فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۳، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۳)، صص ۲۳۹ تا ۲۵۸

پارادوکس باناخ–تارسکی و اثبات آن

حبیب امیری

تقدیم به دکتر جعفر زعفرانی

چکیده. در این مقاله به شرح و بیان اثباتی مستقل از پارادوکس باناخ–تارسکی می‌پردازیم. این پارادوکس مبتنی‌بر اصل انتخاب است.

۱ مقدمه

اجازه دهید موضوع این مقاله را با نقل قولی از [۹] روشن کنیم.

> قضیه‌ای در ریاضی وجود دارد که بیان می‌کند «یك پرتقال را می‌توان به تعداد متناهی قطعه چنان قسمت کرد که با کنار هم گذاشتن دوبارهٔ قطعات تقسیم‌شده دو پرتقال به اندازهٔ پرتقال اولیه حاصل شود». مسلماً این قضیه بیشتر شبیه به دستورالعملی برای تغذیه هزاران نفر با یک پرتقال است تا ریاضیات دقیق. بااین‌حال، این دستورالعمل کاربردی کاملاً درست از قضیهٔ باناخ–تارسکی است که می‌توان آن را به‌صورت زیر دقیق‌تر بیان کرد: «برای هر دو زیرمجموعهٔ کران‌دار از فضای سه‌بُعدی اقلیدسی با درون ناتهی، هریك از آن دو زیرمجموعه را می‌توان به‌گونه‌ای به تعداد متناهی زیرمجموعه افراز نمود که با اجتماع‌گیری مجدد آن‌ها مجموعهٔ دیگر حاصل شود». بی‌درنگ، کارهای بسیار عجیب‌تر از ساختن دو پرتقال از یک پرتقال به ذهن می‌رسد: «یک نخود را می‌توان به تعداد متناهی قطعه تقسیم کرد و آن‌ها را

عبارات و کلمات کلیدی: قضیه باناخ–تارسکی، پارادوکس هاوسدورف، اصل انتخاب، تجزیهٔ ناسازگون، میانگین‌پذیری
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۵/۲
doi: 10.30504/mct.2024.1465.2030

دوباره کنار هم قرار داد تا مجسمه‌ای از استفان باناخ (یا یک توپ جامد که قطر آن بزرگ‌تر از فاصلهٔ زمین تا خورشید است) به دست آید».

آیا قضیه‌ای که پیامدهای آن به این صورت آشکارا عقل سلیم را به چالش می‌کشد می‌تواند درست باشد؟ جواب مثبت است و اثبات آن بر دو رکن استوار است: ۱) اصل انتخاب که می توانید آن را قبول داشته باشید یا نپذیرید، ۲) این مطلب که گروه آزاد روی دو مولد فاقد خاصیتی به‌نام «میانگین‌پذیری» است.

آلبرت اینشتین در [۱] بیان می‌کند که «قضایای ریاضی تاآنجاکه به واقعیت اشاره می‌کنند، مسلم و قطعی نیستند و در آن حد که مسلم و قطعی هستند با واقعیت کاری ندارند.» این سخن اینشتین به ۱۹۲۲ باز می‌گردد یعنی دو سال قبل‌از اینکه دو ریاضی‌دان لهستانی، استفان باناخ[۱] و آلفرد تارسکی[۲] قضیهٔ شگفت‌آور بالا را ثابت کنند. می‌توان گفت این قضیه یکی از بارزترین نمونه‌های نقل قول اینشتین در مورد ریاضیات است. اما مَثَل رایجی هست که هرجا چیزی عجیب در ریاضیات می‌بینید پای بی‌نهایت در میان است و در نقل قول بالا دیدیم اصل انتخاب، که تسرملو[۳] آن را در ضمن اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها صورت‌بندی کرد، یکی از ارکان اصلی اثبات قضیهٔ باناخ–تارسکی است؛ اصلی به‌ظاهر بی‌ضرر با کاربردهای شگفت‌انگیز با این مضمون که اگر خانواده‌ای از مجموعه‌های مجزای ناتهی داشته باشیم، مجموعه‌ای وجود دارد که از هر عضو آن خانواده دقیقا یک عضو دارد؛ برای دیدن کاربردهای دیگر این اصل نک. [۳].

در این مقاله قصد داریم اثبات قضیهٔ شگفت‌آور باناخ–تارسکی را با ذکر جزئیات آن بیان کنیم و در آخر به ارتباط این قضیه و مفهوم میانگین‌پذیری گروه‌ها بپردازیم.

نمادگذاری‌های متداول زیر را در کل مقاله به کار می‌بریم. گوی واحد در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۳$ را با $\mathbb{B}^۳$ نشان می‌دهیم که از تمام $X \in \mathbb{R}^۳$ با شرط $\|X\| \leq ۱$ تشکیل شده است. همچنین مرز $\mathbb{B}^۳$ یعنی مجموعهٔ تمام $X \in \mathbb{R}^۳$ که $\|X\| = ۱$ را کره دوبُعدی می‌نامیم و با $\mathbb{S}^۲$ نشان می‌دهیم. منظور از $\mathbb{S}^۱$ دایرهٔ واحد در صفحهٔ دوبُعدی است. گروه طولپایی‌ها، یعنی نگاشت‌های حافظ فاصله، روی $\mathbb{R}^n$ را با $\mathbb{E}_n$ نشان می‌دهیم و مجموعهٔ تمام دوران‌ها روی $\mathbb{R}^n$ را با SO_n نشان می‌دهیم که زیرگروهی از $\mathbb{E}_n$ است.

۲ سرچشمه‌های قضیهٔ باناخ–تارسکی

قضیهٔ باناخ–تارسکی ریشه در نظریهٔ اندازه دارد که در اوایل قرن بیستم در حال شکل‌گیری بود.در

1. Stefan Banach 2. Alfred Tarski 3. Zermelo

۱۹۰۵ ویتالی[۱] وجود یک مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر را ثابت کرد و عدم وجود یک اندازهٔ لبگ (شماراجمعی) روی تمام زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$ را نتیجه گرفت. هاوسدورف[۲] [۵] با توجه به نتیجهٔ ویتالی نشان داد که اگر از کرهٔ دوبُعدی $\mathbb{S}^۲$ یک زیرمجموعهٔ شمارای معیّن را حذف کنیم، آنگاه مجموعهٔ باقی‌مانده قابل تقسیم به سه زیرمجموعهٔ دوبه‌دو مجزای A، B، و C است به‌طوری که A، B، C، و $B \cup C$ همگی هم‌نهشت هستند، یعنی بین آن‌ها یک تابع دوسویی و حافظ فاصله وجود دارد. او از اینجا نتیجه گرفت که روی $\mathbb{S}^۲$ هیچ اندازهٔ متناهی‌جمع‌پذیری که روی همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{S}^۲$ تعریف شود و تحت آن اندازهٔ مجموعه‌های هم‌نهشت برابر باشد وجود ندارد؛ زیرا اگر چنین اندازه‌ای موجود باشد آنگاه اندازهٔ $B \cup C$ هم‌زمان $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۲}$، و $\frac{۲}{۳}$ است. نتیجهٔ هاوسدورف برای $\mathbb{S}^۲$ به پارادوکس هاوسدورف موسوم است (که در ادامه اثبات آن را می‌آوریم) و خواهیم دید نقش کلیدی در اثبات قضیهٔ باناخ–تارسکی دارد. فون نویمان[۳] نشان داد که پارادوکس هاوسدورف برای صفحه یا خط برقرار نیست، یعنی می‌توان مفهوم مساحت را برای تمام زیرمجموعه‌های کران‌دار صفحهٔ دوبُعدی به‌گونه‌ای تعریف کرد که مجموعه‌های هم‌نهشتْ مساحت یکسان داشته باشند، به‌هرحال این مساحتْ متناهی‌جمع‌پذیر است و نمی‌توان آن را یک اندازهٔ شماراجمع‌پذیر در نظر گرفت.

