فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۳، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۳)، صص ۳۵۱ تا ۳۷۹

مقالهٔ کلاسیک

ریاضیات خمینه‌های سه‌بُعدی*

دبلیو. پی. ترستون، جی. آر. ویکس

ترجمهٔ سیّد محمدباقر کاشانی

چکیده. در این مقاله خمینه‌های دوبُعدی و سه‌بُعدی از دیدگاه‌های مختلفی، خصوصاً از دیدگاه هندسی و توپولوژیک، بررسی می‌شود. سپس کاربرد آن‌ها در علوم دیگر ازجمله فیزیک، مثلاً از دیدگاه نسبیت، مطالعه می‌شود. این توصیف و بررسی به زبانی غیرفنی و قابل‌فهم برای دستهٔ وسیعی از مخاطبان انجام شده است. ـــ م.

مطالعهٔ توپولوژیک اشیاءِ مشابه رویه‌ها در ابعاد بالاتر حاکی از آن است که احتمالاً عالم مانند گرهٔ به هم پیچیدهٔ نخ است. اکنون آشکار شده است که بیشتر خمینه‌ها را می‌توان از دیدگاه هندسی بررسی کرد.

هزاران سال پیش بسیاری از مردم فکر می‌کردند که کرهٔ زمینْ تخت است. تخت بودن سطح زمین با نگاه کردن به سطح اقیانوس‌ها یا دشت‌ها در نظر افراد امری بدیهی به نظر می‌رسید، و آن‌ها دلیل می‌آوردند که زمین یا باید بی‌انتها باشد یا دارای لبه، که چندان هم نامعقول نبود. البته اکنون می‌دانیم که چگونه چنین سوءبرداشت ساده‌ای پدید آمده بود: حتی از بلندای چندهزار متری هم بخش کوچکی از سطحِ تقریباً کروی زمینْ شبیه به بخشی از یک صفحه به نظر می‌رسد. آنچه غالباً کمتر

عبارات و کلمات کلیدی: خمینه، فضای اقلیدسی، هندسی‌سازی، ساختار عالم، میله‌بندی، نظریهٔ نسبیت عام

نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۲/۷

* Thurston, W. P., Weeks, J. R., The mathematics of three-dimensional manifolds, *Scientific American*, **251** (1984), no. 1, 108-120.

این مقاله به پیشنهاد و دعوت سردبیر ترجمه شده است.

doi: 10.30504/mct.2023.1332.1966

به آن توجه می‌شود این است که شکل‌های بسیاری در روی زمین به چشم ناظران محلی یکسان می‌آیند. برای نمونه، از دید این ناظران زمین می‌تواند شکل دونات یا یک تودهٔ کوچک نامنتظم را داشته باشد.

تحقیقات در شاخه‌ای از ریاضی به نام توپولوژی آشکارا نشان می‌دهد که وقتی بخواهیم با دیدی محدود از نقطه‌ای در فضا شکل کلی عالم را توصیف کنیم با وضعیتی مشابه روبه‌رو می‌شویم. یک ناظر در روی زمین نمی‌تواند نتیجه بگیرید که ساختار هندسی فضای اقلیدسی معمول در فاصله‌های دوردستِ عالم نیز پابرجا می‌ماند، هرچند هنوز هیچ گواهی برخلاف آن نیز در دست نیست. اگر ساختار عالمْ اقلیدسی نیست، پس چیست؟ یک تصور رایج این است که فضا ممکن است مثل یک رویه «خمیده» باشد. خمیدگی سه‌بُعدی فضا و مفهوم کاملاً مرتبط با آن، خمیدگی چهاربُعدی فضا و زمان، به دلیل نقش کلیدیشان در نظریهٔ نسبیت عمومی اینشتین، اندیشه‌های مهمی در نجوم و کیهان‌شناسی شده‌اند.

بااین‌همه، تعیین خمیدگی به‌تنهایی برای بیان چیزی به اسم شکل عالم کافی نیست. با مقایسه با رویه‌های دوبُعدی می‌توان برای عالم بعضی از ساختارهای سه‌بُعدی ممکن را در نظر گرفت، ولی این مقایسه تنها حاکی از غِنای وضعیتی است که با ورود بُعد سوم شروع می‌شود. درواقع، چون فضا و زمان در نظریهٔ نسبیت به‌صورت یک مفهوم واحد به نام فضا–زمان در نظر گرفته می‌شود، می‌توان فرض کرد که ساختار ریاضی مناسب برای عالم چهاربُعدی است. بااین‌همه، دلیل قانع‌کننده‌ای داریم که باور کنیم که بر ساختار فضا–زمان چهاربُعدی تنها ساختار فضای سه‌بُعدی حاکم است. بنابراین برای بررسی کلی و بدون پیش‌داوری ساختار عالم باید انواع ساختارهای سه‌بُعدی را که به این عالم محسوس ختم می‌شوند بشناسیم. این ساختارها را خمینه‌های سه‌بُعدی یا به‌اختصار سه‌خمینه می‌نامند.

مطالعهٔ سه‌خمینه‌ها به نوعی گسترش مطالعهٔ دوخمینه‌ها یا رویه‌ها است. بیش‌از یک قرن است که توپولوژی‌دان‌ها می‌دانند چگونه همهٔ دوخمینه‌های ممکن را توصیف و دسته‌بندی کنند، ولی رده‌بندی اصولی همهٔ خمینه‌های سه‌بُعدی به علت شکل‌های پیچیده‌ای که آن‌ها پیدا می‌کنند به‌صورت یک مسئلهٔ حل‌نشده باقی مانده است.[۱] روشی ریاضی موسوم به جراحی به نوعی بیانگر این پیچیدگی‌ها است. با استفاده از روش جراحی می‌توان از هر گرهٔ به هم پیچیدهٔ یک نخ یک سه‌خمینه درست کرد، صرف‌نظر از طرز گره زدن یا پیچاندن آن گره. تصور کنید دو کلاف گره‌خورده از نخ ماهیگیری

۱. البته تا سال ۱۹۸۴؛ برای نمونه، [۱] را برای آشنایی با خمینه‌های سه‌بُعدی و رده‌بندی آن‌ها ببینید. ــ م.

دارید و می‌خواهید ببینید آیا گره‌خوردگی این دو نخ مثل هم است یا نه. بدون امکان رده‌بندی اصولی چنین گره‌هایی از نخ‌ها هیچ امیدی به امکان تحلیل سه‌خمینه‌ها هم نیست. ازاین‌رو، تا این اواخر ریاضی‌دانان امید کمی به ابداع نظریه‌ای اصولی دربارهٔ سه‌خمینه‌ها داشتند.

آن گمان بدبینانه اکنون باید بازبینی شود. تحقیقات یکی از نویسندگان حاضر (ترستون) دربارهٔ هندسهٔ سه‌خمینه‌ها نشان می‌دهد که الگویی وجود دارد که ممکن است ما را به شناخت همهٔ سه‌خمینه‌ها برساند. همهٔ سه‌خمینه‌های شناخته‌شده در قالب آن الگو قرار می‌گیرند، و درنتیجه پیچش و تاباندن آن‌ها را می‌توان به زبان هندسی بیان کرد.

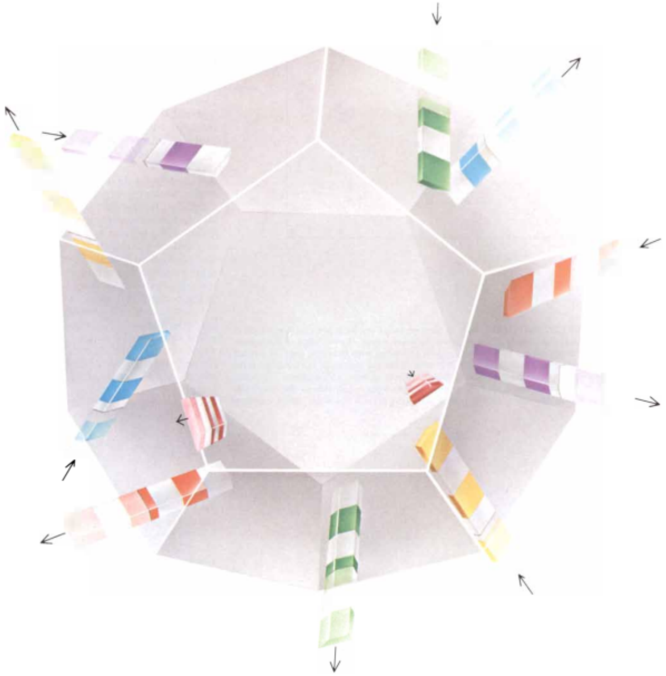
نظریه خمینه‌ها در سدهٔ ۱۹ بر اثر نیاز به درک هندسی رابطه‌های کمی پدیدار شد. برای نمونه، مجموعهٔ جواب‌های معادله‌ای با دو متغیر را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از نقطه‌های صفحه ترسیم کرد. هر نقطه نمایش‌دهندهٔ جفتی از مقدارهای متغیرها است که در معادله صدق می‌کند؛ معمولاً، این مجموعه از نقطه‌ها یک خم یا مجموعه‌ای از خم‌ها است. به طریق مشابه، مجموعهٔ جواب یک معادله با سه متغیر را غالباً می‌توان به‌صورت یک رویه دوبُعدی در فضای سه‌بُعدی ترسیم کرد، مانند سطح یک کره. می‌توان مجموعهٔ جواب معادله‌های با بیش از سه متغیر را به همین روش گفته‌شده به‌طور هندسی توصیف کرد: این مجموعه جواب‌ها خمینه‌ای از بُعد بالا در فضایی با بعد بالاترند. اگرچه نمی‌توان چنین اشیائی را مستقیماً تجسم کرد، ریاضی‌دانان ابزارهایی ذهنی برای مطالعهٔ معادله‌هایی که منجر به خمینه‌هایی با ابعاد بالا می‌شوند ابداع کرده‌اند.

توپولوژی نمی‌تواند معادله‌ها را عملاً حل کند. آنچه توپولوژی فراهم می‌کند واژگان ریاضی ــ نام‌ها و صفت‌ها ــ است که به وسیلهٔ آن امکان بحث کلی دربارهٔ یک مجموعهٔ جواب غیرمشخص میسر می‌گردد. بنابراین، هرچند خمینهٔ متشکل از نقطه‌هایی که مجموعهٔ جواب یک معادله‌اند دارای شکلی بدون ابهام است، توپولوژی آن خمینه مقید به ویژگی‌های آن شکل خاص نیست. بلکه، توپولوژی بررسی ویژگی‌هایی را شامل می‌شود که با تغییر شکل [دگردیسی][1] دلخواه خمینه حفظ می‌شوند مادامی که این تغییر شکل همراه با بریدن، پاره کردن، و سوراخ کردن نباشد.

دونات را می‌توان با تغییر شکل به یک فنجان قهوه تبدیل کرد برای این کار یک تورفتگی کاو در سطح دونات ایجاد می‌کنیم و سپس هم‌زمان با فشردن جاهای دیگرِ دوناتْ آن تورفتگی را بزرگ می‌کنیم. همان‌طور که یک شوخی قدیمی ریاضی می‌گوید، توپولوژی‌دان کسی است که نمی‌تواند دونات (با یک سوراخ) را از فنجان قهوه (با یک دسته) تمیز دهد. ازسوی‌دیگر، توپولوژی‌دان

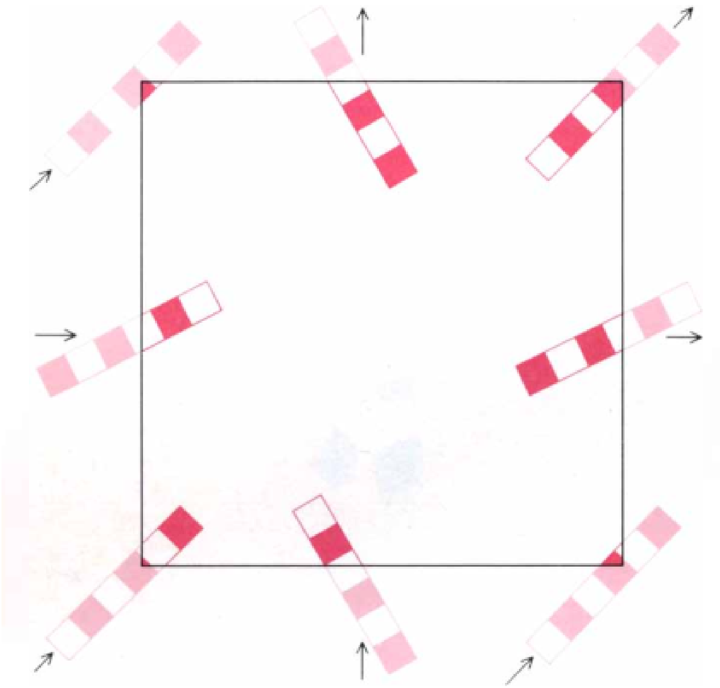
1. deformation

می‌تواند سطح دونات را از سطح یک لیوان بی‌دسته تمیز می‌دهد، زیرا یکی را با تغییر شکل پیوسته نمی‌توان به شکل دیگری در آورد. ممکن است چنین به نظر رسد که چون توپولوژی تغییر شکل‌های دلخواه را مجاز می‌شمرد پس بیشتر ویژگی‌های جالب خمینه در آن از دست می‌روند. اما، در بسیاری از مسائل ریاضی اطلاعات توپولوژیک نقشی مهم ایفا می‌کند.



