فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۴، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۴)، صص ۷۹ تا ۱۰۹

«نظریهٔ سوداگری» لوئی بشلیه

مارک اچ. اِی. دیویس
ترجمهٔ محمد جلوداری ممقانی

چکیده. متن پیشِ رو سخنرانی مارک دیویس، استاد گروه ریاضی کالج سلطنتی لندن، در سال ۲۰۰۸ است که در ماه مارس ۲۰۲۰ درگذشت. او یکی از متخصصان آنالیز تصادفی، ریاضیات مالی و کنترل تصادفی است. او در این سخنرانی به شرح مختصر و اهمیت رسالهٔ دکترای لوئی بشلیه با نام «نظریهٔ سوداگری» و کشف اهمیت این اثر در علم اقتصاد توسط پل ساموئلسون می‌پردازد. — م.

۱ مقدمه

رسالهٔ دکترای لوئی بشلیه[۱] با عنوان «Théorie de la Spéculation» در سال ۱۹۰۰، ریاضیات مالی را به جهان علم معرفی و نوعی برنامه برای نظریهٔ احتمال و آنالیز تصادفی در ۶۵ سال بعد و حتی پس از آن، ارائه کرد. این برنامه با پیگیری بهترین ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان قرن بیستم اجرا شد، اما جنبهٔ اقتصادیِ کار بشلیه کاملاً به بوتهٔ فراموشی سپرده شد تا آنکه در دههٔ ۱۹۶۰ به‌وسیلهٔ پل ساموئلسون[۲] پیگیری شد. در آن موقع، ریاضیات که مسلماً به هیچ‌وجه برای کاربرد در اقتصاد توسعه نیافته بود، برای حل مسئله‌های ساموئلسون کاملاً آماده بود و سریعاً به فرمول بلک–شولز[۳]

عبارات و کلمات کلیدی: نظریهٔ سوداگری، آربیتراژ، اندازهٔ مارتینگلیِ معادل، مدل بلک–شولز، بشلیه
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۲/۲۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۲۴
متن سخنرانی نویسنده مبتنی بر خلاصه‌ای از بخش‌هایی از کتاب زیر است
*Davis, M. H. A., Etheridge, A., *Louis Bachelier's Theory of Speculation*, Princeton University Press, Princeton, 2006, 80-115.

1. Louis Bachelier 2. Paul Samuelson 3. Black-Scholes formula

doi: 10.30504/mct.2023.1280.1890

که نقطهٔ عطفی در اقتصاد مالی است، منجر شد. هدف این سخنرانی، ارائهٔ اطلاعاتی دربارهٔ این پیشرفتِ دو مسیری بر مبنای بحثی در کتاب دیویس و اتریج (منتشر شده در سال ۲۰۰۶) است. متن این سخنرانی خلاصه‌ای از بخش‌هایی از این کتاب است.

۲ ریاضیات

بشیلیه مدرک ریاضی خود را در سال ۱۸۹۵ از دانشگاه سوربن دریافت کرد. او مطالعات خود را زیر نظر عده‌ای از استادان تأثیرگذار از جمله پل آپل،[1] امیل پیکار،[2] ژوزف بوسینسک[3] و آنری پوانکاره[4] انجام داد. آپل نابغهٔ حل مسئله بود، علاقهٔ چندانی به توسعهٔ نظریه‌های کلی نداشت و هرچند نام او بر دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها گذاشته شده است، امروزه کمتر کسی دستاوردهای بی‌شمار او را در آنالیز ریاضی، هندسه و مکانیک به خاطر می‌آورد. در مقابل، هر دانشجوی دورهٔ کارشناسی با نام پیکار آشنا است. این نام بر قضیه‌هایی در آنالیز ریاضی، نظریهٔ توابع، معادلات دیفرانسیل و هندسهٔ تحلیلی نهاده شده است. همچنین شهرت دارد که معلم بسیار خوبی بوده است. آدامار[5] در سوگنامهٔ پیکار در ۱۹۴۳ نوشت: «یک وجه قابل‌ملاحظه از شخصیت علمی پیکار، در حد کمال بودنِ شیوهٔ تدریس او بود؛ اگر نگوییم شگفت‌انگیزترین، دست‌کم یکی از شگفت‌انگیزترین شیوه‌های تدریسی است که من شناخته‌ام.» بوسینسک در ریاضی–فیزیک به‌ویژه در فهم تلاطم و لایهٔ مرزی هیدرودینامیک سهم بزرگی دارد. بشیلیه از بوسینسک نظریهٔ گرما را فراگرفت و «رسالهٔ دوم» (امتحان شفاهی) وی مبتنی بر کارهای بوسینسک در زمینهٔ مکانیک سیالات بود. هدف رسالهٔ دوم، آزمودنِ وسعت دانش و توانایی‌های تدریس داوطلب و موضوع آن، حرکت کُره در یک مایع با عنوان نه‌چندان به‌یاد ماندنیِ

«Resistance d'une masse liquide indefinie pourvue de frottements interieurs, regis par les formules de Navier, aux petits mouvements varies de translation d'une sphere solide, immergee dans cette masse et adherente la couche fluide qui la touche»

بود. بشیلیه برای دریافت مدرک اولِ خود باید امتحان‌های مکانیک، حساب دیفرانسیل و انتگرال و نجوم را با موفقیت می‌گذراند. او در سال ۱۸۹۷ در امتحان ریاضی–فیزیک پوانکاره نیز شرکت کرد.[6] پوانکاره در دورهٔ مدرک اول بشیلیه، استاد ریاضی–فیزیک و احتمال در سوربُن بود و در سال ۱۸۹۶ به کرسی مکانیک سماوی منتقل شد. او بشیلیه را با نظریهٔ احتمال آشنا کرد؛ موضوعی که

۶. نک. [۶۲].

1. Paul Appell 2. Émile Picard 3. Joseph Boussinesq 4. Henri Poincaré 5. Jacques Hadamard

تا حدّی در فرانسه بعد از کتاب عظیم لاپلاس با عنوان نظریهٔ تحلیلی احتمالات[1] که آخرین ویراست آن در سال ۱۸۲۰ منتشر شد، از مُد افتاده بود. با این حال، مطالب قابل‌ملاحظه‌ای که عموماً به زبان قُمار بیان می‌شد، باقی مانده بود و کتاب بسیار قابل فهمِ ژوزف برتران[2] با عنوان حساب احتمالات[3] را در دسترس داشت که مبانی احتمالات را از آن یاد گرفت. این آموزش در احتمال و نظریهٔ گرما همراه با دانش تجربی از بورس، ابزارهای نوشتن رسالهٔ عظیم بشیلیه را مهیا کرد. به بیان دقیق‌تر، این ترکیبِ ایده‌های ریاضی، مبانی نظریهٔ جدید «حرکت براونی» را پایه‌ریزی کرد. امروزه عموماً بشیلیه را اولین کسی می‌دانند که این فرایند ریاضی را معرفی کرده است، اما ادعا می‌شود که پیش از او این فرایند کشف شده بود. در سال ۱۸۸۰، توروال تیله[4] (استاد نجوم دانشگاه کپنهاگ و استاد ریاضی نیلس بور) مقاله‌ای (هم‌زمان به دانمارکی و فرانسوی) دربارهٔ سری‌های زمانی منتشر کرد که عملاً مدلی از حرکت براونی را به‌وجود می‌آورد.

حرکت براونی بشیلیه به‌سانِ مدلی از نوسانات قیمت‌های سهام پدیدار می‌شود. او استدلال می‌کند که نوسانات کوچک قیمت در یک بازهٔ زمانی کوتاه باید مستقل از ارزش جاری سهم باشد. او ضمناً فرض می‌کند که آنها مستقل از رفتار گذشتهٔ فرایند هستند و با استفاده از قضیهٔ حد مرکزی، نتیجه می‌گیرد که نموهای فرایند، مستقل هستند و توزیع نرمال دارند. به بیان امروزی، حرکت براونی را حد انتشار (یعنی یک حد تجدید مقیاس‌شدهٔ ویژه) قدم‌زدن تصادفی می‌داند. بشیلیه با به‌دست آوردنِ نموهای این فرایندِ قیمت به‌عنوان متغیرهای تصادفی مستقل گاوسی، با استفاده از ویژگی «نبودن حافظه»، معادله‌ای را برای آن به‌دست آورد که امروزه معادلهٔ چپمن–کولموگوروف[5] نامیده می‌شود و با استفاده از آن، پیوند با معادلهٔ گرما را (نه کاملاً دقیق) به‌دست آورد. اکنون ویژگی «نبودن حافظه»، ویژگی مارکوفی نامیده می‌شود که در سال ۱۹۰۶، توسط مارکوف[6] هنگام مطالعهٔ دستگاه‌های متغیرهای تصادفی «که به‌صورت زنجیری مرتبط هستند»، ابداع شد؛ فرایندهایی که امروزه به‌افتخار او، فرایندهای مارکوف نامیده می‌شوند. مارکوف همچنین معادلهٔ چپمن–کولموگوروف را برای زنجیرها به‌دست آورد ولی این، یک ربع قرن قبل از آن بود که بررسی دقیقی از نظریهٔ بشیلیه انجام شود که در آن، مسیرهای فرایند، پیوسته فرض می‌شوند.

نام حرکت براونی، ریشه‌ای بسیار متفاوت دارد. در علوم، این نام به حرکت نامنظم اجرام میکروسکوپی معلّق در یک مایع اطلاق می‌شود (در پیِ مشاهدات دقیق گیاه‌شناس اسکاتلندی،

1. *Théorie Analytique des Probabilités* 2. Joseph Bertrand 3. *Calcul des Probabilités* 4. Thorvald Thiele 5. Chapman-Kolmogorov 6. A. A. Markov

رابرت براون[۱] که در سال ۱۸۲۸ منتشر شد). در سال «حیرت‌انگیزِ» ۱۹۰۵، اینشتین بدون اطلاع از کار بشیلیه، مدل ریاضی حرکت براونی خود را معرفی کرد؛ هرچند در ادعاهایش محتاط بود و می‌گفت: «ممکن است حرکت‌هایی که در اینجا توصیف می‌شود، با حرکت براونی معروف مولکولی یکی باشد، اما داده‌های در دسترسِ من در این مورد آنقدر نادقیق است که دربارهٔ این مسئله نمی‌توانم داوری بکنم.» انگیزهٔ اینشتین بسیار متفاوت از انگیزهٔ بشیلیه بود. با الهام گرفتن از کارهای بولتسمان[۲] در سال‌های ۱۸۹۶ و ۱۸۹۸ روی نظریهٔ جنبشی ماده، او در جستجوی راهی برای اثبات وجود اتم‌ها بود. هرچند میکروسکوپِ بسیار قوی، مشاهدهٔ مولکول‌ها را امکان‌پذیر کرده بود، مسئلهٔ اندازه‌گیری سرعت آنها حل‌نشده مانده بود. اینشتین میانگینِ توان دومِ تغییر مکان جرم‌های معلّق را به‌عنوان کمیّت قابل‌مشاهدهٔ اصلی در حرکت براونی معرفی کرد. او ثابت کرد که تحت فرض‌های نظریهٔ مولکولی گرما، اجسامِ با قطر $۱۰^{-۳}$ میلیمتر معلّق در مایعات، باید حرکت تصادفی قابل‌مشاهده داشته باشند. او قبلاً در رسالهٔ دکترای خود، ضریب انتشار را برحسب شعاع ذرّات معلّق و دما و گرانروی مایع به‌دست آورده بود. او در اولین مقالهٔ خود دربارهٔ حرکت براونی با عنوان «دربارهٔ حرکت ذرّات ریز معلّق در مایع ساکن با استفاده از نظریهٔ مولکولی–جنبشی گرما»،[۳] این ضریب را با روشی جدید و با استفاده از فیزیک آماری به‌دست آورد. اینشتین همچنین رابطهٔ بین حرکت براونی و معادلهٔ گرما را به‌دست آورد. او نخست فرض کرد که هر ذرهٔ معلّق حرکتی می‌کند که مستقل از همهٔ ذره‌های دیگر است و فرض کرد که بازه‌ای زمانی وجود دارد که در مقایسه با زمان‌هایی که مشاهده صورت می‌گیرد، کوچک است و در عین حال، آنقدر بزرگ است که حرکت‌های هر ذرهٔ معلّق را در بازه‌های زمانی متوالی بتوان دوبه‌دو مستقل در نظر گرفت. استدلالش در مورد وجود این بازه‌های زمانی، از این قرار است: توصیف فیزیکی حرکت براونی عبارت از این است که ذره‌های معلّق در معرض تصادمات بی‌نظم با مولکول‌ها قرار دارند که منجر به تکانه می‌شود. هرچند بنابر قوانین مکانیک، حرکت ذره نه‌تنها با این تکانه‌ها بلکه با سرعت اولیهٔ آن نیز مشخص می‌شود، برای ذره‌ای با این اندازه، در هر بازهٔ زمانیِ «معمولی»، سرعت اولیه در مقایسه با تکانه‌های دریافتی طی این بازهٔ زمانی، قابل‌چشم‌پوشی است. بنابراین تغییر مکان ذره طی این‌گونه بازه‌های زمانی تقریباً مستقل از گذشتهٔ آن است. اینشتین حرکت ذره‌های معلّق را برحسب توزیع احتمالی توصیف می‌کند که تعداد ذره‌های جابه‌جاشده در یک طول داده‌شده در هر بازهٔ زمانی را مشخص می‌کند. او

1. Robert Brown 2. Ludwig Boltzmann 3. Uber die von der molekularkinetischen Theorie der Warme gefordete Bewegung von in ruhenden Flussigkeiten suspendierten Teilchen

