi = (۱\ ۲\ ۳)$ از $S_۳$ را در نظر بگیرید. با استفاده از این دور ماتریس جایگشتی زیر را می‌توان به‌دست آورد

$$P = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}.$$

توجه کنید که ماتریس P را می‌توان با اعمال جایگشت $\pi^{-۱} = (۱\ ۳\ ۲)$ روی ستون‌های ماتریس همانی نیز به دست آورد. به‌سادگی می‌توان دید برای هر ماتریس جایگشتی P، $PP^\top = I$.

ماتریس مربعی M از مرتبهٔ n را تحویل‌پذیر می‌نامیم هرگاه ماتریس جایگشتی P وجود داشته باشد که $PMP^\top$ یک ماتریس بلوکی بالامثلثی با بلوک‌های از مرتبهٔ ناصفر باشد، یعنی

$$PMP^\top = \begin{pmatrix} M_{۱۱} & M_{۱۲} \\ 0 & M_{۲۲} \end{pmatrix}$$

که در آن $M_{۱۱}$ و $M_{۲۲}$ دو ماتریس مربعی به ترتیب از مرتبه‌های ناصفر k و $n-k$ و $M_{۱۲}$ یک ماتریس $k \times (n-k)$ است. ماتریس مربعی را که تحویل‌پذیر نباشد تحویل‌ناپذیر می‌نامیم. شایان ذکر است که با این تعریف ماتریس صفر از مرتبهٔ ۱ تحویل‌ناپذیر و از مرتبه‌های بالاتر تحویل‌پذیر است. قضیهٔ زیر یک شرط معادل را برای تحویل‌ناپذیری ماترس‌ها بیان می‌کند.

قضیه ۱.۴ ([۸]). ماتریس مربعی M از مرتبهٔ n تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر برای هر دو اندیس $۱ \leqslant i \neq j \leqslant n$ عدد طبیعی m وجود داشته باشد که مؤلفهٔ (i,j) از ماتریس M^m مثبت باشد.

اگر M یک ماتریس مربعی حقیقی باشد، شعاع طیفی M را که با $\rho(M)$ نمایش داده می‌شود

برابر با بیشترین مقدار قدرمطلق‌های ویژه‌مقدارهای M تعریف می‌کنیم. همچنین ماتریس M را نامنفی (مثبت) می‌نامیم هرگاه همهٔ درایه‌های آن نامنفی (مثبت) باشند. قضیهٔ زیر یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر با درایه‌های نامنفی را بیان می‌کند.

قضیه ۲.۴ (قضیهٔ پرون–فروبنیوس [۸]). فرض کنید M یک ماتریس تحویل‌ناپذیر نامنفی باشد. در این صورت $\rho(M)$ ویژه‌مقداری از M است. به‌علاوه، ویژه‌بردار مثبتِ یکتایی موسوم به ویژه‌بردار پرون مانند $R = (r_1, \ldots, r_n)^\top$ از M وجود دارد که $\|R\|_1 = 1$.

در ادامهٔ این بخش روش تکرار برای یافتن ویژه‌بردار پرون را می‌آوریم. برای این کار به مفهوم ماتریس‌های اولیه نیاز داریم. ماتریس مربعی M را یک ماتریس اولیه می‌نامیم هرگاه عدد طبیعی m وجود داشته باشد که M^m یک ماتریس مثبت باشد. با استفاده از قضیهٔ ۱.۴ واضح است که هر ماتریس اولیه یک ماتریس تحویل‌ناپذیر است. در حالت کلی ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر زیادی وجود دارند که اولیه نباشند. برای مثال، ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید که برای آن داریم

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

بنابراین، طبق قضیهٔ ۱.۴، ماتریس A تحویل‌ناپذیر است. اما A اولیه نیست، زیرا هیچ توانی از A، مثبت (همهٔ درایه‌ها مثبت) نخواهد شد.

قضیه ۳.۴ ([۸]). فرض کنید M یک ماتریس اولیه‌ی نامنفی باشد. اگر λ ویژه‌مقداری از M باشد که $\rho(M) = |\lambda|$، آنگاه $\lambda = \rho(M)$.

توجه کنید که قضیهٔ ۳.۴ بیان می‌کند که تنها ویژه‌مقدار ماتریس اولیهٔ نامنفی M با بیشترین قدر مطلق همان $\rho(M)$ است. به‌خصوص، این ویژه‌مقدار حقیقی و مثبت است. قضیهٔ زیر برای یافتن ویژه‌بردار پرون با استفاده از تکرار توان‌ها قضیهٔ مفیدی است.