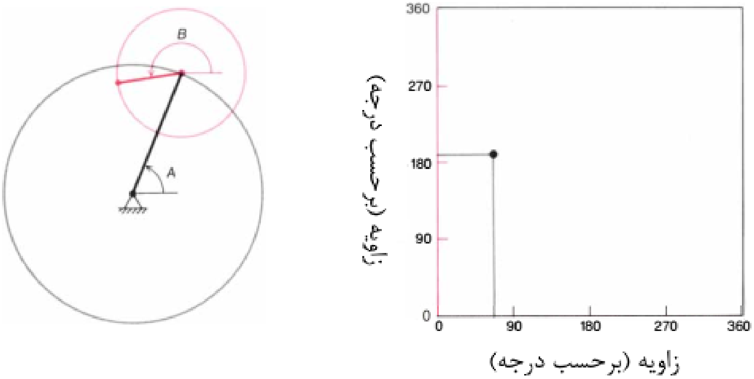
شکل ۱. ساختار توپولوژیک عالم لزوماً با ساختار فضای نامتناهی اقلیدسی سه‌بُعدی یکی نیست. نظریهٔ ریاضی خمینه‌های سه‌بُعدی نشان می‌دهد که فضا ممکن است به صورت‌های بی‌شماری «به خود خمیده شده باشد». یک مدل ممکن برای توپولوژی فضا سه‌خمینه‌ای است که هربرت زایفرت و وبر در سال ۱۹۳۲ کشف کردند. این خمینه را نمی‌توان از بیرون مجسم کرد، زیرا برای این کار باید آن را از بُعد چهار یا بالاتر دید. بااین‌حال، آن را می‌توان به شکلی محدودتر به‌صورت یک دوازده‌وجهی که وجه‌های روبه‌رویش به طریقی ریاضی‌وار به هم چسبیده یا یکی گرفته شده است تجسم کرد. نوارهای خطدار رنگی که به طرف داخل و خارج وجه‌های دوازده وجهی در حرکت‌اند نشان می‌دهند که چسباندن‌ها چگونه باید انجام شود: از هر جفت وجه یکی بعداز آنکه به اندازهٔ سه‌دهم یک دور کامل حول محور عمود بر دو آن وجه، دوران کرد به وجه متناظرش می‌چسبد. اگرچه بخشی از نوارها به‌صورت تصویرهای سایه‌دار بیرونِ دوازده‌وجهی نشان داده شده است، آن نوارها واقعاً آنجا نیستند، زیرا فقط نقاط در داخل دوازده‌وجهی وجود دارند. هنگامی که یکی از نوارها به سوی یکی از وجه‌های دوازده‌وجهی حرکت می‌کند از آن وجه ناپدید می‌شود و در وجه روبه‌رویش دوباره پیدا می‌شود گو اینکه از سمت دیگری وارد دوازده‌وجهی شده است. اگر ساختار عالم مثل ساختار خمینهٔ زایفرت–وبِر باشد جهان متناهی است ولی برای همیشه انبساط می‌یابد.

اولین تحقیقات بنیادی دربارهٔ نظریهٔ توپولوژیک سه‌خمینه‌ها را هانری پوانکاره، ماکس دِن[۱]، و پُل هیگو[۲] در سال‌های نزدیک ۱۹۰۰ آغاز کردند. یک مشکل در مطالعهٔ سه‌خمینه‌ها این است که تجسم بی‌واسطهٔ آن‌ها باید تا اندازه‌ای جایش را به نمایش انتزاعی بدهد. بسیاری از رویه‌ها را می‌توان مجسم کرد زیرا می‌توان آن‌ها را از بُعد سوم، یک بُعد بالاتر از بُعد خودِ رویه، از بیرون نگریست. بُعد اضافی به رویه جای کافی می‌دهد تا روی خودش خمیده و یا بسته شود. می‌توان نمای بیرونی یک سه‌خمینه را تجسم کرد، به این صورت که گویی آن را در فضایی از بُعد چهار یا بیشتر داریم نگاه می‌کنیم، ولی پی خواهیم برد که چنین پیچ‌وتابی هم لازم نیست.



شکل ۲. خمینهٔ دوبُعدی موسوم به چنبرهٔ دوبُعدی را می‌توان به‌صورت مربعی که ضلع‌های روبه‌رویش به‌صورت انتزاعی به هم چسبیده است نمایش داد. به‌بیان‌دیگر، ضلع بالا با ضلع پایین، و ضلع چپ با ضلع راست را یکی می‌گیریم. اگر نوار افقی خطدار از سمت ضلع راست دور شود دوباره در ضلع چپ ظاهر می‌شود؛ اگر نوار از سمت ضلع بالا دور شود، در ضلع پایین ظاهر می‌شود. این حرکت مانند حرکت اشیاء در بسیاری از بازی‌های ویدئویی است. هنگامی که اضلاع به‌صورت انتزاعی به هم چسبانده می‌شود، هر چهار رأس مربع در یک نقطه روی خمینه بر هم منطبق می‌شوند؛ وقتی که نوار خطداری به سمت رأسی حرکت می‌کند، قطعه‌های آن در سه رأس دیگر ظاهر می‌شوند.

1. Max Dehn 2. Poul Heegaard



شکل ۳. دستگاه میله‌بندی میل‌لنگ دوطرفه از دو میلهٔ صلب که در یک نقطه به هم پین شده‌اند تشکیل می‌شود؛ انتهای یکی از میله‌ها ثابت نگه داشته می‌شود. میله‌ها آزادانه حول پین در صفحهٔ میله‌ها دوران می‌کنند (سمت چپ). هر پیکربندی ممکن از میله‌ها را می‌توان با نقطه‌ای از صفحهٔ حاصل از دو محور مختصات عمود بر هم ترسیم کرد: یک محور نشانگر زاویهٔ بین راستای میلهٔ اول و یک راستای ثابت است، و محور دوم زاویهٔ متناظر به میلهٔ دوم را نشان می‌دهد. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های به دست آمده که تمام وضعیت‌های ممکن دستگاه را نمایش می‌دهد، فضای پیکربندی دستگاه نامیده می‌شود (سمت راست). چون پیکربندی میل‌لنگ دوطرفه با تغییر ۳۶۰ درجه‌ای هریک از زاویه‌های مذکور میله‌ها تغییری نمی‌کند، فضای پیکربندی مربعی است محدود به خط‌هایی که دوران صفر درجه تا ۳۶۰ درجه‌ای میله‌ها را نشان می‌دهند. نقطه‌های روی اضلاع متقابل مربع نمایش‌دهندهٔ پیکربندی‌های یکسان دستگاه هستند، به‌بیان‌دیگر، فضای پیکربندی به‌صورت دوچنبره است .

در سدهٔ نوزدهم ریاضی‌دانان دریافتند که دوخمینه‌ها را می‌توان به‌صورت چندضلعی‌هایی که ضلع‌هایشان به نوعی با هم یکی گرفته شده‌اند نمایش داد[1] در داستان پَختستان[2]، چاپ سال ۱۸۸۴، ادوین اِی. اَبوت داستان یک موجود دوبُعدی را توصیف می‌کند که کلاً در صفحه زندگی می‌کند. حرکت‌های چنین موجودی را روی یک خمینهٔ دوبُعدی با یک توپولوژی عجیب‌تر در نظر بگیرید، یعنی مربعی که ضلع‌های مقابلش با هم یکی گرفته شده باشند. هنگامی که این موجود از ضلع بالایی مربع دور می‌شود، در پایین مربع ظاهر می‌شود؛ هنگامی که از ضلع سمت راست دور می‌شود، در سمت چپ دوباره ظاهر می‌شود. بنابراین، به‌خودیِ‌خود ضلع بالای مربع به ضلع پایین و ضلع سمت راست به ضلع سمت چپ چسبیده است. گفتنی است که بسیاری از بازی‌های ویدئویی روی چنین اصلی عمل می‌کنند: وقتی شخصیتی در بازی از ضلع بالای صحنه دور می‌شود در ضلع پایین آن دوباره ظاهر می‌شود، و بقیهٔ ضلع‌ها هم همین گونه‌اند.

۱. برای نمونه تمرین ۱۸.۰۸ در [۱۷] را ببینید. ــ م.

2. *Flatland*

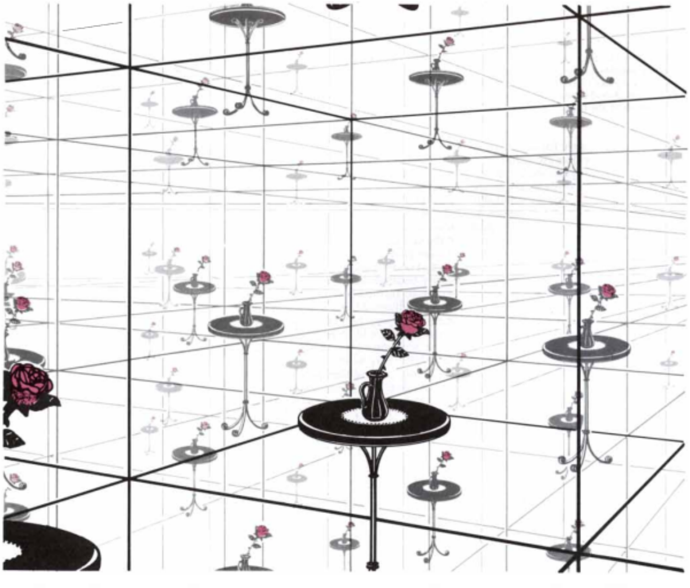
چسباندن ضلع‌های یک مربع کاری آسان است. چسباندن ضلع بالایی به پایینی، یک استوانه به دست می‌دهد که از دو طرف باز است و چسباندن سرهای بازِ استوانه (دو دایره) به هم یک دونات با یک سوراخ، یعنی یک چنبرهٔ دوبُعدی، به دست می‌دهد. پس‌از چسباندن ضلع‌ها، درزهای محل‌های چسبیده شده پاک می‌شوند؛ و ساکنان پَختستان نمی‌توانند جای چسب‌ها را پیدا کنند. دونات و مربع (که ضلع‌هایش به‌درستی با هم یکی شده باشد) خمینه‌های مجرد یکسانی، موسوم به چنبرهٔ دوبُعدی، هستند.

بااین‌همه، چنان‌که در بازی‌های ویدئویی می‌بینیم برای درک شهودی چنبرهٔ دوبُعدی نیازی به عمل چسباندن نیست. با کمی تمرین به‌آسانی می‌توان حرکت یک شیء را روی یک مربع تقلید کرد، که چسباندن ضلع‌های آن تنها به‌صورت انتزاعی انجام شده باشد. شیوهٔ چسباندن انتزاعی تعداد زیادی خمینه را وارد حوزهٔ شهود هندسی کرد که در غیاب آن تجسم آن‌ها بسیار مشکل است. نکتهٔ مهم برای ما این است که شگرد چسباندن را به‌آسانی می‌توان گسترش داد تا برای درک هندسی سه‌خمینه‌ها نیز به کار آید.

سه‌خمینه‌ای را در نظر بگیرید که از یک بلوک مکعبی فضا، مانند فضای درون یک اتاق، به دست آمده است. به‌صورت انتزاعی دیوار جلویی را به دیوار پشتی و دیوار سمت چپ را به دیوار سمت راست و کف را به سقف بچسبانید. اگر این کار را درست انجام دهید، می‌توان تصور کرد که اتاق در بُعد چهارمی دور خودش پیچیده و به خودش متصل شده است. اما آنچه برای توصیف این خمینه لازم است از فرایند چسباندن معلوم می‌شود. اگر شیئ در خمینه به سمت دیوار جلویی حرکت داده شود، در [هنگام رسیدن به] آن دیوار ناپدید می‌شود و از دیوار پُشتی دوباره ظاهر می‌شود؛ به همین شکل، آن شیء در [هنگام رسیدن به] دیوار سمت راست ناپدید می‌شود و از دیوار چپ دوباره ظاهر می‌شود، و در سقف مکعب ناپدید و در کف آن دوباره ظاهر می‌شود. آشکارا این حرکت شباهت فوق‌العاده‌ای به حرکت یک شیء در چنبرهٔ دوبُعدی دارد؛ این خمینه، خمینه‌ای سه‌بُعدی شبیه به چنبرهٔ دوبُعدی است و به همین دلیل چنبرهٔ سه‌بُعدی نامیده می‌شود.