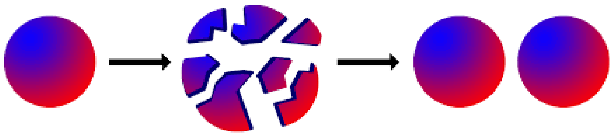
اگر بخواهیم قضیهٔ باناخ–تارسکی را به زبان ریاضی بیان کنیم می‌توان گفت یک افراز از گوی $\mathbb{B}^۳$ توسط تعداد متناهی مجموعهٔ دوبه‌دو مجزای $A_۱, A_۲, \ldots, A_n, B_۱, B_۲, \ldots, B_m$ و نگاشت‌های طولپای $\varphi_۱, \varphi_۲, \ldots, \varphi_n, \psi_۱, \psi_۲, \ldots, \psi_m$ موجود است به‌طوری که

$$\mathbb{B}^۳ = \bigcup_{i=۱}^{n} \varphi_i(A_i) = \bigcup_{j=۱}^{m} \psi_j(B_j).$$

این قضیه شهود هندسی ما از حجم را به چالش می‌کشد و به‌همین‌دلیل کاملاً شایستهٔ نام پارادوکس است. دراصل از نظر شهودی نگاشت‌های طولپا در فضای سه‌بُعدی ترکیبی از دوران و انتقال‌اند و مقدار حجم باید تحت این نگاشت‌ها حفظ شود، پس چطور امکان دارد که با چیدن دوبارهٔ قطعه‌های موجود، حجم دو برابر شود؟ شاید با در نظر گرفتن این مطلب که ما در اینجا با بی‌نهایت نقطه سروکار داریم کمی از عجیب بودن این امر کاسته شود.

ازطرفی باید توجه کنیم که تصور اولیهٔ ما دربارهٔ ثابت ماندن حجم اجسام صلب تحت انتقال و دوران فقط برای مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ برقرار است. حال‌آنکه قضیهٔ باناخ–تارسکی یک گوی را به مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر لبگ تقسیم می‌کند که وجود چنین مجموعه‌هایی را اصل انتخاب

1. Vitali 2. Hausdorff 3. von Neumann



چطور از یک گوی دو گوی معادل به دست آوریم؟

تضمین می‌کند و این یکی از دردسرهای اصل بدیهی و به‌ظاهر بی‌دردسر انتخاب است.

۳ تجزیه‌های ناسازگون

معمولاً پارادوکس باناخ–تارسکی برحسب مفهوم مجموعه‌های ناسازگون[۱] بیان می‌شود. این مفهوم عمل کپی‌برداری و انتقال و کنار هم چیدن زیرمجموعه‌های یک مجموعه را رسمیت می‌دهد. همچنین عمل گروه G روی مجموعهٔ X نیز ابزاری طبیعی برای حرکت دادن زیرمجموعه‌های X است. بنابراین از این مفهوم می‌توانیم استفاده کنیم. گوییم گروه G روی مجموعهٔ X عمل می‌کند هرگاه یک نگاشت $G \times X \to X, (g,x) \mapsto g \cdot x$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $x \in X$، $g,h \in G$، $e \cdot x = x$ و $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$. در اینجا e عضو همانی گروه G است. گوییم عمل G روی X نیمه‌منظم است اگر برای هر $g \in G \setminus \{e\}$ و $x \in X$، $g \cdot x \neq x$.

به عنوان مثال، گروه $\mathbb{E}_n$ روی $\mathbb{R}^n$ عمل می‌کند، همچنین SO_n، گروه دوران‌ها، که زیرگروهی از $\mathbb{E}_n$ است روی $\mathbb{R}^n$ عمل می‌کند و $\mathbb{S}^{n-1}$ تحت عمل SO_n ناوردا است و بنابراین SO_n روی $\mathbb{S}^{n-1}$ نیز عمل می‌کند. هر گروه با عمل ضرب از طرف چپ روی خودش به‌صورت نیمه‌منظم عمل می‌کند و همچنین هر زیرگروه روی کل گروه مربوط به‌صورت نیمه‌منظم عمل می‌کند. گروه G روی $\mathcal{P}(G)$، مجموعهٔ توانی خود، تحت نگاشت $(g,A) \mapsto g \cdot A$ که در آن $g \cdot A = \{ga : a \in A\}$ عمل می‌کند.

تعریف ۱.۳. فرض کنید گروه G روی مجموعهٔ X عمل کند، $E \subseteq X$ را G–ناسازگون می‌نامند (E دارای تجزیهٔ G–ناسازگون است) هرگاه زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزای $A_1, A_2, \ldots, A_n$ و $B_1, B_2, \ldots, B_m$ از E و $g_1, g_2, \ldots, g_n, h_1, h_2, \ldots, h_m \in G$ موجود باشد که $E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i \cdot A_i = \bigcup_{j=1}^{m} h_j \cdot B_j$. هرگاه $E = X = G$، گروه G را ناسازگون می‌نامند.

توجه کنید که در تعریف ۱.۳ لزوماً اجتماع مجموعه‌های A_i و B_j برابر کل E نیست همچنین

1. paradoxical sets

مجموعه‌های $g_i \cdot A_i$ و $h_j \cdot B_j$ لزوماً دوبه‌دو مجزا نیستند.

برای اثبات قضیهٔ باناخ–تارسکی ابتدا نیاز است بدانیم چگونه ناسازگون‌بودن یک گروه G باعث می‌شود مجموعهٔ X که G روی آن به‌صورت نیمه‌منظم عمل می‌کند نیز دارای یک تجزیهٔ ناسازگون بشود.

قضیه ۲.۳. فرض کنید G روی X به‌طور نیمه‌منظم عمل کند. اگر G ناسازگون باشد در این صورت X یک مجموعهٔ G–ناسازگون است.

اثبات. زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزای $A_1, A_2, \ldots, A_n$ و $B_1, B_2, \ldots, B_m$ از G و اعضای $g_1, g_2, \ldots, g_n$ و $h_1, h_2, \ldots, h_m$ از G را در نظر می‌گیریم به‌طوری که

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} g_i A_i = \bigcup_{j=1}^{m} h_j B_j.$$

اگر مدار $x \in X$ را با $[x] = \{g \cdot x : g \in G\}$ نشان دهیم و X/G فضای مدارهای عمل گروه G روی X باشد، با استفاده از اصل انتخاب می‌توان از هر مدار یک عضو انتخاب کرد و مجموعهٔ M را ساخت که از هر مدار دقیقاً یک عضو دارد. به‌سادگی می‌توان نشان داد که $\{g \cdot M : g \in G\}$ یک افراز برای X است. اکنون برای $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$، A_i^* و B_j^* را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A_i^* = \bigcup_{g \in A_i} g \cdot M = A_i \cdot M, \qquad B_j^* = \bigcup_{g \in B_j} g \cdot M = B_j \cdot M.$$

اکنون $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*, B_1^*, B_2^*, \ldots, B_m^*$ زیرمجموعه‌هایی مجزا از X هستند و

$$\bigcup_{i=1}^{n} g_i \cdot A_i^* = \bigcup_{i=1}^{n} g_i \cdot (A_i \cdot M) = \big(\bigcup_{i=1}^{n} g_i A_i\big) \cdot M = G \cdot M = X$$

و به‌طور مشابه $X = \bigcup_{j=1}^{m} h_j \cdot B_j^*$ و این یعنی اینکه X یک مجموعهٔ G–ناسازگون است. $\square$

عکس قضیهٔ ۲.۳ نیز به‌صورت زیر برقرار است.

قضیه ۳.۳. برای یک عمل دلخواه گروه G روی مجموعهٔ X اگر X یک تجزیهٔ G–ناسازگون داشته باشد آنگاه G نیز ناسازگون است.

اثبات. فرض $x \in X$ دلخواه باشد و $A_۱, A_۲, \dots, A_n, B_۱, B_۲, \dots, B_n$ زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزا از X و $g_۱, g_۲, \dots, g_n, h_۱, h_۲, \dots, h_m \in G$ به‌گونه‌ای باشند که

$$X = \bigcup_{i=۱}^{n} g_i \cdot A_i = \bigcup_{j=۱}^{m} h_j \cdot B_j.$$

برای هر زیرمجموعهٔ Y از X تعریف می‌کنیم $G_Y = \{g \in G : g \cdot x \in Y\}$. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که مجموعه‌های G_{A_i}، G_{B_j}، g_i، و h_j برای $i = ۱, ۲, \dots n, j = ۱, ۲, \dots, m$ یک تجزیهٔ ناسازگون برای G تشکیل می‌دهند. $\square$

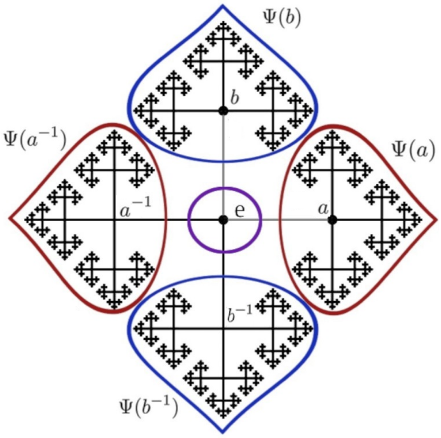
قضیه ۴.۳ (قضیهٔ باناخ–تارسکی). مجموعهٔ $\mathbb{B}^۳$ یک مجموعهٔ $\mathbb{E}_۳$–ناسازگون است.