با فرضِ ویژگی استقلال و تقارنِ حرکت، نشان می‌دهد که این توزیع احتمال را معادلهٔ گرما به‌دست می‌دهد. او با ترکیب این معادله با فرمول ضریب انتشار خود، تابع چگالی احتمال و لذا فرمولی برای میانگینِ توان دومِ تغییر مکان یک ذرهٔ معلّق به‌صورت تابعی از زمان به‌دست می‌آورد. او مطرح می‌کند که این فرمول را می‌توان برای تعیین تجربیِ عدد آووگادرو به‌کار بُرد. بشیلیه عقیده داشت که دستاورد مهم او کاربرد سازمان‌یافتهٔ پیوستگی در مدل‌سازی احتمالاتی است. او توزیع‌های پیوسته را عناصری بنیادی می‌دانست و نه صرفاً ابداعاتی ریاضی برای ساده کردنِ کار با توزیع‌های گسسته. از دیدگاه امروزی، عالی‌تری وجه روش‌مندیِ او اهمیت دادن به مسیرهای فرایند تصادفی بود. بشیلیه پس‌از دفاع از رسالهٔ خود، در سال ۱۹۰۱ مقاله‌ای منتشر کرد که در آن، نظریهٔ کلاسیک بازی‌ها را از منظری که «فرامجانبی» می‌نامد، مرور می‌کند. در حالی که رویکرد مجانبیِ لاپلاس، با حد گاوسی سروکار دارد، رویکرد فرامجانبیِ بشیلیه، با مسیرها سروکار دارد و به چیزی منجر می‌شود که امروزه تقریب انتشار نامیده می‌شود. بشیلیه به‌خوبی به اهمیت کار خود آگاه بود. او در سال ۱۹۲۴ نوشت که کتاب حساب احتمالات[1] او (البته جلد ۱؛ جلد ۲ هرگز نوشته نشد) با تاریخ انتشار ۱۹۱۲، کتاب مهم لاپلاس را پشت سر گذاشته است.[2]

در این ضمن، اینشتین از طریق همکارانش به‌سرعت اطلاع پیدا کرد که پیش‌بینی‌هایش دست‌کم از لحاظ مرتبهٔ بزرگی، با نتایج تجربیِ معلوم برای حرکت براونی، واقعاً سازگار هستند. او بعد از سال ۱۹۰۵، مقاله‌ای دیگر با عنوان پُررنگِ «دربارهٔ حرکت براونی» نوشت. در این مقاله، همان اولِ بحث، با این نکته مواجه می‌شویم که نظریهٔ ریاضی، پیش‌بینی می‌کند که مسیرهای براونی بسیار نامنظم هستند. در واقع اینشتین خاطرنشان کرد که معادلهٔ وی برای میانگین توان دومِ تغییر مکان به‌ازای زمان کوچک t نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا این معادله ایجاب می‌کند که میانگین سرعت ذرهٔ معلّق در بازهٔ زمانی به‌طول t وقتی $t \longrightarrow ۰$، به بینهایت میل کند. این نتیجه از این فرض ناشی می‌شود که حرکت‌های ذرهٔ معلّق در بازه‌های زمانی کوچک مستقل هستند؛ تقریبی که برای هر زمان کوچک نادرست است. او برآورد می‌کند که اندازه و جهت سرعت لحظه‌ایِ ذرهٔ معلّق در دوره‌های زمانی به‌طول $۱۰^{-۷}$ ثانیه تغییر می‌یابد. نتایج تجربی نیز دلالت بر وجود مسیرهای بسیار نامنظم داشته‌اند. پِرَن[3] طی مقالهٔ ۱۹۰۹ و سپس در کتاب معروف اتم‌ها[4] توصیف می‌کند که این مسیرها ظاهراً در هیچ نقطه‌ای مماس ندارند. او می‌گوید: «جا دارد دربارهٔ این توابع پیوستهٔ بدون مشتق

۲. نک. [۱۵].

1. *Calcul des Probabilités* 3. Jean Baptiste Perrin 4. *Les Atomes*

که ریاضی‌دانان آنها را معرفی کرده‌اند و ما آنها را صرفا ناشی از کنجکاوی‌های ریاضی‌دانان تلقّی کرده‌ایم و تجربه، وجود آنها را ثابت کرده است، بیندیشیم.»

نوربرت وینر[۱] علاقه داشت به مشاهدات پِرَن ارجاع دهد و او بود که سرانجام در سال ۱۹۲۳، توانست حرکت براونی را با استفاده از مسیرهای آن، با دقت ریاضی بسازد. رویکرد او ساختن یک اندازهٔ احتمال روی فضای توابع حقیقی‌مقدارِ پیوسته بر نیم‌خط حقیقیِ مثبت (به عبارت دیگر، بر فضای مسیرهای پیوسته در $\mathbb{R}$) بود به‌طوری که نموهای آنها در بازه‌های زمانی جدا از هم، گاوسی باشند. فکر پایه‌ریزیِ یک نظریهٔ احتمال مبتنی بر انتگرال و اندازه را می‌توان تا بورل[۲] ردیابی کرد که در سال ۱۹۰۹، صورتی از قانون قوی اعداد بزرگ را با استفاده از اندازهٔ لبگ ثابت کرد، اما برای بحث درباب تحوّلات فرایند تصادفی در کل زمان و نه بریده‌ای از آن در یک زمان خاص، نظریهٔ اندازه و انتگرال روی فضاهای تابعی مورد نیاز است و این چیزی بود که وینر تدارک دید. مقالهٔ تأثیرگذار وینر با عنوان «فضای تفاضلی»،[۳] کار قبلی او روی انتگرال‌گیری در فضاهای تابعی (و در نتیجه انتگرال‌گیری در فضاهای با بُعد بی‌نهایت) را به مطالعهٔ حرکت براونی تبدیل می‌کند. «تفاضل‌ها» نموهای این فرایند هستند و توزیع گاوسی دارند. او می‌گوید: «پیدایش این مقاله مدیون مکالمه‌ای است که مؤلف با پروفسور لِوی دربارهٔ رابطهٔ دو روش انتگرال‌گیری مؤلف و ایشان در بُعد بی‌نهایت (که البته مشابه هم هستند) داشته است. مؤلف میل دارد قدردانی خود را به‌سبب این دین ابراز کند.» مقالهٔ او با توجیهی از مدل حرکت براونی اینشتین آغاز می‌شود و به ترجمهٔ سادی[۴] از مقالهٔ پِرَن با عنوان «تحقّق مولکولیِ حرکت براونی»[۵] استناد می‌کند: «از این دست مثال‌ها، مشخص می‌شود که چگونه حق با ریاضی‌دانان است وقتی با دلیل منطقی از قبول برهان‌های هندسی که سند تجربی بر وجود خط مماس بر خم در هر نقطه از آن هستند، سرباز می‌زنند.» این شاهدی فیزیکی بر کار او است و نشان می‌دهد مشتق‌ناپذیریِ مسیرهای براونی که او در ادامه به اثبات آن می‌پردازد، تنها یک کنجکاوی ریاضیاتی نیست و مشاهدات پِرَن را در مورد حرکت مولکولی نامنظم، بازتاب می‌دهد.

امروزه اندازهٔ احتمالی که او ساخته است، «اندازهٔ وینر» و مدل ریاضی حرکت براونی معمولاً فرایند وینر نامیده می‌شود. پس از ساختن این اندازه، وینر ثابت کرد که به‌ازای زمان ثابت t، احتمال مشتق‌پذیری در t صفر است و نشان داد که احتمال صدق کردن در شرط هُلدر از مرتبهٔ $\frac{1}{2} - \epsilon$ روی هر

1. Norbert Wiener 2. Émile Borel 3. Differential space 4. Frederick Soddy 5. Brownian motion and molecular reality

بازه، یک است. بنابراین ناهمواریِ مسیرهای براونی، کمّی می‌گردد. سرانجام، وینر قانون ضرایب فوریه را ارائه می‌دهد. با استفاده از این قانون، می‌توان تابعی را که در صفر، صفر می‌شود (روی بازهٔ $(\circ, ۲\pi)$) به‌صورت

$$X_t = \xi_\circ \frac{t}{\sqrt{۲\pi}} + \sum_{۱}^{\infty} \frac{\xi_n(۱ - \cos nt) + \xi'_n \sin nt}{n\sqrt{\pi}}$$

بسط داد که در آن، $\xi_\circ$، ξ_n، ξ'_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع $N(\circ, ۱)$ هستند. این سری که سری فوریه–وینر نامیده می‌شود، به‌طور ضمنی در کارهای وینر به سال ۱۹۲۳ و سپس در مقالهٔ مشترکش با پیلی و زیگموند[1] در سال ۱۹۳۳، به‌صراحت آمده است.

در حالی که وینر فرایند پیوسته‌ای را که حرکت براونی می‌خوانیم، مستقیماً به‌دست آورد، رویکرد بشیلیه راهی از فرایند زمان‌گسسته به فرایند زمان‌پیوسته گشود، ولی در آن موقع، بشیلیه امکانات ریاضی لازم برای دقیق ساختنِ نظریهٔ خود را در دست نداشت. کولموگوروف[2] در سال ۱۹۳۱ در مقالهٔ مشهور خود با عنوان «دربارهٔ روش‌های تحلیلی در نظریهٔ احتمال»،[3] نخستین بار گذرگاهی دقیق از فرایند زمان‌گسسته به فرایند زمان‌پیوسته باز کرد. او این کار را با گسترش روش لیندبرگ[4] برای اثبات قضیهٔ حد مرکزی انجام داد. بنابراین معادله‌های دیفرانسیل جزئی کولموگوروف را می‌توان از معادله‌های تفاضلی که در حالت زمان‌گسسته برقرارند، به‌دست آورد. تأثیر بشیلیه آشکار است: کولموگوروف بشیلیه را اولین کسی می‌داند که مطالعهٔ حالتی را که در آن احتمال گذار $P(x_\circ, x, t, y)$ به‌صورت پیوسته به زمان بستگی دارد، به‌طور سازمان‌یافته انجام داد. کولموگوروف یک تابع گذار مارکوفی را خانواده‌ای از هسته‌های تصادفی معرفی کرد که در معادلهٔ چپمن–کولموگوروف صدق می‌کنند. خودش این معادله را معادلهٔ اسمولوخُوفسکی[5] نامید؛ به نام کسی که قبلاً حالتی خاص از آن را به‌دست آورده بود. اندیشهٔ اصلی مقاله عبارت است از معرفی مشخصه‌های موضعی در هر لحظهٔ t و ساختن توابع گذار با حل معادلات دیفرانسیلی که شامل این مشخصه‌ها هستند. «مورد بشیلیه» در بخش پایانیِ مقاله قرار دارد و در جایی است که او رده‌ای از توابع حقیقی‌مقدار را بررسی می‌کند که برای آنها مفاهیمی که اکنون (به‌پیروی از فِلِر[6]) ضرایب رانش و انتشار نامیده می‌شوند،

۲. برای مطالعهٔ سهم کولموگوروف در پیشبُرد نظریهٔ احتمال، نگاه کنید به [۲۵] و سایر مقالات یادبود در همان‌جا.

1. Raymomd Paley, Antoni Zygmund 3. Uber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeit-srechnung 4. Jarl Waldemar Lindeberg 5. Marian Smoluchowski 6. William Feller

قابل‌تعریف باشند. او سپس با فرض‌های بیشتری دربارهٔ منظم بودن روی احتمال‌های گذار، ثابت می‌کند که این احتمال‌ها در معادلهٔ فوکر–پلانک[۱] صدق می‌کنند. کار کولموگوروف، اثری فوق‌العاده در پیشرفت نظریهٔ احتمال داشت. اکنون پژوهش بر پیدا کردن توابع توزیع فرایندهای حدی پیوسته بدون توسّل به حد دنبالهٔ تقریب‌کننده متمرکز شده بود.

تک‌نگاشت بسیار تأثیرگذار کولموگوروف با عنوان مفاهیم بنیادیِ نظریهٔ احتمال[۲] در سال ۱۹۳۳، ماهیّت حساب احتمالات را تغییر داد. هرچند از قبل معلوم شده بود که محاسبات بنیادی احتمال مانند محاسبات نظریهٔ اندازه است، پیوند میان آنها آن‌طور که باید و شاید صورت‌بندی نشده بود تا کاربردی باشد. مسئلهٔ اصلی، تعریف احتمال‌های شرطی بود. بشیلیه این احتمال‌ها را با روشی نه‌چندان دقیق به‌آسانی حساب می‌کرد. کولموگوروف با تعریفِ احتمال‌ها و امیدهای شرطی به‌عنوان متغیرهای تصادفی که وجودشان با استفاده از قضیهٔ رادُن–نیکودیم[۳] تضمین می‌شود، پایهٔ ریاضی مستحکمی به آنها بخشید. سرانجام، حساب احتمالات به بخشی قابل‌احترام از ریاضیات ارتقا یافت: «نظریهٔ احتمال». نتایج موجود در این تک‌نگاشت، به تعریفِ یک اندازه روی مجموعهٔ همهٔ توابعی که توزیع‌های متناهی‌بُعد آنها مشخص باشد، منتهی شد، اما گرچه اندازهٔ وینر روی توابع پیوسته تعریف شده بود و لذا حرکت براونیِ وینر دارای مسیرهای پیوسته بود، منظم بودن نقشی در آن نداشت. سؤالی که مطرح شد، این بود که چگونه این اندازه را به رده‌های توابعی با ویژگی‌های منظم بودنِ مناسب، تحدید کنیم؟ نخستین مرحله برای حل این مسئله، معیار پیوستگی کولموگوروف بود که اولین‌بار در سال ۱۹۳۶ در مقالهٔ مشترک او با الکساندروف[۴] منتشر شد.