اگر لحظه‌ای مفاهیم عادی فضا و واقعیت فیزیکی را کنار بگذاریم، می‌توان به‌آسانی زندگی در یک چنبرهٔ سه‌بُعدی را تصور کرد. به دیوار پشتی و خط دیدی که از آن می‌گذرد و از نقطهٔ مقابل روی دیوار جلویی باز می‌گردد نگاه کنید، آنچه می‌بینید تصویر خودتان از پشت سر است. سمت راست را نگاه کنید تا تصویر خودتان از سمت چپ را ببینید، پایین را نگاه کنید تا تصویری از بالای سرتان را ببینید. درواقع، چون خط دید اتاق را در تمام جهت‌ها می‌پیماید، چیزی که شما می‌بینید انگار

بی‌نهایت تصویر از اتاق و خودتان است، که همگی در یک مشبکهٔ مستطیلی مرتب شده‌اند. این پدیدهٔ اپتیکی شبیه به چیزی است که در اتاقی که همهٔ دیوارها، سقف، و کفش از آینه است به وجود می‌آید. با این فرق که در اینجا هیچ بازتابی وجود ندارد که تصویرهای اتاق را وارونه کند؛ بلکه همهٔ تصویرها تصویرِ مستقیمِ خودِ شیء هستند.



شکل ۴. دیدگاه ناظر واقع در یک چنبرهٔ سه‌بُعدی مانند دیدگاه ناظری در اتاقی است که دیوارها، کف، و سقفش با آینه پوشیده شده باشد؛ اما، هیچ وارون آینه‌ای تصاویر پیدا نمی‌شود. خط دید از، مثلاً، دیوار راست عبور می‌کند و از دیوار چپ بیرون می‌آید؛ بنابراین، وقتی ناظر از سمت راست نگاه می‌کند اتاق را از منظر دیوار چپ می‌بیند. به همین نحو، وقتی ناظر از جلو نگاه می‌کند اتاق را از منظر دیوار پشت می‌بیند، و وقتی ناظر از بالا نگاه می‌کند اتاق را از منظر کف اتاق می‌بیند. چون خط دید به‌طور نامعلومی داخل چنبرهٔ سه‌بُعدی می‌ماند، چنین به نظر می رسد که اتاق یک مشبکهٔ مستطیلی نامتناهی است که در همهٔ جهت‌ها گسترده شده است. بااین‌همه، چنبرهٔ سه‌بُعدی نامتناهی نیست، زیرا تصاویر موجود در این مجموعهٔ نامتناهی مستطیلی درواقع همه تصویرهای یک چیز هستند.

آیا از اینکه منجمان چنین پدیده‌های دیداری عجیبی را مشاهده نکرده‌اند نتیجه می‌شود که عالم نمی‌تواند به‌صورت یک چنبرهٔ سه‌بُعدی باشد؟ جواب منفی است. سن عالم بین ۱۰ تا ۲۰ میلیارد سال است. اگر عالم به‌صورت چنبرهٔ سه‌بُعدی بود، به درازی مثلاً ۶۰ میلیارد سال نوری، هیچ نوری زمان کافی برای یک رفت و برگشت کامل در طول آن را نداشت. امکان دیگر این است که اخترشناسی رصدی حرکت نور را که دور عالم را پیموده است قبلاً ثبت کرده باشد: اگر عالم به‌صورت

چنبرهٔ سه‌بُعدی باشد، یکی از کهکشان‌های دوردست که ما می‌بینیم ممکن است کهکشان خودمان باشد. بررسی درستی این موضوع دشوار است زیرا تصویر کهکشان ما از نوری تشکیل می‌شود که میلیاردها سال پیش از منبع‌اش گسیل شده است و این فاصلهٔ زمانی را صرف گذر از عالم کرده است. اگر فرض کنیم که هر تعداد تصویر وضوح کافی دارد، آنچه دیده خواهد شد کهکشان راه شیری در مراحل اولیهٔ تکاملش است، آن طوری که وقتی نور گسیل می‌شده است. چنین عالمی دارای حجم متناهی است ولی هیچ‌گونه مرزی ندارد.

مدل‌های ممکن دیگری برای ساختار فضایی عالم را می‌توان از چندوجهی‌های دیگر و همچنین مکعب به دست آورد. در هر مورد بهترین راه برای درک خمینهٔ مربوط این است که تصور کنیم بعضی از وجه‌های چندوجهی به‌صورت انتزاعی به هم چسبانده شده‌اند. دوتا از چنین خمینه‌هایی به‌آسانی از دوازده‌وجهی منتظم ساخته می‌شود. هریک از ۱۲ وجه دوازده‌وجهی، پنج‌ضلعی‌های منتظم‌اند و این وجه‌ها به‌صورت جفت‌هایی مرتب شده‌اند که هر جفت موازی با هم و در دو سوی مخالف یک قطر از دوازده‌وجهی قرار دارند.

در اولین خمینهٔ سه‌بُعدیِ دوازده‌وجهی‌گون یک عضو از هر جفت از پنج‌ضلعی‌ها با پنج‌ضلعی روبه‌رویش منطبق می‌شود به این طریق که عضو اول به اندازهٔ یک‌دهم یک دور کامل در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حول محور عمود بر صفحه‌اش دوران داده می‌شود. این خمینه را خمینهٔ پوانکاره می‌نامند زیرا با سه‌خمینه‌ای که پوانکاره در سال ۱۹۰۲ کشف کرد هم‌ارز است (اما پوانکاره نمی‌دانست که این خمینه را می‌توان از دوازده‌وجهی به دست آورد.) خمینهٔ دوازده‌وجهی‌گون دوم این طور به دست می‌آید که هر پنج‌ضلعی به پنج‌ضلعی روبه‌رویش بعداز دوران به اندازهٔ سه‌دهم یک دور کامل در جهت خلاف عقربه‌های ساعت چسبانده شود. خمینهٔ به دست آمده را فضای دوازده‌وجهی‌گون زایفرت–وِبِر[1] می‌نامند، زیرا هربرت زایفرت و سی. وِبِر آن را در سال ۱۹۳۲ کشف کردند (شکل ۱ را ببینید.) از این دو خمینه، مانند چنبرهٔ سه‌بُعدی، عالمی حاصل می‌شود با حجم متناهی ولی بدون مرز یا لبه.

مدل‌های بسیار زیاد دیگری را می‌توان به طریق مشابه برای ساختار بزرگ‌مقیاس فضا به دست آورد. ازآنجاکه بیشتر چندوجهی‌ها نامنتظم‌اند، بیشتر سه‌خمینه‌ها با چسباندن وجوه چندوجهی‌های نامنتظم به دست می‌آیند. اگر تعداد وجه‌ها زیاد باشد توضیح طریقهٔ چسباندن آن‌ها ممکن است کاری بسیار پیچیده شود.

1. Seifert-Weber

ممکن است چنین به نظر برسد که این کار ما کمی جنبهٔ غیرواقعی دارد. خوانندهٔ غیرحرفه‌ای احتمالاً تصدیق کند که توپولوژی واقعی فضا موضوعی است که ارزش فکر کردن دارد اما احتمالاً نداند که این کار را چگونه باید انجام دهد. به‌ویژه، چنین شخصی ممکن است به‌حق در سودمندی مطالعهٔ «فضاها» به‌طور کلی شک کند. از دید توپولوژی‌دان در چنین ایرادهایی به این دلیل که فقط به توصیفات استعاری توپولوژی توجه شده است اصل هدف از دست رفته است. یقیناً مطالعهٔ توپولوژی ممکن است متأثر از مسئله‌هایی از دیگر زمینه‌های علم باشد، ولی خود توپولوژی نظریه‌ای مجرد است و نه نظریه‌ای دربارهٔ دنیای واقعی. اگر فردا روزی ساختار فضا به طریقی تعیین تکلیف شود، هیچ توپولوژی‌دانی مطالعهٔ فضاهای مجرد را رها نمی‌کند.

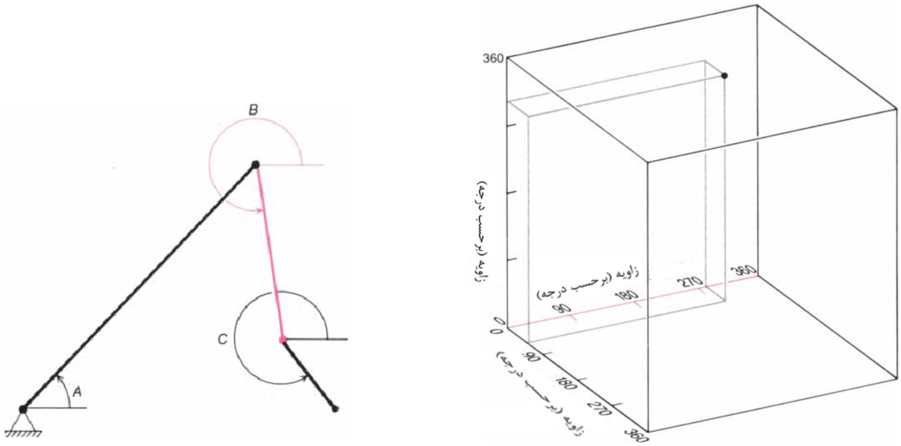
نتیجهٔ این گفته این نیست که توپولوژی با دنیای واقعی بیگانه است، برعکس، مانند دیگر شاخه‌های ریاضی، توپولوژی با دنیای بیرون ارتباط‌های قوی و بنیادی بسیار دارد، ولی این ارتباط غیرمستقیم است. بنابراین اگر یک استعاره‌ای، مثل موردی که برای فضا گفتیم، شروع به رنگ باختن می‌کند بهتر است آن استعاره را رها کنیم نه مطالعهٔ شکلی را که آن استعاره به دست داده است. تجربه بارها نشان داده است که یک نظریهٔ ریاضی که ساختار درونی غنی دارد عموماً پیامدهای مؤثری برای درک دنیای واقعی دارد که غالباً هیچ‌کس بیش‌از ابداع آن نظریه نمی‌توانست آن را پیش‌بینی کند. اگر نظریه‌ای پیوسته زیر بار استعاره‌های کلیشه‌ای قرار داشته باشد هیچ‌وقت به آن سطح از پختگی نمی‌رسد که در آن چنین کاربردهایی را بیابند.

برای نشان دادن گسترهٔ تحلیل توپولوژیکی خوب است که اکنون استعارهٔ آسمانی را به نفع نوع زمینی آن کنار بگذاریم. یک دستگاه مکانیکی را در نظر بگیرید که متشکل از میله‌ها و مکانیزم میله‌بندی[1] است مانند دستگاهی که یک کلید در ماشین تحریر دستی را به حرف متناظرش متصل می‌کند. در اینجا تنها میله‌بندی‌های مسطح را بررسی می‌کنیم، یا به‌عبارت‌دیگر دستگاه‌هایی متشکل از میله‌های صلب را که طوری به هم پین شده‌اند که همهٔ میله‌ها فقط در یک صفحه حرکت می‌کنند. این دستگاه باید یک نقطهٔ تکیه‌گاه یا پایهٔ ثابت نیز داشته باشد که میله‌ها به آن پین می‌شوند.

هدف یک نظریه دربارهٔ میله‌بندی‌های مکانیکی بررسی حرکت‌های ممکن یک میله‌بندی است. دستگاه‌های مکانیکی واقعی زیادی وجود دارد که این بررسی به کار آن‌ها می‌آید، و لازم نیست این دستگاه‌ها همانندی فیزیکی زیادی با مجموعه‌ای از میله‌های متصل به هم داشته باشند. مطالعهٔ میله‌بندی‌ها در نیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم بسیار رایج بود، در آن زمان توجه زیادی به مسئلهٔ یافتن یک

1. linkage

میله‌بندی می‌شد که در آن دست‌کم یک نقطه در خط راست حرکت کند. به نظر می‌رسد جواب این مسئله منجر به کاربردهای عملی بسیاری خواهد شد، مانند طراحی دستگاه انتقال قدرت برای لوکوموتیو بخاری. اگرچه راه‌حل‌های نظری و زیبای بسیاری برای این مسئله پیدا شده است، هیچ‌یک در عمل به یک طراحی مکانیکی منجر نشده است.

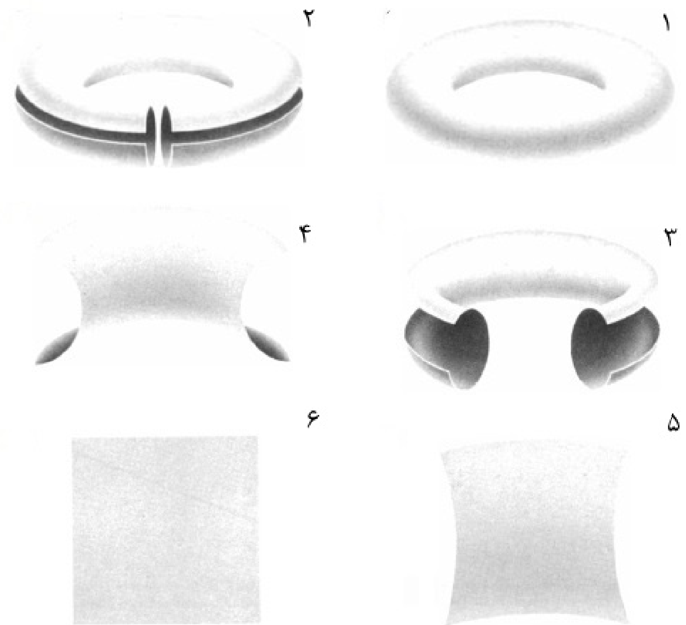


شکل ۵. سه‌خمینهٔ مشابه چنبرهٔ دوبُعدی از مجموعهٔ همهٔ پیکربندی‌های ممکن از یک میله‌بندی میل‌لنگ سه‌تایی که حرکتش محدود به یک صفحه است به دست می‌آید (سمت چپ). اگر زاویهٔ بین هر میله و یک راستای ثابت روی سه محور دوبه‌دو عمود قرار گیرد، هر وضعیت ممکن میل‌لنگ سه‌تایی می‌تواند نقطه‌ای از مکعب در نظر گرفته شود (سمت راست). پیکربندی این میله‌بندی بر اثر دوران کامل هیچ میله‌ای تغییر نمی‌کند. بنابراین در فضای پیکربندی، هر وجه مکعب که متناظر با دوران ۳۶۰ درجه است به‌صورت انتزاعی با وجه روبه‌رویش که متناظر با دوران صفر درجه است یکی گرفته می‌شود. سه‌خمینه حاصل چنبرهٔ سه‌بُعدی نامیده می‌شود.