ازآنجاکه یک زیرگروه به‌صورت نیمه‌منظم روی گروه مربوط عمل می‌کند، بنابر قضیهٔ ۲.۳ اگر گروه G دارای یک زیرگروه ناسازگون باشد آنگاه خود G نیز ناسازگون است و بنابراین تمام مجموعه‌های X که G روی آن‌ها به‌صورت نیمه‌منظم عمل می‌کند نیز G–ناسازگون می‌شوند. بنابراین مسیر اثبات قضیهٔ ۴.۳ که در ادامه به آن می‌پردازیم به این صورت است که ابتدا ثابت می‌شود گروه آزاد دو مولدی $\mathbb{F}_۲$ یک گروه ناسازگون است سپس یک زیرگروه یکریخت با $\mathbb{F}_۲$ از $\mathrm{SO}_۳$ مشخص می‌کنیم و درنتیجه $\mathrm{SO}_۳$ نیز ناسازگون می‌شود. سرانجام ثابت می‌شود یک زیرمجموعهٔ شمارای D از $\mathbb{S}^۲$ موجود است که $\mathbb{F}_۲$ روی $\mathbb{S}^۲ \setminus D$ به‌صورت نیمه‌منظم عمل می‌کند و درنتیجه $\mathbb{S}^۲ \setminus D$ یک مجموعهٔ $\mathrm{SO}_۳$–ناسازگون است که این همان پارادوکس هاوسدورف است. در آخر، پس‌از اثبات اینکه $\mathbb{S}^۲$ و $\mathbb{S}^۲ \setminus D$ دو تجزیهٔ $\mathrm{SO}_۳$–هم‌نهشت دارند، اثبات قضیهٔ ۴.۳، که همان قضیهٔ باناخ–تارسکی است، را بیان خواهیم کرد.

۴ گروه‌های آزاد

گروه‌های آزاد منبع مهمی از گروه‌های ناسازگون‌اند. اگر S یک مجموعه باشد، گروه آزاد تولیدشده توسط S مجموعهٔ تمام واژه‌ها تحویل‌یافته است که حروف آن از مجموعهٔ $\{s, s^{-۱} : s \in S\}$ انتخاب شده است، در اینجا منظور از تحویل‌یافته یعنی هیچ واژه‌ای شامل $ss^{-۱}$ یا $s^{-۱}s$ نباشد. عمل ضرب گروه از کنار هم قرار دادن واژه‌ها و تحویل آن‌ها به دست می‌آید. تعداد اعضای S را مرتبهٔ گروه آزاد تولیدشده می‌نامند و گروه آزاد از مرتبهٔ n را با $\mathbb{F}_n$ نشان می‌دهند. لازم است به این نکته توجه کنیم که اگر S زیرمجموعه‌ای از یک گروه G باشد و هیچ رابطه‌ای بین اعضای S

و وارون‌های آن‌ها برابر عنصر همانی گروه نشود، در این حالت S را یک زیرمجموعهٔ مستقل از G می‌نامیم و زیرگروه تولیدشده توسط S یک گروه آزاد از مرتبهٔ $|S|$ است. پس اگر در یک گروه یک زوج از اعضای مستقل یافت شود می‌توان گفت آن زوج یک گروه آزاد یکریخت با $\mathbb{F}_۲$ تولید می‌کنند.



گراف کیلی $\mathbb{F}_۲$

یادآوری می‌کنیم که برای گروه G و زیرمجموعهٔ S از آن گراف کیلی $(G:S)$ یک گراف بدون جهت است که مجموعهٔ راس‌های آن G است و بین g و sg و همچنین بین g و $s^{-۱}g$ برای هر $g \in G$ و $s \in S$ یک ضلع وجود دارد.

قضیه ۱.۴. گروه آزاد $\mathbb{F}_۲$ یک گروه ناسازگون است.

اثبات. فرض کنید $\mathbb{F}_۲$ توسط مجموعهٔ $S = \{a, a^{-۱}, b, b^{-۱}\}$ تولید شده باشد و $\rho \in S$. اکنون اگر $\Psi(\rho)$ مجموعهٔ اعضایی از $\mathbb{F}_۲$ باشند که با ρ شروع می‌شوند، آنگاه گراف کیلی $\mathbb{F}_۲$ به‌صورت شکل ۲ است [۷].

با توجه به شکل ۲ دیده می‌شود که

$$\mathbb{F}_۲ = \{e\} \cup \Psi(a) \cup \Psi(a^{-۱}) \cup \Psi(b) \cup \Psi(b^{-۱})$$

و این مجموعه‌ها دوبه‌دو مجزایند. ادعا می‌کنیم $\mathbb{F}_۲ = \Psi(a) \cup a \cdot \Psi(a^{-۱})$. برای این‌کار اگر $h \in \mathbb{F}_۲ \setminus \Psi(a)$، در این صورت h با حرف a شروع نمی‌شود و بنابراین اگر $a^{-۱}$ را از

چپ در h ضرب کنیم در $a^{-۱} \cdot h$ هیچ حذفی رخ نمی‌دهد و درنتیجه $a^{-۱} \cdot h \in \Psi(a^{-۱})$ و درنتیجه $h \in a \cdot \psi(a^{-۱})$. درنتیجه $\mathbb{F}_۲ \setminus \Psi(a) \subseteq a \cdot \Psi(a^{-۱})$. همچنین واضح است که $a \cdot \Psi(a^{-۱}) \subseteq \mathbb{F}_۲ \setminus \Psi(a)$ و لذا $a \cdot \Psi(a^{-۱})$ متمم $\Psi(a)$ در $\mathbb{F}_۲$ است. به‌همین‌طریق $b \cdot \Psi(b^{-۱}) \cup \Psi(b) = \mathbb{F}_۲$. و این یعنی $\mathbb{F}_۲$ یک مجموعهٔ $\mathbb{F}_۲$–ناسازگون است. $\square$

وَگن در [۶] ثابت کرده است که گروه SO_n برای $n \geq ۳$ دارای زیرگروهی آزاد از مرتبهٔ ۲ است. اثبات این قضیه را برای $n = ۳$ از همین مرجع می‌آوریم.

قضیه ۲.۴. گروه $\mathrm{SO}_۳$ دارای یک زیرگروه آزاد از مرتبهٔ دو است.

اثبات. عضو σ را دوران به اندازهٔ $\theta = \cos^{-۱}(\frac{۳}{۵})$ حول محور z و عضو τ را دوران خلاف جهت عقربهٔ ساعت با همان زاویه حول محور x در نظر بگیرید. ماتریس‌های مربوط به σ و τ به‌صورت

$$\sigma = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & -\frac{۴}{۵} & ۰ \\ \frac{۴}{۵} & \frac{۳}{۵} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \qquad \tau = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۵} & -\frac{۴}{۵} \\ ۰ & \frac{۴}{۵} & \frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$$

هستند.

اگر w یک واژهٔ تحویل‌یافتهٔ تولیدشده توسط اعضای مجموعهٔ $\{\sigma, \sigma^{-۱}, \tau, \tau^{-۱}\}$ باشد نشان می‌دهیم w طولپایی غیربدیهی است و لذا گروه تولیدشده توسط حروف این مجموعه یک گروه آزاد از مرتبهٔ ۲ است. واضح است که w عضو غیرهمانی است اگر و فقط اگر مزدوج آن تحت $\sigma^{\pm ۱}$، یعنی $\sigma^{\pm ۱} w \sigma^{\mp ۱}$، غیرهمانی باشد. پس کافی است ثابت کنیم کلمات تحویل‌یافته که به $\sigma^{\pm ۱}$ ختم می‌شوند غیرهمانی هستند. با استقرا روی n، طول w، و محاسبات ماتریسی نشان داده می‌شود که w بردار $(۱, ۰, ۰)$ را به برداری به‌شکل $(\frac{a}{۵^n}, \frac{b}{۵^n}, \frac{c}{۵^n})$ می‌برد که n طول w است و a, b و c اعداد صحیحی هستند با این خاصیت که b بر ۵ بخش‌پذیر نیست. با فرض اینکه ۰ هم بر ۵ بخش‌پذیر است نتیجه می‌شود $w.(۱, ۰, ۰) \neq (۱, ۰, ۰)$ و بنابراین w طولپایی غیربدیهی است. برای $n = ۱$ و $w = \sigma^{\pm ۱}$ داریم

$$w \cdot \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = \sigma^{\pm ۱} \cdot \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۵} \begin{bmatrix} ۳ & \mp ۴ & ۰ \\ \pm ۴ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۵} \begin{bmatrix} ۳ \\ \pm ۴ \\ ۰ \end{bmatrix}.$$