در این مقطع از تاریخ، هنوز مسیرها نقش ریاضی کمتری ایفا می‌کردند. برای کولموگوروف و نیز فِلِر، موضوع اصلی پژوهش‌ها، معادلات انتگرالی–دیفرانسیلی بودند که احتمال‌های گذار فرایندها جواب آنها بودند. اما برای بشیلیه، وضع فرق می‌کرد. هرچند ابزار ریاضی را برای ساختن دقیق حرکت براونی به‌عنوان یک فرایند تصادفی پیوسته در اختیار نداشت و بسیاری از نتایج او با استفاده از آزمون‌های برنولیِ مجانبی محاسبه شده‌اند، با توجه به رسالهٔ دکترای و کارهای بعدی‌اش، روشن است که بر اساس مسیرها فکر می‌کرده است. چشم‌گیرترین مثال در این رساله که ظاهراً پوانکاره را شگفت‌زده کرده است، استدلالی زیبا برای اصل بارتاب است. اصل بازتاب را عموماً به دزیره آندره[۵]

---

۱. در زمان نوشتن این مقاله، کولموگوروف از کار اولیهٔ فوکر و پلانک که این معادله را در حالتی خاص به‌دست آورده بودند، بی‌اطلاع بود. بعد از سال ۱۹۳۴ وی آن را معادلهٔ فوکر–پلانک نامید.

2. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* 3. Radon–Nikodym theorem 4. Aleksandr Aleksandrov 5. André Antoine Désiré

نسبت می‌دهند که صورت ترکیبیاتیِ محض آن را ثابت کرد. آندره شاگرد ژوزف برتران بود و در واقع می‌توان اصل بازتاب در زمینهٔ باخت در قمار را در کتاب برتران با عنوان حساب \احتمالات[1] که در سال ۱۸۸۸ منتشر شد، پیدا کرد. استدلال بشیلیه در توجیه اصل بازتاب، دقیق نیست، زیرا نیازمند ویژگی مارکوفی قوی برای حرکت براونی است. این ویژگی در دههٔ ۱۹۴۰ توسط دوب[2] به صورتی مناسب صورت‌بندی و سرانجام در سال ۱۹۵۶، برای حرکت براونی توسط هانت[3] به اثبات رسید. همچنین بحث‌های مربوط به تقارن، مشابه بحثی که بشیلیه برای اصل بازتاب مطرح کرد، به نحو احسن توسط پُل لِوی[4] که نتایج مفصلی دربارهٔ مسیرهای حرکت براونی ثابت کرده است، به‌کاربرده شد. به بیان لوو[5] در سوگنامهٔ لِوی: «اما از همهٔ اینها گذشته، او مسافری در طول مسیرها بود (و به همین دلیل، برای او ویژگی مارکوفی همیشه همان ویژگی مارکوفی قوی بود).» و همان‌طور که دوب خاطرنشان کرد:[6] «لِوی صورتگرا و به‌ویژه صورتگرایی حساس نبود که بین ویژگی مارکوفی و ویژگی مارکوفی قوی تفاوت قائل شود.»

در همان زمان که پیلی–وینر–زیگموند از سری فوریه–وینر رونمایی کردند، پُل لِوی مشغول اندیشیدن در همان خطوط بود. در واقع مسئلهٔ حرکت براونی قبلاً در سال ۱۹۳۷ در کتاب نظریهٔ حاصل‌جمع متغیرهای تصادفی[7] مطرح شده بود. لِوی متوجه شد که می‌توان به‌جای توابع پایه (مثلثاتی) در سری فوریه، از توابعی دیگر برای بسط استفاده کرد و بسط‌هایی دیگر برای فرایند وینر مانند

$$X_t(\omega) = \sum a_n(t)\xi_n(\omega)$$

به‌دست آورد. چِشِلِسکی[8] در سال ۱۹۶۱ در مقاله‌ای خوش‌ساخت، توابع هار را به‌عنوان توابع پایه انتخاب می‌کند. بنابراین توابع $a_n(t)$ به توابع مثلثی با تکیه‌گاهی به‌صورت بازه‌های دودویی تبدیل می‌شوند و مطالعهٔ سری بسیار آسان صورت می‌گیرد. لِوی نوشت:[9] «در اوایلِ ۱۹۳۴ ناگهان متوجه شدم که هر قانون پایدار مانند قانون گاوسی، به تابعی تصادفی منجر می‌شود که می‌توان آن را همانند فرایند وینر، با یک روش درونیابی به‌دست آورد. بنابراین تصمیم گرفتم صورت کلیِ تابع $X(t)$ با نموهای مستقل (به عبارت دیگر، صورت کلیِ یک فرایند جمعی) را به‌دست آورم. . .» این درونیابی تشکیل شده است از تعیین قانون $X(t+\frac{h}{2})$ وقتی $X(t)$ و $X(t+h)$ داده شده‌اند. این کار، او

۶. نک. [۲۳]. ۹. برداشته شده از [۴۸].

1. *Calcul des Probabilités* 2. Joseph L. Doob 3. Gilbert A. Hunt 4. Paul Lévy 5. Michel Loéve
7. *Theorie de l'addition des variables ateatoires* 8. Zbigniew Ciesielski

را به تعریف چیزی که امروزه فرایند لِوی نامیده می‌شود، رده‌ای دیگر از مدل‌های ریاضی که کاربردی وسیع در نظریهٔ مالی دارد، هدایت کرد.

بشیلیه درست قبل از جنگ جهانی دوم، کتابی جدید دربارهٔ حرکت براونی و مقاله‌ای دیگر در سال ۱۹۴۱ منتشر کرد. لِوی در خاطراتش به سال ۱۹۷۰، می‌گوید که من بعد از جنگ از وجود این آثار اطلاع یافتم. بشیلیه چیزی را که در محاسباتش اساسی است، قیمت واقعی ورقهٔ بهادار می‌نامد. همهٔ این محاسبات برحسب قیمت واقعی هستند که برای آن، امید ریاضی سفته‌باز صفر است. بشیلیه با ترکیب این مطلب و فرضِ ضمنیِ نبودن حافظه برای فرایند قیمت، می‌گوید که قیمت واقعی، مارتینگل است. همچنین لِوی در سال ۱۹۳۴، مفهوم مارتینگل را صورت‌بندی کرد (هرچند این نام در سال ۱۹۳۹ توسط ویی[1] وضع شد). او این مفهوم را در تلاشی برای حفظ قانون اعداد بزرگ در عینِ کم کردنِ فرض‌های استقلال (ملاحظاتی مشابه، انگیزه‌بخش وابستگیِ مارکوفی هستند) معرفی کرد. او با توجه به نتایج حاصل در خصوص مجموع‌های متغیرهای تصادفی مستقل، مطالعهٔ مارتینگل‌ها را آغاز کرد، اما دوب بود که موضوع را تغییر ماهیّت داد و مارتینگل‌ها را به ابزاری قدرتمند در احتمال و آنالیز تبدیل کرد.

جوزف دوب از آنالیز مختلط به نظریهٔ احتمال روی آورد. عنوان رسالهٔ دکترایش، «مقادیر مرزی توابع تحلیلی» بود که در سال ۱۹۳۲ از آن دفاع کرد. او به پیوند میان مارتینگل‌ها و توابع همساز (که همچنین در دو یادداشت کوتاه به‌وسیلهٔ کاکوتانی[2] در ۱۹۴۴/۴۵ منتشر شد) پی بُرد و بر این اساس، اقدام به پروراندنِ یک نظریهٔ پتانسیلِ احتمالاتی کرد. نظریهٔ مارتینگل، کانون بحث یک فصل (تقریباً ۱۰۰ صفحه‌ای) از کتابش دربارهٔ فرایندهای تصادفی به سال ۱۹۵۳ است؛ یکی از تأثیرگذارترین کتاب‌هایی که تاکنون در زمینهٔ نظریهٔ احتمال نوشته شده است. کار دوب در این زمینه تأثیری عمیق از بشیلیه گرفته است. دوب در اکتبر سال ۲۰۰۳ نوشت:[3] «من مطالعهٔ احتمال را در سال ۱۹۳۴ آغاز کردم و ارجاعاتی در متن‌های فرانسوی به بشیلیه همراه با ارجاعاتی به اصل بازتاب دزیره آندره پیدا کردم که یادم می‌آید بشیلیه از آن عمیقاً استفاده کرده بود. سراغ آثار بشیلیه و آندره رفتم و از آنها بسیار یاد گرفتم. بعدها دریافتم که دستاورد بشیله را لِوی و دیگران مجدداً کشف کرده‌اند. البته اثبات‌های دقیقِ نتایج بشیلیه، نیازمند گذشت زمان برای ارائهٔ تعریف‌های دقیق ریاضیِ حرکت براونی و روش‌های مناسب بود. آن‌طور که یادم می‌آید، بشیلیه در نوشتهٔ خود

---

۳. تماس شخصی با نویسندگان

1. Ville 2. Shizuo Kakutani

با تحقیر نویسندگان دیگر، ادعا کرده است که فقط نتایج او جدید هستند. در روزگار او و بسیار بعد از آن، احتمال بخشی قابل‌احترام از ریاضیات نبود و نظریهٔ احتمال برای دیگران بی‌ارزش بود. ایده‌های بشلیه و آندره، تأثیری دیرپا بر من نهادند و در کار من روی بازی‌های قمار و سپس در نظریهٔ مارتینگل، اثر گذاشتند.»

دوب از نخستین کسانی بود که معادلات دیفرانسیل تصادفی را مورد مطالعه قرار داد. او در مقدمهٔ مقاله‌ای در سال ۱۹۴۲ می‌گوید: «یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی برای معنی دادن به معادلهٔ دیفرانسیل لانژوَن[1] برای تابع سرعت $\frac{dx(s)}{ds}$ به‌طور دقیق معرفی خواهد شد.» اما شخصیت اصلی در توسعهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی، کیوشی ایتو،[2] ریاضی‌دان ژاپنی بود. ایتو تمام شخصیت‌های بزرگ داستان ما را پشت سر گذاشت. دوب از نظریهٔ اندازه برای معنی دادن به اندیشه‌های شهودیِ مسیرهای نمونه‌ای استفاده کرده بود. کولموگوروف و فِلِر تا اندازه‌ای، بر پیوند میان فرایندهای مارکوف و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تأکید می‌کردند. نخستین مقالهٔ ایتو در زمینهٔ انتگرال‌گیریِ تصادفی که در سال ۱۹۴۴ نوشته شد، به‌غایت کوتاه است. مقدمه‌ای بسیار کوتاه دارد و برای تعریف حرکت براونی، به کتاب لِوی و مقالهٔ ۱۹۳۷ دوب با عنوان «فرایندهای تصادفی وابسته به پارامتر پیوسته» و برای حالت خاصی از انتگرال تصادفی که در آن، تابع زیر علامت انتگرال تعیّنی است، به کار مشترک پیلی و وینر به سال ۱۹۳۴، ارجاع داده است. با این حال، ایتو در مجموعهٔ آثارش انگیزهٔ خود را بیان می‌کند: «در این مقاله‌ها روش آنالیزیِ نیرومندی برای مطالعهٔ احتمال‌های گذار فرایند، یعنی معادلهٔ سهموی کولموگوروف و تعمیم آن توسط فِلِر، ملاحظه کردم. اما می‌خواستم مسیرهای فرایندهای مارکوف را به همان روشی بررسی کنم که لِوی فرایندهای تفاضلی را مطالعه کرد.» ایتو با اندیشیدن در خصوص رفتار یک ذرهٔ مارکوفی در نموهای زمانیِ بی‌نهایت‌کوچک، مفهوم معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی را که مسیرهای یک فرایند مارکوف از آن تبعیت می‌کنند، صورت‌بندی کرد. اگر W یک فرایند وینر استاندارد باشد، آنگاه می‌توان معادلهٔ ایتو را در مورد مکان ذره‌ای که از فرایند مارکوف پیروی می‌کند، به‌صورت

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

نوشت. ایتو در نخستین مقالهٔ خود دربارهٔ انتگرال‌گیریِ تصادفی در سال ۱۹۴۴، مفهوم جواب این معادله را تعریف کرد؛ یعنی معنای دقیق ریاضی به انتگرال تصادفی بخشید. او همچنین آنچه

1. Langevin 2. Kiyosi Itô

را که می‌توان «قضیهٔ بنیادی حسابان» برای توابع حرکت براونی دانست، بیان کرد. در مقالهٔ دوم خود در سال ۱۹۵۱، فرمولی را که امروزه فرمول ایتو نامیده می‌شود و با معادلهٔ دیفرانسیل جزئی کولموگوروف مربوط است، بیان و ثابت کرد. در حالی که انتگرال وینر، انتگرال تابعی تعیّنی نسبت به نوفهٔ سفید است و زمان در آن نقشی ندارد، زمان در انتگرال ایتو نقشی اساسی دارد و به‌علاوه انتگرالده می‌تواند تصادفی باشد.

