فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۳، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۳)، صص ۲۵۹ تا ۲۶۹

حقیقت پشت صحنهٔ قضیهٔ چبوتاریوف

آرش رستگار

چکیده. منظور از حقیقت پشت صحنه همان تأویل یک نتیجه ریاضی است، یعنی اینکه مشخص کنیم آن نتیجهٔ ریاضی تجلی چه حقیقتی است. در اینجا سعی داریم ببینیم قضیهٔ چبوتاریوف، که هم صورت‌بندی آن و هم اثبات آن نقشی تعیین‌کننده در تاریخ نظریهٔ جبری اعداد داشته است، تجلی چه حقیقتی است.

۱ مقدمه

ازآنجاکه قضیهٔ چبوتاریوف[1] حکمی در مورد گسترش‌های گالوایی میدان‌های عددی است، پس عملاً این قضیه به مطالعهٔ موجودی متقارن با گروه تقارن مفروضی می‌پردازد. این قضیه را می‌توان به‌صورت تعمیمی از قضیهٔ دیریکله دربارهٔ تصاعدهای حسابی لحاظ کرد. این قضیه دربارهٔ توزیع اعداد یا ایده‌آل‌های اول با خصوصیاتی مفروض است، وقتی که نرم اعداد یا ایده‌آل‌های اول کران‌دار باشند و این کران به سمت بی‌نهایت میل کند. صورت موثر[2] و محاسباتی‌ای برای این قضیه از فرضیهٔ تعمیم‌یافته ریمان نتیجه می‌شود. این قضیه برای گسترش‌های نامتناهی میدان‌های عددی قابل فرمول‌بندی است. برای اطمینان از اینکه تجلیات معمول این قضیه ذکر شده باشند از دانشنامهٔ ویکی‌پدیا [۱] نیز استفاده کرده‌ایم.

هدف این مقاله، مطالعهٔ حقیقت پشت صحنهٔ این شبکه از قضیه‌ها و نتایج مربوط به هم است. سعی خواهیم کرد بستری عام‌تر برای تجلی این حقیقت معرفی، و حدس‌های مشابه این قضیه را در

عبارات و کلمات کلیدی: قضیهٔ چبوتاریوف، تقارن گالوایی، چگالی اعداد اول، عضو فروبنیوس
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۳۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۴/۲۸

1. Nikolai Chebotarev 2. effective

© ۱۴۰۳(انجمن ریاضی ایران)
doi: 10.30504/mct.2023.1401.1984

جای‌جای ریاضیات صورت‌بندی کنیم.

در بخش اول، صورت دقیق قضیهٔ چبوتاریوف و گزارشی بسیار مختصر از زندگی او را خواهیم آورد. در ادامه، به حالت‌های خاص میدان اعداد گاوسی و اعداد صحیح دایره‌بری خواهیم پرداخت. رابطهٔ این قضیه با قضیهٔ دیریکله دربارهٔ تصاعدهای حسابی و حالت‌های خاص این قضیه که فروبنیوس[1] آن‌ها را اثبات کرده است، درک ما را از پیش‌زمینه‌های قضیهٔ چبوتاریوف بیشتر خواهد کرد [۳]. در بخش پنجم به تعمیم‌های این قضیه روی میدان اعداد دلخواه و در بخش ششم به صورت موثر این قضیه خواهیم پرداخت. پس‌از آن، صورت این قضیه برای گسترش‌های نامتناهی و میدان‌های توابع را مطرح خواهیم کرد. با بیان نکاتی دربارهٔ نتایج قضیهٔ چبوتاریوف و اهمیت آن خود را برای صحبت درباره حقیقت پشت صحنهٔ قضیهٔ چبوتاریوف آماده خواهیم کرد.

۲ صورت دقیق قضیهٔ چبوتاریوف

در این مقاله، آشنایی مقدماتی با نظریهٔ گسترش‌های میدان‌ها و گروه‌های تقارن آن‌ها، که گروه گالوا نام دارد، را فرض گرفته‌ایم. نسل ما نظریهٔ گالوا را از کتاب ادواردز[2] می‌آموخت. اما خوانندهٔ امروزی را برای منابع غنی‌تر به کتابخانهٔ وبگاه «پژوهش در ریاضیات»[3] ارجاع می‌دهیم.