فرض کنید $w_n.(1,0,0)$ برای $n = 1,2,\ldots,k-1$، به‌شکل $(\frac{a}{5^n}, \frac{b}{5^n}, \frac{c}{5^n})$ باشد که در آن $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{Z}$ و b_n بر ۵ بخش‌پذیر نباشد. حال اگر w_k واژه‌ای به طول k باشد که به $\sigma^{\pm 1}$ از طرف راست ختم شود، w_k به‌صورت $w_k = \phi w_{k-1}$ است که در آن w_{k-1} واژه‌ای به طول $k-1$ است و $\phi \in \{\tau, \tau^{-1}, \sigma, \sigma^{-1}\}$. از فرض استقرا استفاده می‌شود و با محاسبات ماتریسی برای هر چهار حالت ϕ ثابت می‌شود که $w_k.(1,0,0)$ به‌صورت اشاره‌شده در بالا است، پس w_k طولپایی همانی نیست زیرا $(1,0,0)$ را به خودش نمی‌نگارد. این یعنی زیرگروه تولیدشده توسط این اعضا یک گروه آزاد از مرتبهٔ ۲ است. □

۵ تجزیه‌های هم‌نهشت و پارادوکس هاوسدورف

در این بخش خواهیم دید چگونه از گروه آزاد $\mathbb{F}_2$ و طولپایی‌های روی $\mathbb{R}^3$ در اثبات قضیهٔ باناخ–تارسکی استفاده کنیم.

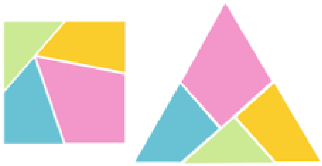
تعریف ۱.۵. فرض کنید گروه G روی مجموعهٔ X عمل کند و $A, B \subseteq X$. گوییم A و B باهم G–هم‌نهشت هستند هرگاه $g \in G$ موجود باشد به‌طوری که $g.A = B$، همچنین گوییم A و B تجزیه‌های G–هم‌نهشت دارند و می‌نویسیم $A \sim_G B$ هرگاه A و B دارای افرازهایی با تعداد مساوی عضو باشند که هر عضو افراز A با یک عضو از افراز B، G–هم‌نهشت باشد، یعنی

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

و $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ موجود باشد که $g_i.A_i = B_i$ برای هر $i = 1,2,\ldots,n$. به‌سادگی می‌توان نشان داد رابطهٔ $\sim_G$ خاصیت تعدی دارد. یعنی اگر $A \sim_G B$ و $B \sim_G C$ آنگاه $A \sim_G C$.

توجه کنید که وقتی دو مجموعهٔ A و B تجزیه‌های G–هم‌نهشت دارند مثل این است که A را تجزیه کرده‌ایم و با چیدن دوبارهٔ قطعات آن مجموعهٔ B را به دست آوریم.

مثال زیر یک پارادوکس کوچک است و استدلالی که در این مثال به کار رفته است در برهان قضیه‌های بعدی مقالهٔ حاضر خواهد آمد. در این مثال نشان داده می‌شود مجموعهٔ اعداد طبیعی با مجموعهٔ اعداد طبیعی به‌جز ۵ دارای تجزیه‌های G–هم‌نهشت هستند که در اینجا G گروه نگاشت‌های دوسویی حافظ فاصله روی $\mathbb{Z}$ است. توجه کنید که مفهوم هم‌نهشت‌بودن دو مجموعه با مفهوم در



دو مجموعه در صفحه که تجزیه‌های $E_۲$–هم‌نهشت دارند.

تناظر یک‌به‌یک بودن دو مجموعه تفاوت دارد؛ برای هم‌نهشتی باید یک دوسویی حافظِ فاصله بین نقاط دو مجموعه موجود باشد. به عنوان مثال، دو مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\dots\}$ و $\{۲,۴,۶,\dots\}$ در تناظر یک‌به‌یک‌اند ولی هم‌نهشت نیستند.

مثال ۲.۵. ([۲]) اگر G گروه دوسوییِ‌های حافظ فاصله روی $\mathbb{Z}$ باشد، در این صورت $\mathbb{N}$ با $\mathbb{N}\setminus\{۵\}$ تجزیه‌های G–هم‌نهشت دارند. برای اثبات تعریف کنید $B=\{۵k : k\in\mathbb{N}\}$ و $A=\mathbb{N}\setminus B$. پس داریم $\mathbb{N}=A\cup B$. اکنون با تابع دوسویی و حافظ فاصلهٔ $f(n)=n+۵$ مجموعهٔ B را ۵ واحد به سمت بی‌نهایت انتقال می‌دهیم و می‌نویسیم $B'=f\cdot B=f(B)$. همچنین $A=۱\cdot A$ که در آن ۱ نگاشت دوسویی و حافظ فاصلهٔ همانی است. پس $\mathbb{N}\setminus\{۵\}=A\cup B'$ و بنابراین توانستیم با استفاده از تجزیه‌های هم‌نهشت از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}\setminus\{۵\}$ برسیم.

در ادامه خواهیم دید چگونه مشابه با مثال ۲.۵ با استفاده از روش «انتقال به بی‌نهایت» می‌توان با استفاده از گروه دوران‌های روی $\mathbb{R}^۲$ پس‌از تجزیهٔ $\mathbb{S}^۱$ و چیدن دوبارهٔ آن به $\mathbb{S}^۱\setminus\{۱\}$ برسید.

قضیه ۳.۵. اگر $\mathbb{S}^۱=\{(x_۱,x_۲)\in\mathbb{R}^۲ : x_۱^۲+x_۲^۲=۱\}$ دایره به مرکز مبدا و شعاع یک باشد و $SO_۲$ گروه دوران‌های روی $\mathbb{R}^۲$ باشد، آنگاه $\mathbb{S}^۱$ و $\mathbb{S}^۱\setminus\{۱\}$ تجزیه‌های $SO_۲$–هم‌نهشت دارند.

اثبات. طولپایی θ را دوران در جهت مخالف حرکت عقربه‌های ساعت به اندازهٔ ۱ رادیان در نظر بگیرید. ازآنجاکه ۲π گنگ است، زاویهٔ هیچیک از نقاط $\theta^n\cdot(۱,۰)$ ($n\in\mathbb{N}$) برابر ۲π نمی‌شود و این یعنی از دوران پی‌درپی عدد ۱ که همان زوج $(۱,۰)$ روی دایره است هیچگاه به ۱ نمی‌رسیم. بنابراین اگر تعریف کنیم $A_۱=\{۱,\theta\cdot۱,\theta^۲\cdot۱,\theta^۳\cdot۱,\dots\}$ و $A_۲=\mathbb{S}^۱\setminus A_۱$ در این صورت $\mathbb{S}^۱=A_۱\cup A_۲$ و $A_۱\cap A_۲=\emptyset$. اکنون اگر با اثر دادن طولپایی θ روی $A_۱$ زاویه‌های نقاط $A_۱$ را به اندازهٔ θ به سمت بی‌نهایت انتقال دهیم و تعریف کنیم $B_۱=$

$\theta \cdot A_۱ = \{\theta \cdot ۱, \theta^۲ \cdot ۱, \theta^۳ \cdot ۱, \ldots\}$ و طولپایی همانی را روی $A_۲$ اثر دهیم و بنویسیم $B_۱ = \mathbb{S}^۱ \setminus A_۱$، $B_۲ = ۱ \cdot A_۲$، در این صورت $B_۱ \cup B_۲ = \mathbb{S}^۱ \setminus \{۱\}$ و $B_۱ \cap B_۲ = \emptyset$ و این اثبات را به انجام می‌رساند. □

قضیه ۴.۵. دایرهٔ واحد $\mathbb{S}^۱$ یک مجموعهٔ $\mathrm{SO}_۲$-ناسازگون است.