دوب در کتابش به سال ۱۹۵۳، حسابان تصادفی ایتو را به فرایندهایی که نموهای متعامد دارند و سپس به فرایندهایی که نموهای متعامد شرطی دارند، یعنی مارتینگل‌ها، تعمیم داد. او برای اینکه بتواند انتگرال تصادفی را نسبت به مارتینگل M تعریف کند، وجود یک تابع غیرتصادفی صعودی مانند $F(t)$ را به‌شرطی که $M_t^۲ - F(t)$ مارتینگل باشد، ضروری می‌دانست. برای مارتینگل‌های گسسته‌پارامتر، ویژگی متناظر از قضیهٔ تجزیهٔ دوب نتیجه می‌شود که امکان نوشتنِ (یکتای) یک زیرمارتینگل را به‌صورت مجموعی از یک مارتینگل و فرایندی با مسیرهای صعودی با شروع از صفر، فراهم می‌کند با این ویژگی که فرایند در لحظهٔ n، نسبت به سیگمامیدانی که با اطلاعات در دسترس تا لحظهٔ $n - ۱$ تولید شده است، اندازه‌پذیر باشد. صورت پیوسته‌زمانِ این نتیجه، تحت یک فرض انتگرال‌پذیریِ یکنواخت مشخص، متعلق به مِیِر [۵۴] است. یک سال بعد، یکتاییِ آن چیزی که امروزه تجزیهٔ دوب–مِیِر نامیده می‌شود، در مقالهٔ مِیِر [۵۵] ظاهر شد. مِیِر در مقالهٔ نخست خود به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ تجزیه، تعمیمی از انتگرال تصادفی دوب را مطرح می‌کند. توسعهٔ سامان‌یافته‌ای از این اندیشه‌ها را کورِژ [۱۴] ارائه داد، اما فرمولی مشابه فرمول ایتو برای این انتگرال‌های تصادفیِ کلی‌تر[۱] را کونیتا و واتانابه [۴۴] بیان کردند.

تا این زمان، انتگرال‌گیریِ تصادفی کاملاً به نظریهٔ فرایندهای مارکوف محدود بود. این امر ناشی از یک محدودیت مربوط به نظریهٔ اندازه بود مبنی بر این فرض که پالایهٔ سیگما–جبرها باید شبه‌چپ پیوسته باشند (یعنی فرایند هیچ نقطهٔ ناپیوستگی ثابت نداشته باشد). دولیون‌دَد و مِیِر در سال ۱۹۷۰، این فرض را حذف کردند و انتگرال‌گیریِ تصادفی صرفاً به یک نظریهٔ مارتینگل (یا دقیق‌تر، به یک نظریهٔ نیم‌مارتینگل) تبدیل شد. این نکته از لحاظ ریاضی مالی، یک جزء اساسی در مقاله‌های بنیادی هریسن و کرپس [۲۹] و هریسن و پلیسکا [۳۰] بود.

۳ اقتصاد

چنان‌که دیدیم، کارهای بشیلیه به‌صورت رشته‌ای پیوسته در گسترش آنالیز تصادفی در قرن بیستم

---

۱. برای مطالعهٔ بررسی مفصل این پیشرفت‌ها، جرو و پراتر [۳۷] را بخوانید.

ظاهر می‌شود. او رسالهٔ دکترای خود و یک کتاب در احتمال را قبل از جنگ جهانی اول منتشر کرد و شخصاً در سراسر دورهٔ کاری‌اش برای شخصیت‌های معروف جامعهٔ احتمال‌دانان فرانسه شناخته‌شده بود. کتاب او در دوتا از تأثیرگذارترین اثرها در زمینهٔ احتمال در قرن حاضر، یعنی مقالهٔ کولموگوروف در سال ۱۹۳۱ درباب روش‌های آنالیزی در احتمال و کتاب فرایندهای تصادفی دوب، مورد ارجاع قرار گرفته است. کوتاه‌سخن اینکه کسی نمی‌تواند بگوید آنها مطلع نبوده‌اند. اوضاع در دنیای اقتصادِ نظریهٔ مالی نمی‌توانست چندان اختلافی با این وضع داشته باشد. هرچند یک فصل کامل کتاب ۱۹۰۸ دومونتِسو[۱] در احتمال و کاربردهای آن مبتنی بر رسالهٔ دکترای بشیلیه،[۲] به نظریهٔ مالی اختصاص داشت، پس از انتشار، تقریباً هیچ تأثیری نگذاشت و بیش از ۵۰ سال به بوتهٔ فراموشی سپرده شد تا آنکه سرانجام، روی میز اقتصاددانان مالی ظاهر شد. در اواسط دههٔ ۱۹۵۰، آماردانی به نام جیمی سَوِیج[۳] کارت‌پستالی برای دوستان اقتصاددانِ خود فرستاد که در آن، در مورد کارهای اقتصادی بشیلیه آگاهی می‌داد. کارت‌پستال به آدرس پُل ساموئلسون در فرصتی مناسب به دستش رسید، زیرا در آن هنگام او بسیار درگیر مسئلهٔ ارزیابی اختیار و حواله[۴] بود و دست‌کم یک دانشجوی دکترا به‌نام ریچارد کروزنگا[۵] داشت که در این زمینه کار می‌کرد. رسالهٔ بشیلیه مورد اقبال شایسته قرار گرفت و ساموئلسون ترجمهٔ آن را به جیمز بونس[۶] سفارش داد که این ترجمه اکنون همراه با کار کروزنگا، بنوئا مندلبروت[۷] و دیگران در زمینهٔ اختیارها و مدل‌سازی قیمت، در کتاب پُل کوتنر[۸] به‌سال ۱۹۶۴ با عنوان ماهیّت تصادفیِ قیمت‌ها در بازارهای مالی[۹] (تجدید چاپ ۲۰۰۱) به زیور طبع آراسته است. وقتی از ساموئلسون پرسیدند از رسالهٔ بشیلیه چه چیزی یاد گرفت، گفت: «ابزارهای مورد نیاز من در این رساله بودند»، به عبارت دیگر، مجموعهٔ روش‌های ریاضی ابداع‌شده توسط بشیلیه شامل حرکت براونی، مارتینگل‌ها، فرایندهای مارکوف، معادلهٔ گرما. اینها درست همان اشیائی بودند که ساموئلسون برای برنامهٔ خود لازم داشت.

آیا مسیر تاریخ تغییر می‌کرد اگر اقتصاددانان چند دهه زودتر، از کار بشیلیه آگاهی می‌یافتند؟ ما این‌گونه فکر نمی‌کنیم. یک دلیلش اینکه علاقهٔ خاصی به موضوع ارزیابی اختیار وجود نداشت. همان‌طور که کاکس، راس و روبینشتاین[۱۰] در مقالهٔ ۱۹۷۹ خود اشاره می‌کنند: «اختیارها قرن‌ها معامله می‌شدند، اما تا زمان معرفی فهرستی از بورس اختیارها در سال ۱۹۷۳، تا اندازه‌ای از

---

۲. نک. [۶۲].

1. de Montessus 3. Jimmy Savage 4. warrant 5. Richard Kruizenga 6. A. James Boness 7. Benoît Mandelbrot 8. Paul Cootner 9. *The Random Character of Stock Market Prices* 10. Cox-Ross-Rubinstein

ابزارهای مالیِ مهجور محسوب می‌شدند.» در واقع، «اختیار» به صورت‌های مختلف، ویژگی فراگیر بازارهای مالی است و به‌طور کلی چگونگیِ ارزیابیِ آن، مؤلفهٔ کلیدی قیمت‌گذاریِ دارایی است، اما این نکته قبل از گسترش همه‌جانبهٔ فعالیت‌های بازارهای مالی در ثلث پایانیِ قرن بیستم، مورد توجه واقع نشد. این گسترش به‌نوبهٔ خود، بدون توسعهٔ فناوریِ رایانه‌ای در عصر حاضر، نمی‌توانست رخ دهد. اوایل، راهی برای پوشش یک قرارداد اختیار وجود نداشت: بازارها بسیار نقدناشونده، قیمت‌ها بسیار بالا و اطلاعات، بسیار اندک بود. مدیریت مؤثر ریسک‌های اختیارات، به داشتنِ بازاری «عمیق» (بزرگ) و دادوستدی به‌اندازهٔ کافی سریع بستگی دارد. هیچ‌یک از اینها قبل از عصر جدید مجهز به توان محاسباتیِ غول‌آسا، امکان‌پذیر نبود. فناوریِ رایانه‌ای همراه با اقتصاد و ریاضیات، پایهٔ سومی است که بازارهای مالی کنونی بر آن استوار هستند.

مدل حرکت براونی بشیلیه برای قیمت دارایی، یک کاستیِ آشکار دارد و آن اینکه قیمت می‌تواند در هر لحظه، در حالی که توزیع نرمال دارد، منفی شود. ساموئلسون برای ترمیم این کاستی، مدل حرکت براونیِ هندسی را که در آن، قیمت دارایی، $S(t)$، با فرمول

$$S(t) = S(\circ)\exp(at + \sigma W(t)) \qquad (۱)$$

داده می‌شود، معرفی کرد. اینجا $W(t)$ حرکت براونی و a و σ اعدادی ثابت هستند. با توجه به اینکه $W(t) \sim N(\circ, t)$، داریم

$$E[e^{\sigma W(t)}] = \exp(۲^{-۱}\sigma^{۲}t).$$

بنابراین اگر انتخاب کنیم

$$a = \alpha - \frac{۱}{۲}\sigma^{۲}, \qquad (۲)$$

آنگاه $E[S(t)] = S(\circ)e^{\alpha t}$ و لذا α آهنگ رشد مورد انتظار است. پارامتر σ تلاطم نامیده می‌شود و انحراف معیار لگاریتم بازده‌ها را معرفی می‌کند: انحراف معیار $\log \frac{S(t+h)}{S(t)}$ برابر است با $\sigma\sqrt{h}$. انتقال از حرکت براونیِ حسابی به حرکت براونیِ هندسی، به‌لحاظی تدبیری ساده برای حفظ قیمت‌های مثبت بود، اما به‌لحاظی دیگر، تأثیری عمیق در پیشرفت کل ریاضیات مربوط به این موضوع داشت. تابع نمایی، تابعی غیرخطی است و آنالیز توابع غیرخطی حرکت‌های براونی،

لزوماً نیازمند حسابان ایتو است. با کاربرد فرمول ایتو برای $S(t)$ که با (۱) و (۲) داده شده است، ملاحظه می‌کنیم که $S(t)$ در معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی (SDE)

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{۳}$$

صدق می‌کند. این نمایش بسیار شهودی‌تر از (۱) است: مثلاً بی‌درنگ می‌توان دید که نرخ رشد متوسط، α است و اگر $\alpha = ۰$، آنگاه $S(t)$ مارتینگل است و اگر بخواهیم استراتژی‌های خرید و فروش دارایی را بررسی کنیم، آنگاه در نظر گرفتنِ این SDE ضروری است.

چنان‌که مشاهده کردیم، انتگرال ایتو، SDEها و ارتباط آنها با معادلهٔ گرما تا سال ۱۹۶۰ کاملاً فهمیده شده بود. با این حال، به‌سختی می‌توان گفت که آنها را مردمِ کف خیابان یا حتی کارکنان آزمایشگاه‌های علمی فهمیده بودند. حسابان معمولیِ «نیوتن–لایب‌نیتس» هم‌اکنون و در طی قرن‌های متمادی، به روش‌های پیشرفته و ظریف توسط گروهی وسیع از فعالان علمی و مهندسی مورد استفاده قرار گرفته است، اما اقلیّتی از آنها خود را ریاضی‌دان حرفه‌ای می‌شمارند. به‌عکس، آنالیز تصادفی در سال ۱۹۶۰ شاخه‌ای از ریاضیات محض بود که در سراسر گیتی حداکثر چند صد متخصص، آن را مطالعه و درک می‌کردند. هیچ کتاب درسی وجود نداشت که دیدگاه کاربردی داشته باشد. ولی این وضعیت چندان دوام نیاورد، چراکه مطالعهٔ پدیده‌های تصادفی در چند زمینهٔ کاربردیِ متفاوت به‌طور فزاینده‌ای اهمیت یافت. در مهندسی، تأکید در عصر برنامهٔ فضایی بر دستگاه‌های دینامیکی بود و یک مشوّق مهم برای مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل با ورودی‌های تصادفی، توسط کالمن با معرفی پالایهٔ کالمن [۴۰] فراهم شد. در اینجا در واقع بین گروه شخصیت‌های موجود، رابطهٔ دیگری هم وجود دارد: کولموگوروف و نوربرت وینر (مستقلاً) دربارهٔ پالایش خطی و مسئله‌های پیشگویی در رابطه با کاربردهای نظامی در جنگ جهانی دوم، پژوهش کرده بودند. پالایهٔ کالمن موفقیّتی عظیم به‌دست آورد و هم‌اکنون نیز به‌طور گسترده‌ای به‌کار می‌رود. اندکی بعد، تلاش برای گسترش نظریهٔ پالایش به دستگاه‌های غیرخطی، موضوعی که مسلماً نیازمند حسابان تصادفی است، آغاز شد. نتیجه‌گیری چند سال طول کشید، اما حوالی سال ۱۹۶۶ صورت‌بندیِ صحیح توسط بیوسی،[۱] کوشنِر،[۲] شیریایف[۳] و دیگران در یک مجموعه از کارها ارائه شد که حتی هنوز پس از گذشت سال‌ها، به‌طور چشم‌گیری پیچیده و پیشرفته‌اند. نتیجهٔ خالص همهٔ این پیشرفت‌ها این بود که در اواخر دههٔ ۱۹۶۰، حسابانِ تصادفی از نظر کاربران نهاییِ خود، شکل بسیار بهتری گرفته بود و چند کتاب بسیار خوب نظیر

1. Richard Snowden Bucy 2. Harold Joseph Kushner 3. Albert Nikolayevich Shiryaev

مکین [۵۱] یا اگر قدری کاربردی بیندیشیم، کوشنِر [۴۵] برای بیان قابل‌قبول آن وجود داشت.