فرض کنید L روی K یک گسترش گالوایی و متناهی از میدان‌های عددی باشد (میدان‌های عددی گسترش متناهی $\mathbb{Q}$ هستند). برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از حلقهٔ اعداد صحیح K، که آن را O_K می‌نامیم، و هر ایده‌آل اول $\mathfrak{P}$ از L بالای سر $\mathfrak{p}$، نماد آرتین $\left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right]$ عضو یگانهٔ σ از گروه گالوای $\mathrm{Gal}(L/K)$ است به‌طوری که برای هر $\alpha \in L$ داریم

$$\sigma(\alpha) \equiv \alpha^{\mathrm{Norm}(\mathfrak{p})} \ (\mathfrak{P}\text{به پیمانهٔ}).$$

ازآنجاکه برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ ایده‌آل‌های $\mathfrak{P}$ی بالای سر آن با اعضای گروه گالوای $\mathrm{Gal}(L/K)$ به هم می‌روند، پس مقادیر $\left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right]$ مزدوج هم هستند. ردهٔ مزدوجی آن‌ها را $\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]$ می‌نامیم. قضیهٔ چگالی چبوتاریوف حاکی از این است که برای هر ردهٔ مزدوجی $C \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ تعداد ایده‌آل‌های اول $\mathfrak{p}$ از O_K با شرط $\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right] = C$ متناسب با تعداد اعضای C است. این حکم به نوعی یک قضیهٔ توزیع عادلانهٔ ایده‌آل‌های اول در یک گروه به شمار می‌آید. خواهیم دید که این قضیه عمیقاً با قضیهٔ دیریکله دربارهٔ اعداد اول در تصاعدهای حسابی نامتناهی ارتباط دارد. این قضیه را

1. Ferdinand Georg Frobenius 2. Harold M.Edwards 3. http://mathedu.research.sharif.edu/

چبوتاریوف در رسالهٔ دکترایش در سال ۱۹۲۲ ثابت کرد و آن را در سال ۱۹۲۶ در مجلهٔ معروف ماتماتیش آنالن چاپ کرد [۸].

چبوتاریوف متولد سال ۱۸۹۴ در اوکراین بود و در ۵۳سالگی در مسکو وفات یافت. دوران کارشناسی را در دانشکدهٔ ریاضی و فیزیک دانشگاه کی‌یف گذراند. او شاگرد گراوی[1] در دانشگاه ایالتی کازان بود. او در ۳۴سالگی استاد تمام آنجا شد و تا آخر عمر در آنجا خدمت کرد. چبوتاریوف کتابی با عنوان مبانی نظریهٔ گالوا نیز تألیف کرده است.

۳ حالت خاص اعداد صحیح گاوسی و اعداد صحیح دایره‌بُری

گاوس حلقهٔ $\mathbb{Z}[i]$ را تعریف کرد و متوجه شد بعضی از اعداد اول در این حلقه قابل تجزیه به عوامل اول‌اند. به‌طور دقیق‌تر، اعداد اول p که به شکل $4k+1$ هستند، حاصل‌ضرب دو عدد صحیح گاوسی‌اند، به‌اصطلاح «کاملاً می‌شکافند». اما اگر p به شکل $4k+3$ باشد، در حلقهٔ اعداد صحیح گاوسی به‌صورت یک عدد اول باقی خواهند ماند و به‌اصطلاح «دست‌نخورده باقی می‌مانند». اگر $p=2$ این عدد اول به‌صورت $2=(1+i)^2(-i)$ نوشته می‌شود و به‌اصطلاح منشعب[2] است. اگر اعداد اول بزرگ و بزرگ‌تر را در نظر بگیریم، احتمال وقوع اعداد اولی که کاملاً می‌شکافند به ۱/۲ میل می‌کند؛ این نکته از قضیهٔ دیریکله در مورد تصاعدهای حسابی نتیجه می‌شود.

