فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۳، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۳)، صص ۲۲۹ تا ۲۳۸

نگاهی اجمالی به پژوهش‌های دومینیل–کوپَن*

جفری آر. گریمت
ترجمهٔ رامین کاظمی

چکیده. این مقاله شرحی از تحقیقات علمی اوگو دومینیل–کوپَن هنگام دریافت جایزهٔ فیلدز در سال ۲۰۲۲ است. او این جایزه را برای حل مسائل قدیمی نظریهٔ احتمالاتی گذار فاز در فیزیک آماری، به‌ویژه در ابعاد سه و چهار دریافت کرد.

۱ بررسی اجمالی

مغناطیس یخ ذوب می‌شود، آب می‌جوشد، این‌ها نمونه‌هایی از «گذار فاز» هستند. نوع دیگری از گذار را پی‌یر کوری[1] در رسالهٔ دکترایش در سال ۱۸۹۵ به‌صورت تجربی مطالعه کرد. یک میلهٔ مغناطیدهٔ آهنی خاصیت مغناطیسی خود را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر دمای T به اندازهٔ کافی پایین باشد، یا به‌طور خاص برای دمای بحرانی T_c، $T \leq T_c$. امروزه T_c «نقطهٔ کوری» نامیده می‌شود (برای آهن، $T_c \approx ۷۷۰^\circ C$).

بی‌نظمی فضایی ذرات گاز از طریق یک مادهٔ بی‌نظم[2] تصفیه می‌شوند. در مقیاس میکروسکوپی، محیط شامل شکاف‌هایی است که برخی و نه همهٔ آن‌ها به اندازهٔ کافی گشاد هستند تا اجازهٔ عبور گاز را بدهند. یک سؤال منطقی این است که آیا گاز از فیلتر عبور می‌کند یا خیر؟

عبارات و کلمات کلیدی: گذار فاز، مدل آیزینگ، مدل پرکولاسیون، مدل پاتس، قدم‌زدن‌های از خودگریز
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۷/۲۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۹/۷

*Grimmett, Geoffrey R., The work of Hugo Duminil-Copin, *INSMI (CNRS) Newsletter*, July 5, 2022.

1. Pierre Curie 2. disorder

© ۱۴۰۳(انجمن ریاضی ایران)
doi: 10.30504/mct.2022.1335.1929

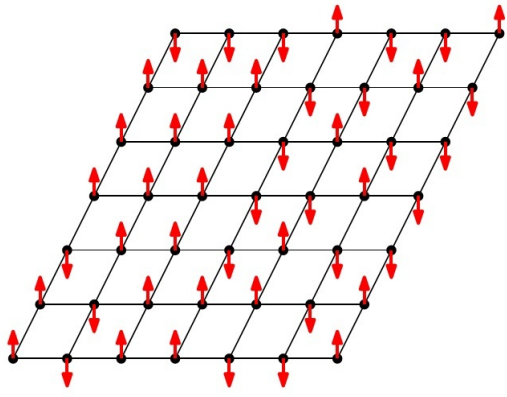
ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان نظری از طریق ساختن و تحلیل مدل‌های مفهومی به مطالعهٔ چنین سیستم‌هایی می‌پردازند. مدل‌های پایه‌ای مغناطیسی و بی‌نظمیِ فضایی به ترتیب «مدل آیزینگ»[1] (سال ۱۹۲۰) و «مدل پرکولاسیون»[2] (سال ۱۹۵۷) هستند. شکل‌های ۱ و ۲ را ببینید.