قضیه ۴.۴ ([۸]). فرض کنید M یک ماتریس اولیهٔ نامنفی از مرتبهٔ n و v_0 یک بردار nتایی مثبت باشد که $\|v_0\|_1 = 1$. برای هر عدد طبیعی k تعریف کنید $v_k = \frac{Av_{k-1}}{\|Av_{k-1}\|_1} = \frac{A^k v_0}{\|A^k v_0\|_1}$. در این صورت دنبالهٔ $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ به ویژه‌بردار پرون M همگرا است.

برای مثال، ماتریس A در مثال ۱.۲ را در نظر بگیرید. می‌توان دید که همهٔ درایه‌های A^7 مثبت‌اند و درنتیجه A یک ماتریس اولیه است. ویژه‌بردار پرون A همان بردار رده‌بندی $R = (0/284, 0/246, 0/172, 0/047, 0/090, 0/161)^\top$ است. طبق قضیهٔ ۴.۴ این بردار را می‌توان با محاسبهٔ حد دنبالهٔ $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ برای بردار دلخواه v_0 با شرط $\|v_0\|_1 = 1$ (مثلاً $(v_0 = \frac{1}{6}(1, 1, 1, 1, 1, 1)^\top$) به دست آورد. برای $k = 15$ داریم

$$v_{15} = \left(\frac{36577}{128757}, \frac{10542}{42919}, \frac{22162}{128757}, \frac{6074}{128757}, \frac{11545}{128757}, \frac{20773}{128757}\right)^\top$$

که تا ۳ رقم اعشار با بردار R یکسان است.

۵ روش کِندال-وِی در حالت کلی

در این بخش مسئلهٔ رده‌بندی را در حالت کلی در نظر می‌گیریم. گیریم در یک لیگ n بازیکن دوبه‌دو با هم مسابقه داده‌اند. فرض کنید G گراف سودار متناظر با نتایج این لیگ و A ماتریس مجاورت گراف G است. در این صورت A ماتریسی با درایه‌های صفر و یک است به‌طوری که $A + A^\top = J - I$ که در آن I ماتریس همانی و J ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n است که همهٔ درایه‌های آن ۱ است. چنین ماتریسی را در حالت کلی یک ماتریس تورنمنت[1] می‌نامیم. اگر A تحویل‌ناپذیر باشد، می‌توان از ویژه‌بردار پرون که در بخش قبل تعریف شد برای رده‌بندی تیم‌ها استفاده کرد. پس فرض کنید A تحویل‌پذیر است. بنابراین ماتریس جایگشتی P وجود دارد که

$$PAP^\top = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

که در آن A_{11} و A_{22} ماتریس‌های مربعی به ترتیب از مرتبه‌های ناصفر k و $n-k$ بوده و A_{12} یک ماتریس $k \times (n-k)$ است. توجه کنید که از برابری $A + A^\top = J - I$ نتیجه می‌شود A_{11} و A_{22} هر دو ماتریس تورنمنت هستند و نیز همهٔ درایه‌های A_{12} برابر یک است. با توجه به اینکه $P^\top = P^{-1}$، ویژه‌مقدارهای دو ماتریس A و $PAP^\top$ یکسان هستند. همچنین اگر v ویژه‌بردار نظیر λ برای ماتریس A باشد، آنگاه Pv ویژه‌بردار نظیر λ برای ماتریس $PAP^\top$ است. از طرفی اگر ماتریس P از تأثیر جایگشت $\pi \in S_n$ بر سطرهای ماتریس همانی به دست آمده باشد، ماتریس PA ماتریسی است که با تأثیر π روی سطرهای A به دست می‌آید. همچنین

1. tournament

ماتریس $PAP^\top$ با تأثیر π روی ستون‌های PA به دست می‌آید. بنابراین درایهٔ (i,j) ماتریس $PAP^\top$ برابر است با درایهٔ $(\pi(i),\pi(j))$ ماتریس A. به‌بیان‌دیگر $PAP^\top$ ماتریس مجاورت گراف سوداری مانند H است که از تغییر نام رئوس G (با اعمال π روی آن‌ها) به دست می‌آید. بنابراین بدون کاستن از کلیت، می‌توان از ماتریس $PAP^\top$ به‌جای A استفاده کرد.