مثال دیگر برای قضیهٔ چبوتاریوف، الگوی شکافتن اعداد اول در گسترش‌های دایره‌بُری است که از افزودن nاُم ریشهٔ ζ_n واحد به اعداد گویا به دست می‌آیند. برای مثال، در حلقهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ اعداد اول صحیح به چهار دسته تقسیم می‌شوند که هریک با احتمال ۱/۴ براساس الگوی شکافتن اعداد اول اتفاق می‌افتند. در اینجا، گروه گالوا آبلی است و ۴ عضو دارد و با چهارگروه کلاین یکریخت و گسترش آن نیز از درجهٔ ۴ است. گروه گالوا در الگوی توزیع اعداد اول نقشی کلیدی ایفا می‌کند. در حالت کلی $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ یک گسترش گالوایی درجهٔ $\phi(n)$ است که در آن ϕ تابع فی اویلر است. در اینجا گروه گالوا با گروه $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ یکریخت و حلقهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ برابر $\mathbb{Z}(\zeta_n)$ است. این گسترش برای هر عدد اول که n را عاد نمی‌کند نامنشعب[3] است. اگر $n=p^\alpha$ در این صورت $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ بالای سر p کاملاً می‌شکافد. بنابر قضیهٔ کرونکر–وبر هر گسترش متناهی آبلی $\mathbb{Q}$ به ازای یک n مناسب در $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ می‌نشیند. به‌عبارت‌دیگر، اجتماع $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ها $\mathbb{Q}^{ab}$ یا گسترش ماکسیمال آبلی $\mathbb{Q}$ هستند. قضیهٔ چبوتاریوف برای حالت خاص گسترش‌های دایره‌بُری قضیهٔ دیریکله دربارهٔ تصاعدهای حسابی را نتیجه می‌دهد. در حالت خاصِ گسترش‌های دایره‌بُری

1. Dmitry Grave 2. ramified 3. unramified

ازآنجاکه گروه گالوا آبلی است، ردهٔ مزدوجی که به هر عدد اول نسبت داده می‌شود، تنها از یک عضو گروه گالوا تشکیل شده است.

بنابر قضیهٔ دیریکله اعداد اولی که n را عاد نمی‌کنند به پیمانهٔ n به‌طور مساوی در اعضای $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ توزیع شده‌اند. در بخش بعد این حالات خاص قضیهٔ چبوتاریوف را بررسی می‌کنیم.

۴ قضیهٔ دیریکله دربارهٔ تصاعدهای حسابی

قضیهٔ مشهور دیریکله بیان می‌کند که هر تصاعد حسابی به‌شکل $a+nd$ که در آن a, d اعداد طبیعی و نسبت به هم اول هستند، شامل بی‌نهایت عدد اول است. به‌عبارت‌دیگر، بی‌نهایت عدد اول به پیمانهٔ d هم‌نهشت با a هستند. در ابتدا، این قضیه را تعمیمی از قضیهٔ اقلیدس می‌پنداشتند که بنا به آن تعداد اعداد اول بی‌نهایت است. صورت قوی‌تر قضیهٔ دیریکله این است که مجموع وارون‌های اعداد اول در هر تصاعد حسابی واگرا است. این حکم بسیار شبیه روش اثبات اویلر برای نامتناهی بودن اعداد اول است. به‌علاوه، باید توجه کرد که توزیع اعداد اول به پیمانهٔ d در دسته‌های مانده‌هایی که a, d نسبت به هم اول هستند، به‌طور مساوی صورت می‌گیرد و این نتیجه از قضیهٔ چبوتاریوف نیز به دست می‌آید.

اویلر برای نشان دادن اینکه مجموع وارون‌های اعداد اول بی‌نهایت است، تابع $\zeta(s)$ را تعریف کرد و نشان داد $\zeta(۱)$ برابر $\frac{\Pi p}{\Pi(p-۱)}$ است و این نسبت نیز نامتناهی است. سپس اویلر همین نتیجه را برای اعداد اول ظاهرشده در تصاعدهای حسابی در حالت $a = ۱$ ثابت کرد. برای اثبات این حالت خاص می‌توان از چندجمله‌ای‌های دایره‌بُری کمک گرفت. صورت کلی این حکم را لژاندر[1] حدس زده بود. او به‌طور ناموفقی سعی کرد قضیهٔ تقابل درجهٔ دوم را اثبات کند. اما دیریکله این نتیجه را با کمک Lـتابع‌ها ثابت کرد. در سال ۱۹۴۹ سلبرگ[2] اثباتی مقدماتی برای این قضیه به دست داد. دیریکله برای اثبات این حکم نشان می‌داد که $L(\chi, ۱)$ برای مشخصهٔ نابدیهی χ ناصفر است. برای مطالعهٔ Lـتابع‌ها و اثبات دیریکله به [۲] مراجعه کنید. اثبات این حکم دیریکله احتیاج به اطلاعاتی از حسابان و مقداری نظریهٔ تحلیلی اعداد دارد. حالت $a = ۱$ را می توان با بررسی شکافتن‌های اعداد اول در گسترش‌های دایره‌بُری و بدون استفاده از حسابان به انجام رساند.