این دو مدل در یک خانوادهٔ بزرگ (و در حال رشد) از مدل‌های بی‌نظمی در سیستم‌های فیزیکی قرار می‌گیرند. آن‌ها در کنار مدل‌های مشابه توجه بسیاری از ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان را به خود جلب کرده‌اند. هر مدل دارای یک گذار فاز است و چالش‌های اصلی در درک ماهیت این گذار نهفته است. ریاضیاتِ چنین سیستم‌هایی شاخه‌شاخه، بسیار فنی، و پیچیده است. مسائل مهم بسیاری حل شده‌اند و بسیاری دیگر باقی مانده‌اند. برای مثال، مدل آیزینگ دوبُعدی تاکنون تا حد زیادی توسط ریاضی‌دانان بررسی شده است، درحالی‌که فیزیک‌دانان در بررسی این مدل در سه بُعد بسیار جلوتر از ریاضی‌دانان هستند. در سال‌های اخیر هیچ‌کس بیش از اوگو دومینیل–کوپَن[3] نظریهٔ ریاضی این سیستم‌ها و سیستم‌های مرتبط را پیش نبرده است. اوگو ریاضی‌دانی خارق‌العاده است که به پیشرفت‌های عظیمی دست یافته است. آثار فراوان او در نظریهٔ پدیده‌های بحرانی منجر به حل مسائلی قدیمی و مهم شده و مسیرهای جدیدی را برای پژوهش گشوده است.

دومینیل–کوپَن از زمان نگارش رسالهٔ دکترایش در سال ۲۰۱۱ به بعد تأثیر یگانه و شگرفی بر جنبهٔ دقیق نظریهٔ گذار فاز داشته است. او در مقالات متعددی، که عمق و گستردگی ویژگی آن‌ها است، طیف وسیعی از مسائل مهم را حل کرده و تازگی و وضوح را وارد کار کرده است. درعین‌حال، او ویژگی‌های بارز رهبری یک تیم پژوهشی را در راهنمایی پژوهشگران تازه‌کار از خود نشان داده است.

کار اولیهٔ دومینیل–کوپَن عمدتاً حول این فکر استوار بود که سیستم‌های بحرانی در دو بُعد تحت «نگاشت‌های همدیس» تغییر نمی‌کنند. این نگاشت‌ها از اتساع و دوران‌های موضعی تشکیل می‌شوند. این مبحث در بیست سال گذشته شاهد پیشرفتی فوق‌العاده بوده است که با معرفی نوعی

1. Ising model 2. percolation model 3. Hugo Duminil-Copin



نمایشی از مدل آیزینگ روی مشبکهٔ مربعی. هر رأس نشان‌دهندهٔ ذره‌ای باردار است که به‌صورت قطب شمال یا قطب جنوب مدل‌بندی شده است. احتمال یک پیکربندی به تعداد جفت‌های نزدیک‌ترین همسایه با قطب‌های مشابه بستگی دارد.

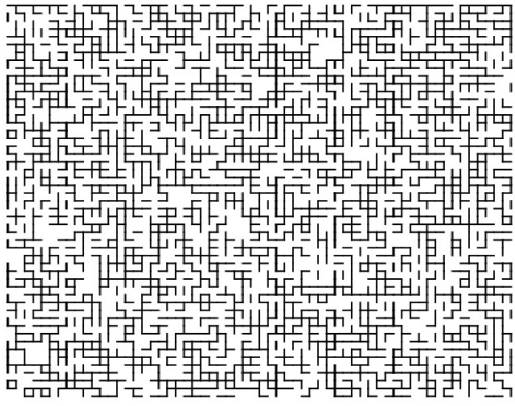
خم تصادفی به‌نام SLE[1] توسط شِرام[2] شروع شده است. دومینیل–کوپَن درحالی‌که تنها بیست و چندسال داشت چندین نتیجهٔ اساسی ازجمله استنتاج حدس قدیمی احتمالات بحرانی و ثابت‌های اتصال را به دست آورد.

فرضیهٔ «جهان‌شمولی» در چنین زمینه‌هایی حاکی از این است که ماهیت یک گذار فاز تنها به نوع مدل و ابعادِ مورد بحث بستگی دارد؛ بنابراین، برای مثال، انتظار داریم که گذار فاز پرکولاسیون روی مشبکه‌های مربعی و مثلثی جهان‌شمول باشد. دومینیل–کوپَن علائق تحقیقاتی خود را به مطالعهٔ جهان‌شمولی در فیزیک آماری گسترش داد و نتایج برجسته‌ای ازجمله روابط مقیاس‌بندی برای مدل‌های تصادفی–خوشه‌ای خاص را که هر دو مدل آیزینگ و پرکولاسیون به همراه ویژگی‌های بَرخالی[3] گذار فاز پیوستهٔ آن‌ها را در بر می‌گیرد به دست آورد.