اثبات. فرض کنید $\mathrm{RSO}_۲$ زیرگروه $\mathrm{SO}_۲$ متشکل از تمام دوران‌های با زاویهٔ دوران مضارب گویای ۲π باشد و H را مجموعه‌ای در نظر بگیرید که از هر عضو گروه خارج‌قسمتی $\mathrm{SO}_۲/\mathrm{RSO}_۲$ یک و فقط یک نماینده داشته باشد؛ وجود H را اصل انتخاب تضمین می‌کند. تعریف کنید $M = \{\sigma \cdot (۱, ۰) : \sigma \in H\}$. چون $\mathrm{RSO}_۲$ شمارا است اعضای آن را با ρ_i نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $M_i = \rho_i \cdot M$. در این صورت $\{M_i\}_{i=۱}^{\infty}$ شمارا است و می‌توان نشان داد یک افراز برای $\mathbb{S}^۱$ است. به‌علاوه تمام M_iها توسط دوران با زاویهٔ مناسب با هم همنهشت هستند: $M_j = (\rho_j \rho_i^{-۱}) \cdot M_i$. پس اعضای مجموعهٔ $\{M_۲, M_۴, M_۶, \ldots\}$ یک‌به‌یک با اعضای مجموعهٔ $\{M_۱, M_۲, M_۳, \ldots\}$ همنهشت‌اند که اجتماع این مجموعهٔ اخیر برابر $\mathbb{S}^۱$ است. به‌همین‌طریق اعضای مجموعهٔ $\{M_۱, M_۳, M_۵, \ldots\}$ با اعضای مجموعهٔ $\{M_۱, M_۲, M_۳, \ldots\}$ یک‌به‌یک همنهشت‌اند. این موضوع اثبات را به انجام می‌رساند زیرا اجتماع M_kها به ترتیب برای kهای زوج و فرد یک نسخه از $\mathbb{S}^۱$ است. □

حالا یک نتیجه ثابت می‌کنیم که نشان می‌دهد اندازهٔ شماراجمعی روی $\mathbb{S}^۱$ وجود ندارد که تحت دوران ناوردا باشد.

نتیجه ۵.۵. هیچ اندازهٔ متناهی و شماراجمعی که روی تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{S}^۱$ تعریف شده باشد و اندازهٔ مجموعه‌ها تحت دوران تغییر نکند وجود ندارد.

اثبات. اگر μ چنین اندازه‌ای باشد و M_kها همان‌هایی باشند که در قضیهٔ ۴.۵ تعریف شدند، تعریف می‌کنیم $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_{۲k}$ و $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_{۲k-۱}$ آنگاه

$$\mu(S) = \mu(A) + \mu(B) = \mu(S) + \mu(S) = ۲\mu(S)$$

که نشدنی است. □

قضیهٔ بعد بیان می‌کند که چگونه یک گوی توپر را می‌توان به قطعاتی تقسیم کرد و با چیدن قطعات آن در کنار یکدیگر به گوی توپر بدون مرکز آن رسید.

قضیه ۶.۵. گوی واحد $\mathbb{B}^۳$ و $\mathbb{B}^۳ \setminus \{۰\}$ تجزیه‌های $\mathrm{SO}_۳$-هم‌نهشت دارند.

اثبات. فرض کنید $C^۱$ دایره‌ای گذرنده از مبدا باشد که درون $\mathbb{B}^۳$ قرار دارد. تعریف کنید $A = C^۱$ و $A_۰ = \mathbb{B}^۳ \setminus C^۱$، پس $\{A, A_۰\}$ یک افراز برای $\mathbb{B}^۳$ است. با در نظر گرفتن $B_۰ = A_۰$ و $B = C^۱ \setminus \{۰\}$ می‌بینیم که $\{B, B_۰\}$ یک افراز برای $\mathbb{B}^۳ \setminus \{۰\}$ است. بنابر قضیهٔ ۴.۵، A و B دارای تجزیه‌های $\mathrm{SO}_۲$–هم‌نهشت هستند و این یعنی هر دو به n مجموعه افراز می‌شوند که قطعات افرازهای آن‌ها یک‌به‌یک با هم $\mathrm{SO}_۲$–هم‌نهشت‌اند. بنابراین

$$A = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i, \quad B = \bigcup_{i=۱}^{n} B_i, \quad B_j = h_j \cdot A_j, \quad h_j \in SO_۲, \quad j = ۱, ۲, \ldots, n.$$

ازآنجاکه $\mathrm{SO}_۲ \subseteq \mathrm{SO}_۳$، بنابراین $h_j \in \mathrm{SO}_۳$ و $B_۰ = ۱ \cdot A_۰$ که در آن ۱ عضو همانی گروه $\mathrm{SO}_۳$ است. درنتیجه

$$\mathbb{B}^۳ = A_۰ \cup \Big(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i\Big) = \bigcup_{i=۰}^{n} A_i, \qquad \mathbb{B}^۳ \setminus \{۰\} = B_۰ \cup \Big(\bigcup_{i=۱}^{n} B_i\Big) = \bigcup_{i=۰}^{n} B_i$$

و $B_j = h_j \cdot A_j$ برای $j = ۰, ۱, ۲, \ldots, n$ که در آن $h_۰ = ۱$. □

حالا نشان می‌دهیم $\mathbb{S}^۲$ به دو مجموعهٔ مجزای A و B افراز می‌شود که هرکدام نسخه‌ای از $\mathbb{S}^۲$ هستند یعنی $\mathbb{S}^۲ \sim_{\mathrm{SO}_۳} A$ و $\mathbb{S}^۲ \sim_{\mathrm{SO}_۳} B$. برای اثبات این قضیه نیز چند لم مورد نیاز است.

لم ۷.۵. زیرمجموعهٔ شمارای D از $\mathbb{S}^۲$ موجود است به‌طوری که $(\mathbb{S}^۲ \setminus D) \sim_{\mathrm{SO}_۳} \mathbb{S}^۲$.

اثبات. قبلاً گفتیم که $\mathrm{SO}_۳$ روی $\mathbb{R}^۳$ عمل می‌کند و چون اعضای $\mathrm{SO}_۳$ دوران‌اند لذا $\mathbb{S}^۲$ تحت این عمل ناوردا است و درنتیجه زیرگروه آزاد $\mathbb{F}_۲$، که در بخش ۲.۴ تعریف شد، نیز روی $\mathbb{S}^۲$ عمل می‌کند. قابل توجه است که این عمل نیم‌منظم نیست، یعنی هر دوران دقیقاً دو نقطه را که محل برخورد محور دوران با $\mathbb{S}^۲$ است ثابت نگه می‌دارد. اگر مجموعهٔ D را متشکل از تمام نقاط ثابت اعضای غیربدیهی $\mathbb{F}_۲$ روی $\mathbb{S}^۲$ در نظر بگیریم، D شمارا است. زیرا $D = \cup_{n=۱}^{\infty} D_n$ و D_n مجموعه‌ای است متشکل از نقاطی در $\mathbb{S}^۲$ که توسط کلماتی به طول n از $\mathbb{F}_۲$ ثابت می‌مانند که

به‌وضوح مجموعه‌ای متناهی است. می‌دانیم که $\mathbb{S}^۲$ ناشمارا است، پس $\mathbb{S}^۲ \setminus D$ نیز ناشمارا است بنابراین یک زوج نقطه در $\mathbb{S}^۲ \setminus D$ موجود است که دو سر یک قطرند. خط ℓ را محور گذرنده از مرکز و این دو نقطه در نظر بگیرید.

می‌خواهیم دوران μ حول ℓ را پیدا کنیم طوری که $D, \mu.D, \mu^۲.D, \ldots$ مجزا باشند. اگر A را مجموعهٔ تمام دوران‌های حول ℓ در نظر بگیریم که توان صحیحی از آن‌ها یک عضو از D را به عضوی از D ببرد، A یک مجموعه شمارا است و ازآنجاکه تعداد دوران‌ها حول ℓ ناشمارا است پس μ را دورانی حول ℓ در نظر می‌گیریم به‌طوری که $\mu \notin A$. با توجه به انتخاب مجموعهٔ A، اگر $m, n \in \mathbb{N}$ آنگاه $\mu^m.D \cap \mu^n.D = \emptyset$؛ زیرا در غیر این صورت $d_۱, d_۲ \in D$ موجود است به‌طوری که $\mu^{m-n}.d_۱ = d_۲$ و درنتیجه $\mu \in A$.

اکنون اگر تعریف کنیم $A_۱ = D \cup \mu.D \cup \mu^۲.D \cup \ldots$ و $A_۲ = \mathbb{S}^۲ \setminus A_۱$ در این صورت $\mathbb{S}^۲ = A_۱ \cup A_۲$ و $A_۱ \cap A_۲ = \emptyset$. تعریف کنید $B_۱ = \mu.A_۱ = \bigcup_{i=۱}^{\infty} \mu^i.D$ و $B_۲ = ۱.A_۲$ که در آن ۱ عنصر همانی گروه دوران‌ها است، در این صورت $B_۱ \cap B_۲ = \emptyset$ و $\mathbb{S}^۲ \setminus D = B_۱ \cup B_۲$. بنابراین دو افراز از $\mathbb{S}^۲$ و $\mathbb{S}^۲ \setminus D$ ساخته شد که هریک از دو مجموعه تشکیل شده‌اند و هریک از مجموعه‌های افراز $\mathbb{S}^۲$ با یکی از مجموعه‌های افراز $\mathbb{S}^۲ \setminus D$ هم‌نهشت‌اند. □

قسمت (ب)ی لم زیر همان پارادوکس هاوسدورف است که بعداً برای اثبات پارادوکس باناخ–تارسکی از آن استفاده خواهیم کرد.