با توجه به اینکه درایه‌های ماتریس $A_{۱۲}$ همگی برابر یک هستند مجموع هریک از k سطر اول $PAP^\top$ حداقل برابر $n-k$ است، درحالی‌که مجموع $n-k$ سطر باقی‌ماندهٔ $PAP^\top$ حداکثر $n-k-۱$ است. همچنین هریک از k بازیکن اول تمامی $n-k$ بازیکن دیگر را شکست داده‌اند. $n-k$ بازیکن آخر حتی با واسطه نیز هیچ‌یک از k بازیکن اول را شکست نداده‌اند. بنابراین k بازیکن اول از هر لحاظ رتبهٔ بهتری نسبت به $n-k$ بازیکن دیگر خواهند داشت. بااین‌حساب کافی است رتبهٔ بازیکن‌های متناظر با بلوک‌های $A_{۱۱}$ و $A_{۲۲}$ را جداگانه حساب کنیم. حال اگر هریک از این دو ماتریس تحویل‌پذیر باشند، با ادامهٔ این روند و استقرای ریاضی می‌توان به یک ماتریس بلوکی بالامثلثی رسید که همهٔ بلوک‌های روی قطر آن تحویل‌ناپذیرند و رتبهٔ بازیکن‌های متناظر با هر بلوک روی قطر از بازیکن‌های متناظر با بلوک‌های پایین‌تر از خود بهتر است. با توجه به اینکه هریک از این بلوک‌ها تحویل‌ناپذیرند، می‌توان از ویژه‌بردار پرون هریک برای رده‌بندی بازیکن‌هایشان استفاده کرد. بنابراین مسئلهٔ رده‌بندی برای کل ماتریس $PAP^\top$ و درنتیجه ماتریس A حل می‌شود.

مثال ۱.۵. فرض کنید

$$A=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}.$$

واضح است که رده‌بندی بازیکن‌ها باید به شکل $r_۱ > r_۲ > r_۳$ باشد. از طرفی A تحویل‌پذیر است و ویژه‌برداری مثبت ندارد. بنابراین، برای استفاده از روش ویژه‌بردار پرون باید بلوک‌های تحویل‌ناپذیر A را در نظر بگیریم که سه بلوک صفر از مرتبهٔ ۱ است. با این توضیحات رتبهٔ بازیکن هر بلوک از بازیکن‌های بلوک‌های پایین‌تر از خود بهتر است. در نتیجه، رده‌بندی $r_۱ > r_۲ > r_۳$ با استفاده از روش ویژه‌بردار پرون تأیید می‌شود.

حال رده‌بندی متناظر با این ماتریس را از روش بخش دوم، یعنی شمارش بردهای مستقیم و با واسطه حل می‌کنیم. فرض کنید $X=(۱,۱,۱)^\top$. همچنین برای عدد طبیعی k تعریف کنید $X_k=(A+A^۲+\cdots+A^k)X$. در این صورت $X_۱=(۲,۱,۰)^\top$ و $X_۲=(۳,۱,۰)^\top$. چون $A^۳=۰$، پس برای $k\geqslant ۳$ داریم $X_k=X_۲$. بنابراین این روش نیز رده‌بندی به‌دست آمده

را تأیید می‌کند. مزیت این روش (در اینجا) این است که نیازی به بلوک‌بندی ماتریس A ندارد.

مثال ۲.۵. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}.$$

در این صورت A یک ماتریس اولیه است، زیرا همهٔ درایه‌های $A^۶$ مثبت‌اند. ویژه‌بردار پرون A عبارت است از

$$(۰/۳۰۲, ۰/۲۵۶, ۰/۱۶۲, ۰/۱۰۲, ۰/۱۷۶)^\top.$$

نکتهٔ جالب در مورد این ماتریس آن است که با وجود اینکه تعداد بردهای بازیکن ۳ از ۵ بیشتر است، اما بازیکن ۵ رتبهٔ بهتری کسب می‌کند؛ زیرا تنها پیروزی بازیکن ۵ برابر قوی‌ترین بازیکن یعنی بازیکن ۱ بوده است. می‌توان نشان داد ماتریس A کوچک‌ترین ماتریس تورنمنت است که رده‌بندی حاصل از بردار مجموع امتیازات (یعنی بردار AX) با رده‌بندی حاصل از روش کِندال–وِی تفاوت دارد [۳]. خانواده‌ای نامتناهی از ماتریس‌های با این خاصیت را می‌توان در [۱] دید. ازسوی‌دیگر، رده‌ای از ماتریس‌های تورنمنت که دو رده‌بندی یادشده برای آن‌ها یکسان باشد در [۶] آمده است.