دومینیل–کوپَن برای گذر از حالت دوبُعد ابزارهای جدیدی را برای حل تعدادی از مسائل کلاسیک حل‌نشده در پدیده‌های بحرانی ابداع کرده است که از آن جمله می‌توان به (الف) پیوستگی گذار فاز مدل سه بُعدی آیزینگ، (ب) «بی اهمیت بودن» محدودیت‌های مقیاس‌بندی مدل آیزینگ در چهار بُعد، و (پ) تیزی گذار فاز برای طیف وسیعی از مدل‌های تصادفی در ابعاد دلخواه اشاره کرد. او همچنین در نظریهٔ فازهای غیربحرانیِ تعدادی از مدل‌های فیزیک آماری پیشرفت‌های قابل‌توجه و کلی داشته است.

در بخش‌های بعد مجموعه‌ای از نتایج عمیق و متنوع دومینیل–کوپَن را با جزئیات بیشتری

1. Schramm–Loewner evolution 2. Oded Schramm 3. fractal



شبیه‌سازی پرکولاسیون‌بَندی روی $\mathbb{Z}^2$ که در آن هر یال با احتمال $p = ۰/۵۱$ «باز» است. این فرایند به‌سختی فوق بحرانی است.

شرح می‌دهیم. برای خلاصه‌ای از برخی دستاوردهای او خواننده می‌تواند به [۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲] مراجعه کند.

بیشتر مقالات اوگو به‌طور مشترک با دیگران نوشته شده است. او همواره مشتاق در میان گذاشتن افکار خود با دیگران بوده است و با طیف گسترده‌ای از همکاران، چه جوان و چه مسن، بی‌تکلف و عمیقاً همکاری می‌کند. این عمل تأثیر چشمگیر او بر علم را بسیار بالا برده و بیشتر کرده است.

۲ مدل‌های پرکولاسیون، آیزینگ، و پاتس

مدل تصادفی–خوشه‌ای را فورتیوئین[1] و کاستِلین[2] در حدود سال ۱۹۷۰ به منظور یکپارچه‌سازی شبکه‌های الکتریکی، پرکولاسیون، و مدل‌های آیزینگ و پاتس ابداع کردند. در حال حاضر، اتفاق نظری بر یکپارچگی نظریهٔ این مدل‌ها وجود دارد. مدت‌ها حدس زده می‌شد که نقطهٔ بحرانی مدل تصادفی–خوشه‌ای روی مشبکهٔ مربعی با وزن خوشهٔ q نقطهٔ خوددوگان

$$p_c(q) = \frac{\sqrt{q}}{۱ + \sqrt{q}}$$

است. حالت $q = ۱$ نتیجهٔ معروفی از هَریس[3] و کِستن[4] (۱۹۸۰) برای پرکولاسیون، و حالت $q = ۲$

1. Cees M. Fortuin 2. Pieter W. Kasteleyn 3. Theodore E. Harris 4. Harry Kesten

مرتبط با محاسبهٔ اونساگر[1] (۱۹۴۴) برای مدل آیزینگ است. پیشرفت‌هایی برای دامنه‌های خاصی از q حاصل شده بود، امّا نتیجهٔ کلی حل نشده بود تا اینکه دومینیل–کوپَن [۴] (با همکاری بفارا) در سال ۲۰۱۲ آن را اثبات کردند. راه‌حل آن‌ها، در حالت خاص، مقدار حدس‌زدهٔ نقطهٔ بحرانی مدل پاتس q–وضعیتی را روی مشبکهٔ مربعی اثبات کرد [۲۴].