یک میله‌بندی مکانیکی را ازنظر ریاضی می‌توان از طریق مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها در صفحه نمایش داد؛ ممکن است در بعضی از نقاط تلاقی خط‌ها نقطه‌های لولایی، یا پین‌هایی، برای این میله‌بندی باشد. در این نظریهٔ ریاضی فرض می‌شود که خط‌ها و نقطه‌های لولایی می‌توانند آزادانه از هم عبور کنند. مسئلهٔ ساخت یک مدل فیزیکی که میله‌ها و پین‌هایش حرکت‌های دستگاه میله‌بندی ایده‌آل را تقلید کند مسئلهٔ بدیهی نیست، اما ازنظر آنالیز ریاضی یک مسئلهٔ فرعی است. معلوم می‌شود که هر صورتی از دستگاه میله‌بندی ریاضی یک دستگاه میله‌بندی فیزیکی وجود دارد که همان حرکت را اجرا می‌کند، اگرچه دستگاه میله‌بندی فیزیکی ممکن است خیلی پیچیده‌تر از نمونهٔ نظری آن باشد و با ظاهری کاملاً متفاوت.

مجموعهٔ همهٔ وضعیت‌های ممکن برای یک میله‌بندی مکانیکی را فضای پیکربندی آن دستگاه

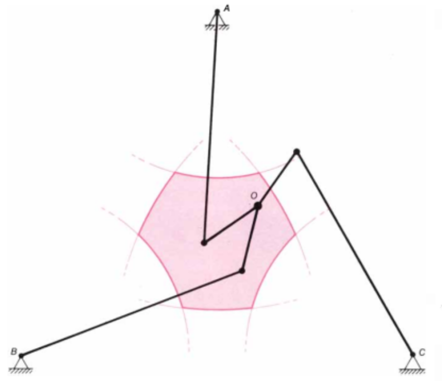
می‌نامند؛ این فضا در بیشتر حالت‌ها یک خمینهٔ توپولوژیک است. ساده‌ترین دستگاه میله‌بندی مکانیکی را در نظر بگیرید که از یک میلهٔ پین شده به یک نقطهٔ تکیه‌گاه در یک طرف میله و سر آزاد دیگر برای حرکت در یک صفحه تشکیل شده است. سر متحرکِ میله، دایره‌ای در فضا رسم می‌کند، و هر نقطهٔ این دایره متناظر با دقیقاً یک وضعیت از دستگاه میله‌بندی است. در اینجا فضای پیکربندی یک دایره است، که آن را می‌توان مثل یک پاره‌خط مستقیم در نظر گرفت که دو سرش به‌صورت انتزاعی به هم چسبانده شده است. دایره یک خمینهٔ یک‌بُعدی شبیه دوچنبره است، و هر نقطه در این خمینه با یک وضعیت از آن دستگاه متناظر است.



شکل ۶. دونات با یک سوراخ را می‌توان از هم باز کرد و به شکل یک مربع در آورد. اگر ضلع‌های روبه‌روی مربع به‌صورت انتزاعی به هم چسبانده شوند، رویهٔ حاصل با دونات ازنظر توپولوژیکی هم‌ارز است. ازآنجاکه مربع مانند صفحه، تخت است، هندسهٔ آن از نوع اقلیدسی است؛ بنابراین از دیدگاه توپولوژیکی گفته می‌شود که دونات با یک سوراخ دارای هندسهٔ اقلیدسی است.

با وصل کردن میله‌ای دیگر به انتهای میلهٔ اول یک دستگاه میل‌لنگ دوطرفه[1]، یعنی یک میله‌بندی مکانیکی با دو درجهٔ آزادی به دست می‌آید. اگر میلهٔ دوم در این میله‌بندی کوتاه‌تر از میلهٔ اول باشد، سر آزاد میلهٔ دوم به هر نقطه روی حلقه به مرکز تکیه‌گاه می‌رسد. حلقه از طرف بیرون به

1. double crank



شکل ۷. میله‌بندی متشکل از سه میل‌لنگ دوطرفه که توسط یک پین مرکزی به هم متصل شده‌اند نیز یک دوخمینه به دست می‌دهد. تمام حرکت‌ها در یک صفحه انجام می‌شود، و پین مرکزی از هر نقطه در داخل شش‌ضلعی می‌گذرد.

دایره‌ای با شعاعی برابر با مجموع طول دو میله و از درون به دایره‌ای با شعاع برابر با تفاضل طول دو میله محدود شده است. اگر طول دو میله با هم برابر باشد، سر آزاد میلهٔ دوم به هر نقطه‌ای از دایره با شعاع برابر با مجموع طول دو میله می‌رسد. اگر میلهٔ دوم بلندتر از میلهٔ اول باشد رد این سر آزاد نیز حلقه‌ای است که شعاع درونی آن برابر با تفاضل طول دو میله است. بااین‌همه، نباید این دو مجموعه از نقاط را با فضای پیکربندی دستگاه اشتباه گرفت. زیراکه اطلاعات ما از وضعیت نقطهٔ انتهایی میلهٔ دوم فضای پیکربندی دستگاه را به‌صورت یکتایی مشخص نمی‌کند. نظیر هر نقطه‌ای که انتهای آزاد میلهٔ دوم می‌تواند به آن برسد، زانویی دستگاه میل‌لنگ دوطرفه می‌تواند به دو صورت خم شود.

برای بررسی درست فضای پیکربندی، راه ساده‌تر آن است که پیکربندی‌های ممکن میل‌لنگ دوطرفه را بدون در نظر گرفتن وضعیت سر آزاد میله مطالعه کنیم. هر چنین پیکربندی را می‌توان توسط دو زاویه، یعنی زاویهٔ بین هر میله و یک جهت ثابت (مثلاً جهت راست)، در جهت مثلثاتی اندازه گرفت. هر دو زاویه آزادانه و مستقل از هم بین صفر تا ۳۶۰ درجه تغییر می‌کنند، ولی زاویهٔ صفر برای هر میله با زاویهٔ ۳۶۰ درجه یکی گرفته می‌شود. اگر مقدارهای دو زاویه در یک دستگاه مختصات متعامد در صفحه ترسیم شود، هر نقطه در مربعی محدود به خط‌هایی به اسم صفر و ۳۶۰ درجه به هر زاویه یک پیکربندی از دستگاه میل‌لنگ دوطرفه را نظیر می‌کند. افزون بر آن، هر پیکربندی از این دستگاه توسط نقطه‌ای در آن مربع نمایش داده می‌شود. چون صفر و ۳۶۰ درجه

یکی گرفته می‌شود، ضلع بالایی مربع با ضلع پایینی و ضلع چپ با ضلع راست یکی گرفته می‌شود. پس فضای پیکربندی دوچنبره است.

اگر میلهٔ سومی به سر آزاد آن دستگاه میل‌لنگ دوطرفه اضافه شود، هر وضعیت در این دستگاه میل‌لنگ سه‌تایی را می‌توان با وارد کردن سه زاویه برای میله‌ها توصیف کرد. زاویه‌ها نیز در جهت مثلثاتی نسبت به یک راستای ثابت اندازه‌گیری می‌شود و هر سه زاویه آزادانه و مستقلاً بین صفر تا ۳۶۰ درجه تغییر می‌کنند. مانند قبل، زاویه‌های صفر و ۳۶۰ درجه یکی گرفته می‌شود. اگر مقدارهای سه زاویه در یک دستگاه مختصات متعامد سه‌بُعدی ترسیم شود، هر وضعیت ممکن دستگاه میل‌لنگ سه‌تایی با نقطه‌ای یکتا از مکعبی نمایش داده می‌شود که وجه‌های روبه‌رویش به‌صورت انتزاعی به هم چسبانده شده است. بنابراین فضای پیکربندی دستگاه میل‌لنگ سه‌تایی یک سه‌چنبره است.

همهٔ فضاهای پیکربندی که تاکنون بررسی کردیم چندضلعی یا چندوجهی‌هایی بودند که ضلع‌ها یا وجه‌های آن‌ها بدون تغییر شکل به یکدیگر چسبانده می‌شدند. اما هیچ قانون توپولوژیکی وجود ندارد که مانع به هم چسباندن انتزاعی یال‌ها و رویه‌هایی بشود که ازلحاظ هندسی هم‌نهشت نیستند؛ در حقیقت، نمونه‌هایی که آوردیم خیلی خاص هستند از این لحاظ که عمل چسباندن در آن‌ها مستلزم تغییر شکل بخش‌های چسبیده شده نبودند. یک دستگاه میله‌بندی مکانیکی متشکل از سه‌تا میل‌لنگ دوطرفه را در نظر بگیرید که هریک در یکی از رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع ثابت شده باشد و نقاط متحرک انتهایی آن به نقاط مشابهٔ دو دستگاه میل‌لنگ دوطرفه دیگر متصل شده باشد (شکل ۷ را ببینید). برای درک فضای پیکربندی این دستگاه، ابتدا مجموعهٔ همهٔ وضعیت‌های ممکن پین مرکزی را در نظر بگیرید. هریک از دستگاه‌های میل‌لنگ دوطرفه محل اتصال را در یک حلقه به مرکز نقطهٔ تکیه‌گاه آن دستگاه نگه می‌دارد. بنابراین محل پین مرکزی بر هر نقطه‌ای که بر تقاطع سه حلقهٔ وابسته به سه دستگاه میل‌لنگ دوطرفه دیگر قرار دارد گذر می‌کند. ناحیهٔ تقاطع یک شش‌ضلعی خمیده‌خطی در صفحه است.

اما فضای پیکربندی چیزی بیش از یک شش‌ضلعی مسطح است. به یاد آورید که برای دستگاه میل‌لنگ دوطرفه دو پیکربندی برای هر نقطه‌ای که انتهای میل‌لنگ دوم به آن می‌رسید وجود داشت. به نحو مشابه، برای هر نقطه در درون شش‌ضلعی، زانویی هر میل‌لنگ دوطرفه به دو صورت می‌تواند خم شود. با داشتن سه دستگاه میل‌لنگ دوطرفه تعداد پیکربندی‌ها برای هر نقطه در درون شش‌ضلعی مسطح برابر $۲^۳$، یا هشت پیکربندی است. بنابراین فضای پیکربندی سه دستگاه میل‌لنگ دوطرفه را می‌توان با چسباندن انتزاعی ضلع‌های هشت شش‌ضلعی مجرد خمیده‌خطی به دست آید.

هشت شش‌ضلعی مجرد را چطور باید در یک فضای پیکربندی به هم چسباند؟ وقتی پین مرکزی سه دستگاه میل‌لنگ دوطرفه روی یک ضلع از شش‌ضلعی در صفحه قرار بگیرد، یکی از دستگاه‌های میل‌لنگ دوطرفه اجباراً به‌صورت خط راست در می‌آید. این حالت از دو راه ممکن است: میله‌های آن دستگاه میل‌لنگ دوطرفه می‌توانند در یک جهت یا در جهت‌های متضاد قرار گیرند. اما، در هر دو حالت پیکربندی دستگاه با مشخص کردن وضعیت پین مرکزی و جهت خم شدن دو دستگاه غیر هم‌راستای دیگر مشخص می‌شود.

وقتی اولین میل لنگ دوطرفه به‌صورت خط راست باشد نظیر هریک از دو ضلعِ شش‌ضلعی مسطح تنها $۴ = ۲^۲$ (و نه هشت تا) ضلع متمایز در فضای پیکربندی وجود دارد. با هر چنین ضلعی از فضای پیکربندی دو شش‌ضلعی به هم چسبانده می‌شود. این دو شش‌ضلعی دو حالتی را که که اولین میل‌لنگ دوطرفه می‌تواند خم شود نشان می‌دهد. ضلع روبه‌روی شش‌ضلعی اول در فضای پیکربندی نیز به ضلع روبه‌رو در شش‌ضلعی دوم چسبانده می‌شود، زیرا میل لنگ دوطرفهٔ اول نیز در آنجا به‌صورت خط راست درمی‌آید. خَمِش دو میل‌لنگ دوطرفهٔ دیگر از شش‌ضلعی اول به شش‌ضلعی دوم تغییر نمی‌کند. نوع تحلیل مطلب برای همهٔ ضلع‌های دیگر فضای پیکربندی به همین صورت است.