لم ۸.۵. فرض کنید D همان مجموعهٔ شمارای لم ۷.۵ باشد، در این صورت داریم

(الف) اگر $x \in \mathbb{S}^۲$ و $f \in \mathbb{F}_۲$، آنگاه $x \in D$ اگر و فقط اگر $f \cdot x \in D$.

(ب) مجموعهٔ $\mathbb{S}^۲ \setminus D$ یک مجموعهٔ $\mathrm{SO}_۳$–ناسازگون است.

اثبات. (الف) فرض کنید $x \in D$، بنابراین $h \in \mathbb{F}_۲ \setminus \{۱\}$ موجود است به‌طوری که $h \cdot x = x$. اکنون $(fhf^{-۱}) \cdot (f \cdot x) = f \cdot x$. چون $fhf^{-۱} \in \mathbb{F}_۲ \setminus \{۱\}$ پس $f \cdot x \in D$. برعکس، اگر $f \cdot x \in D$ در این صورت عضو نابدیهی g در $\mathbb{F}_۲$ موجود است به‌طوری که $g \cdot (f \cdot x) = f \cdot x$. درنتیجه $(f^{-۱}gf) \cdot x = x$ و $f^{-۱}gf \in \mathbb{F}_۲ \setminus \{۱\}$، پس $x \in D$.

(ب) با توجه به قسمت قبل می‌بینیم که $\mathbb{S}^۲ \setminus D$ تحت عمل $\mathbb{F}_۲$ ناوردا است، یعنی اینکه $\mathbb{F}_۲ \cdot (\mathbb{S}^۲ \setminus D) \subseteq (\mathbb{S}^۲ \setminus D)$، پس $\mathbb{F}_۲$ روی آن عمل می‌کند. همچنین با توجه به ماهیت مجموعهٔ

D این عمل نیمه‌منظم است، یعنی عناصر نابدیهی نقطهٔ ثابت ندارند. اکنون ناسازگونی $\mathbb{S}^۲ \setminus D$ از قضیهٔ ۲.۳ نتیجه می‌شود. □

۶ اثبات قضیهٔ باناخ-تارسکی

همان‌طور که در مقدمه اشاره کردیم هدف قضیهٔ باناخ-تارسکی این است که نشان دهد چگونه یک گوی توپر را می‌توان به قطعاتی تقسیم کرد که با دوران و انتقال قطعات و چیدن مجدد آن‌ها در کنار هم بتوان دو گوی توپرِ هم‌اندازه با گوی اولیه ساخت. در این بخش ابتدا این حکم را برای کرهٔ $\mathbb{S}^۲$ اثبات می‌کنیم. بعداً خواهیم دید که اساس اثبات باناخ-تارسکی نیز همین مطلب است.

باتوجه به لم ۸.۵ می‌دانیم که اگر $x \in \mathbb{S}^۲ \setminus D$ آنگاه $\mathbb{F}_۲$-مدار x تحت عمل $\mathbb{F}_۲$، که آن را با F_x نشان می‌دهیم، یک زیرمجموعه از $\mathbb{S}^۲ \setminus D$ است که در آن $F_x = \{f \cdot x : f \in \mathbb{F}_۲\}$. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که $\mathbb{F}_۲$-مدارها یا مجزا هستند و یا مساوی، یعنی اگر $F_x \cap F_y \neq \emptyset$ آنگاه $F_x = F_y$. همچنین اگر خانوادهٔ تمام $\mathbb{F}_۲$-مدارهای متمایز اعضای $\mathbb{S}^۲ \setminus D$ را با $(F_i)_{i\in I}$ نشان دهیم، در این صورت $\mathbb{S}^۲ \setminus D = \bigcup_{i\in I} F_i$. در قضیهٔ ۱.۴ نشان دادیم که $\mathbb{F}_۲$ یک گروه ناسازگون است. برای سهولت در کاربرد این مطلب در اثبات قضیهٔ باناخ-تارسکی ناسازگونی $\mathbb{F}_۲$ را به‌صورت لم زیر بیان می‌کنیم. مجموعه‌های تعریف شده در این لم را تا پایان مقاله به کار می‌بریم.

لم ۱.۶. \افراز $\{P_۱, P_۲\}$ از $\mathbb{F}_۲$ موجود \است به‌طوری که $\mathbb{F}_۲ \sim_{\mathbb{F}_۲} P_۱$ و $\mathbb{F}_۲ \sim_{\mathbb{F}_۲} P_۲$.

\اثبات. با نمادگذاری‌های قضیهٔ ۱.۴ تعریف کنید

$$A_۱ = \Psi(a^{-۱}) \cup \{e, a^n : n = ۱, ۲, ۳, \ldots\},$$

$$A_۲ = \Psi(a) \setminus \{e, a^n : n = ۱, ۲, ۳, \ldots\},$$

$$B_۱ = \Psi(b^{-۱}),$$

$$B_۲ = \Psi(b).$$

اکنون بنویسید $P_۱ = A_۱ \cup A_۲$ و $P_۲ = B_۱ \cup B_۲$. به‌وضوح $\{A_۱, A_۲\}$ افرازی برای $P_۱$ و $\{B_۱, B_۲\}$ افرازی برای $P_۲$ است. همان‌طور که در قضیهٔ ۱.۴ نشان دادیم $(a.A_۱)\cup A_۲ = \mathbb{F}_۲$ و $b.B_۱ \cup B_۲ = \mathbb{F}_۲$. بنابراین $\mathbb{F}_۲ \sim_{\mathbb{F}_۲} P_۱$ و $\mathbb{F}_۲ \sim_{\mathbb{F}_۲} P_۲$. همچنین واضح است که $\{P_۱, P_۲\}$ افرازی برای $\mathbb{F}_۲$ است. □

اکنون آماده‌ایم که قضیهٔ باناخ- تارسکی را برای $\mathbb{S}^2$ اثبات کنیم.

قضیه ۲.۶ (قضیهٔ باناخ-تارسکی برای $\mathbb{S}^2$). افراز $\{S_1, S_2\}$ برای $\mathbb{S}^2$ موجود است به‌طوری که $\mathbb{S}^2 \sim_{\mathrm{SO}_3} S_1$ و $\mathbb{S}^2 \sim_{\mathrm{SO}_3} S_2$.

اثبات. فرض کنید مجموعهٔ D همان باشد که در لم ۷.۵ تعریف شد. با استفاده از اصل انتخاب، مجموعهٔ $M \subseteq \mathbb{S}^2 \setminus D$ را که از هر مدار عمل $\mathbb{F}_2$ روی $\mathbb{S}^2 \setminus D$ یک و فقط یک عضو دارد در نظر می‌گیریم. برای $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{F}_2$ تعریف شده در لم ۱.۶ تعریف کنید

$$P_1 \cdot M = \{f \cdot m : f \in P_1, m \in M\}, \qquad P_2 \cdot M = \{f \cdot m : f \in P_2, m \in M\}.$$

از لم ۸.۵ نتیجه می‌گیریم $P_1 \cdot M, P_2 \cdot M \subseteq \mathbb{S}^2 \setminus D$. ازطرفی، با توجه به اینکه M از هر مدار F_i یک عضو دارد،

$$\begin{aligned} P_1 \cdot M \cup P_2 \cdot M &= (P_1 \cup P_2) \cdot M = \mathbb{F}_2 \cdot M = \bigcup_{i \in I} F_i = \mathbb{S}^2 \setminus D, \\ P_1 \cdot M \cap P_2 \cdot M &= (P_1 \cap P_2) \cdot M = \emptyset. \end{aligned}$$

در قدم بعدی نشان می‌دهیم که $P_1 \cdot M \sim_{\mathrm{SO}_3} \mathbb{F}_2 \cdot M$ و $P_2 \cdot M \sim_{\mathrm{SO}_3} \mathbb{F}_2 \cdot M$. برای این کار با توجه به لم ۱.۶ داریم

$$\begin{aligned} A_1 \cdot M \cup A_2 \cdot M &= (A_1 \cup A_2) \cdot M = P_1 \cdot M, \\ a \cdot (A_1 \cdot M) \cup A_2 \cdot M &= (aA_1 \cup A_2) \cdot M = \mathbb{F}_2 \cdot M, \\ B_1 \cdot M \cup B_2 \cdot M &= (B_1 \cup B_2) \cdot M = P_2 \cdot M, \\ b \cdot (B_1 \cdot M) \cup B_2 \cdot M &= (bB_1 \cup B_2) \cdot M = \mathbb{F}_2 \cdot M. \end{aligned}$$