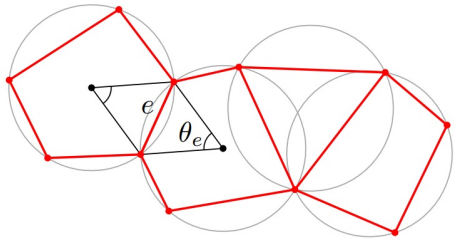
دومینیل–کوپَن و بفارا در [۲۴]، که بعداً به آن باز خواهیم گشت، روش جدیدی را برای اثبات واپاشی نمایی (و دیگر حالت‌ها) ابداع کردند و آن را در طیفی از فرایندها شامل همهٔ مدل‌های تصادفی–خوشه‌ای و مدل‌های پاتس به کار بردند. این کار گامی بزرگ به سوی نظریهٔ نظام‌مند سیستم‌های بی‌نظم بود.

دومینیل–کوپَن نقشی مؤثر در توسیع بسیاری از فنون پرکولاسیون کلاسیک از مدل‌های پرکولاسیون برنولی (مستقل) به ردهٔ بسیار گسترده‌تر مدل‌های «وابسته» داشته است. او با همکاری هونگلر و نولین [۱۸] و بعدها با چلکاک و هونگلر [۶] کران‌های پیشینیِ RSW–نوع را برای احتمالات گذر در مدل آیزینگِ FK اثبات کرد. این یک نمونهٔ اولیه از یک نظریهٔ RSW–نوع برای مدل‌های پرکولاسیون با وابستگی بود و راه را برای پیشرفت‌های بعدی هموار کرد.

در فیزیک توجه زیادی به مسئلهٔ (نا)پیوستگی در گذار فازِ مدل دوبُعدی پاتس شده است. این مسئله را دومینیل–کوپَن در [۱۳] (با همکاری گانی‌بَن، آرل، مانولِسکو، و تاسیون) با اثبات ناپیوستگی برای $q > ۴$ و در [۲۵] (با همکاری سی‌دوراویچس و تاسیون) با شرط $۱ \le q \le ۴$ حل کرد.

دومینیل–کوپَن در دو مقالهٔ برجستهٔ اخیر با همکاری لی و مانولِسکو [۲۱] و مانولِسکو [۲۲] ویژگی‌های مقیاس‌بندی خاصی از مدل‌های تصادفی–خوشه‌ای را اثبات کرده است. مقالهٔ اول مربوط به گراف‌های هم‌شعاع است که در شکل ۳ نشان داده شده است. هم‌شعاعی شناسایی نقاط بحرانی کانونی پیش‌بینی‌شده توسط تبدیل ستاره–مثلث (یا رابطهٔ یانگ–بَکستر[2]) را با استفادهٔ هوشمندانه‌ای از تبدیل ستاره–مثلث، و خواص پوسته‌پوسته شدن خاصی که ممکن است در خانوادهٔ فرایندهای بحرانی هم‌شعاع منتشر شود، امکان‌پذیر می‌سازد. مقالهٔ دوم روابط مقیاس‌بندی را برای مدل بحرانی روی مشبکهٔ مربعی ثابت می‌کند. چنین نتایجی قبلاً تنها در حالت پرکولاسیون $q = ۱$ در اثر معروف کِستن آمده بودند. این دو مقاله به چندین مسئلهٔ حل‌نشدهٔ مهم پاسخ داده‌اند و پیشرفتی مهم در جهت اثبات جهان‌شمولی مدل‌های تصادفی–خوشه‌ای روی گراف‌های هم‌شعاع را نشان می‌دهند.

1. Lars Onsager 2. Yang–Baxter relation



گراف هم‌شعاع مسطح که وجه‌های آن در دایره‌هایی با شعاع ثابت محاط شده‌اند.

یکی از نتایج اخیر دومینیل–کوپَن در این زمینه اثبات جالبی در [۱۹] (با همکاری کوزلوفسکی، کراچیون، و مانولِسکو و اولامارا) است که نشان می‌دهد مدلِ روی مشبکهٔ مربعی با پارامتر $q \in [1, 4]$ در مقیاس‌های بزرگ، ناوردایی هم‌شعاعی دارد. این اثباتْ ترکیبی زیبا از چندین روش ازجمله اصلاح مشبکه با تبدیل‌های ستاره–مثلث و محاسبات مبتنی‌بر رویکرد بِتِه[1] است. این پیشرفت مهم راه را برای رویکردهای دیگری برای اثبات کامل ناوردایی همدیس باز می‌کند.