همانند بالا، وقتی که پینِ مرکزی سه میل لنگ دوطرفه بر رأسی از شش‌ضلعی در صفحه قرار می‌گیرد، دو تا از میل‌لنگ‌های دوطرفه به‌صورت خط راست در می‌آیند. بنابراین، در فضای پیکربندی تنها دو نقطه (به‌جای هشت تا) وجود دارد که به هر رأس شش‌ضلعی مسطح نظیر می‌شود، درواقع، یک نقطه برای هر حالتی که میل‌لنگ سوم بتواند خم شود. وقتی پین مرکزی داخل شش‌ضلعی مسطح حرکت کند، چهار شش‌ضلعی مجرد متناظر با چهار روشی که آن دو میل‌لنگ راست‌شدهٔ دیگر می‌توانند خم شوند باید در یک رأس در فضای پیکربندی اشتراک داشته باشند.

فضای پیکربندی رویه‌ای است که، برعکس شش‌ضلعی مسطح، هیچ مرز یا گوشه‌ای ندارد. این رویه را می‌توان با هشت شش‌ضلعی کاشی‌کاری یا فرش کرد. تعداد $۲۴ = ۲^۲ \times ۶$ ضلع بین این کاشی‌ها وجود دارد و بین چهار کاشی‌ای که با هم تماس دارند نیز $۱۲ = ۲ \times ۶$ رأس وجود دارد.

توصیف فضای پیکربندی برای سه میل‌لنگ دوطرفه که بیان شد ازنظر منطقی کامل است، زیرا همهٔ چسباندن‌های انتزاعی در آن مشخصاً بیان شده است. بااین‌همه، رضایت‌بخش‌تر آن است که چسباندن‌ها را انجام دهیم و خمینه را به‌صورت رویه‌ای بسته در فضا نمایش بدهیم. معلوم می‌شود که چنین کاری شدنی است اگر عمل چسباندن به خمینه‌ای منتهی شود که شرطی فنی موسوم به

جهت‌پذیری را برآورده کند. خمینه‌ای که توصیف کردیم جهت‌پذیر است، بنابراین عمل چسباندن را می‌توان انجام داد، ولی این کار سرراست نیست.

در نیمهٔ سدهٔ نوزدهم ثابت شد که هر خمینهٔ دوبُعدیِ جهت‌پذیر با سطح دوناتی یا تعدادی سوراخ از لحاظ توپولوژیکی هم‌ارز است. تعداد سوراخ‌ها را گونای[1] رویه می‌نامند. برای نمونه، کره رویه‌ای از گونای صفر است. گونای سطح فنجان یک دسته، مانند گونای سطح دونات با یک سوراخ، برابر یک است. گونای سطح شیرینی چوب‌شور[2] بستگی به ویژند[3] آن دارد.

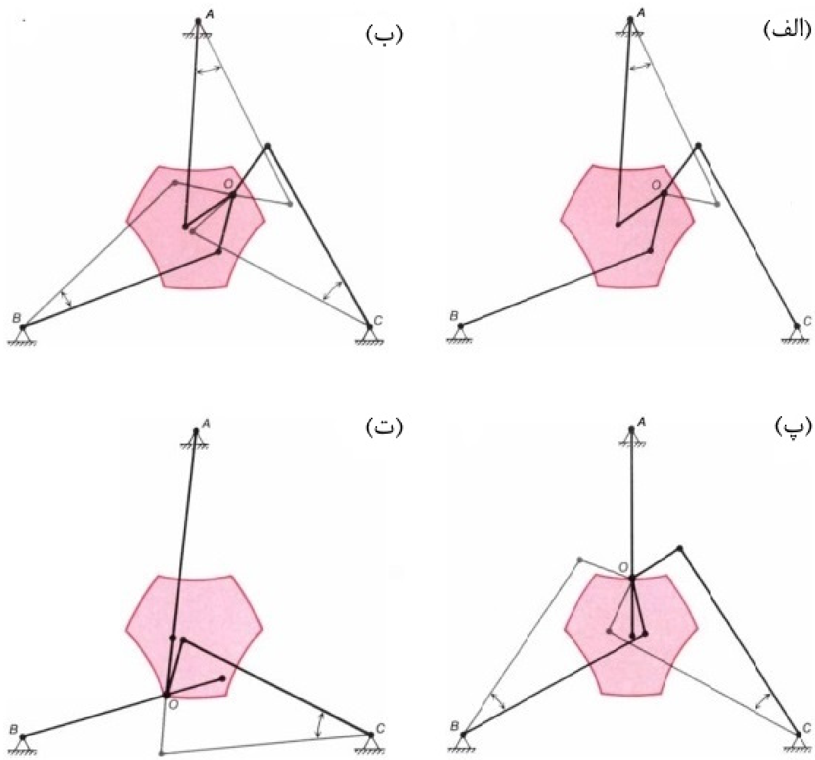
برای رویه‌ای که به چندضلعی‌های به شکل دلخواه تقسیم شده باشد، تعداد وجه‌های چندضلعی‌شکل آن منهای تعداد ضلع‌ها به اضافهٔ تعداد رأس‌ها مقداری ثابت است که فقط به مشخصات رویه بستگی دارد. جالب است که این عدد مستقل از روش خانه‌بندی کردن رویه به چندضلعی‌ها است. این عدد به افتخار ریاضی‌دان سوئیسی لئونارد اویلر عدد اویلر نامیده می‌شود. عدد اویلر رویهٔ جهت‌پذیر از گونای n برابر $2n - 2$ است. چون یک رویه می‌تواند در فضا خمیده شود، لازم نیست چندضلعی‌ها مسطح باشند و ضلع‌های آن‌ها نیز ممکن است تقریباً به‌دلخواه خمیده باشند. برای نمونه، کره می‌تواند از طریق وصل کردن قطب‌های شمال و جنوب به چهار نقطه روی خط استوا به هشت مثلث تقسیم شود. چون روی کره هیچ سوراخی یافت نمی‌شود، گونایش صفر است، و عدد اویلر آن $2 = 0 \times 2 - 2$ است. به‌آسانی دیده می‌شود شش رأس و ۱۲ ضلع روی این رویه وجود دارد، پس عدد اویلر هشت ناحیهٔ مثلثی روی کره برابر ۲ است. گفتنی است که تعداد وجه‌ها، رأس‌ها، و ضلع‌ها در این مثال مشخصهٔ هشت‌وجهی منتظم نیز هست، که ازلحاظ توپولوژیکی با کره هم‌ارز است.

چون فضای پیکربندی سه دستگاه میل‌لنگ دوطرفه می‌تواند به هشت وجه شش‌ضلعی‌گون، با ۲۴ ضلع و ۱۲ رأس، تقسیم شود، عدد اویلر فضای پیکربندی آن باید $-4 = 12 + 24 - 8$ باشد. گونای این خمینه، n، با برابر قرار دادن عدد اویلر آن -4 با $2n - 2$ به دست می‌آید، بنابراین $n = 3$. هشت شش‌ضلعیِ فضای پیکربندیِ سه دستگاه میل‌لنگ دوطرفه در وضعیت کلی را می‌توان روی دونات سه‌سوراخه نشان داد (شکل ۹ را ببینید).

نمایش دیداری یک خمینه مانند چنبره با سه سوراخ رضایت‌بخش است زیرا این نمایش ملموس است، ولی کاستی‌هایی نیز دارد. برای نمونه، بسیاری از تقارن‌هایی را که در توصیف انتزاعی خمینه حاضر بودند باید به منظور نمایش خمینه در فضای معمولی کنار بگذاریم. در توصیف انتزاعی که ما

1. genus 2. pretzel 3. brand

در آغاز برای فضای پیکربندی سه میل‌لنگ دوطرفه دادیم هر شش‌ضلعی با شش‌ضلعی‌های دیگر هم‌نهشت است. افزون بر آن، دوران یک شش‌ضلعی به اندازهٔ ۱۲۰ یا ۲۴۰ درجه شکل آن را تغییر نمی‌دهد. بااین‌همه، بیشتر تقارن انتزاعی در نمایش دیداری فضای پیکربندی از بین می‌رود. شش‌ضلعی‌های روی چنبره با سه سوراخ نَه با یکدیگر هم‌نهشت‌اند نَه تقارن دورانی دارند: دوران یکی از آن‌ها به اندازهٔ ۱۲۰ یا ۲۴۰ درجه بدون تغییر شکل آن، شدنی نیست.



شکل ۸. فضای پیکربندی سه میل‌لنگ دوطرفه یک خمینه دوبُعدی است که در آن نقطه‌های متمایز نمایش‌دهندهٔ پیکربندی‌های، یا چیدمان‌های ممکن، یک میله‌بندی هستند. (الف) وقتی یکی از دو میل‌لنگ دوطرفه به یکی از صورت خم شود به هر نقطهٔ داخل شش‌ضلعی خمیده‌خط که رد پین مرکزی دستگاه است می‌توان دسترسی پیدا کرد. (ب) خم شدن هریک از میل‌لنگ‌های دوطرفه مستقل از خم‌شدن دیگر میل‌لنگ‌ها است و بنابراین هر نقطه در داخل شش‌ضلعی $۲^۳ = ۸$ پیکربندی برای دستگاه میله‌بندی به دست می‌دهد. (پ) هنگامی که پین مرکزی به یک ضلع شش‌ضلعی می‌رسد، تنها یکی از میل‌لنگ‌های دوطرفه می‌تواند خَم شود؛ دستگاه میله‌بندی تنها چهار پیکربندی می‌تواند اختیار کند. (ت) هنگامی که پین مرکزی به یک رأس شش‌ضلعی می‌رسد، تنها یکی از میل‌لنگ‌های دوطرفه می‌تواند خَم شود؛ دستگاه میله‌بندی فقط دو پیکربندی می‌تواند اختیار کند.

مسئلهٔ دیگری که چنبره با سه سوراخ دارد این است که ویژگی‌های هندسی آن از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند: ویژگی‌های رویه در نزدیکی کنارهٔ بیرونی با ویژگی‌های آن در نزدیکی یکی از سوراخ‌های آن متفاوت است. تأکید می‌کنیم که منظور ما از ویژگی‌های هندسی ویژگی‌های ذاتی رویه است. هندسهٔ ذاتی (یا درونی) از طریق اندازه‌گیری‌های روی رویه، بدون اتکا به فضای اطراف، که رویه در آن قرار گرفته است تعیین می‌شود. این هندسه را باید از هندسهٔ برونی رویه تمیز داد، آن هندسه‌ای که چگونگی خم شدن رویه در فضا را توصیف می‌کند. برای نمونه، اگر یک برگهٔ صاف کاغذ بدون تغییر شکل خمیده شود تا یک استوانه یا مخروط بسازد، هندسهٔ ذاتی استوانه و مخروط همان هندسهٔ برگهٔ کاغذ است، اگر چه هندسه‌های برونی آن‌ها کاملاً متفاوت است.

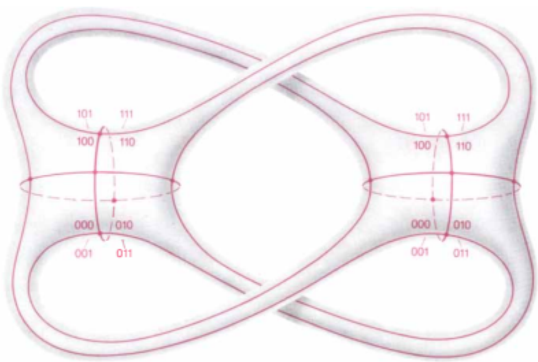
بنابراین، اینکه خم شدن یک رویه از بیرون به نظر غیریکنواخت می‌آید نشانه‌ای موثق از هندسهٔ ذاتی آن نیست. تفاوت ذاتی بین ناحیه‌های درونی و بیرونی سطح یک چنبره چیست؟ تصور کنید که قطعهٔ کوچکی از بخش بیرونی و کوژ چنبره بریده و روی یک میز پهن شود. وقتی آن قطعه را صاف می‌کنیم از هم باز می‌شود درست مثل پوست پرتقال. خیاط‌ها وقتی بخواهند در قسمتی از لباس یک قسمتی به شکل کوژ را بپوشانند، مانند سرشانهٔ یک لباس، از عکس این عمل استفاده می‌کنند. یک قسمت سرتیز لباس به نام ساسون از پارچه جدا می‌شود و دو بخش لبهٔ شکاف به هم دوخته می‌شود.

ازسوی‌دیگر، اگر قطعهٔ کوچکی نزدیک سوراخِ چنبره بریده شود و روی یک میز پهن شود آن قطعه چین می‌خورد و روی خودش می‌افتد. خیاط می‌تواند با بریدن پارچه و دوختن تکهٔ مثلثی[1]، یا تکهٔ سرتیز، به آن بریدگی آن کار را بر عکس کند. این شیوه بیشتر در تهیهٔ دامن به کار می‌رود که در بالای زانوها تنگ و پایین آن گشاد است. اینکه یک تکه پارچهٔ دوخته هنگام پهن شدن روی سطحی پاره شود یا روی هم بیفتد یا وقتی روی آن سطح پهن می‌شود کاملاً شکل آن شود ویژگی مهمی از هندسهٔ ذاتی آن است.