اینک روش شمارش بردهای مستقیم و با واسطه را برای این ماتریس به کار می‌بریم. برای عدد طبیعی k تعریف کنید

$$X_k = (A + A^۲ + \cdots + A^k)X$$

که در آن $X = (۱, ۱, ۱, ۱, ۱)^\top$. داریم

$$\begin{aligned} X_۱ &= (۳, ۳, ۲, ۱, ۱)^\top, \\ X_۲ &= (۹, ۷, ۴, ۲, ۴)^\top, \\ X_۳ &= (۱۶, ۱۳, ۸, ۵, ۱۰)^\top, \\ X_۴ &= (۲۹, ۲۶, ۱۷, ۱۱, ۱۷)^\top, \\ X_۵ &= (۵۷, ۴۸, ۳۰, ۱۸, ۳۰)^\top, \\ X_۶ &= (۹۹, ۸۱, ۵۰, ۳۱, ۵۸)^\top, \\ X_۷ &= (۱۶۵, ۱۴۲, ۹۱, ۵۹, ۱۰۰)^\top. \end{aligned}$$

می‌توان دید که از $X_۶$ به بعد این رده‌بندی با رده‌بندی حاصل از روش کِندال–وِی یکسان است.

مثال ۳.۵. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

که در آن P ماتریس جایگشتی حاصل از تأثیر دور $\pi = (۱\ ۶\ ۷\ ۴\ ۵\ ۳\ ۲) \in S_۷$ بر سطرهای ماتریس همانی است. در این صورت

$$PAP^{\top} = \begin{pmatrix} M_{۱۱} & M_{۱۲} \\ 0 & M_{۲۲} \end{pmatrix}$$

که در آن

$$M_{۱۱} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad M_{۱۲} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}, \quad M_{۲۲} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}.$$

بنابراین A تحویل‌پذیر است و هریک از ۴ بازیکن نظیر بلوک $M_{۱۱}$ رتبهٔ بهتری نسبت به بازیکن‌های نظیر بلوک $M_{۲۲}$ دارند. پس کافی است بازیکن‌های نظیر $M_{۱۱}$ و $M_{۲۲}$ را جداگانه رده‌بندی کنیم. ویژه‌بردار پرون نظیر $M_{۱۱}$ و $M_{۲۲}$ به ترتیب برابر است با $R_۱ = (۰٫۲۸۳, ۰٫۱۶۵, ۰٫۲۳۰, ۰٫۳۲۱)^{\top}$ و $R_۲ = (۰٫۳۳۳, ۰٫۳۳۳, ۰٫۳۳۳)^{\top}$. بنابراین رده‌بندی

$$r_۴ > r_۱ > r_۳ > r_۲ > r_۵ = r_۶ = r_۷$$

برای بازیکن‌های نظیر ماتریس $PAP^{\top}$ حاصل می‌شود. با اعمال دور $\pi^{-۱} = (۱\ ۲\ ۳\ ۵\ ۴\ ۷\ ۶)$ بر رده‌بندی بالا، رده‌بندی متناظر با A به‌صورت

$$r_۷ > r_۲ > r_۵ > r_۳ > r_۴ = r_۱ = r_۶$$

به دست می‌آید. شایان ذکر است که بازیکن‌های ۱، ۴، و ۶ هیچ‌یک بر دیگری برتری ندارد. زیرا بازیکن ۱ بر ۴، بازیکن ۴ بر ۶، و بازیکن ۶ بر ۱ پیروز شده است. همچنین همهٔ این بازیکن‌ها از بقیهٔ بازیکن‌ها شکست خورده‌اند.

حال برای عدد طبیعی k تعریف کنید $X_k = (A + A^{۲} + \cdots + A^k)X$ که در آن $X = (۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱)^\top$. در این صورت

$$X_۱ = (۱, ۵, ۴, ۱, ۴, ۱, ۵)^\top,$$

$$X_۲ = (۲, ۱۶, ۱۱, ۲, ۱۲, ۲, ۱۷)^\top,$$

$$X_۳ = (۳, ۳۴, ۲۲, ۳, ۲۷, ۳, ۳۸)^\top,$$

$$X_۴ = (۴, ۶۳, ۴۰, ۴, ۵۱, ۴, ۷۰)^\top.$$

می‌توان دید که از $X_۲$ به بعد این رده‌بندی با رده‌بندی حاصل از روش کِندال–وِی یکسان است.