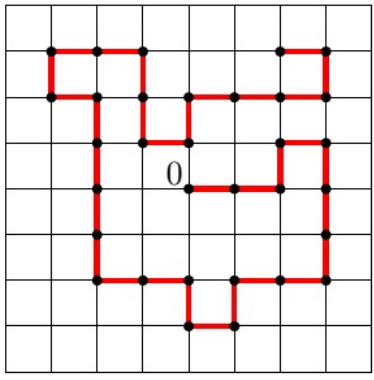
۳ قدم‌زدن‌های از خودگریز

نظریهٔ قدم‌زدن‌های از خودگریز[2] شاید چالش‌برانگیزترین مسائل حل‌نشده در نظریهٔ احتمال و ترکیبیات را موجب شده است (شکل ۴ را ببینید).

دومینیل–کوپَن راه‌حلی شگفت‌انگیز برای حدسی قدیمی ارائه کرد که در آثار نین‌هَش[3] در سال ۱۹۸۲ در نظریهٔ میدان‌های همدیس ظاهر شد. او در [۲۶] (مشترک با اسمیرنوف) ثابت کرد که تعداد قدم‌زدن‌های از خودگریز n–قدمی روی مشبکهٔ شش‌ضلعی به‌صورت $\mu^{n+o(n)}$ رشد می‌کند که در آن $\mu = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. این اثبات زیبا از یک مشاهده‌پذیر پارافرمیونی (شبیه به مشاهده‌پذیر تمام‌ریخت که توسط چلکاک و اسمیرنوف در چارچوب مدل آیزینگ استفاده می‌شود) در کنار استدلال‌های ماهرانهٔ شمارشی و همگرایی بهره می‌گیرد. این نتیجهٔ بنیادی راه را برای اثبات همگرایی به SLEی یک قدم‌زدن از خودگریز تصادفی در دو بُعد باز کرد.

او نتایج مهم دیگری در مورد قدم‌زدن‌های از خودگریز به دست آورده است. اولاً، او در [۱۷] (با همکاری آمون) نشان داد که قدم‌زدن‌های از خودگریز در ابعاد ۲ و بیشتر به‌صورت زیرپرتابشی[4] هستند. شاید این اولین نتیجهٔ جدی در این راستا برای ابعاد «دشوار» ۲ و ۳ باشد. ثانیاً،

1. Bethe ansatz 2. self-avoiding walks 3. Bernard Nienhuis 4. sub-ballistic



قدم‌زدن از خودگریز به طول ۳۱ روی مشبکهٔ مربعی که از مبدأ شروع شده است.

ازسویی‌دیگر، مقالات او (با همکاری گلازمن، هَموند، و مانولِسکو) در مورد غیرموضعی‌سازی [۱۴] و [۲۰] (با همکاری کوزما و یادین) در خصوص ویژگی پُرکنندگی فضای قدم‌زدن‌های از خودگریز زبَربحرانی قابل‌توجه است.

۴ مدل‌های آیزینگ و مشبکهٔ ϕ^4_4

دومینیل–کوپَن به چندین مسئلهٔ کلاسیک مرتبط با پدیده‌های بحرانی پرداخته است که اولین‌بار در دههٔ ۱۹۸۰ مطرح شدند. او این برنامهٔ تحقیقاتی را با شناسایی فهرستی از چالش‌های اساسی آغاز کرد که معمولاً سؤالات اساسی هستند و اهدافی دور از دسترس تلقی می‌شوند. او سپس به ترتیب به این اهداف دست یافت. در برخی موارد این کار از طریق اصلاح و بهبود جسورانهٔ روش‌های شناخته شده و در برخی دیگر از طریق ابداع روش‌های جدید انجام شد.