۵ حالت خاص قضیهٔ چبوتاریوف که توسط فروبنیوس ثابت شد

فرض کنید K یک گسترش گالوایی $\mathbb{Q}$ باشد و $p(t)$ چندجمله‌ای یکال با ضرایب صحیح باشد و

1. Adrien-Marie Legendre 2. Atle Selberg

K میدان شکافندهٔ $p(t)$ باشد. می‌توان $p(t)$ را به پیمانهٔ هر عدد اول p برد. نوع شکافتن $p(t)$ عبارت است از تمام درجه‌های عامل‌های تحویل‌ناپذیر $p(t)$ به پیمانهٔ p. درواقع، اگر n درجهٔ $p(t)$ باشد، نوع شکافتن $p(t)$ افرازی مانند π از عدد n است. اگر G گروه گالوای K روی $\mathbb{Q}$ باشد، هر عضو g در G جایگشتی از ریشه‌های $p(t)$ در K است. بنابراین، با انتخاب یک ترتیب از این ریشه‌ها، گروه G را به‌طور صادق به‌صورت زیرگروهی از گروه جایگشت‌های S_n نمایش داده‌ایم، پس می‌توان g را به‌صورت حاصل‌ضربی از دورها نمایش داد. این نیز در جای خود یک نوع از دورها مانند $c(g)$ را به دست می‌دهد که دوباره افرازی از n است. اکنون، قضیهٔ فروبنیوس بیان می‌کند که برای هر انتخاب نوعِ شکافتن π، اعداد اول p که برای آن‌ها نوع شکافتن $p(t)$ به پیمانهٔ p برابر π است دارای چگالی δ هستند که در آن δ برابر است با نسبت اعضای g در G که نوع دورهای آن‌ها π است. به یاد داشته باشید که منظور از چگالی اعداد اول دارای یک خاصیت مفروض چنین است: اگر اعداد اول را با ترتیب آن‌ها مرتب کنیم و دنبالهٔ حاصل را $p_1, p_2, \ldots$ بنامیم و نسبت تعداد اعداد اول با خاصیت مفروض در بین اولین n عدد اول به مقدار n، که کل تعداد اعداد اول نظر گرفته شده است، وقتی n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند به سمت حدی میل کند، این عدد حدی را چگالی اعداد اول با خاصیت داده‌شده می‌نامند.

صورت تعمیم‌یافتهٔ قضیهٔ چبوتاریوف برحسب عضو فروبنیوس یک ایده‌آل اول است، این عضو درواقع یک ردهٔ مزدوجی مانند C از اعضای گروه گالوای G است. صورت تعمیم‌یافتهٔ قضیهٔ چبوتاریوف این چنین است: برای C ثابت چگالی اعداد اولی که عضو فروبنیوس وابسته به آن‌ها در C قرار دارد برابر است با $\frac{|C|}{|G|}$. اگر G جابه‌جایی باشد ردهٔ مزدوجی یک مجموعهٔ تک‌عضوی است؛ پس قضیهٔ دیریکله حالت خاصی از قضیهٔ فروبنیوس است برای حالتی که G آبلی است.

۶ قضیهٔ چبوتاریوف برای گسترش‌های گالوایی متناهی $\mathbb{Q}$

اگر L گسترش گالوایی متناهی از میدان عددی K با گروه گالوای G و X زیرمجموعه‌ای از G باشد که تحت مزدوج‌گیری ناوردا است، مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول v در K که در L نامنشعب‌اند و ردهٔ مزدوجی فروبنیوس وابسته به آن‌ها Fr_v در X است، دارای چگالی $\frac{\#X}{\#G}$ است. اگر $K = \mathbb{Q}$ قضیهٔ فروبنیوس به دست می‌آید و اگر $K = \mathbb{Q}$ و $L = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ و G گروه آبلی باشد، قضیهٔ دیریکله نتیجه می‌شود.

چبوتاریوف قضیهٔ خود را ابتدا برای حالتی که G گروه دوری باشد اثبات کرد و سپس آن را

برای حالتی که G آبلی است نتیجه گرفت و بعد با کمک اصل ارشمیدس در اعداد حقیقی آن را برای گروه دلخواه G ثابت کرد. این نکته جالب توجه است که اصل ارشمیدس در اعداد حقیقی در نظریهٔ جبری اعداد کاربرد پیدا کرده است. آرتین نیز از این روش برای اثبات قضیهٔ اصلی نظریهٔ میدان‌های رده‌ای استفاده کرده است.