ازآنجاکه مجموعه‌های $A_1 \cap A_2$، $aA_1 \cap A_2$، $B_1 \cap B_2$، و $bB_1 \cap B_2$ تهی هستند پس اعضای مجموعه‌های $\{A_1 \cdot M, A_2 \cdot M\}$، $\{a \cdot (A_1 \cdot M), A_2 \cdot M\}$، $\{B_1 \cdot M, B_2 \cdot M\}$، و $\{b \cdot (B_1 \cdot M), B_2 \cdot M\}$ نیز مجزایند و به ترتیب افرازهایی برای $P_1 \cdot M$، $\mathbb{F}_2 \cdot M$، $P_2 \cdot M$، و $\mathbb{F}_2 \cdot M$ تشکیل می‌دهند. بنابراین $P_1 \cdot M \sim_{SO_3} \mathbb{F}_2 \cdot M$ و $P_2 \cdot M \sim_{SO_3} \mathbb{F}_2 \cdot M$.

سرانجام، اگر تعریف کنیم $S_1 := P_1 \cdot M \cup D$ و $S_2 := P_2 \cdot M$، آنگاه $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ و

$$\begin{aligned} S_1 \cup S_2 &= P_1 \cdot M \cup D \cup P_2 \cdot M \\ &= (P_1 \cdot M \cup P_2 \cdot M) \cup D \\ &= (\mathbb{S}^2 \setminus D) \cup D \\ &= \mathbb{S}^2. \end{aligned}$$

حالا با توجه به اینکه نشان دادیم $P_1 \cdot M \sim_{SO_3} \mathbb{F}_2 \cdot M$ و همچنین $D \sim_{SO_3} D$ پس نتیجه می‌گیریم که

$$S_1 \sim_{SO_3} (\mathbb{F}_2 \cdot M) \cup D = (\mathbb{S}^2 \setminus D) \cup D = \mathbb{S}^2.$$

ازطرفی در لم ۷.۵ ثابت کردیم $\mathbb{S}^2 \setminus D \sim_{SO_3} \mathbb{S}^2$، بنابراین

$$S_2 = P_2 \cdot M \sim_{SO_3} (\mathbb{F}_2 \cdot M) = \mathbb{S}^2 \setminus D \sim_{SO_3} \mathbb{S}^2.$$

□

قضیه ۳.۶ (پارادوکس باناخ–تارسکی). زیرمجموعه‌های مجزای $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathbb{B}^3$ موجودند به‌طوری که $\mathbb{B}^3 = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ و $\mathcal{B}_1 \sim_{SO_3} \mathbb{B}^3$ و $\mathcal{B}_2 \sim_{SO_3} \mathbb{B}^3$.

اکنون آماده‌ایم اثبات قضیهٔ باناخ تارسکی را بیان کنیم.

اثبات قضیهٔ ۴.۳. با توجه به اثبات قضیهٔ ۲.۶ پنج قطعهٔ A_1, A_2, B_1, B_2، و D از کرهٔ $\mathbb{S}^2$ با خواص مورد نظر در قضیه ساخته شد. برای اعداد حقیقی $0 < r \leq 1$ و $i = 1, 2$ تعریف کنید $rS_i = \{rx : x \in S_i\}$ که در آن S_iها همان‌هایی هستند که در قضیهٔ ۲.۶ به کار رفتند. اکنون $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathbb{B}^3$ که در آن $\mathcal{B}_1 = \bigcup_{0<r\leq 1} rS_1$ و $\mathcal{B}_2 = \bigcup_{0<r\leq 1} rS_2$. بنابر مجزا بودن S_1, S_2 و روش ساختن $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ این دو مجموعه نیز مجزا هستند. همچنین

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \bigcup_{0<r\leq 1} r(S_1 \cup S_2) = \bigcup_{0<r\leq 1} r\mathbb{S}^2 = \mathbb{B}^3 \setminus \{0\}.$$

سه قطعهٔ

$$\bigcup_{0<r\leq 1} r(A_1.M),\quad \bigcup_{0<r\leq 1} r(A_2.M),\quad \bigcup_{0<r\leq 1} rD$$

از $\mathbb{B}^3$ مجموعهٔ $\mathcal{B}_1$ را افراز می‌کنند و می‌توان آن‌ها را به کمک اعضایی از SO_3 به‌صورت زیر از نو کنار هم چید

$$\bigcup_{0<r\leq 1} r((aA_1).M),\quad \bigcup_{0<r\leq 1} r(A_2.M),\quad \bigcup_{0<r\leq 1} rD.$$

به‌سادگی دیده می‌شود که اجتماع این مجموعه‌ها برابر $\mathbb{B}^3 \setminus \{0\}$ است. بنابراین $\mathcal{B}_1 \sim_{SO_3} \mathbb{B}^3 \setminus \{0\}$، و چون در ۶.۵ دیدیم که $\mathbb{B}^3 \setminus \{0\} \sim_{SO_3} \mathbb{B}^3$ پس $\mathcal{B}_1 \sim_{SO_3} \mathbb{B}^3$. به‌همین‌طریق، دو قطعهٔ $\bigcup_{0<r\leq 1} r(B_1.M)$ و $\bigcup_{0<r\leq 1} r(B_2.M)$ مجموعهٔ $\mathcal{B}_2$ را افراز می‌کنند و اجتماع این قطعات به‌صورت $\bigcup_{0<r\leq 1} r((bB_1).M)$ و $\bigcup_{0<r\leq 1} r(B_2.M)$ افرازی برای $\mathbb{B}^3 \setminus \{0\}$ است. بنابراین $\mathcal{B}_2 \sim_{SO_3} \mathbb{B}^3 \setminus \{0\} \sim_{SO_3} \mathbb{B}^3$.

۷ میانگین‌پذیری و ناسازگونی گروه‌ها

در این بخش به رابطهٔ میانگین‌پذیری و ناسازگونی گروه‌ها می‌پردازیم. ابتدا تعریف میانگین‌پذیری را می‌آوریم.

تعریف ۱.۷. گروه G را میانگین‌پذیر می‌گویند هرگاه اندازهٔ متناهی‌جمع‌پذیر μ روی G موجود باشد به‌طوری که $\mu(G) = 1$ و برای هر $g \in G$ و هر $A \subseteq G$ داشته باشیم $\mu(gA) = \mu(A)$. منظور از متناهی‌جمع‌پذیر بودن μ این است که برای هر دو زیرمجموعهٔ مجزای A و B از G داشته باشیم $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

قضیه ۲.۷. اگر گروه G میانگین‌پذیر باشد آنگاه ناسازگون نیست.

اثبات. با برهان خلف فرض کنید که $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m$ زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزا از G باشند که در تعریف ۱.۳ صدق می‌کنند و $G = \bigcup_{i=1}^{n} g_iA_i = \bigcup_{j=1}^{m} h_jB_j$ که در آن g_iو h_jها اعضایی از Gاند. همچنین فرض کنید μ اندازه‌ای با خواص گفته‌شده در ۱.۷

باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\mu(G)+\mu(G) &= \mu(\bigcup_{i=1}^{n} g_iA_i)+\mu(\bigcup_{j=1}^{m} h_jB_j)\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\mu(g_iA_i)+\sum_{j=1}^{m}\mu(h_jB_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)+\sum_{j=1}^{m}\mu(B_j)\\ &= \mu((\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\cup(\bigcup_{j=1}^{m}B_j))\\ &\le \mu(G)\end{aligned}$$

که امکان ندارد. □

قضیهٔ ۲.۷ از قضیهٔ زیر که منسوب به فون نویمان است نیز نتیجه می‌شود.

قضیه ۳.۷. اگر گروه میانگین‌پذیر G روی X عمل کند، آنگاه X نمی‌تواند G-ناسازگون باشد.