او در [۲، ۹] (با همکاری آیزنمَن و سیدوراویتسیوس) نشان داد که چگونه می‌توان نمایش جریانِ تصادفیِ مدل آیزینگ را برای حل مسئلهٔ اثبات پیوستگی گذار فاز آیزینگ در سه بُعد گسترش داد. این شاید اولین نتیجه از این دست برای هر سیستم کلاسیکِ سه بُعدی باشد و تصویر مدل آیزینگ را در ابعاد کلی کامل می‌کند. از آن زمان به بعد پژوهشگران زیادی از فنون اثبات به کار رفته در آن مقاله استفاده کردند.

دومینیل–کوپَن در مقالهٔ [۱] (با همکاری آیزنمَن) «بدیهی‌بودن حاشیه‌ای» حدهای مقیاس‌بندی مدل‌های آیزینگ و مشبکهٔ ϕ^4_4 را در چهار بُعد نشان داد. به‌عبارت‌دیگر، اگر حدهای مقیاس‌بندی مدل‌های آیزینگ (نزدیک به) بحرانی را به‌عنوان نظریه‌های میدان‌های اقلیدسی در نظر بگیریم بدیهی

(یا گاوسی) هستند. چنین بدیهی‌بودنی در ابعاد $d \geq ۵$ را آیزنمَن و فرولیش[1] (به‌طور مستقل) در سال‌های ۱۹۸۱ و ۱۹۸۲ ثابت کرده بودند. تعمیم اخیر به بُعد (بحرانی) $d = ۴$ از طریق یک تصحیح تکین در کران‌های ثابت‌شدهٔ قبلی به دست آمد. این مورد نیز از طریق تحلیل چندمقیاسی احتمال اشتراک جریان‌های تصادفی در بُعد آستانهٔ ۴ به دست آمد.

۵ تیزی گذارهای فاز

هدف اصلی پژوهش‌های دومینیل–کوپَن درک فاز زیر و فوق بحرانی مدل‌های فیزیک آماری است. روش‌هایی کلاسیک وجود دارند که امکان مطالعهٔ مقادیر پارامترهای کوچک و بزرگ را فراهم می‌کنند، امّا مطالعهٔ فازها تا نقطهٔ بحرانی بسیار دشوارتر است. دومینیل–کوپَن نتایج تأثیرگذار زیادی در این زمینه دارد که با اثبات نقطهٔ بحرانی مدل خوشه‌ای–تصادفی دوبُعدی شروع می‌شود [۴].

در [۲۴]، دومینیل–کوپَن (با همکاری رئوفی و تاسیون) روشی زیبا برای اثبات فروپاشی نمایی در فاز زیربحرانی توسعه داد و در آن از یک نابرابری برای درخت‌های تصمیم اودانل[2] و همکارانش استفاده کرد. به‌خصوص آن‌ها نحوهٔ استفاده از این نابرابری را برای مدل‌های خوشه‌ای–تصادفی در همهٔ ابعاد شرح داده‌اند. این آخرین نتیجه، که قبلاً تنها برای حالتی که $q = ۱$ یا q به اندازهٔ کافی بزرگ باشد معلوم بود، به یک مسئلهٔ سی‌ساله پاسخ داد. این روشْ کاربردهای جدید بسیاری ازجمله بهترین اثبات واپاشی نمایی برای پرکولاسیون وِرانوی [۲۳] را در خود دارد. این نتیجه برای یک سیستم دو بُعدی با خاصیت دوگانی به انطباق نقطهٔ خوددوگان و نقطهٔ بحرانی منجر می‌شود. این برهان دید ما را از ویژگی به‌اصطلاح «آستانهٔ تیز» تغییر داده است.

یکی از کاربردهای مهم روش بالا در [۱۶] (با همکاری گوسوامی، رودریگس، و سِورِو) ارائه شده است، که در آن دومینیل–کوپَن گذار فاز را برای مجموعهٔ h–سطحیِ میدان آزاد گاوسی در بُعد بزرگ‌تر یا مساوی ۳ مطالعه و تیزی مقدار بحرانی h را ثابت می‌کند.