در اقتصاد، ساموئلسون یک بار دیگر رشتهٔ کار را در دست داشت و هِنری مکین[1] در بخش ریاضی MIT در کنارش بود. مکین در واقع مستقیماً با ایتو کار می‌کرد؛ همکاری‌ای که به انتشار کتاب مشترک فرایندهای انتشار و مسیرهای نمونه‌ای آنها[2] در سال ۱۹۶۵ و به‌صورت غیرمستقیم، به انتشار کتاب انتگرال‌های تصادفی[3] تألیف مکین منجر شد. این کتاب‌ها همچنان از تحسین‌شده‌ترین کتاب‌های این موضوع هستند. همچنین ساموئلسون و مکین در نوشتن مقاله‌ای در قیمت‌گذاریِ اختیار (ساموئلسون، [۶۱]) که دربارهٔ آن بیشتر صحبت خواهیم کرد، همکاری کردند. عضو دیگر این پروژه رابرت مِرتون[4] بود که به‌عنوان دانشجوی کارشناسی‌ارشد در سال ۱۹۶۷ با زمینهٔ ریاضیات کاربردی به MIT پیوست. احتمالاً مِرتون نخستین کسی است که پیوند میان انتگرال‌های ایتو و استراتژی‌های دادوستد را به‌روشنی درک کرد و به‌سرعت، یک دنباله از مقاله‌های کلاسیک نوشت (که اینها در کتابش با عنوان مالیهٔ زمان‌پیوسته[5] گردآوری شده‌اند) و در آن، مسئله‌های مهم اقتصاد مالی را با استفاده از حسابان ایتو حل کرد.

۴ به‌سوی فرمول بلک-شولز

در اینجا بسیاری از مراحل پیچیده‌ای را که پژوهشگران در جستجوی فرمولی برای قیمت‌گذاریِ اختیار قبل از دستاورد درخشان بلک و شولز در سال ۱۹۷۳ از سر گذراندند، به‌تفصیل ذکر نخواهیم کرد. در مورد نظریه‌های گوناگون تا اواسط دههٔ ۱۹۶۰، می‌توان از کتاب کوتنر با عنوان ماهیّت تصادفیِ قیمت‌های بازار سهام[6] تصوّر خوبی به‌دست آورد. همان‌طور که هریسن و پلیسکا در سال ۱۹۸۱ گفتند: «این نظریه‌ها که بین سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۷۰ ارائه شدند، همگی شامل عناصر موردی و خلق‌السّاعه بودند و حتی در پدیدآورندگان خود، حس نارضایتیِ ابهام‌آمیزی به‌وجود می‌آوردند.» احتمالاً دوستانِ اقتصاددان، از این مقایسه ناخشنود شوند، اما به نظر می‌رسد فرایندی که در آن زمان اقتصاددان‌های مالی طی می‌کردند، به آنچه که در داخل حصار آنالیز تصادفی می‌گذشت، شباهت‌هایی داشت. همان‌طور که قبلا گفتیم، توسعهٔ فرایندهای تصادفی در دههٔ ۱۹۶۰، به فرایندهای مارکوف محدود بود. این مطلب را می‌توان از چاپ اولِ کتاب احتمال و نظریهٔ پتانسیل[7] نوشتهٔ مِیِر در سال ۱۹۶۶ و مقالهٔ معروف کونیتا و واتانابه در سال ۱۹۶۷ فهمید. وقتی نظریهٔ عمومیِ فرایندها[8]

1. Henry McKean 2. *Diffusion Processes and their Sample Paths* 3. *Stochastic Integrals* 4. Robert Merton 5. *Continuous Time Finance* 6. *The Random Character of Stock Market Prices* 7. *Probability and Potentials* 8. *théorie générale des processus*

طرفدار پیدا کرد، پیوند آن با فرایندهای مارکوف تدریجاً رنگ باخت و آخرین محصولی که بیرون آمد، «نظریهٔ نیم‌مارتینگل‌ها»[1] بود که در آن، فرایند مارکوف هیچ نقش مستقیمی نداشت.

به همین ترتیب، در مورد مسئلهٔ قیمت‌گذاریِ اختیار، مشغلهٔ اقتصادانان رهایی از اقتصاد بود. اوایل با دلایل کافی فکر می‌کردند که چون اختیار، قراردادی ریسک‌دار است، ارزش آن باید هم با دارایی‌های ریسکیِ دیگر در بازار و هم با ترجیحات ریسکیِ سرمایه‌گذار، پیوند داشته باشد. بنابراین ارزیابانِ اختیار، به توابع مطلوبیت، تعادل اقتصادی، مدل قیمت‌گذاریِ دارایی سرمایه‌ای (CAPM)[2] و غیره فکر می‌کردند. در بستر «بازار کامل» (دنیای بلک–شولز)، همهٔ اینها کاملاً نامربوط‌اند. تنها «اقتصادی» که می‌ماند، عبارت از این گزاره است که مردم، زیاد را به کم ترجیح می‌دهند و اصلی بسیار نزدیک به آن (گاهی با عنوان قانون تک‌قیمتی) که به بیان بسیار رسمی‌تر، می‌گوید اگر دو قرارداد با سررسید یکسان، یک جریان نقدی یکسان (تعیّنی یا تصادفی) در آینده تحویل دهند، امروز نیز باید یک جریان نقدی یکسان ایجاد کنند؛ اگرنه می‌توان گران‌تر را فروخت و ارزان‌تر را خرید و تفاوت قیمت را به جیب زد و در رفت: یک فرصت آربیتراژ. البته در این بحث، فرضی بزرگ موسوم به «بازار بدون اصطکاک» پنهان است: توان دادوستد با مبالغ دلخواه بدون هزینه‌های دادوستد. اقتصاددانان به‌درستی خواهند گفت که بازارهای کامل، برش بسیار ناچیزی از فعالیت اقتصادی هستند و فقط در این برش است که نظریهٔ اقتصادی به دیدگاه «زیاد بهتر از کم» تقلیل می‌یابد. به هر حال، تأثیر نظریهٔ بازارهای کامل بر توسعهٔ بازارهای سرمایه به‌علت توانایی آن در بیان گزاره‌های کمّیِ بدون ابهام، بسیار چشم‌گیر بوده است.

مقالهٔ «نظریهٔ عقلانیِ قیمت‌گذاری حواله» اثر ساموئلسون به سال ۱۹۶۵، به‌زبان مؤلف عبارت است از گزارشی از پژوهش‌های پراکنده که از بیش از یک دهه قبل تا آن موقع انجام شده بود. این یکی از مقاله‌های است که در آن، عناصر خلق‌السّاعه وجود دارد. ولی بجز این، به سه علت قابل‌توجه است: کیفیت مطلق شهود، نخستین تحلیل صوریِ اختیارهای آمریکایی، و همکاری با مکین که پیوستی طولانی دربارهٔ مسئلهٔ اختیار آمریکایی برای مقاله تهیه کرده است. «حواله» پیشنهادی است از سوی یک شرکت، برای فروش سهام به سرمایه‌گذاران به قیمتی اعلام‌شده. از نظر ما، حواله با اختیار خرید فرق چندانی ندارد و تفاوت‌ها مربوط به قراردادها هستند، ولی این نباید ما را معطل کند. حواله‌ها را معمولاً در هر لحظه تا زمان ثابت سررسیدِ T می‌توان اجرا کرد و از این نظر، اختیارهای آمریکایی محسوب می‌شوند. حواله ممکن است سررسید نداشته باشد، $T = \infty$، که

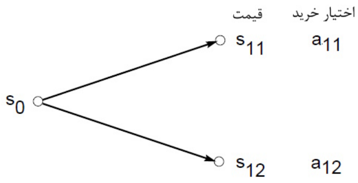
1. théorie des semimartingales 2. capital asset pricing model

آن‌وقت یک «حوالهٔ مستمر» نامیده می‌شود. تجربه نشان داده است که حواله‌های مستمر با قیمتی کمتر از قیمت سهام پایه معامله و طی زمان، بسته به قیمت سهام پایه، اجرا می‌شوند. تعیین قیمت «معقول» و استراتژی اجرای بهینه، از چالش‌های اصلی مربوط به حواله است. ساموئلسون مدل حرکت براونیِ هندسی (۱) را انتخاب کرد و لذا نرخ رشد مورد انتظار برابر شد با α، یعنی $E[S(t)] = S(\circ)e^{\alpha t}$. در اینجا «فرض خلق‌السّاعه» عبارت از این است که نرخ رشد مورد انتظار قیمت حواله تا زمان اجرای بهینهٔ آن، برابر است با ثابت β. ساموئلسون استدلال می‌کند که اگر $\beta = \alpha$، اجرای حواله تا سررسید T هرگز بهینه نخواهد شد. بنابراین یک نظریهٔ قابل‌قبول، نیازمند رابطهٔ $\beta > \alpha$ است که در هر حالت، برای جبران خسارت دارندهٔ حواله ناشی از عدم دریافت سودِ تقسیمی، قبل از اجرای آن ضروری است. مکین صورت‌بندی دقیقی از این مسئله و جوابی کامل برحسب یک مسئلهٔ مرز آزاد در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) ارائه می‌دهد. در حالت مستمر، این معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی به یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود و مسئله را می‌توان به‌صراحت حل کرد (اگرنه حل عددی مورد نیاز خواهد بود). از دیدگاه امروزی، نکتهٔ همهٔ اینها در این است که این جواب با جواب معادلهٔ بلک–شولز یکی است اگر و تنها اگر β برابر باشد با نرخ بهرهٔ بدون ریسک r و $\alpha = r - q$ که در آن، q برابر است با ثمر سود تقسیمیِ سهام. به‌ویژه پیوند با مسئله‌های مرز آزاد و قضیه‌های ریاضی در نظریهٔ اخیر نیز واقع می‌شود. با این حال، جای تعجب است که زمانی نسبتاً طولانی لازم بود تا با برهانی دقیق نشان داده شود که جواب مسئلهٔ مرز آزاد، قیمتی یکتا بدون آربیتراژ به‌دست می‌دهد. در ادامه برخی زمینه‌های پشت این مطلب بیان خواهد شد.

۵ مدل دوجمله‌ای

برای توصیف دستاوردهای بلک–شولز و پیروان آنها، مدل دوجمله‌ایِ تک‌دوره‌ای را (که نخستین بار کاکس، راس و روبینشتاین آن را در سال ۱۹۷۹ مطرح کردند) معرفی می‌کنیم. این مدل هرچند در نگاه اول تصنّعی است، اما مزیّت بزرگی دارد که با استفاده از آن، کل نظریهٔ مالی را می‌توان در چند صفحه بیان کرد و تنها محاسبات مورد لزوم برای این کار، حل یک دستگاه دو معادلهٔ خطی دو مجهولی است. این مدل در شکل ۱ نشان داده شده است.

در زمان ۰، قیمت داراییِ $S_\circ$ برابر است با $s_\circ$. در زمان ۱، قیمت آن برابر است با یکی از مقدارهای $s_{۱۱}$ و $s_{۱۲}$ (فرض می‌کنیم $s_{۱۱} > s_{۱۲}$). هر یک از این مقدارها، با احتمالی اکیداً مثبت



شکل ۱. درخت دوجمله‌ای تک دوره‌ای

ظاهر می‌شود، ولی این احتمال را مشخص نمی‌کنیم. دارایی دیگرِ موجود در بازار، حساب بانکی سپرده است که بهرهٔ بدون‌ریسک با نرخ دوره‌ای r دارد. بنابراین یک دلار سپرده در حساب بانکی در زمان ۰، در زمان ۱ به مبلغ $R = 1 + r$ دلار افزایش می‌یابد. مطالبه‌ای مشروط روی این دارایی منعقد و در زمان ۱ منقضی می‌شود و دارای ارزش اجرای $A_1 = a_{11}$ است اگر $S_1 = s_{11}$ و ارزش اجرای $A_2 = a_{12}$ اگر $S_2 = s_{12}$. این مطالبه می‌تواند یک اختیار خرید باشد و لذا برای قیمت توافقی‌ای چون K داریم $A_1 = \max\{S_1 - K, 0\}$ ولی نحوهٔ رسیدن به این مقدارها اهمیتی ندارد؛ آنها کاملاً دلخواه هستند. فرض می‌کنیم بازار بدون اصطکاک باشد؛ به این معنی که دارایی‌های موجود در آن را می‌توان به هر اندازه بدون هیچ هزینه‌ای معامله کرد. این مدل، آربیتراژ دارد اگر $Rs_0 \leq s_{12}$ یا $Rs_0 \geq s_{11}$: در این موارد، وام گرفتن از بانک و سرمایه‌گذاری در سهام یا به‌عکس، سودی بدون ریسک با احتمالی مثبت نصیب می‌کند. بنابراین فرض می‌کنیم که $s_{12} < Rs_0 < s_{11}$. فرض کنیم که در زمان ۰، سبدی متشکل از B دلار و N سهم تشکیل دهیم. در لحظهٔ ۰، ارزش این سبد برابر است با $B + NS_0$ و در لحظهٔ ۱، برابر است با $RB + Ns_{11}$ یا $RB + Ns_{12}$. حال B و N را چنان انتخاب می‌کنیم که در معادله‌های

$$RB + Ns_{11} = a_{11}, \qquad RB + Ns_{12} = a_{12}$$

صدق کنند. جواب عبارت است از

$$N = \frac{a_{11} - a_{12}}{s_{11} - s_{12}}, \qquad B = \frac{a_{12}s_{11} - a_{11}s_{12}}{R(s_{11} - s_{12})}. \tag{۴}$$