هندسهٔ ذاتی چنبره با یک سوراخ تغییراتی کاملاً همانند چنبره با سه سوراخ دارد. چنان‌که تأکید کردیم، چنبره با یک سوراخ و مربعی که ضلع‌های روبه‌رویش یکی گرفته شده باشد دارای یک توپولوژی هستند. بااین‌همه، هندسهٔ ذاتی روی مربع بسیار ساده‌تر از هندسهٔ چنبره با یک سوراخ است: هندسهٔ ذاتی در ناحیه‌ای کوچک گرداگرد هر نقطه در مربع همانند هندسهٔ ناحیه‌ای کوچک در صفحه است. این ویژگی حتی برای ضلع‌ها یا رأس‌های مربع نیز درست است. به‌بیان‌دیگر،

1. gadeq

هندسهٔ ذاتی در هر ناحیهٔ کوچکی از مربع که ضلع‌های روبه‌رویش با هم یکی گرفته شده است همانند هندسهٔ هر ناحیهٔ کوچک از مربع است. وقتی هندسهٔ ذاتی یک خمینه چنین یکنواختی‌ای داشته باشد می‌گویند آن هندسه موضعی‌همگن است.



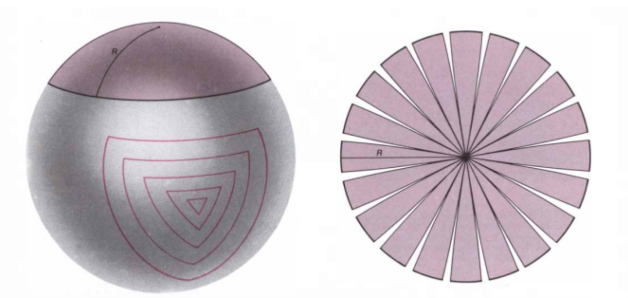
شکل ۹. هشت شش‌ضلعی مجردْ فضای پیکربندی سه میل‌لنگ دوطرفه را تشکیل می‌دهند، هر شش‌ضلعی متناظر با یکی از هشت راهی است که سه میل‌لنگ دوطرفه می‌تواند خم شود تا به یکی از نقطه‌های درون شش‌ضلعی خمیده‌خط برسد. اگر زانویی یک میل‌لنگ دوطرفه در جهت عقربه‌های ساعت خم شود، پیکربندی‌اش را ۰، و اگر زانویی در جهت مثلثاتی خم شود پیکربندی‌اش را ۱ می‌نامیم. این شش‌ضلعی‌های مجرد را با سه رقم دودویی شماره‌گذاری می‌کنیم. برای تجسم این هشت شش‌ضلعی و رابطه‌های اِعمال‌شده بر آن‌ها در فضای پیکربندی، می‌توان شش‌ضلعی‌ها را روی یک چنبره با سه سوراخ قرار داد و چنان آن‌ها را تغییر شکل داد که گویی از جنس لاستیک ساخته شده‌اند. چنبره با سه سوراخ در شکل پایینی به یک خمینهٔ توپولوژیکی هم‌ارز تغییر شکل داده شده است تا شش‌ضلعی‌ها با تقارن بیشتری نشان داده شوند. رقم‌های دودویی تخصیص‌یافته به این شش‌ضلعی‌های مجرد، الگوهای چسباندن را مشخص می‌کند. اگر رقم‌ها دو شش‌ضلعی در دو تا از سه وضعیت منطبق باشند، شش‌ضلعی‌ها در امتداد دو ضلع مقابل به هم چسبیده می‌شود، این دو ضلع متناظر با دو ضلع شش‌ضلعی خمیده‌خط است در حالتی که میل‌لنگ دوطرفهٔ مربوط به رقم دودویی مخالف به صورت خط راست در آمده باشد. هر چهارتا شش‌ضلعی که یک رقم موافق داشته باشند در فضای پیکربندی در یک رأس مشترک‌اند. رأس‌هایی از این چهار شش‌ضلعی که در طرفین یک قطر قرار دارند در یک نقطهٔ دومی از فضا بر هم منطبق می‌شوند. این دو نقطه نمایش دهندهٔ پیکربندی دو میل‌لنگ دوطرفه است که رقم‌های شماره‌گذاری آن‌ها مخالف هم است.

تعریف مفهوم همگنی موضعی پیشرفتی مهم در درک خمینه‌های دوبُعدی بود. در حدود ۱۲۰ سال پیش ثابت شد که هر رویه ــ و نه فقط چنبره با یک سوراخ ــ را می‌توان چنان تولید کرد که هندسه‌اش موضعی‌همگن باشد. افزون بر آن، هیچ خمینه‌ای بیش از یک نوع هندسهٔ موضعی‌همگن ندارد.

هر رویه تنها سه نوع هندسهٔ ذاتی موضعی‌همگن دارد. اولین نوع آن هندسهٔ اقلیدسی صفحه است. محیط دایره روی صفحه برابر است با π ضرب‌در قطرش، و مجموع زاویه‌های درونی مثلث ۱۸۰ درجه است. گفته می‌شود خمیدگی گاوسی صفحه صفر است، که به نوعی اندازه‌ای برای بیان شکل ذاتی یک رویه است که اولین بار آن را کارل فردریش گاوس ابداع کرد.

هندسهٔ موضعی‌همگنِ دوم هندسهٔ روی کُره است. یک عرقچین بریده‌شده از سطح یک کره وقتی روی صفحه پهن شود پیش‌تر مثل تکه‌ای از یک ناحیهٔ کوژ دونات با سه سوراخ از هم باز می‌شود. بنابراین محیط دایره روی کره کمتر از محیط دایره‌ای با همان شعاع روی صفحه است. اسم متداول هندسهٔ موضعی‌همگن کره از همین کم شدن محیط می‌آید: هندسهٔ بیضوی، که از واژهٔ یونانی elliptic (= بیضوی) به معنی کم شدن گرفته شده است. زاویه‌های درونی یک مثلث روی کره در مجموع بیش از ۱۸۰ درجه است، و هر چه نسبت مساحت مثلث به مساحت کرهٔ بزرگ‌تر باشد، مجموع زاویه‌ها بزرگ‌تر می‌شود (شکل ۱۰ را ببینید). کره دارای خمیدگی گاوسی ثابتِ مثبتی است.

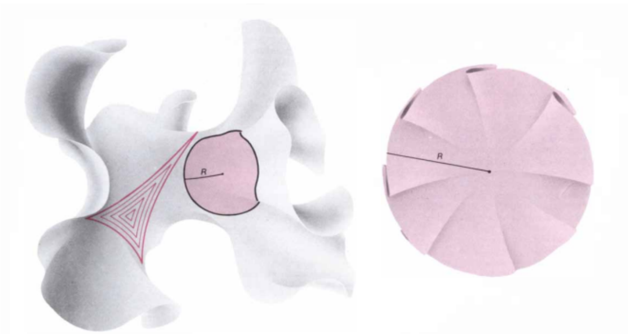
همان‌طور که می‌شود انتظار داشت، دایرهٔ بریده شده از یک رویه دارای هندسهٔ موضعی‌همگن از نوع سوم وقتی که مانند تکه‌ای نزدیک یک سوراخ از چنبره با سه سوراخ پهن شود، روی محیط این



شکل ۱۰. هندسهٔ روی کره، که هندسهٔ بیضوی نامیده می‌شود، با هندسهٔ اقلیدسی معمولی روی صفحه تفاوت دارد. (سمت چپ) زاویه‌های دورنی یک مثلث روی کره همانند یک مثلث در صفحه، برابر ۱۸۰ درجه نیست، بلکه اندازهٔ مجموع زاویه‌ها با مساحت مثلث کروی افزایش می‌یابد. یک عرقچین بریده شده از کره مثل شکل نشان داده شده در سمت راست وقتی روی صفحه پهن شود تَرَک می‌خورد و تکه‌تکه می‌شود. مساحت دایره روی کره کمتر از مساحت دایره با همان شعاع روی صفحه است. کره دارای خمیدگی ثابت مثبت است.

دایره بزرگ‌تر از محیط دایرهٔ مشابه روی صفحه است. به‌این‌دلیل، این هندسه را هندسهٔ هذلولوی می‌نامند، که از واژهٔ یونانی hyperbolic (= هذلولوی) به معنای افزایش گرفته شده است. تعریف یک رویهٔ هذلولوی کامل به‌وسیلهٔ فرمول تحلیلی ممکن نیست، ولی می‌توان مدل‌های تقریبی برای قطعه‌های بزرگ چنین رویه‌ای را ساخت (شکل ۱۱ را ببینید). مجموع زاویه‌های درونی هر مثلث روی این رویه کمتر از ۱۸۰ درجه است، و هرچه مساحت مثلث بزرگ‌تر باشد، مجموع زاویه‌ها کوچک‌تر می‌شود. رویهٔ هذلولوی دارای خمیدگی گاوسی ثابت منفی است.

خوب است نشان دهیم چگونه می‌توان به چنبره با سه سوراخ هندسهٔ موضعی‌همگن داد. به یاد آورید که هریک از هشت شش‌ضلعی که این خمینه از آن‌ها ساخته شده است می‌تواند بدون بریده یا پاره شدن به دلخواه خمیده و تغییر شکل دهد. اکنون روش کار این است که هر شش‌ضلعی را طوری تغییر شکل دهیم که هندسهٔ آن موضعی‌همگن شود و همچنان با شش‌ضلعی‌های دیگر جفت‌وجور باشد آن طور که روی چنبره با سه سوراخ است.



شکل ۱۱. (سمت چپ) هندسهٔ روی رویه‌ای با خمیدگی ثابت منفی هندسهٔ هذلولوی نامیده می‌شود. مجموع زاویه‌های درونی یک مثلث کمتر از ۱۸۰ درجه است، و این مجموع با بزرگ شدن مثلث کاهش می‌یابد. دایرهٔ بریده شده از یک رویهٔ هذلولوی مثل شکل سمت راست چین می‌خورد و روی خودش تا می‌شود؛ مساحت این ناحیه بزرگ‌تر از مساحت ناحیه‌ای با همان شعاع در صفحه است. یک مدل کاغذی برای رویهٔ هذلولوی را می‌توان با چسباندن تعداد زیادی مثلث متساوی‌الاضلاع در امتداد ضلع‌هایشان ساخت طوری که هفت مثلث در هر رأسی اشتراک داشته باشند.

همهٔ هشت شش‌ضلعی روی دونات با سه سوراخ در هر رأس چهارتا چهارتا با هم اشتراک دارند. اگر شش‌ضلعی‌ها اقلیدسی می‌بودند، باید مجموع زاویه‌ها در هر رأس برابر ۴۸۰ درجه می‌شد، که ممکن نیست. اگر شش‌ضلعی‌ها کروی می‌بودند، باید مجموع چهار زاویه در یک رأس حتی از ۴۸۰ درجه بزرگ‌تر می‌شد، که بازهم ناممکن است. اما، در صفحهٔ هذلولوی هرچه چندضلعی بزرگ‌تر

باشد، زاویه‌های درونی آن کوچک‌تر است. یک شش‌ضلعی به اندازهٔ کافی بزرگ در صفحهٔ هذلولوی باید زاویه‌های درونی ۹۰ درجه باشد، چهارتا از این شش‌ضلعی‌ها به‌صورت مرتب در یک رأس با هم جفت‌وجور می‌شوند. بنابراین اگر هشت شش‌وجهی روی یک صفحهٔ هذلولوی قرار گیرد و آن صفحه چنان منبسط شود که هر زاویهٔ درونی برابر ۹۰ درجه بشود، خمینهٔ حاصل از چسباندن هشت شش‌وجهی، هندسهٔ هذلولویِ موضعی‌همگن پیدا خواهد کرد. این خمینهٔ جدید را مستقیماً نمی‌توان تجسم کرد، ولی ویژگی‌های هندسی آن بسیار ساده‌ترند.

شکل ۱۲. اندازهٔ زاویه‌های شش‌ضلعی منتظم با بزرگ شدن شش‌ضلعی روی رویهٔ هذلولوی کاهش می‌یابد. در این تصویر شش‌ضلعی چنان بزرگ می‌شود که هر زاویهٔ درونی ۹۰ درجه شود. هشت شش‌ضلعی در فضای پیکربندی سه میل‌لنگ دوطرفه باید در هر رأس چهارتا چهارتا اشتراک داشته باشند، و بنابراین هر شش زاویهٔ درونی هر شش‌ضلعی باید زاویهٔ قائمه باشد. اگر هشت شش‌ضلعی به‌صورت توپولوژیکی به شش‌ضلعی‌های هذلولوی با زاویه‌های قائمه تغییر شکل داده شود و مثل قبل به‌صورت انتزاعی به هم چسبانده شوند، خمینهٔ دوبُعدی حاصل دارای خمیدگی ثابت است؛ هندسهٔ این خمینه موضعی‌همگن است. به‌این‌ترتیب هندسهٔ فضای پیکربندی بسیار ساده‌تر می‌شود.