قضیهٔ چبوتاریوف به‌هیچ‌وجه صورتی پیچیده‌تر از قضیهٔ فروبنیوس ندارد و تنها نکتهٔ اصلی در کار چبوتاریوف ایده اثبات قضیه است که به او اجازه می‌دهد قضیهٔ فروبنیوس را روی میدان عددی دلخواه K اثبات کند. روش اثبات چبوتاریوف تأثیرات مهمی بر تاریخ ریاضیات گذاشت. صورت‌های دقیق‌تری از قضیهٔ چبوتاریوف وجود دارد که در مورد طریقهٔ رشد اعداد اول مورد مطالعه در قضیهٔ چبوتاریوف اطلاعات دقیقی به دست می‌دهند. توجه کنید که طریقهٔ رشد اعداد اول مورد مطالعه در این قضیه با صورت تعمیم‌یافتهٔ فرضیهٔ ریمان ارتباط دارد. برای اطلاعات بیشتر در این مورد و صورت هندسی قضیهٔ چبوتاریوف و فرضیهٔ ریمان در این چارچوب به [۶] مراجعه کنید.

۷ صورت مؤثر قضیهٔ چبوتاریوف

فرضیهٔ ریمان تعمیم‌یافته صورت موثری از قضیهٔ چگالی چبوتاریوف را نتیجه می‌دهد. اگر L/K گسترش گالوایی متناهی با گروه گالوای G و C اجتماعی از رده‌های مزدوجی G باشد، تعداد ایده‌آل‌های اول نامنشعب در K با نرم کوچک‌تر از x با ردهٔ مزدوجی فروبنیوس در C برابر است با

$$\frac{|C|}{|G|}(\mathrm{li}(x) + O(\sqrt{x}(n(\log x) + \log|\Delta|)))$$

که در آن n درجهٔ L روی $\mathbb{Q}$ و Δ مبین آن است؛ ضریب مستتر در O مطلق است؛ به مقالهٔ [۵] رجوع کنید.

اما بدون فرضیهٔ ریمان تعمیم‌یافته صورت موثر قضیهٔ چبوتاریوف، که تا به حال به دست آمده است، بسیار ضعیف‌تر می‌شود.

۸ قضیهٔ چبوتاریوف برای گسترش‌های نامتناهی میدان‌های عددی

فرض کنید L/K یک گسترش نامتناهی گالوایی باشد که بیرون از مجموعهٔ متناهی S مرکب از ایده‌آل‌های اول K نامنشعب است. در این صورت گروه گالوای G از گسترش L/K یک گروه

بالقوه متناهی[۱] است که با یک توپولوژی کرول[۲] تجهیز شده است. گروه G تحت این توپولوژی یک گروه فشرده است، پس یک اندازهٔ هار یگانهٔ μ روی G وجود دارد. برای هر ایده‌آل اول v از K که بیرون از S است، یک ردهٔ مزدوجی فروبنیوس در G وجود دارد. در این حالت، قضیهٔ چبوتاریوف به‌صورت زیر بیان می‌شود. اگر X زیرمجموعهٔ G باشد که تحت مزدوج‌گیری ناوردا و مرز آن با اندازهٔ صفر است، آنگاه مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول v از K که بیرون از S هستند و $Fr_v \subseteq X$ دارای چگالی $\frac{\mu(X)}{\mu(G)}$ است.

برای حالت گسترش‌های متناهی L روی K اندازهٔ هار همان اندازهٔ شمارشی خواهد بود. یک نتیجه از این صورت قضیهٔ چبوتاریوف این است که اعضای فروبنیوس ایده‌آل‌های اول نامنشعب L در G چگال‌اند. برای جزییات بیشتر به بخش ۲.۲.۱ کتاب [۷] مراجعه کنید.

توجه داشته باشید که بین میدان‌های عددی و میدان‌های توابع، یک فرهنگ لغت دوسویه وجود دارد که از ابتدای فرمول‌بندی نظریهٔ میدان‌هایعددی همواره مدنظر بوده است. بنابرین، انتظار داریم که قضیهٔ چبوتاریوف نیز برای حالت میدان‌های توابع قابل فرمول‌بندی و اثبات باشد.