با این مقدارهای N و B، ارزش سبد برابر است با قیمت توافقی اختیار و به تغییرات قیمت سهم بستگی ندارد. می‌گوییم که سبد، عایدی اختیار را بازسازی می‌کند. بنابر قانون تک‌قیمتی، ارزش اختیار در لحظهٔ ۰ باید با ارزش سبد در این لحظه برابر باشد که عبارت است از

$$A_0 = B + NS_0 = \frac{1}{R}(a_{12}s_{11} - a_{11}s_{12}) + \frac{a_{11} - a_{12}}{s_{11} - s_{12}}s_0. \tag{۵}$$

بنابراین اختیار، قیمتی یکتا و بدون آربیتراژ دارد که با محاسبهٔ استراتژی «پوشش کامل» (B,N) به‌دست می‌آید. این نکته عصارهٔ استدلال بلک–شولز است. با این حال، بیشتر از این می‌توان گفت. فرمول (۵) را می‌توان به‌صورت

$$A_۰ = \frac{۱}{R}(qa_{۱۱} + (۱-q)a_{۱۲})$$

نوشت که در آن، $q = \frac{Rs_۰ - s_{۱۲}}{s_{۱۱} - s_{۱۲}}$.. توجه کنید که q به قرارداد اختیار بستگی ندارد و فرض نبودنِ آربیتراژ، یعنی $s_{۱۲} < Rs_۰ < s_{۱۱}$، نامساوی‌های $۰ < q < ۱$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین می‌توانیم عددهای q و $۱ - q$ را به‌ترتیب، احتمال‌های شاخه‌های بالایی و پایینی درخت دوجمله‌ای در نظر بگیریم و (۵) را به‌صورت

$$A_۰ = E_q[R^{-۱}A_۱] \tag{۶}$$

بنویسیم. این رابطه بیان می‌کند که ارزش اختیار، ارزش مورد انتظارِ عایدیِ تنزیل‌یافته نسبت به اندازهٔ احتمالی است که q تعریف می‌کند. این اندازهٔ احتمال را اندازهٔ احتمال ریسک–خنثی یا اندازهٔ مارتینگلیِ معادل می‌نامند. نامگذاری دوم ناشی از مشخص‌سازیِ دیگری از q است که از رابطهٔ (۶)آشکار است. در واقع، اگر قراردهیم $a_{۱۱} = s_{۱۱}$ و $a_{۱۲} = s_{۱۲}$، آنگاه $A_۰ = S_۰$ و با توجه به (۶)، ملاحظه می‌کنیم که فرایند قیمت‌های تنزیل‌یافتهٔ دارایی که با $\tilde{S_۰} = S_۰$ و $\tilde{S_۱} = \frac{S_۱}{R}$ تعریف می‌شود، یک مارتینگل است. احتمال شاخهٔ بالایی q است که این ویژگی را ایجاب می‌کند.

نکتهٔ اساسی که باید در اینجا تشخیص دهیم این است که q احتمال واقعی حرکت در شاخهٔ بالایی نیست. بسیار مراقب بودیم که نگوییم این احتمال چیست و بگوییم که احتمال حرکت در شاخهٔ بالایی یا در شاخهٔ پایینی، مثبت است (و حرکتی بجز این دو وجود ندارد). به بیان فنی، اندازه‌ای که q تعریف می‌کند، معادل است با احتمال واقعی. به‌طور خلاصه نشان داده‌ایم که

- مدل دوجمله‌ای، بدون آربیتراژ است اگر و تنها اگر یک اندازهٔ مارتینگلیِ معادل (EMM) وجود داشته باشد.
- در صورت وجود، EMM تنها اندازهٔ مارتینگلیِ معادل است که نسبت به آن، قیمت تنزیل‌یافتهٔ دارایی، مارتینگل است.
- هر مطالبهٔ مشروط، دارای قیمتی یکتا است که با نبودن آربیتراژ سازگار است.
- این مبلغ عبارت است از سرمایه‌گذاری اولیهٔ مورد نیاز برای بازسازی مطالبه با معاملهٔ آن در بازار است.

- این مبلغ را می‌توان با امید تنزیل‌یافتهٔ قیمت توافقی نسبت به EMM بیان کرد.

اکنون سؤال این است که آیا این پنج گزاره دربارهٔ سایر مدل‌های واقعی‌تر نیز برقرار هستند؟ شایان ذکر است که آنها برای مدل بلک–شولز و حتی برای تعمیم‌هایی از آن برقرارند، اما سال‌ها طول کشید تا تصویر کامل پدیدار شد.

۶ بلک–شولز و پس از آن

از نگاه امروزی، مقالهٔ بسیار مهم بلک و شولز در سال ۱۹۷۳، مانند تنفسی عمیق در هوای آزاد است. آنها همهٔ آشفتگی‌ها را پاک کردند و مستقیماً به هدف رسیدند و آن را در دو سطر اولِ چکیدهٔ این مقاله بیان کردند:

> اگر اختیارها به‌درستی در بازار قیمت‌گذاری شوند، نباید امکان داشته باشد که با ساختن سبدهایی از موضع‌های خرید و فروش و دارایی‌های پایهٔ آنها، سود تضمین‌شده به‌دست آید. با استفاده از این اصل، یک فرمول قیمت‌گذاریِ نظری برای اختیارها به‌دست می‌آید.

آنها چیزی را ساختند که امروزه به فرض‌های بازار بدون اصطکاک موسوم است و برای قیمت دارایی، مدل حرکت براونی هندسی ساموئلسون (۳) (سود تقسیمی پرداخت نمی‌شود) را پذیرفتند و تنها اختیارهای اروپایی را مورد بررسی قرار دادند. در این صورت، ارزش یک اختیار خرید با قیمت توافقی K و سررسید T فقط باید به زمان جاری t و قیمت دارایی پایهٔ S_t بستگی داشته باشد؛ یعنی باید برابر باشد با $w(S_t,t)$ به‌ازای تابعی چون $w(x,t)$. آنها بلافاصله تشخیص دادند که راه تشکیل سبدهای بدون‌ریسک، استفاده از «پوشش دلتا» است. فرض می‌کنیم $S_t = x$ و سبدی تشکیل می‌دهیم که حاوی یک واحد دارایی پایه و تعداد $-\frac{1}{w_1(x,t)}$ واحد، اختیار باشد که در آن، $w_1 = \frac{\partial w}{\partial x}$. ارزش سبد عبارت است از $p = x - \frac{w}{w_1}$ و تغییر در آن در یک زمان کوتاه Δt، برابر است با $\Delta p = \Delta x - \frac{\Delta w}{w_1}$. با بسط w به‌کمک لم ایتو، به‌دست می‌آوریم

$$\Delta w = w_1 \Delta x + \frac{1}{2} w_{11}\sigma^2 x^2 \Delta t + w_2 \Delta t$$

و بنابراین

$$\Delta p = -\frac{1}{w_1}\left(\frac{1}{2} w_{11}\sigma^2 x^2 + w_2\right)\Delta t. \qquad (۷)$$

چون این بازده قطعی است، پس باید با بازده دارایی بدون‌ریسک برابر باشد؛ یعنی

$$\Delta p = rp\Delta t = r\Big(x - \frac{w}{w_۱}\Big)\Delta t. \qquad (۸)$$

طرف‌های راست (۷) و (۸) را مساوی قرار می‌دهیم و Δt را حذف می‌کنیم و به معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی بلک–شولز:

$$w_۲ + w_۱ rx + \frac{۱}{۲} w_{۱۱}\sigma^۲ x^۲ - rw = ۰ \qquad (۹)$$

می‌رسیم و البته مقدار $w(x,t)$ را در زمان $t = T$ می‌دانیم $w(x,T) = \max\{x - K, ۰\}$. بلک و شولز با استفاده از یک تعویض متغیر، (۹) را به معادلهٔ استانده‌ٔ گرما با ضرایب ثابت تبدیل می‌کنند و با حل آن، به فرمول معروف

$$w(x,t) = xN(d_۱) - Ke^{-r(T-t)}N(d_۲) \qquad (۱۰)$$

می‌رسند که در آن، N تابع توزیع تجمعی نرمال است و

$$d_۱ = \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r + \frac{۱}{۲}\sigma^۲)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad d_۲ = d_۱ - \sigma\sqrt{T-t}.$$

شگفت اینکه آنها ارزش اختیار فروشِ متناظر $u(x,t)$ را با توجه به اینکه تفاضل $w - u$ در معادلهٔ (۹) با شرط مرزی $w(x,T) - u(x,T) = x - K$ صدق می‌کند که جوابش

$$w(x,t) - u(x,t) = x - e^{-r(T-t)}K \qquad (۱۱)$$

خواهد شد، به‌دست می‌آورند. در واقع، این برابری موسوم به «برابریِ خرید و فروش»، بسیار اساسی‌تر از خودِ فرمول بلک–شولز است و مستقیماً از یک استدلال آربیتراژی[۱] که ربطی به مدل قیمت بلک و شولز ندارد، نتیجه می‌شود. متأسفانه فیشر بلک[۲] آن‌قدر زنده نماند تا جایزهٔ نوبل اقتصاد ۱۹۹۷ را برای این دستاورد خارق‌العاده دریافت کند. این جایزه[۳] به مایرون شولز[۴] و رابرت مِرتون «به‌سبب ارائهٔ روشی جدید برای محاسبهٔ قیمت مشتقات» داده شد. مقالهٔ مِرتون دربارهٔ

۱. به‌طوری که بشیلیه اشاره کرده است، داشتن یک موضع خرید در اختیار خرید و یک موضع فروش در اختیار فروش، معادل است با داشتن یک قرارداد سَلَف. ارزش این دو موضعِ معادل، به‌ترتیب برابر است با طرف چپ و راست (۱۱).

۳. نام کامل این جایزه عبارت است از جایزهٔ بانک سوئد در علوم اقتصادی به یاد آلفرد نوبل.

2. Fischer Black 4. Myron Scholes

قیمت‌گذاری اختیار ([۵۲]) منبعی سرشار از مفاهیم خوب است که اکنون بسیاری از آنها راه خود را به نظریهٔ استاندهٔ مالی باز کرده‌اند. او مفهوم بسیار صوری‌ترِ استراتژی‌های دادوستد و سبدهای خودتأمین را معرفی می‌کند. شاید مهم‌تر از همه این باشد که او استفاده از نرخ‌های بهرهٔ تصادفی را مجاز می‌شمارد. به این منظور، دارایی دوم موسوم به ورقهٔ قرضهٔ صفر–کوپن $p(T,t)$ (ارزش ۱ دلار در زمان t و تحویلی در زمان T که $t \le T$) با دینامیک

$$dp(t,T) = \mu(t,T)p(t,T)dt + \delta(T,t)p(T,t)dz_T(t)$$

را که در آن، μ و δ توابعی تعیّنی و $z_T(t)$ حرکت براونی دیگری است، وارد نظریه می‌کند. بنابراین p همانند S، توزیع لُگ–نرمال دارد. اکنون قیمت اختیار $w(x,p,t)$ باید به قیمت‌های جاری $x = S(t)$ و $p = p(t,T)$ برای این دو دارایی، بستگی داشته باشد. مِرتون برای به‌دست آوردن سبدی که «موضعاً بدون ریسک» باشد، یک استراتژی «پوشش دلتا» انتخاب می‌کند و یک PDE وابسته به سه متغیر برای قیمت w اختیار به‌دست می‌آورد. اکنون مشاهده می‌کند که w نسبت به x و p همگن است؛ یعنی $w(\lambda x, \lambda p, t) = \lambda w(x,p,t)$ برای هر $\lambda > ۰$. با انتخاب $\lambda = \frac{۱}{p}$، به‌دست می‌آوریم

$$w(x,p,t) = pw(x/p, ۱, t)$$

که قیمت اختیار را برحسب تابع دو پارامتریِ $h(y,t) = w(y,۱,t)$ به‌دست می‌دهد. ثابت می‌شود که این تابع در معادلهٔ بلک–شولز با تلاطمی تصحیح‌شده صدق می‌کند. البته این معادله وقتی تلاطم ورقهٔ صفر–کوپن صفر است، یعنی $\delta(t,T) = ۰$، به معادلهٔ بلک–شولز تبدیل می‌شود. اهمیت این دستاورد، جدا از معرفی تلاطم نرخ بهره، تحقّق این نکته است که قیمت‌ها نسبی هستند؛ یعنی باید نسبت به واحدهای یک داراییِ دیگر موسوم به واحد قیمت‌گذاری[1] بیان شوند (در اینجا ورقهٔ قرضهٔ صفر–کوپن p). اندکی بعد، مدل‌سازی نرخ بهره راه خود را جدا کرد و برای خود موضوعی جدید شد و مفهوم واحد قیمت‌گذاری، وجه مشترکِ ادبیات قیمت‌گذاریِ اختیار شد. مطالعات بعدی جمشیدیان و دیگران ([۳۶])، ویژگی‌های همگنیِ توابع قیمت‌گذاری را به‌طور نظام‌مند به‌کاربرده‌اند. نطفهٔ همهٔ این ایده‌ها در مقالهٔ مِرتون قرار دارد.