۶ آثار دیگر

اوگو تعدادی آثار برجسته دیگری دارد که در طبقه‌بندی بالا نمی‌گنجند و در اینجا به چند نمونه از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

او در [۳] (با همکاری بَلوگ، بولّوباش، و موریس) آستانهٔ تیزی را برای پرکولاسیون خودگردان در همهٔ ابعاد به دست داده است.

1. Jürg Fröhlich 2. Ryan O'Donnell

او در [۱۵] (با همکاری گوسوامی، رئوفی، سِورِرو، و یادین) حدس بنیامینی–اشرام را مبنی‌بر اینکه پرکولاسیون برنولی روی گراف کیلی با رشد زبرخطی دارای $p_c < 1$ است ثابت کرد. این امر با به کارگیری یک ارتباط جدید بین پرکولاسیون و میدانِ آزاد گاوسی به دست آمد که ویژگی‌های اتصال خوشه‌های پرکولاسیون را به هندسهٔ گراف مرتبط می‌کند.

مقالهٔ [۵] (با همکاری بنیامینی، کوزما، و یادین) اثر جالبی در مورد ابعاد فضاهای توابع هارمونیک در گراف‌های تصادفی معیّنی است. این موضوع با تعدادی از موضوعات دیگر ازجمله نظریهٔ قدم‌زدن‌های تصادفی در محیط‌های تصادفی مرتبط است.

۷ سخن آخر

اوگو دومینیل–کوپَن راه‌های جدیدی برای بررسی مسائل قدیمی پیدا کرده است. او راه‌حل‌هایی برای مسائل کلاسیک ارائه و در عین‌حال روش‌ها و حدس‌های جدیدی را در این زمینه مطرح کرده است. حوزهٔ علوم ریاضی تا حد زیادی با دستاوردهای او تغییر شکل داده است.

اوگو علاوه‌بر استعداد علمی ویژگی‌های شخصیتی بارزی نیز دارد. اینکه تقریباً تمام مقالات او با همکاری دیگران نوشته شده است نشان دهندهٔ تمایل او به برقراری ارتباط با دیگران و به حرکت درآوردن آن‌ها است، و او همیشه موفق می‌شود.

مراجع

[1] Aizenman, M., Duminil-Copin, H., Marginal triviality of the scalinglimits of critical $4D$ Ising and ϕ_4^4 models, *Ann. of Math.*, **194** (2021), 163-235.

[2] Aizenman, M., Duminil-Copin, H., Sidoravicius, V., Random currents and continuity of Ising model's spontaneous magnetization, *Comm. Math. Phys.*, **334** (2015), 719-742.

[3] Balogh, J., Bollobás, B., Duminil-Copin, H., Morris, R., The sharp threshold for bootstrap percolation in all dimensions, *Trans. Amer. Math.Soc.*, **364** (2012), 2667-2701.

[4] Beffara, V., Duminil-Copin, H., The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$, *Probab. Theory Related Fields*, **153** (2012), 511-542.

[5] Benjamini, I., Duminil-Copin, H., Kozma, G., Yadin, A., Disorder, entropy and harmonic functions, *Ann. Probab.*, **43** (2015), 2332-2373.

[6] Chelkak, D., Duminil-Copin, H., Hongler, C., Crossing probabilities in topological rectangles for the critical planar FK-Ising model, *Electron. J. Probab.*, **21** (2016), paper no. 5.

[7] Duminil-Copin, H., *Parafermionic Observables and Their Applications to Planar Statistical Physics Models*, Ensaios Matemáticos, vol. 25, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013.

[8] Duminil-Copin, H., Order/disorder phase transitions: the example of the Potts model, in *Current Developments in Mathematics 2015*, Int. Press, Somerville, MA, 2016, 27-71.

[9] Duminil-Copin, H., Random currents expansion of the Ising model, in *European Congress of Mathematics*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2018, 869-889.

[10] Duminil-Copin, H., Sixty years of percolation, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians–Rio de Janeiro 2018*, vol. IV, Invited lectures, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018, 2829-2856.

[11] Duminil-Copin, H., Sharp threshold phenomena in statistical physics, *Jpn. J. Math.*, **14** (2019), 1-25.