۹ قضیهٔ چبوتاریوف برای میدان‌های توابع

فرض کنید M/K یک گسترش متناهی گالوای میدان‌های توابع روی یک میدان متناهی k با تعداد اعضاء q با گروه گالوای G باشد. فرض کنید k میدان ثابت‌های M نیز باشد. اگر $C \subseteq G$ یک ردهٔ مزدوجی و S'_K مجموعه ایدهآل‌های اول در K باشد که در M نامنشعب‌اند، آنگاه برای هر عدد طبیعی n داریم

$$\#\left\{P \in S'_K : \deg_k(P) = n,\ (P, M/K) = C\right\} = \frac{\#C}{\#G}\frac{q^n}{n} + O(\frac{q^{n/2}}{n}).$$

در اینجا $(P, M/K)$ ردهٔ مزدوجی فروبنیوس p است. صورت‌های دیگر از قضیهٔ چبوتاریوف برای میدان‌های توابع وجود دارد [۴].

احتمالاً صورت مؤثری از قضیهٔ چبوتاریوف برای میدان‌های توابع بتواند از فرضیهٔ ریمان برای میدان‌های توابع، که برخلاف میدان‌های عددی اثباتی از آن موجود است، قابل نتیجه‌گیری باشد.

شاید بتوان قضیهٔ چبوتاریوف را برای میدان‌های توابع روی $\mathbb{C}$ یا روی میدان دلخواه با مشخصهٔ

---

۱. profinite؛ گروه متناهی‌گرا نیز ترجمه شده است.

2. Wolfgang Krull

صفر نیز فرمول‌بندی کرد؛ اما برای من معلوم نیست که آیا حکم برقرار خواهد بود؟ برای مثال، اگر یک رویهٔ ریمانی روی رویهٔ دیگری گالوایی و منشعب باشد، بیرون نقاط منشعب الگوی دورهای بالای سر این نقاط تحت گروه گالوا با هم یکی است. این نکته‌ای هندسی است و به‌راحتی قابل اثبات است.

۱۰ نتایج قضیهٔ چبوتاریوف

قضیهٔ چگالی چبوتاریوف مسئلهٔ رده‌بندی گسترش‌های گالوایی میدان‌های عددی را به بررسی شکافتن ایده‌آل‌های اول در این گسترش‌ها تحویل می‌کند. به‌خصوص در این قضیه میدان L به‌عنوان گسترش گالوایی K به‌طور یگانه با مجموعهٔ ایده‌آل‌های اولی که در L می‌شکافند مشخص می‌شود. نتیجهٔ دیگر این قضیه آن است که اگر تقریباً برای همهٔ ایده‌آل‌های اول K بدانیم که این ایده‌آل‌ها در L می‌شکافند آنگاه $L = K$.

قضیهٔ چبوتاریوف برای گره‌ها در سه‌خمینه‌ها نیز قابل فرمول‌بندی است. با توجه به تشابه بین اعداد اول و گره‌ها در خمینه‌های سه‌بُعدی می‌توان برای یک خمینهٔ سه‌بُعدی بالاتر که روی چند گره منشعب است و بیرون آن گره‌ها همسان‌ریختی است و به‌عنوان خمینه‌ای روی خمینهٔ دیگر متقارن با گروه گالوایی G است یک صورت‌بندی از قضیهٔ چبوتاریوف را بیان کرد. در بعضی حالت‌ها می‌توان چنین قضیه‌ای را اثبات کرد. برای جزئیات بیشتر به [۶] مراجعه کنید. این فرمول‌بندی که خصلتی هندسی دارد و بسیار از فرمول‌بندی‌های جبری قضیهٔ چبوتاریوف دور است به ما کمک می‌کند که درکی از حقیقت پشت صحنهٔ قضیهٔ چبوتاریوف پیدا کنیم و یک فرمول‌بندی بسیار کلی از این حقیقت ارائه دهیم. اما قبل از این کار به بررسی اهمیت اثبات قضیهٔ چبوتاریوف می‌پردازیم.

۱۱ اهمیت برهان قضیهٔ چبوتاریوف

اشاره کردیم که اثبات قضیهٔ چبوتاریوف سه مرحله دارد: ابتدا این قضیه برای گروه‌های گالوای دوری ثابت می‌شود و سپس برای گروه‌های گالوای آبلی و در قدم نهایی برای گروه‌های گالوای متناهی دلخواه. این اثبات نقش مهمی در تاریخ نظریهٔ جبری اعداد ایفا کرده است.