قدم بزرگ بعدی را کاکس و راس برداشتند ([۱۶]). آنها برهانی برای بلک–شولز ارائه دادند که به چیزی که امروزه در ده‌ها کتاب درسی پیدا می‌شود، بسیار نزدیک است. با این حال، جالب

1. numéraire asset

است که آنها استدلالی را تعمیم دادند که ردهٔ محدودی از فرایندهای جهش–انتشار (فرایندهای قیمتی که «نوفهٔ» ورودیِ آنها، مجموع یک حرکت براونی و یک فرایند جهشِ شبه‌پواسن است) را در بَر می‌گرفت. بنابراین فرایند قیمت، ناپیوسته است، ولی کاکس و راس ثابت کردند که پوشش کامل را می‌توان تحت شرایطی معیّن به‌دست آورد. آنها همچنین توانستند دارایی‌هایی را که سود تقسیمی می‌پرداختند، بررسی کنند و چنان‌که گفته شد، این مبحثی بود که بلک و شولز در آن، مشکلاتی داشتند. با این حال، اهمیت اصلی مقالهٔ کاکس و راس در معرفی مفهوم «ارزیابی ریسک–خنثی» است. آنها متذکر می‌شوند که ارزیابی، مستقل از رجحان است. بنابراین فرقی نمی‌کند که ترجیحات کدام سرمایه‌گذار را قبول کنیم. اگر فرض کنیم که سرمایه‌گذاران ریسک–خنثی هستند، آنگاه تعادل اقتصادی ایجاب می‌کند که بازده‌های مورد انتظار همهٔ دارایی‌ها برابر با نرخ بهرهٔ بدون ریسک باشند. بنابراین در این «دنیای ریسک–خنثی» قیمت‌های اختیار را می‌توان به‌صورت امیدهای تنزیل‌یافته بیان کرد. این فکرِ بکر، وقتی به درخت دوجمله‌ای تک‌دوره‌ای اختصاص یابد، فرمول قیمت‌گذاری (۶) را به‌دست می‌دهد.

خودِ مدل دوجمله‌ای نیز توسط کاکس و راس با همکاری مارک روبینشتاین مجدداً در سال ۱۹۷۹ ارائه شد. باز از منظر امروزی، در این مقاله یک تغییر رویکرد کاملاً آشکار از «اقتصاد» به سمت چیزی که اکنون «مهندسی مالی» نامیده می‌شود، وجود دارد: تأکید بر مدل‌های قابل‌محاسبه و روش‌های عملی کارآمد. مسلماً این نکته درست است که درخت دوجمله‌ای معرفی‌شده در این مقاله، اندکی بعد و شاید تا امروز به یکی از ابزارهای بسیار کاربردی در محیط دادوستد تبدیل شده است. درخت دوجمله‌ای، فرایندی گسسته‌زمان است که از n گام مستقل از نوعی که در بالا تحلیل شد، تشکیل شده است. با شروع از هر رأس، قیمت با ضریب $u > ۱$ افزایش یا با ضریب $d < ۱$ کاهش می‌یابد. با انتخابِ $d = \frac{۱}{u}$ و نرمال کردنِ قیمت‌ها و با انتخابِ $S_{۰} = ۱$، یک «درخت بازترکیبی» حاصل می‌شود که قیمت‌ها همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده‌اند، در رأس‌های آن نوشته می‌شوند. همانند مدل تک‌دوره‌ای که قبلاً توصیف شد، فرض می‌کنیم که نرخ بهرهٔ بدون‌ریسک در هر دوره r است. مانند قبل، شرط نبودنِ آربیتراژ عبارت است از $d < R < u$ که در آن، $R = ۱ + r$. تعریف می‌کنیم $h = \log u$ و بنابراین $u = e^h$ و $d = e^{-h}$. فرض کنیم Z_kها متغیرهای تصادفی مستقل هم‌توزیع باشند به‌طوری که

$$P[Z_k = ۱] = P[Z_k = -۱] = q = \frac{R-d}{u-d}.$$

فرایند قیمت را می‌توان به‌صورت

$$S_k = S_\circ \exp\left(h\sum_{i=۱}^{k} Z_k\right)$$

بیان کرد و P اندازهٔ احتمال ریسک–خنثی است که فرایند قیمت تنزیل‌شدهٔ $\tilde{S_k} = \frac{S_k}{R^k}$ نسبت به آن، مارتینگل است. S_k یک «قدم‌زدن تصادفیِ ضربی» است. اگر اختیاری داشته باشیم که $f(S_n)$ قیمت آن در زمان n باشد، آنگاه قیمت بدون آربیتراژ آن در زمان ۰، امید تنزیل‌شدهٔ

$$w(S_\circ, \circ) = R^{-n}E[f(S_n)]$$

است. این مطلب با ساختن یک سبد پوششی از طریق تعمیم مستقیم حالت تک‌دوره‌ای، ثابت می‌شود. همچنین در مقالهٔ کاکس و دیگران ([۱۷])، بحث مربوط به مقیاس‌بندی مطرح شده است که به کاربرد مدل دوجمله‌ای به‌عنوان تقریبی از مدل بلک–شولز منجر می‌شود: اگر قدم‌زدن تصادفیِ ضربی به‌طور مناسب مقیاس‌بندی شود، حرکت براونی هندسی را تقریب می‌زند و در واقع، درخت دوجمله‌ای، الگوریتمی ساده برای حل معادلهٔ (۹) است. این مطلب، دلیل اصلی تأثیر عظیم مدل دوجمله‌ای در دادوستد عملی اختیار است.

دلیل دیگر تأثیر مدل دوجمله‌ای، همان‌طور که کاکس و دیگران ([۱۷]) قبلاً گفته‌اند، این است که با استفاده از آن می‌توان اختیارهای آمریکایی را نیز قیمت‌گذاری کرد. این فکر به این صورت اجرا می‌شود که طرف راست رابطهٔ بالا، ارزش ادامهٔ اختیار را آن‌گونه که در زمان k دیده می‌شود، به‌دست می‌هد. در مورد اختیار اروپایی، این مبلغ ارزش اختیار است، زیرا انتخابی بجز انتظار فرارسیدنِ زمان اجرایِ اختیار n وجود ندارد. اما در مورد اختیار آمریکایی، دارندهٔ اختیار می‌تواند همین الان در لحظهٔ k، اختیار را اجرا و مبلغ $f(s)$ را دریافت کند. بجاست که او این کار را انجام دهد مشروط بر اینکه $f(s)$ بزرگ‌تر از ارزش ادامه باشد و بنابراین به رابطهٔ

$$w_a(s,k) = \max\left\{f(s), \frac{۱}{R}qw_a(us,k+۱) + (۱-q)w_a(ds,k+۱)\right\} \quad (۱۲)$$

بین قیمت‌های آمریکاییِ $w_a(\cdot,k)$ و $w_a(\cdot,k+۱)$ می‌رسیم. از سوی دیگر، اختیار باید در زمان n اجرا شود و لذا $w_a(n,s) = f(s)$. پس می‌توان قیمت اختیار آمریکایی را به روش بازگشتیِ پسرو، با استفاده از (۱۲) همراه با همان ارزش اجرای نهایی زمان n مربوط به اختیار اروپایی، تولید کرد. از (۱۲) روشن است که $w_a(s,k) \geq f(s)$ و اینکه اجرای اختیار در زمان k، بهینه است

اگر $w_a(s,k) = f(s)$. با در نظر گرفتن مدل دوجمله‌ای به‌عنوان تقریبی از مدل حرکت براونی هندسی، می‌توان دید که وقتی این الگوریتم را در مورد اختیار فروش $f(s) = \max\{K - s, \circ\}$ اعمال می‌کنیم، انگار راهی برای محاسبهٔ جواب مسئلهٔ مرز آزادی گشوده‌ایم که ساموئلسون در سال ۱۹۶۵ مطرح کرد.

همهٔ این مطالب کاملاً درست هستند و در مقالهٔ کاکس، راس و روبینشتاین آمده‌اند، اما استدلال ارائه‌شده در مقاله کامل نیست. اصلاً روشن نیست که به چه علت، سرمایه‌گذار باید قیمت اجرای فوری را با امید ریسک–خنثای ارزش ادامه، مقایسه کند. برای نشان دادنِ اینکه این روش، به قیمت یکتای بدون آربیتراژ منجر می‌شود، استدلالی جداگانه مورد نیاز است. تا پیش از کار بِن‌سوسان ([۶]) و کاراتزاس ([۴۱])، حدوداً ۲۰ سال پس از کار اصلی مکین، پیوند ریاضی غیرقابل‌تردیدی بین مسائل مرز آزاد و قیمت یکتای بدون آربیتراژ برای اختیارهای آمریکایی، برقرار نشده بود. کاکس و راس ([۱۶]) با مشاهدهٔ اینکه فرمول بلک–شولز (۱۰) شامل نرخ رشد سهام نیست و بنابراین ارزش اختیار به نرخ رشد بستگی ندارد، به مفهوم «ارزیابی ریسک–خنثی» رسیدند. اگر سرمایه‌گذاران، ریسک–خنثی باشند، فرض خواهند کرد که نرخ رشدِ همهٔ دارایی‌های آنها اعم از ریسک‌دار یا بدون‌ریسک، برابر است با نرخ رشد بدون‌ریسک r. اما اگر در مدل بلک–شولز انتخاب کنیم $\alpha = r$، آنگاه ارزش اختیار که با (۱۰) داده می‌شود، برابر است با امید تنزیل‌یافتهٔ $E[e^{-r(T-t)}\max\{S_T - K, \circ\}]$. با این حال، کاکس و راس این مفهوم را با اندازه‌های مارتینگلیِ معادل پیوند ندادند. این قطعهٔ نهاییِ جورچین را هریسن و کرپس ([۲۹]) سر جایش قرار دادند.

اندازه‌های احتمال P و Q روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F})$ معادل‌اند اگر پوچ‌مجموعه‌های یکسان داشته باشند: به‌ازای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر A، $P(A) = \circ$ اگر و تنها اگر $Q(A) = \circ$. وقتی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F})$ فضای استانده برای حرکت براونی و P اندازهٔ وینر باشد، روش حیرت‌آوری برای مشخص کردن اندازه‌های معادل وجود دارد که با قضیهٔ گیرسانُف[1] رونمایی می‌شود. این قضیه بیان می‌کند که برای حرکت براونی $w(t)$، تغییر اندازه، همان تغییر رانش است. به عبارت دیگر، نسبت به هر اندازهٔ معادل Q، یک «فرایند رانش» $\phi(t)$ وجود دارد به‌طوری که $w^*(t)$ با تعریفِ

$$w^*(t) = w(t) - \int_\circ^t \phi(s)ds$$

1. Girsanov Theorem

یک حرکت براونی نسبت به Q است. به‌زبان شهودی‌تر می‌توان گفت که معادلهٔ

$$dw(t) = dw^*(t) + \phi(t)dt$$

نسبت به Q برقرار است. بنابراین $w(t)$ مجموع یک حرکت براونی و یک رانش است. با نگاه به حرکت براونی هندسی (؟؟)، مشاهده می‌کنیم که با انتخابِ $\phi(t) = \frac{r-\alpha}{\sigma}$، به‌دست می‌آوریم

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dw^*(t).$$

بنابراین فرایند $S(t)$ نسبت به Q یک حرکت براونی هندسی با نرخ رشد ریسک–خنثای r است. Q را اندازهٔ مارتینگلیِ معادل (EMM) می‌نامیم، زیرا فرایند قیمت تنزیل‌شدهٔ $e^{-rt}S(t)$ نسبت به آن، مارتینگل است. فرمول بلک–شولز به‌صورت

$$E_Q[e^{-r(T-t)}\max\{S_T - K, \circ\}]$$

بیان می‌شود که در آن، E_Q امید نسبت به Q است. به این ترتیب، دقیقاً فرمول (۶) در مدل دوجمله‌ای به‌دست می‌آید. پس به‌جای توسّل به مفهوم اقتصادیِ ریسک–خنثایی، صرفاً می‌توان بیان کرد که ارزش اختیار برابر است با امید تنزیل‌یافتهٔ قیمت اجرایی نسبت به EMM یکتا.

ایدهٔ مذکور در مقالهٔ هریسن و کرپس ([۲۹]) آمده است، ولی آنها بحث را از منظری کاملاً مجرّد آغاز می‌کنند. نخست در یک زمینهٔ تک‌دوره‌ای همانند مدل دوجمله‌ایِ تک‌دوره‌ای که در بالا مورد بحث واقع شد، سپس در پایان دوره، برآمدهای تصادفی بسیار را مجاز می‌شمارند. کارگزارها در بازار به «بسته‌های مصرف» $(r, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{X}$ که در آن، $\mathbb{X}$ یک فضای خطی از متغیرهای تصادفی است، دسترسی دارند. بنابراین کارگزار، مبلغی ثابت مانند r را در زمان $\circ$ و مبلغ تصادفی $X(\omega)$ به‌ازای $X \in \mathbb{X}$ای را در زمان ۱ مصرف خواهد کرد. دستگاه قیمت، جفتی مانند $(\mathbb{M}, \pi)$ است که در آن، $\mathbb{M}$ زیرفضایی از $\mathbb{X}$ و π تابعکی روی $\mathbb{M}$ است. بنابراین قیمت بستهٔ $(r, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}$ برابر است با $r + \pi(m)$. دستگاه قیمت‌ها قابل اعتماد است اگر یک دادوستد بهینهٔ خالص (بسته‌ای با این ویژگی که $r + \pi(m) = \circ$) نسبت به یک ترتیبِ رجحان، وجود داشته باشد. مسئلهٔ قیمت‌گذاری، توسعهٔ π به کل $\mathbb{X}$ است طوری که بازار توسعه‌یافته هنوز قابل‌اعتماد باشد. مطالبهٔ ویژهٔ $X \in \mathbb{X}$، قیمت‌گذاری‌شده با آربیتراژ نامیده می‌شود اگر قیمتی یکتا مانند p برای X وجود داشته باشد که با $(\mathbb{M}, \pi)$ سازگار باشد. نتایج کلی اصلی این مقاله عبارت‌اند از اینکه