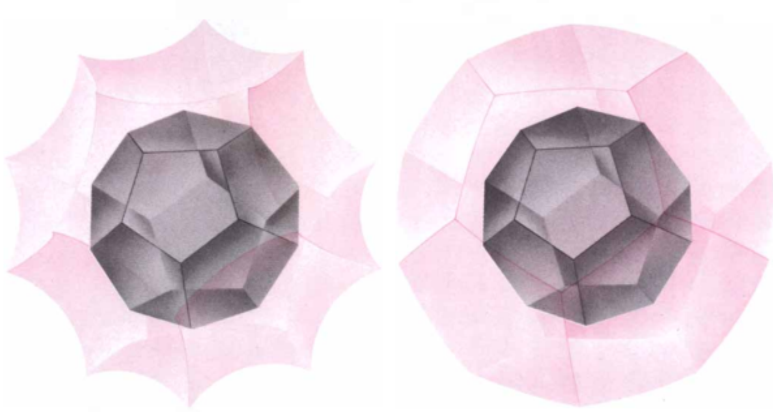
شاید بررسی این امر برای خواننده لذتبخش باشد که هر دونات با دو سوراخ یا بیشتر را می‌توان به شش‌ضلعی‌هایی برید که در هر رأس چهار شش‌ضلعی با هم اشتراک داشته باشند. هندسهٔ این خمینه را می‌توان با ساختن شش‌ضلعی‌های هذلولوی با زاویهٔ قائمه به‌صورت هذلولی در آورد. روش رایج‌تر این است که رویه را به یک چندضلعی برش دهیم که همهٔ رأس‌هایش در روی رویه در یک نقطه تلاقی کنند. برای نمونه، دونات با سه سوراخ را می‌توان به یک دوازده‌ضلعی، و نیز به هشت شش‌ضلعی، تقسیم کرد. اگر رویه خیلی پیچیده باشد، چندضلعی به دست آمده باید دست‌کم شش رأس داشته باشد. اگر بخواهیم این شش رأس به‌خوبی با هم جفت‌وجور شوند، باید زاویه‌های درونی چندضلعی کاهش یابد. این کاهش از طریق بزرگ شدن چندضلعی روی صفحه هذلولوی میسر می‌شود. هنگامی که ضلع‌های چندضلعی دوبه‌دو به هم چسبانده شود، رویهٔ جدید با رویهٔ اولیه ازنظر توپولوژیکی یکی است، ولی دارای هندسهٔ هذلولوی موضعی‌همگن می‌شود.

تنها چهار رویهٔ متناهی وجود دارد که هندسهٔ موضعی‌همگن آن‌ها هذلولوی نیست، زیرا چندضلعی‌هایی که از برش‌ها در رویه‌ها به دست می‌آیند کمتر از شش ضلع دارند. از دونات با یک سوراخ، مربع به دست می‌آید، و هر چهار رأس مربع بدون تغییر زاویه‌های درونی مربع می‌تواند به‌صورت انتزاعی به هم چسبانده شود. ازآنجاکه هیچ تغییر شکل دیگری لازم نیست، هندسهٔ موضعی‌همگن القاء شده به چنبرهٔ دوبُعدی اقلیدسی است. به همین نحو، کره و یک خمینهٔ دوبُعدی جهت‌ناپذیر موسوم به صفحهٔ تصویر، دارای هندسهٔ بیضوی هستند و یک خمینهٔ دوبُعدی جهت‌ناپذیر دیگر به نام بطری کلاین دارای هندسهٔ اقلیدسی است.

یک خمینهٔ سه‌بُعدی ممکن است به طریقی بسیار شبیه یک رویه خم شود: هر برش دوبُعدی از یک خمینهٔ سه‌بُعدی با خمیدگی مثبت را که در فضای اقلیدسی قرار داشته باشد می‌توان از هم باز کرد، و هر برش دوبُعدی از یک خمینهٔ سه‌بُعدی با خمیدگی منفی به روی خود تا و چین خواهد خورد. هندسهٔ بیضوی، هندسهٔ اقلیدسی، و هندسهٔ هذلولوی جملگی دارای صورت‌های سه‌بُعدی نیز هستند.

در سال ۱۹۷۶ یکی از نویسندگان حاضر (ترستون) این فکر را مطرح کرد که هندسهٔ هذلولوی موضعی‌همگن کلید درک تقریباً همهٔ خمینه‌های سه‌بُعدی است. بسیاری از توپولوژی‌دان‌ها از این موضوع تعجب کردند، زیرا خمینه‌های سه‌بُعدی بسیار پیچیده‌تر از خمینه‌های دوبُعدی هستند. با اینکه هر خمینهٔ دوبُعدی جهت‌پذیر را می‌توان مشخص و براساس گونای آن دسته‌بندی کرد، به نظر می‌رسد که خمینه‌های سه‌بُعدی، مانند یک گرهٔ به هم پیچیدهٔ نخ، دارای ویژگی‌های مخصوص به خود باشد و سخت بتوان آن را در قالب‌های بزرگ‌تری جا داد. اما، با موشکافی بیشتر، قالب‌های بزرگ‌تری پیدا می‌شوند. وجود این قالب‌ها بر این مطلب استوار است که به بسیاری از خمینه‌های سه‌بُعدی می‌توان یک هندسهٔ موضعی‌همگن نسبت داد.

چگونه می‌توان چنین ساختار هندسی ساده‌ای را وارد کار کرد؟ فرآیندی کاملاً شبیه به آنچه برای خمینه‌های دوبُعدی به کار بردیم برای حالت‌های بسیاری به کار می‌آید. خمینه را به یک چندوجهی برش می‌دهیم، و بعد باید ببینیم که بناست چند رأس از چندوجهی دوباره با چسباندن انتزاعی با هم در یک جا جفت‌وجور بشوند. برای نمونه، در فضای زایفرت–وِبِر همهٔ ۲۰ رأس دوازده‌وجهی که فضا را تولید می‌کنند به‌صورت انتزاعی به هم چسبانده می‌شوند. زاویهٔ فضایی‌ای که در هر رأس یک دوازده‌وجهی اقلیدسی تشکیل می‌شود خیلی بزرگ‌تر از آن است که این بیست رأس بتوانند در یک نقطه کنار هم قرار گیرند. اما، اگر دوازده‌وجهی در فضای هذلولوی سه‌بُعدی قرار داده شود، می‌توان



شکل ۱۳. (سمت راست) به فضای زایفرت–وبر می‌توان هندسهٔ موضعی‌هذلولی داد طوری که دوازده‌وجهی‌ای که فضا را تولید می‌کند در فضای هذلولی بتوان بزرگ شود. بزرگ شدن یک چندوجهی در فضای هذلولی همانند بزرگ‌شدن یک چندضلعی روی یک رویهٔ هذلولی است. هنگامی که دوازده‌وجهی بزرگ می‌شود، زاویهٔ فضایی در هر رأس کوچک می‌شود و بنابراین هر رأس تدریجاً تیزتر می‌شود. از چسباندن‌های انتزاعی که فضای زایفرت–وبر را ایجاد می‌کنند چنین بر می‌آید که همهٔ ۲۰ رأس دوازده‌وجهی در یک نقطه جمع شوند. بنابراین زاویهٔ فضایی در هر رأس در فضای هذلولوی باید کوچک شود تا همهٔ ۲۰ زاویهٔ فضایی چنان کوچک شود که در یک نقطه کنار هم قرار گیرند. (سمت چپ) فضای دوازده‌وجهی‌گون پوانکاره نیز با چسباندن دوبه‌دوی وجه‌های روبه‌روی یک دوازده‌وجهی به دست می‌آید، با این تفاوت که هر عضو از یک جفت وجه پس‌از دوران به اندازهٔ یک‌دهم یک دور کامل به عضو نظیرش می‌چسبد برعکس دوران به اندازهٔ سه‌دهم که برای ساختن فضای زایفرت–وبر لازم است. چسباندن‌های انتزاعی منجر به یکی گرفتن چهار رأس دوازده‌وجهی در هر رأس روی آن خمینه می‌شود. زاویهٔ فضایی در هر رأس یک دوازده‌وجهی معمولی کمی کوچک‌تر از آن است که چهار دوازده‌وجهی بتوانند حول یک نقطه به‌طور مرتب جفت‌وجور شوند، اما زاویه‌های فضایی را می‌توان بزرگ کرد به شرطی که دوازده‌وجهی در فضای بیضوی متورم شود. اثر این منبسط کردن برعکس اثر آن در فضای هذلولوی است.

آن را چنان متورم کرد تا زاویهٔ فضایی در هر رأس به اندازهٔ کافی کوچک شود و همهٔ ۲۰ رأسِ برابر پیرامون یک نقطه جای بگیرند. اگر وجه‌های روبه‌روی دوازده‌وجهی هذلولی را پس‌از چرخش به اندازهٔ سه‌دهم یک دور کامل به‌صورت انتزاعی به هم بچسبانیم، خمینهٔ حاصل فضای زایفرت–وبر با یک ساختار هندسی هذلولی موضعی‌همگن است.

فضای دوازده‌وجهی پوانکاره را می‌توان از به هم چسباندن وجه‌های یک دوازده‌وجهی به دست آورد، ولی در این مورد رأس‌ها باید در پنج گروه چهارتایی به هم چسبانده شود. زاویهٔ فضایی در هر رأس یک دوازده‌وجهی معمولی اندکی کوچک‌تر از آن است که بتوان آن‌ها را در یک نقطه در گروه‌های چهارتایی جا داد. ولی یک دوازده‌وجهی در یک فضا با خمیدگی مثبت که به اندازهٔ مناسبی

بزرگ باشد گوشه‌هایی با اندازهٔ مناسب دارد. با استفاده از دوازده‌وجهی بزرگ شده می‌توان فضای دوازده‌وجهی پوانکاره را ساخت که هندسهٔ آن بیضوی و موضعی‌همگن باشد (شکل ۱۳ سمت راست را ببینید). در اینجا خوب است اشاره کنیم چگونه به چنبرهٔ سه‌بُعدی یک هندسهٔ موضعی‌همگن القاء می‌شود. برای ساختن آن خمینه هشت رأس یک مکعب به‌صورت انتزاعی به هم چسبانده می‌شود. چون این هشت رأس را می‌توان بدون تغییر شکل در یک نقطه کنار هم گذاشت، هندسهٔ موضعی‌همگن چنبرهٔ سه‌بُعدی، اقلیدسی است.

برای اینکه خواننده گمراه نشود، باید تأکید کنیم که مثال‌های پیشین واقعاً کلی نیست زیرا بسیار متقارن‌اند. هنگامی که خمینه‌ای سه‌بُعدی از طریق چسباندن وجه‌های یک چندوجهی نامنتظم تعریف می‌شود لازم است در تعیین شکل چندوجهی‌ای که منجر به هندسهٔ موضعی‌همگن روی خمینهٔ سه‌بُعدی می‌شود دقت بیشتری به خرج بدهیم. شکل وجه‌های چندوجهی‌گون که به هم چسبانده می‌شوند لازم است با هم جور باشند، و مجموع زاویه‌های بین آن وجه‌ها که دور یک ضلع هستند باید ۳۶۰ درجه باشد.

دست‌کم دو تفاوت بزرگ بین هندسهٔ خمینه‌های دوبُعدی و هندسهٔ خمینه‌های سه‌بُعدی وجود دارد. اول، افزون بر سه هندسه‌ای که گفته شد، پنج نوع دیگر هندسهٔ موضعی‌همگن می‌توان به خمینه‌های سه‌بُعدی القاء کرد.[۱] هندسه‌های دیگر به این دلیل ظاهر می‌شوند که در بعدهای سه و بیشتر برای هر برش دوبُعدی که از یک نقطهٔ خمینه می‌گذرد یک خمیدگی ذاتی تعریف می‌شود.[۲] لزومی ندارد که یک هندسهٔ موضعی‌همگن در همهٔ برش‌های دوبُعدی یک خمیدگی ثابت داشته باشد. بااین‌همه، هندسه‌های ساده‌تر خمینه‌های دوبُعدی می‌تواند پایهٔ درک خمیدگی ذاتی هر هشت هندسه قرار گیرد.

تفاوت دوم بین خمینه‌های دو و سه‌بُعدی ممکن است به نظر نشان از پیچیدگی‌های برطرف‌نشدنی باشد. می‌توان خمینه‌های سه‌بُعدی را چنان ترکیب کرد که خمینه‌های سه‌بُعدی جدیدی به دست آید که هندسهٔ موضعی‌همگن نمی‌پذیرند. خوش‌بختانه، توپولوژی‌دان‌ها می‌دانند چگونه با روش‌های صرفاً توپولوژیک یک خمینه سه‌بُعدی را به قطعه‌های ساده برش دهند.