بحث خود را با گفتن این نکته به پایان می‌بریم که کِندال در [۹] به‌جای ماتریس A از ماتریس $A + \frac{۱}{۲}I$ استفاده کرده است. می‌توان نشان داد برای ماتریس تورنمنت تحویل‌ناپذیر A ویژه‌بردار پرون حاصل از ماتریس $A + \frac{۱}{۲}I$ با ویژه‌بردار پرون حاصل از A یکی است [۳]. بنابراین استفاده از هر دو ماتریس برای رده‌بندی به نتیجهٔ یکسانی می‌انجامد.

مراجع

[1] Bryce, R. A., Smythe, N. F., A note on ranking tournaments, *Austral. Math. Soc. Gaz.*, **7** (1980), no. 1, 5-10.

[2] Daniels, H. E., Round-robin tournament scores, *Biometrica*, **56** (1969), 295-299.

[3] David, H. A., Ranking the players in a round robin tournament, *Revue de l'Institut International de Statistique*, **39** (1971), no. 2, 137-147.

[4] David, H. A., Ranking from unbalanced paired-comparison data, *Biometrika*, **74** (1987), no. 2, 432-436.

[5] David, H. A., *The Method of Paired Comparisons*, 2nd ed., Charles Griffin & Co., Ltd., London, 1988.

[6] Eschenbach, C., Hall, F., Hemasinha, R., Kirkland, S., Li, Z., Shader, B., Stuart, J., Weaver, J., Properties of tournaments among well-matched players, *Amer. Math. Monthly*, **107** (2000), no. 10, 881-892.

[7] Goddard, S. T., Ranking in tournaments and group decisionmaking, *Management Sci.*, **29** (1983), no. 12, 1384-1392.

[8] Horn, R. A., Johnson, C. R., *Matrix Analysis*, 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[9] Kendall, M. G., Further contributions to the theory of paired comparisons, *Biometrics*, **11** (1955), 43-62.

[10] Kirkland, S., A note on Perron vectors for almost regular tournament matrices, *Linear Algebra Appl.*, **266** (1997), 43-47.

[11] Landau, E., Zur relativen Wertbemessung der Turnierresultate, *Deutsches Wochenschach*, **11** (1895), 366-369.

[12] Landau, E., Über Preisverteilung bei Spieltunrnieren, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, **63** (1915), 192-202.

[13] Maybee, J. S., Pullman, Norman J., Tournament matrices and their generalizations, I, *Linear Multilinear Algebra*, **28** (1990), no. 1-2, 57-70.

[14] Moon, J. W., *Topics on Tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, London, 1968.

[15] Ramanujacharyulu, C., Analysis of preferential experiments, *Psychometrika*, **29** (1964), 257-261.

[16] Seeley, J. R., The net of reciprocal influence: A problem in treating sociometric data, *Canadian Journal of Psychology*, **3** (1949), no. 4, 234-240.

[17] Stob, M., Rankings from round-robin tournaments., With a reply by Stephen Goddard, *Management Sci.*, **31** (1985), no. 9, 1191-1195.

[18] Vigna, S., Spectral ranking, *Network Science*, **4** (2016), no. 4, 433-445.

[19] Wei, T. H., The algebraic foundations of ranking theory, Ph.D. thesis, Cambridge University, 1952.

رسول کاظمی: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: `r.kazemi@kashanu.ac.ir`

امیرحسین نخودکار: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: `a.nokhodkar@kashanu.ac.ir`

Mathematical Culture and Thought
Volume 43, Number 1, Spring/Summer 2024, Pages 213–227
doi: 10.30504/mct.2023.1361.1952

An Application of Linear Algebra in the Ranking Problem of Sports Teams

R. Kazemi[1]✉, A. H. Nokhodkar[2]

[1,2] Faculty of Mathematics, University of Kashan, Iran

Abstract. In this paper, a simple application of linear algebra to the problem of ranking players in a tournament is given. We will see that in the case where every player plays exactly one match against each of the other players, one can use a certain eigenvector of the score matrix, known as Perron eigenvalue, to rank players.

Keywords: ranking problem, tournament matrix, Perron eigenvector, irreducible matrix, primitive matrix
Article history: Recieved 21 January 2023; Accepted 27 May 2023
Article type: survey

1. r.kazemi@kashanu.ac.ir
2. a.nokhodkar@kashanu.ac.ir