$(\mathbb{M}, \pi)$ قابل اعتماد است اگر و تنها اگر توسعه‌ای پیوسته و اکیداً مثبت از π به کل $\mathbb{X}$ وجود داشته باشد؛ مطالبه با آربیتراژ قیمت‌گذاری می‌شود اگر و تنها اگر برای همهٔ چنین توسعه‌هایی فقط یک قیمت داشته باشد. هریسن و کرپس با حرکت به زمینهٔ چنددوره‌ای یا زمان‌پیوسته که بازهٔ زمانیِ آن $[0, T]$ است، فرایند برداری $S(t)$ از قیمت‌های دارایی‌ها را در نظر می‌گیرند و سرمایه‌گذاران را به استراتژی‌های خودتأمین ساده محدود می‌کنند.[1] با شروع از یک داراییِ مشخص در لحظهٔ ۰ و استفاده از یک استراتژی دادوستد، برآمدی تصادفی مانند X در لحظهٔ T حاصل می‌شود که می‌توان برای آن، نظریهٔ تک‌دوره‌ای را به‌کار برد. ایده این است که $(\mathbb{M}, \pi)$ معرِّف بازار دارایی‌های معامله‌شده است و مجموعهٔ بزرگترِ $\mathbb{X}$ احتمالاً شامل مطالبات مشروطی است که وارد بازار نشده‌اند. اساساً نتیجهٔ اصلی این است که قابلیت اعتماد، معادل است با وجود اندازهٔ مارتینگلیِ معادل Q. بین مجموعهٔ اندازه‌های مارتینگلیِ معادل Q و مجموعهٔ تابعک‌های قیمت‌گذار ψ، تناظری یک‌به‌یک وجود دارد که با $Q(A) = \psi(1_A)$ و $\psi(X) = E_Q(X)$ تعریف می‌شود. مقدار X با آربیتراژ تعیین می‌شود اگر $E_Q X$ برای همهٔ اندازهای مارتینگلیِ معادل Q یکی باشد. هریسن و کرپس این نتیجه را در مورد مدل‌های متناهی همانند مدل دوجمله‌ای و در زمینهٔ بلک–شولز که برای آن، از قضیهٔ گیرسانوف برای تأثیرگذاری بر تغییر اندازه استفاده کرده‌اند، به‌کار بردند. بنابراین این مقاله موضوع اندازهٔ مارتینگلیِ معادل را در زمینه‌های گوناگون به‌کار می‌بَرد، اما از جامعیّت برخوردار نیست، زیرا به رده‌ای کوچک از استراتژی‌های دادوستد محدود شده است.

هریسن و پلیسکا این پژوهش را در مقالهٔ دیگری ([۳۰]) که در آن، بر پیوند با نظریهٔ جدید آنالیز تصادفی (نظریهٔ عمومی فرایندها) به‌شدت تاکید شده بود، ادامه دادند. این بار، قیمت‌های دارایی‌ها نیم‌مارتینگل و استراتژی‌های دادوستد، انتگرالده‌های نظریهٔ عمومی هستند. آنها مستقیماً به شرایط لازم و کافی برای نبودنِ آربیتراژ نپرداختند، بلکه فرض کردند که یک اندازهٔ مارتینگلیِ معادل وجود دارد (که شرطی کافی است). ثابت کردند که همواره قیمت مطالبهٔ قابل‌دسترس X از رابطهٔ $\pi = E_Q[e^{-rT}X]$ به‌دست می‌آید. آنها تشخیص دادند که بازار، کامل است (همهٔ مطالبات قابل‌حصول هستند) اگر فرایند برداریِ قیمت دارایی، نمایش مارتینگلی داشته باشد. از این‌رو به‌ویژه مدل بلک–شولز کامل است و مدل‌های دیگر، کامل خواهند بود تنها اگر در شرایط عمومی ژاکود و یور ([۳۵]) صدق کنند. این مقاله، «اقتصاد مالی» را به «ریاضیات مالی» تبدیل کرد. تمام سؤال‌ها در بستر ریاضیات محض مطرح شده‌اند و هیچ اصل اقتصادی که معنایی دقیق در قالب یک گزارهٔ ریاضی نداشته باشد، در آن ظاهر نشده است.

۱. برای مطالعهٔ شرح بیشتر، فصل مقدماتی کتاب دیویس و اتریج را ببینید.

سپاسگزاری بی‌تردید نقش آقای سیامک کاظمی در بهتر خوانده شدن این مقاله انکارناپذیر است. از ایشان به‌خاطر ویرایش و مقابلهٔ متن ترجمه با متن انگلیسی مقاله و نیز ارائهٔ پیشنهادهای ارزنده در مورد ضبط اسامی، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

مراجع

[1] Aleksandrov, P. S., Kolmogorov, A. N., Endliche berdeckungen topologische räume, *Fund. Math.*, **26** (1963), 267-271.

[2] Bachelier, L., Théorie mathématique du jeu, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, **18** (1910), 143-210.

[3] Bachelier, L., *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

[4] Bachelier, L., *Les Nouvelles Méthodes du Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1939.

[5] Bachelier, L., Probabilités des oscillations maxima, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **212** (1941), 836-838.

[6] Bensoussan, A., On the theory of option pricing, *Acta Appl. Math.*, **2** (1984), 139-158.

[7] Bertrand, J., *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1888.

[8] Black, F., Scholes, M., The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81** (1973), 637-654.

[9] Boltzmann, L., *Vorlesungen über Gastheorie*, J. A. Barth, Leipzig, 1896.

[10] Borel, E., *Eléments de la Théorie de Probabilités*, Hermann, 1909.

[11] Brown, R., A brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august, 1827 on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies, *Philosophical Magazine* **4** (1928), no. 21, 161-173.

[12] Ciesielski, Z., 1961. Hölder conditions for realizations of gaussian processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **99** (1961), no. 3, 403-413.

[13] Cootner, P., *The Random Character of Stock Market Prices*, Risk Books, 2001; reprinted from the original 1964 edition published by MIT Press.

[14] Courrège, P., Intégrales stochastiques et martingales de carré intégrable, *Séminaire Brélot–Choquet–Dény (Théorie du Potentiel)*, **7** (1962/3).

[15] Courtault, J. M., Kabanov, Y., Bru, B., Crépel, P., Lebon, I., Marc, A. L., Louis bachelier on the centenary of théorie de la speculation, *Math. Finance*, **10** (2000), no. 3, 341-353.

[16] Cox, J. C., Ross, S. A., The valuation of options for alternative stochastic processes, *Journal of Financial Economics*, **3** (1976), 145-166.

[17] Cox, J. C., Ross, S. A., Rubinstein, M., Option pricing: a simplified approach, *Journal of Financial Economics*, **7** (1979), 229-263.

[18] Davis, M. H., Etheridge, A., *Speculation: Louis Bachelier and the Origins of Modern Finance*, Princeton University Press, Princeton, 2006.

[19] de Montessus, R., *Lçons élémentaires sur le calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1908.

[20] Doléans-Dade, C., Meyer, P. A., Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales, *Séminaire de Probabilités IV.*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 124, 1970, 77-107.

[21] Doob, J., Stochastic processes depending on a continuous parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **42** (1937), 107-140.

[22] Doob, J. L., The Brownian movement and stochastic equations, *Ann. of Math. (2)*, (1942), 351-369.

[23] Doob, J. L., *Stochastic Processes*, John Wiley, New York, 1953.

[24] Doob, J. L., William feller and twentieth century probability, *Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 2*, 1970.

[25] Doob, J. L., Obituary: Paul Lévy, *J. Appl. Probab.*, **9** (1972), 870-872.

[26] Dynkin, E. B., Kolomogorov and the theory of Markov processes, *J. Appl. Probab.*, **17** (1989), no. 3, 822-832.
[27] Einstein, A., Zur theorie der brownschen bewegung (on the theory of Brownian motion), *Annalen der Physik*, **19** (1906), 371-381.
[28] Girsanov, I. V., On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures, *Theory Probab. Appl.*, **5** (1960), 285-301.
[29] Hadamard, J., Obituary: Emile Picard, *J. Lond. Math. Soc.*, **18** (1943), 114-128.
[30] Harrison, J., Kreps, D. M., Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory* **20** (1979), 381-408.
[31] Harrison, J. M., Pliska, S. R., Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading,*Stochastic Process. Appl.*, **11** (1981), 215-260.
[32] Hunt, G. A., Some theorems concerning brownian motion, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** 91956), 249-319.
[33] Ito, K., Stochastic integral, *Proceedings of the Imperial Academy, Tokyo*, **20** (1944), 519-524.
[34] Ito, K., On stochastic differential equations, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **4**, 1951.
[35] Ito, K., McKean, H. P., *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
[36] Jacod, J., Yor, M., Etude des solutions extremales et representation intégrale des solutions pour certaines problèmes de martingales, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, **38** (1977), 83-125.
[37] Jamshidian, F., LIBOR and swap market models and measures, *Finance and Stochastics* **1** (1977), 293-330.
[38] Jarrow, R., Protter, P., A short history of stochastic integration and mathematical finance the early years, 1880–1970, *IMS Lecture Notes Monograph*, **45** (2004), 1-17.
[39] Kakutani, S., Markoff processes and the dirichlet problem, *Proceedings of the Japanese Academy*, **21** (1944a), 227-233.
[40] Kakutani, S., Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions, *Proceedings of the Imperial Academy, Tokyo*, **20** (1944b), 706-714.
[41] Kalman, R. E., A new approach to linear filtering and prediction problems, *Journal of Basic Engineering, ASME*, **82** (1960), 35-45.
[42] Karatzas, I., On the pricing of American options, *Appl. Math. Optim.*, **17** (1988), 37-60.
[43] Kolmogorov, A. N., über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Ann.*, **104** (1931), 415-458.
[44] Kolmogorov, A. N., *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1933.
[45] Kunita, H., Watanabe, S., On square-integrable martingales, *Nagoya Math. J.*, **30** (1967), 209-245.
[46] Kushner, H. J., *Stochastic Stability and Control*, Academic Press, New York, 1967.
[47] Laplace, P. S., *Théorie analytique des Probabilités*, Courcier, Paris, 1812.
[48] Lévy, P., *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris, 1937.
[49] Loève, M., Paul lévy: 1886–1971, *Ann. Probab.* **1** (1973), no. 1, 1-8.
[50] Markov, A. A., Extension of the law of large numbers to dependent events, *Bull. Soc. Phys. Math Kazan*, **15** (1906), no. 2, 135-156.
[51] Markov, A. A., Extension of limit theorems of probability to a sum of variables connected in a chain, *Zap. Acad. Nauk Fiz.-Mat. Otdel., Ser. VIII*, **22** (1908).
[52] McKean, H. P., *Stochastic Integrals*, Academic Press, New York, 1969.
[53] Merton, R. C., Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* **4** (1973), 141-183.
[54] Merton, R. C., *Continuous-Time Finance*, Basil Blackwell, Oxford, 1992.
[55] Meyer, P. A., A decomposition for supermartingales, *Illinois J. Math.*, **6** (1962), 193-205.

[56] Meyer, P. A., Decomposition of supermartingales: the uniqueness theorem, *Illinois J. Math.*, **7** (1963), 1-17.
[57] Meyer, P. A., *Probability and Potentials*, Blaisdell, London, 1966.
[58] Paley, R. E. A. C., Wiener, N., *Fourier Transforms in the Complex Domain*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. XIX, 1934.
[59] Perrin, J., 1909. Mouvement brownien et réalité moléculaire, *Annales de Chimie et de Physique*, **18** (1909), 1-114.
[60] Perrin, J., *Les Atomes*, Felix Alcan, Paris, 1912.
[61] Paley, R. E. A. C. Wiener, N., Notes on random functions, *Math. Z.*, **37** (1933), 647-668.
[62] Samuelson, P. A., Rational theory of warrant pricing, *Industrial Management Review*, **6** (1965), 13–39.
[63] Taqqu, M. S., Bachelier and his times: A conversation with Bernard Bru, *Finance Stoch.*, **5** (2001), no. 1, 3-32.
[64] Ville, J., *Etude critique de la notion de collectif*, Gauthier-Villars, Paris, 1939.
[65] Wiener, N., Differential space, *J. Math. Phys.*, **2** (1923), 127-146.

محمد جلوداری ممقانی: دانشگاه علامه طباطبائی، دانشکدهٔ ریاضی، گروه ریاضی
رایانامه: j_mamaghani@atu.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 44, Number 1, Spring/Summer 2025, Pages 79–109
doi: 10.30504/mct.2023.1280.1890

Louis Bachelier's "Theory of Speculation"*

Mark H. A. Davis
Translated by M. J. Mamaghani[1]

Department of Mathematics, Allameh Tabataba'i University, Iran

Abstract. Louis Bachelier's 1900 PhD thesis "Théorie de la Spéculation" introduced mathematical finance to the world and also provided a kind of agenda for probability theory and stochastic analysis for the next 65 years or so. The agenda was carried out by succession of the 20th century's best mathematician and physicists, but the economic side of Bachelier's work was completely ignored until it was taken up by Paul Samuelson in the 1960s. By that time the mathematics — which certainly was not developed with any view towards applications in economics— was in perfect shape to solve Samuelson's problems, and quickly led to the Black-Scholes formula, the watershed event in financial economics. The aim of this talk is to give some account of this twin-track development, based on the discussion in the recent book Davis and Etheridge (2006). The text below consists of some abridged extracts from the book.

Keywords: theory of speculation, arbitrage, equivalent martingale measure, the Black-Scholes model, Bachelier
Article history: Received 14 May 2022; Accepted 15 March 2023
Article type: translation

* Davis, M. H. A., Etheridge, A., *Louis Bachelier's Theory of Speculation*, Princeton University Press, Princeton, 2006, 80-115.

1. j_mamaghani@atu.ac.ir