اثبات. فرض کنید μ اندازه‌ای روی $\mathcal{P}(G)$ صادق در تعریف ۱.۷ باشد، $x \in X$ را ثابت در نظر گرفته و برای هر $A \subseteq X$ تعریف کنید $\nu(A) = \mu\{g \in G : g.x \in A\}$. به‌سادگی دیده می‌شود که تمام ویژگی‌های اندازهٔ μ به ν انتقال می‌یابد، یعنی متناهی‌جمع‌پذیر است و برای هر $g \in G$ و $E \subseteq X$ داریم $\nu(g.E) = \nu(E)$. اکنون اگر X ناسازگون باشد مشابه با قضیهٔ ۲.۷ نامساوی $\nu(X) \le \nu(X)$۲ به دست می‌آید و با توجه به اینکه $\nu(X) = \mu(G) = 1$ پس رابطهٔ گفته‌شده تناقض است. □

عکس قضیهٔ ۲.۷ از قضیهٔ زیر که از آن تارسکی است نتیجه می‌شود؛ یعنی گروه‌هایی که ناسازگون نیستند میانگین‌پذیرند.

قضیه ۴.۷ (قضیهٔ تارسکی [۶]). اگر گروه G روی مجموعهٔ X عمل کند و $E \subseteq X$ هیچ تجزیهٔ G-ناسازگونی نداشته باشد آنگاه اندازهٔ متناهی‌جمع‌پذیر μ روی تمام زیرمجموعه‌های X موجود است به‌طوری که برای هر $g \in G, Y \subseteq X$ داریم $\mu(g.Y) = \mu(Y)$ و $\mu(E) = 1$.

با توجه به قضیهٔ ۲.۴ و توضیحات پس‌از قضیهٔ ۳.۳ نتیجه می‌شود که SO_3 یک گروه ناسازگون است و بنابر قضیهٔ ۲.۷ میانگین‌پذیر نیست.

فون نویمان در سال ۱۹۲۴ مفهوم میانگین‌پذیری گروه‌ها را تعریف کرد و نشان داد اگر G میانگین‌پذیر باشد آنگاه زیرگروهی یکریخت با $\mathbb{F}_2$ ندارد. این مفهوم تحت تأثیر قضیهٔ باناخ–تارسکی تعریف شده بود. فون نویمان حدس زد که عکس این حکم نیز درست است، یعنی گروه‌های میانگین‌ناپذیر دارای زیرگروه‌های یکریخت با گروه آزاد از مرتبهٔ دو هستند [۱۰]. آلشانسکی[1] در ۱۹۸۰ با تعریف گروه‌های غول‌آسای تارسکی[2] نشان داد این گروه‌ها میانگین‌پذیر نیستند و هیچ زیرگروه یکریخت با $\mathbb{F}_2$ ندارند. اگر p عددی اول باشد، گروه G را یک گروه غول‌آسای تارسکی برای p می‌نامیم هرگاه هر زیرگروه غیربدیهی از G گروهی دوری از مرتبهٔ p باشد. بنابراین فون نویمان گمان می‌کرد که ناسازگونی گروه G معادل است با اینکه G یک زیرگروه یکریخت با $\mathbb{F}_2$ داشته باشد، اما آلشانسکی نشان داد این حدس نادرست است [۶]. آدیان[3] دو سال بعداز انتشار مثال آلشانسکی مثال نقض دیگری برای حدس فون نویمان پیدا کرد. البته هیچ‌یک از مثال‌های نقض پیداشده جزو گروه‌های متناهی‌نمایش[4] نیستند و تا مدت‌ها ریاضی‌دانان گمان می‌کردند که ممکن است حدس فون نویمان برای گروه‌های متناهی‌نمایش درست باشد. سرانجام در سال ۲۰۰۳ آلشانسکی و مارک ساپیر[5] دسته‌ای از گروه‌های متناهی‌نمایش را پیدا کردند که مثال نقضی برای حدس فون نویمان بودند. در سال ۲۰۱۳ مونو[6] مثال نقض ساده‌ای پیدا کرد که در همان سال لودا[7] و مور[8] زیرگروهی از این مثال پیدا کردند که متناهی‌نمایش با ۳ مولد و ۹ رابطه بین مولدها بود.

توجه کنید که میانگین‌پذیری برای گروه‌های توپولوژیک نیز تعریف می‌شود: گروه توپولوژیک هاوسدورف موضعاً فشرده G را میانگین‌پذیر می‌نامیم هرگاه یک اندازهٔ متناهی‌جمع‌پذیر، ناوردای چپ، و متناهی روی خانوادهٔ زیرمجموعه‌های بورل G موجود باشد. اگر گروه گسستهٔ G با تعریف ۱.۷ میانگین‌پذیر باشد، میانگین‌پذیر توپولوژیک نیز هست زیرا تمام زیرمجموعه‌ها نسبت به توپولوژی گسسته مجموعهٔ بورل‌اند. اگر گروه G فشرده باشد اندازهٔ هار[9] یک اندازهٔ احتمال شماراجمعی و ناوردای چپ است که روی مجموعه‌های بورل تعریف می‌شود و بنابراین هر گروه فشرده میانگین‌پذیر توپولوژیکی است. اما به عنوان مثال گروه SO_3 زیرگروه فشرده از گروه طولپایی‌ها روی $\mathbb{R}^3$ است و بنابراین میانگین‌پذیر توپولوژیکی است، ولی در این مقاله دیدیم که این گروه یک گروه ناسازگون است. از اینجا نتیجه می‌گیریم این گروه با تعریف ۱.۷ میانگین‌پذیر نیست.

---

1. Alexander Ol'shanskii 2. Tarski monster groups 3. Sergei Ivanovich Adian 4. finitely presented 5. Mark Sapir 6. Nicolas Monod 7. Yash Lodha 8. Justin Tatch Moore 9. Haar measure

از قضیهٔ باناخ-تارسکی می‌توان نتیجه گرفت هیچ اندازهٔ متناهی‌جمع‌پذیری مثل μ روی تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^۳$ وجود ندارد طوری که $\mu(\mathbb{B}^۳)$ متناهی باشد و اندازهٔ مجموعه‌ها تحت نگاشت‌های طولپا ثابت بماند. فون نویمان دریافت که وجود اندازه‌های متناهی‌جمع‌پذیر که روی تمام زیرمجموعه‌های G تعریف شده باشد امکان‌پذیر است و گروه‌هایی با این خاصیت را متمایز کرد. او ثابت کرد گروه $\mathbb{E}_n$ برای $n = ۱,۲$ میانگین‌پذیر است و بنابراین قضیهٔ باناخ-تارسکی برای $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^۲$ برقرار نیست.

مراجع

[۱] اینشتین، آلبرت، فیزیک و واقعیت، ترجمهٔ محمدرضا خواجه‌پور، خوارزمی، تهران، ۱۳۸۶.

[۲] فرنچ، رابرت م.، قضیهٔ باناخ-تارسکی، ترجمهٔ بهزاد منوچهریان، جنگ ریاضی، جلد **۵** (۱۳۶۸)، ۴۱-۵۳.

[۳] یخ، تی؛ هرباتسک، کی.، درآمدی بر نظریهٔ مجموعه‌ها، ترجمهٔ سعید مقصودی و سید مجید جعفریان امیری، دانشگاه زنجان، زنجان، ۱۳۹۱.

[4] Banach, S.,Tarski, A., Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, *Fund. Math.*, **6** (1924), 244-277.

[5] Hausdorff, F., Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen, *Math. Ann.*, **75** (1914), 428-434.

[6] Tomkowicz, G., Wagon, S., *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[7] Buchhorn, K., The Banach-Tarski paradox (2021), available at `arXiv: 2108.05714`.

[8] Su, F. E., The Banach-Tarski paradox, Minor thesis, Harvard University, 1990.

[9] Runde, V., *Lectures on Amenability*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1774, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[10] Von Neumann conjecture, in *Wikipedia*, available at `https://en.wikipedia.org/wiki/Von_Neumann_conjecture`.

حبیب امیری: دانشگاه زنجان، گروه ریاضی

رایانامه: `h.amiri@znu.ac.ir`

Mathematical Culture and Thought
Volume 43, Number 1, Spring/Summer 2024, Pages 239–258
doi: 10.30504/mct.2024.1465.2030

The Banach-Tarski Paradox and It's Proof

H. Amiri[1]

Department of Mathematics , University of Zanjan, Iran,

Abstract. The Banach-Tarski paradoxit state that, is possible to partition the solid ball into fi nitely many pieces and reassemble them to form two solid balls, each identical in size to the first. In this article, we discuss a self-sufficient proof of the Banach-Tarski paradox. This paradox is based on the axiom of choice.

Keywords: Banach-Tarski paradox, Hausdorff paradox, axiom of choice, paradoxical decomposition, amenability
Article history: Recieved 15 April 2024; Accepted 23 July 2024
Article type: survey

1. h.amiri@znu.ac.ir

ISSN 1022-6443/