آرتین پیش‌از اثبات چبوتاریوف نظریهٔ میدان‌های رده‌ای را به‌طور کامل فرمول‌بندی کرده بود، ولی نمی‌توانست آن را اثبات کند. پس‌از اینکه اثبات چبوتاریوف را دید، او توانست از طریق همین

سه مرحله، نظریهٔ میدان‌های رده‌ای را تکمیل کند. اسکینر[1] در جایی گفته است که در همهٔ اثبات‌هایی که در نظریهٔ میدان‌های رده‌ای دیده است این سه مرحله وجود دارند؛ به‌خصوص خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی در همهٔ آن‌ها استفاده شده است. انتظار ما نیز این است که در همه نمونه‌های مشابه، به‌خصوص در اثبات نظیر قضیهٔ چبوتاریوف برای گره‌ها در خمینه‌های سه‌بُعدی، این سه مرحله در اثبات آن‌ها کارگشا باشد.

۱۲ حقیقت پشت صحنهٔ قضیهٔ چبوتاریوف

ورود اعداد اول به یک ساختار ریاضی نشانهٔ ورود دو نگاه موضعی–سرتاسری به آن ساختار است، و در این موقعیت مطالعهٔ ساختار سرتاسری با کمک برهم‌نهی مطالعهٔ ساختارهای موضعی امکان‌پذیر می‌شود.

حالا فرض کنید یک ساختار سرتاسری، بالای سرِ یک ساختار سرتاسری دیگر قرار گرفته باشد طوری که این نگاشت دارای گروه تقارن‌های متناهی G باشد و ساختار سرتاسری بالا را بتوان به معنایی بر عمل گروه G تقسیم کرد و ساختار سرتاسری پایین را به دست آورد. سؤال این است که موضعی‌سازی این نگاشت سرتاسری به چه انواعی از موضعی‌سازی‌ها تقسیم می‌شود و آیا فراوانی این انواع با هم برابر است. اصل موضعی–سرتاسری در بسیاری از ساختارها که در تاریخ نظریهٔ اعداد مورد مطالعه قرار گرفته‌اند برقرار است. برای مثال، در مطالعهٔ صورت‌های درجهٔ دوم یک اصل موضعی–سرتاسری برقرار است. جالب اینجاست که در فرمول‌بندی قضیهٔ چبوتاریوف برای گره‌ها در خمینه‌های سه‌بُعدی می‌توان گره‌ها را از دیدگاه موضعی به این خمینه‌ها ادراک کرد. بنابراین، در یک خمینهٔ سه‌بُعدی اگر تمام ژئودزیک‌های بسته را در نظر بگیریم باید به نوعی اصل موضعی–سرتاسری هم برقرار باشد؛ برای مطالعهٔ بیشتر به [۶] رجوع کنید.

۱۳ فرمول‌بندی کلی قضیهٔ چبوتاریوف

با توجه به آنچه گفتیم یک فرمول‌بندی کلی از نگاه موضعی–سرتاسری به‌سادگی یک فرمول‌بندی کلی از قضیه چبوتاریوف را به دست خواهد داد. مجموعهٔ ایده‌آل‌های اولِ میدان‌های عددی با مجموعهٔ نقاط میدان‌های توابع وابسته به یک شیء هندسی در تناظر است. برای مثال، گره‌ها در خمینهٔ سه‌بُعدی وابسته به رویهٔ ریمانی که ژئودزیک هستند برابر نگاشت‌هایی از دایره به رویهٔ ریمانی است که تصویر آن‌ها ژئودزیک است. می‌توان روی طرح‌های جبری[2] همهٔ نقاط بسته را در نظر گرفت که

1. Christopher Skinner 2. algebraic scheme

گروهی از آن‌ها نقطهٔ عام[1] زیرطرح‌ها هستند. می‌توان همهٔ توابع از کرهٔ ریمان به یک شیء هندسی را در نظر گرفت که در شرط خاصی صدق می‌کنند. می‌توان همهٔ نگاشت‌ها از دایره به شیء هندسی‌ای را در نظر گرفت که در شرط خاصی صدق می‌کند. این مصادیق در هندسه و فیزیک فراوان مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. برای مثال، فیزیک‌دانان فضای حلقه‌های یک فضای توپولوژیک را بررسی و هندسهٔ دیفرانسیل آن را مطالعه می‌کنند. دوگان این مفهوم نیز قابل مطالعه است. مثلاً یرای خمینهٔ سه‌بُعدی که روی دایره تارسازی[2] می‌شود این نگاشت تارسازی یگانه نیست. می‌توان همهٔ این نگاشت‌های تارسازی را مورد مطالعه قرار داد. به نظر می‌رسد که فرمول‌بندی قضیهٔ چبوتاریوف برای همهٔ این مصادیق امکان‌پذیر باشد.