[12] Lectures on the Ising and Potts models on the hypercubic lattice, in *Random Graphs, Phase Transitions, and the Gaussian Free Field*, Springer Proc. Math. Stat., vol. 304, Springer, Cham, 2020, 35-161.

[13] Duminil-Copin, H., Gagnebin, M., Harel, M., Manolescu, I., Tassion, V., Discontinuity of the phase transition for the planar random-cluster and Potts models with $q > 4$, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, **54** (2021), 1363-1413.

[14] Duminil-Copin, H., Glazman, A., Hammond, A., Manolescu, I., On the probability that self-avoiding walk ends at a given point, *Ann. Probab.*, **44** (2016), 955-983.

[15] Duminil-Copin, H., Goswami, S., Raoufi, A., . Severo, F., Yadin, A., Existence of phase transition for percolation using the Gaussian free field, *Duke Math. J.*, **169** (2020), 3539-3563.

[16] Duminil-Copin, H., Goswami, S., Rodriguez, P-F. , Severo, F., Equality of critical parameters for percolation of gaussian free field level-sets (2020), available at `arXiv: 2002.07735`.

[17] Duminil-Copin, H., Hammond, A., Self-avoiding walk is sub-ballistic, *Comm. Math. Phys.*, **324** (2013), 401-423.

[18] Duminil-Copin, H., Hongler, C., Nolin, P., Connection probabilities and RSW-type bounds for the two-dimensional FK Ising model, *Comm. Pure Appl. Math.*, **64** (2011), 1165-1198.

[19] Duminil-Copin, H., Kozlowski, K. K., Krachun, D., Manolescu, I., Oulamara, M., Rotational invariance in critical planar lattice models (2020), available at `arXiv: 2012.11672`.

[20] Duminil-Copin, H., Kozma, G., Yadin, A., Supercritical self-avoiding walks are space-filling, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, **50** (2014), 315-326.

[21] Duminil-Copin, H., Li, J.-H., Manolescu, I., Universality for the random-cluster model on isoradial graphs, *Electron. J. Probab.*, **23** (2018), paper no. 96.

[22] Duminil-Copin, H., Manolescu, I., Planar random-cluster model: scaling relations (2020), available at `arXiv: 2011.15090`.

[23] Duminil-Copin, H., Raoufi, A., Tassion, V., Exponential decay of connection probabilities for subcritical Voronoi percolation in $\mathbb{R}^d$, *Probab. Theory Related Fields*, **173** (2019), 479-490.

[24] Duminil-Copin, H., Raoufi, A., Tassion, V., Sharp phase transition for the random-cluster and Potts models via decision trees, *Ann. of Math.*, **189** (2019), 75-99.

[25] Duminil-Copin, H., Sidoravicius, V., Tassion, V., Continuity of the phase transition for planar random-cluster and Potts models with $1 \leq q \leq 4$, *Comm. Math. Phys.*, **349** (2017), 47-107.

[26] Duminil-Copin, H., Smirnov, S., The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, *Ann. of Math.*, **175** (2012), 1653-1665.

رامین کاظمی: دانشگاه بین‌المللی امام خمینی، گروه آمار
رایانامه: r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 43, Number 1, Spring/Summer 2024, Pages 229–238
doi: 10.30504/mct.2022.1335.1929

The Work of Hugo Duminil-Copin*

G. R. Grimmett
Translated by R. Kazemi[1]

[1]Department of Statistics, Imam Khomeini International University, Iran

Abstract. This article is an account of the scientifc work of Hugo Duminil-Copin at the time of his award in 2022 of the Fields Medal "for solving longstanding problems in the probabilistic theory of phase transitions in statistical physics, especially in dimensions three and four".

Keywords: phase transitions, Ising model, percolation model, Potts models, self-avoiding walk
Article history: Recieved 13 October 2022; Accepted 28 November 2022
Article type: translation

* Grimmett, Geoffrey R., The work of Hugo Duminil-Copin, *INSMI (CNRS) Newsletter*, July 5, 2022.

1. r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir

ISSN 1022-6443/© Iranian Mathematical Society under the CC BY-NC-SA 4.0 license