یکی از نویسندگان حاضر (ترستون) حدس زده است که پس‌از برش دادن یک خمینه سه‌بُعدی به قطعه‌های ساده، هریک از این قطعه‌ها یک هندسهٔ موضعی‌همگن از هشت نوع ممکن را می‌پذیرد. این حدس برای رده‌های بزرگی از خمینه‌های سه‌بُعدی ثابت شده است و درستی آن برای بسیاری از

۱. [۱] را ببینید. ـــ م. ۲. خمیدگی برشی در [۷] تعریف شده است. ـــ م.

مثال‌های دیگر خمینه‌های سه‌بُعدی به‌صورت عملی یا مستقیماً به کمک رایانه بررسی شده است، و در این مثال‌ها تاکنون هیچ مورد نقضی برای این حدس پیدا نشده است. به نظر نامحتمل می‌رسد که مثال نقضی برای این حدس پیدا شود.[۱]

بررسی‌های تجربی نیز نشانگر این است که پیچیدگی‌های هندسهٔ خمینه‌های سه‌بُعدی در درستی این حدس [اکنون قضیه] برای بیشتر این خمینه‌ها تأثیری ندارد. درواقع، ثابت شده است روی «بیشترِ» (به معنای خاصی که تعریف می‌کنند) خمینه‌های سه‌بُعدی می‌توان هندسهٔ موضعی‌هذلولوی القاء کرد. این یافته باعث خوشحالی است، زیرا خمینه‌های سه‌بُعدی هذلولوی دارای ویژگی‌های خوب زیادی هستند. برای نمونه، در سال ۱۹۷۱، موستو[۲] از دانشگاه ییِل ثابت کرد اگر یک خمینهٔ سه‌بُعدی دارای هندسهٔ موضعی‌هذلولوی باشد، توپولوژی خمینه آن هندسه را کاملاً مشخص می‌کند. نتیجه‌ای از قضیهٔ موستو این است که همهٔ خمینه‌های دارای هندسهٔ موضعی‌همگن اصولاً قابل رده‌بندی شدن هستند.[۳] افزون بر آن، این قضیه آزمونی سرراستی برای شناسایی خمینه‌های سه‌بُعدی هذلولوی به دست می‌دهد. هنگامی که خمینه‌ای را طوری تغییر شکل می‌دهیم که ازلحاظ هندسی شکل قابل‌شناسایی به خود بگیرد، حجمش را می‌توان اندازه گرفت و آن قضیه تضمین می‌کند که حجم آن تنها به نوع توپولوژیِ خمینه بستگی دارد. معمولاً تمیز دو خمینه در شکل توپولوژیک اختیاریشان دشوار است، بنابراین حجم آن‌ها یک خصوصیت دم‌دست برای هر خمینه است.

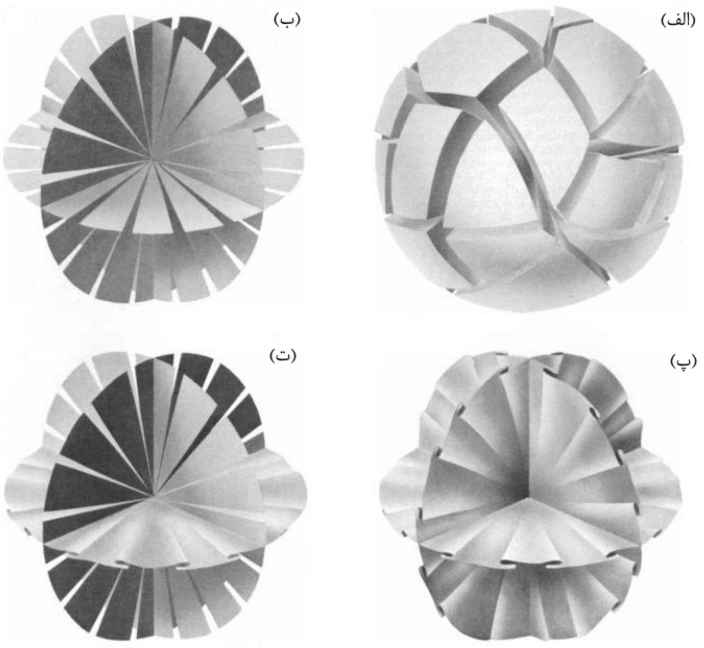
با در نظر داشتن آنچه گفته شد خوب است به تأملات اولیه‌مان دربارهٔ ساختار توپولوژیک عالم بازگردیم. از مشاهدات رصدی چنین بر می‌آید که عالم همه‌جا همگن است و دارای هندسهٔ بیضوی، هذلولوی، یا اقلیدسی است. همچنین دلایل محکمی در تأیید این نظریه داریم که عالم اکنون در حال انبساط است که از آغاز مهبانگ ادامه داشته است. تصور اینکه عالم در آینده دور چه در مشت دارد جالب است. اما اساساً تنها دو امکان وجود دارد. یکی این است که جاذبهٔ گرانشی متقابلِ ماده در عالم سرانجام انبساط عالم را متوقف می‌کند و سبب می‌شود عالم به یک «خرد شدن بزرگ»[۴] از نو رُمبش[۵] کند. امکان دوم این است که جاذبهٔ گرانشی به آن اندازه قوی نیست که انبساط عالم را متوقف کند، و درنتیجه عالم برای همیشه انبساط می‌یابد.

یکی از نتایج نظریهٔ نسبیت عمومی این است که سرنوشت نهایی عالم وابسته به هندسهٔ آن است. اگر عالم دارای هندسهٔ بیضوی باشد، سرانجام از نو رمبش می‌کند. اگر عالم دارای هندسهٔ

۱. این حدس اکنون به قضیهٔ هندسی‌سازی ترستون مشهور است؛ برای نمونه [۱] را ببینید. ــ م. ۳. برای نمونه [۹] را ببینید. ــ م.

2. G. D. Mostow 4. big crunch 5. recollapse

هذلولوی باشد، برای همیشه انبساط می‌یابد. اگر عالم دارای هندسهٔ اقلیدسی باشد، باز هم انبساط می‌یابد، ولی آهنگ انبساط آن به صفر میل می‌کند. اصولاً می‌توان هندسهٔ عالم را با قرار دادن یک مثلث بزرگ و اندازه‌گیری زاویه‌های دورنی‌اش مشخص کرد. اگر مجموع زاویه‌های آن بیش از ۱۸۰ درجه باشد، هندسهٔ فضا بیضوی است، اگر مجموع این زاویه‌ها برابر ۱۸۰ درجه باشد، هندسهٔ فضا اقلیدسی است، و اگر مجموع زاویه‌ها کمتر از ۱۸۰ درجه باشد، این هندسه هذلولوی است. در عمل کیهان‌شناسان می کوشند چگالی ماده در عالم و آهنگ انبساط آن را تخمین بزنند، زیرا هندسهٔ عالم با این دو اندازه‌گیری هم‌بستگی دارد. اگر چگالی برای یک آهنگ انبساط مفروضْ به اندازهٔ کافی زیاد باشد عالم از نو خواهد رُمبید.



شکل ۱۴. «برش» کروی یک خمینهٔ سه‌بُعدی خمیده، مثل قطعه‌های مستدیر خمینه‌های دوبُعدی در شکل ۱۰، بدون تغییر شکل امکان ندارد در فضای اقلیدسی معمولی جای بگیرد. (الف) یک خمینهٔ سه‌بُعدی با خمیدگی مثبت همه‌جا از هم باز می‌شود؛ (ب) هر برش دوبُعدی این خمینه دارای خمیدگی کرهٔ معمولی است؛ (پ) به همین نحو، هر برش دوبُعدی از یک خمینهٔ سه‌بُعدی با خمیدگی منفی چین خواهد خورد و به روی خود جمع می‌شود گو اینکه از یک رویهٔ هذلولوی بریده شده است؛ خمینه‌ای سه‌بُعدی که خمیدگی‌اش تغییر می‌کند نیز می‌تواند دارای هندسهٔ موضعی‌همگن باشد مادامی که قالب آن در همهٔ نقطه‌ها یکسان باشد؛ (ت) برای نمونه، برشی از خمینه در فضای معمولی چین می‌خورد و به روی خود جمع می‌شود، درحالی‌که دو برش دیگر از هم جدا می‌شوند.

بااین‌همه، باور غلطی وجود دارد مبنی‌بر اینکه خمیدگی عالم تعیین‌کنندهٔ آن است که اندازهٔ عالم متناهی است یا نامتناهی. غالباً گفته می‌شود اگر عالم متناهی باشد، هندسهٔ آن باید بیضوی باشد و، برعکس، اگر هندسهٔ عالم هذلولوی باشد، عالم باید نامتناهی باشد. از فضای زایفرت–وبر، که یک خمینهٔ سه‌بُعدی متناهی با هندسهٔ موضعی‌هذلولوی است، معلوم می‌شود که هیچ‌یک از این دو باور درست نیست. درواقع، بیشتر مدل‌های توپولوژیک متناهیِ فضا خمینه‌های سه‌بُعدی مانند فضای زایفرت–وبر با یک هندسهٔ موضعی‌هذلولوی هستند. چنین خمینه‌هایی مدل‌هایی هستند برای یک عالم متناهی که برای همیشه انبساط می‌یابد.

یادداشت ویراستار مقالهٔ اصلی هیچ ارجاعی به کتاب و مقاله ندارد. مراجع افزوده شده اشاره به افزوده‌های مترجم دارد و یا بنا به نظر مترجم برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ موضوع این مقاله می‌توان به آن‌ها مراجعه کرد.

مراجع

[۱] اندرسون، مایکل ت.، هندسی‌سازی ۳–خمینه‌ها از طریق شار ریچی، ترجمهٔ سید محمدباقر کاشانی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، **۴۷** (۱۳۹۰)، ۵۷–۷۸.

[۲] فرهادپور، حامد، هندسه و توپولوژی در لبه‌های ۳ و ۴ از دیدگاه نظریه زایبرگ–ویتن، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، **۵۰** (۱۳۹۱)، ۱–۲۲.

[۳] لاله، ابوالقاسم، نگاهی اجمالی به نظریهٔ خمینه‌های سه‌بعدی، نشر ریاضی، **۳** (۱۳۶۹)، ۱۰۴–۱۱۱.

[۴] میلنر، جان، به سوی حدس پوانکاره و رده‌بندی ۳–خمینه‌ها، ترجمهٔ پدرام صفری، نشر ریاضی، **۱۴** (۱۳۸۳)، ۲۵–۳۲.

[5] Anderson, James W., *Hyperbolic Geometry*, 2nd ed., Springer-Verlag, London, 2005.

[6] Bessières, L., Besson, G., Maillot, S., Boileau, M., Porti, J., *Geometrisation of 3-manifolds*, EMS Tracts in Mathematics, vol. 13, European Mathematical Society, Zürich, 2010.

[7] Bredon, G. E., *Topology and Geometry*, Springer, New York, 1993.

[8] Do Carmo, M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover, New York, 2016.

[9] Goldman, William M., Locally homogeneous geometric manifolds (2010), available at `arxiv: 1003.2759`.

[10] Hatcher, A., Notes on basic 3-manifold topology (2007), available at `https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/3M/3M.pdf`.

[11] Hempel, J., *3-Manifolds*, Chelsea Publishing, Providence, RI, 1976.

[12] Hooper, D., *At the Edge of Time*, Princeton University Press, Princeton, 2019.

[13] Jaco, W., Rubinstein, J. H., Spreer, J., Tillmann, S., $\mathbb{Z}_2$-Thurston norm and complexity of 3-manifolds, II (2017), available at `arXiv: 1711.10737`.

[14] Morgan, John W., Fong, Frederick Tsz-Ho, *Ricci Flow and Geometrization of 3-manifolds*, University Lecture Series, no. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[15] Morton-Ferguson, C., *A Visual Companion to Hatcher's Notes on Basic 3-Manifold Topology*, University of Toronto, 2017.

[16] Ohshika, K., Papadopoulos, A., eds., *In the Tradition of Thurston: Geometry and Topology*, Springer Cham, New York, 2020.

[17] Petersen, P., *Riemannian Geometry*, 2nd ed., Springer, New York, 2006.

سیّد محمدباقر کاشانی: دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده علوم پایه

رایانامه: kashanim@modares.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 43, Number 1, Spring/Summer 2024, Pages 351–379
doi: 10.30504/mct.2023.1332.1966

The Mathematics of Three-Dimensional Manifolds*

W. P. Thurston, J. R. Weeks
Translated by S. M. B. Kashani[1]

[1]Faculty of Mathematical Sciences, Tarbiat Modares University, Iran

Abstract. In this article, two and three-dimensional manifolds are examined from different points of view, especially from the geometric and topological point of view. Then their application in other sciences including physics is studied, for example, from the point of view of the theory of relativity. This description and review has been done in a non-technical language for a broad audience.

Keywords: manifold, Euclidean space, geometrization, structure of universe, linkage, general theory of relativity
Article history: Recieved 28 February 2023; Accepted 27 April 2023
Article type: translation

* Thurston, W. P., Weeks, J. R., The mathematics of three-dimensional manifolds, *Scientific American*, **251** (1984), no. 1, 108-120.

1. a_bageri@tabrizu.ac.ir