برای آنکه از کلی‌گویی بپرهیزیم، یک مثال خاص می‌آوریم. در مقایسه گره‌ها در خمینه‌های سه‌بُعدی با اعداد اول نظیر یک دوگانی پوانکاره در بُعد ۳ در نظریهٔ اعداد را مازور[3] کشف کرد. مشابه چنین دوگانی‌ای در هندسهٔ مختلط وجود دارد. برای خمینه‌های کِلر[4] از بُعد n نگاشت زیر روی گروه‌های کوهومولوژی pاُم با ضرایب در بافهٔ Ω_X^p وجود دارد که یک دوگانی است:

$$H^p(X, \Omega_X^p) \times H^{n-p}(X, \Omega_X^{n-p}) \to H^n(X, \Omega_X^n) \cong \mathbb{C}.$$

حال، اگر خمینه‌های کلر از بُعد ۳ را همراه با خم‌های مختلط هموار فشرده درون آن‌ها در نظر بگیریم، این خم‌های مختلط مشابه گره‌ها در خمینه‌های سه‌بُعدی و اعداد اول در حلقهٔ اعداد صحیح رفتار خواهند کرد. می‌توان نگاشتی را بین خمینه‌های کلر در نظر گرفت که روی یک مجموعهٔ متناهی از خم‌های جبری منشعب باشد و بیرون آن‌ها یک فضای پوششی گالوایی با گروه تقارن G به دست بدهد. چنین ابزار صوری‌ای برای فرمول‌بندی یک صورت از قضیهٔ چبوتاریوف کفایت خواهد کرد. فضای تصویری[5]، $\mathbb{C}P^3$، با مجموعه‌ای نامتناهی از خم‌های جبری هموار درون آن مشابه اعداد گویا خواهد بود.

مراجع

[1] Chebotarev's density theorem, in *Wikipedia*, available at `https://en.wikipedia.org/wiki/Chebotarev%27s_density_theorem`

[2] Davenport, H., *Multiplicative Number Theory*, Springer, New York, 1980.

[3] Frobenius, F., Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe, *Sitzber. Berl. Akad.*, (1896), 689-705.

1. generic 2. fibering 3. Barry Mazur 4. Erich Kahler 5. projective space

[4] Kosters, M., A short proof of a Chebotarev density theorem for function fields, *Math. Commun.*, **22**(2017), 227-233.

[5] Lagarias, J. C., Odlyzko, A. M., Effective versions of the Chebotarev density theorem, in *Algebraic Number Fields, L-Functions and Galois Properties*, A. Fröhlich, ed., Academic Press, New York, 1977, 409-464.

[6] Rastegar, A., Research project no.3: A formulation of Riemann hypothesis on hyperbolic 3-manifolds (2023), preprint.

[7] Serre, J., *Abelian l-Adic Representations and Elliptic Curves*, AK Peters/CRC Press, New York, 1988.

[8] Tschebotareff, N., Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehiiren, *Math. Ann.*, **95**(1926), 191-228.

آرش رستگار: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: rastegar1352@gmail.com

Mathematical Culture and Thought
Volume 43, Number 1, Spring/Summer 2024, Pages 259–269
doi: 10.30504/mct.2023.1401.1984

Behind the Scene Truth of Chebotarev's Density Theorem

A. Rastegar[1]

Department of Mathematical Sciences, Sharif University of Technology, Iran

Abstract. By behind the scene truth, we mean interpretation of a mathematical result. This means that we setermine that mathematical result is manifestation of which higher truth. There, we will try to find that Chebotarev's density theorem, which both its formulation and its proof had a determining role in the history of algebraic number theory, is manifestation of which higher truth.

Keywords: Chebotarev's density theorem, Galois symmetry, density of prime numbers, Frobenius elements
Article history: Recieved 21 June 2023; Accepted 19 July 2023
Article type: survey

1. rastegar1352@gmail.com

ISSN 1022-6443/© Iranian Mathematical Society under the CC BY-NC-SA 4.0 license