

هندسی سازی ۳ - خمینه‌ها از طریق شار ریچی*

مایکل ت. اندرسون

مترجم: سید محمدباقر کاشانی

۱. مقدمه

رده‌بندی رویه‌های بسته، نقطه عطفی در توسعه توپولوژی است، چنان‌که اکنون این مطلب (قضیه رده‌بندی رویه‌ها) برای بیشتر دانشجویان دوره کارشناسی ریاضی به‌عنوان مقدمه‌ای بر توپولوژی، تدریس می‌شود. از زمان حل مسأله وحدت‌بخشی رویه‌ها به‌وسیله پوانکاره و کوبه، بهترین درک از این رده‌بندی توپولوژیکی را اکنون به‌زبان هندسی سازی ۲ - خمینه‌ها در اختیار داریم: هر رویه بسته Σ متریکی با خمیدگی گاوسی ثابت $1+$ ، 0 یا $1-$ می‌پذیرد، پس به‌وسیله هندسه یکی از فضا - فرم‌های استاندارد S^2 ، \mathbb{R}^2 ، \mathbb{H}^2 وحدت‌بخشی می‌شود. بنابراین هر رویه Σ خارج‌قسمتی است از $2-$ کره، صفحه اقلیدسی یا قرص هذلولوی حاصل از عمل یک گروه گسسته Γ که طولیا و آزاد عمل می‌کند.

*) Anderson, Michael T., "Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow", *Notices of the American Mathematical Society*, 51(2004), 184-193.

مایکل ت. اندرسون استاد ریاضی در دانشگاه ایالتی نیویورک، استونی بروک است. آدرس رایانامه او عبارت است از anderson@math.sunysb.edu.

با توجه به این‌که زمان چاپ مقاله انگلیسی سال ۲۰۰۴ بوده است، محتوای این مقاله، گزارش وضعیت هندسی سازی در آن زمان است. خواننده علاقه‌مند برای کسب اطلاعات به‌روز می‌تواند مرجع [۲۲] را ببیند - م.

رده‌بندی خمینه‌های با بعد بیشتر، خیلی مشکل‌تر است. در حقیقت، به‌علت پیچیدگی گروه بنیادی، رده‌بندی کاملی مانند آنچه دربارهٔ رویه‌ها وجود دارد، در بعدهای بزرگتر از (یا مساوی با) ۴ ممکن نیست. در بعد ۳، این بحث (قضیهٔ وحدت‌بخشی) قابل اعمال نیست و رده‌بندی کامل ۳ - خمینه‌ها مدت زیادی برای توپولوژی‌دان‌ها یک رؤیا بوده است. این مسأله، حدسیهٔ پوانکاره را به‌عنوان یک حالت خیلی ویژه، نیز شامل می‌شود.

در این مقاله، کار قابل توجه اخیر گریشا پرلن [۱۵ - ۱۷] را که ممکن است مسألهٔ رده‌بندی ۳ - خمینه‌ها را (به معنی طبیعی) حل کرده باشد، گزارش می‌کنیم. کار پرلن در حال حاضر تحت بررسی شدید و دقیق گروه‌های تحقیقاتی زیادی در جهان قرار دارد. تاکنون بخش بزرگی از کار او به‌وسیلهٔ متخصصان این مبحث، معتبر شناخته شده است. اگرچه فعلاً زود است که کار او را راه‌حل قطعی برای مسأله تلقی کنیم، ولی ایده‌های پرلن بسیار اصیل و از بینش عمیق برخوردار است. نتایجی که او به‌دست آورده است، تاکنون مورد استفادهٔ دیگرانی که در موضوع‌های وابسته تحقیق می‌کنند نیز قرار گرفته است. این رویدادها، نوشتن مقاله‌ای (توصیفی) را در این باره توجیه می‌کند، در صورتی که قبل از این رویدادها، (نوشتن این مقاله) ممکن بود نابهنگام ارزیابی شود.

کار پرلن بر کار پیشین ترستن و همیلتون بنا شده است. در دو بخش بعدی، تصویر ترستن از ۳ - خمینه‌ها و شار ریچی را مورد بحث قرار می‌دهیم که به‌وسیلهٔ همیلتون معرفی و بررسی شده است. برای به‌دست آوردن پیش‌زمینه‌های بیشتر، به‌ویژه دربارهٔ حدسیهٔ پوانکاره، مقالهٔ میلنر [۱۴] و مرجع‌های موجود در آن را ببینید. برای ملاحظهٔ توضیح و اظهارنظر مفصل‌تر و بحث دربارهٔ کار پرلن، [۱۳] را نگاه کنید.

۲. حدسیهٔ هندسی سازی

درحالی که حدسیهٔ پوانکاره به مدت حدود صد سال مطرح بوده است، تیزبینی‌های قابل توجه ترستن در اواخر دههٔ ۱۹۷۰ به این اندیشهٔ واقع‌بینانه منجر شد که می‌توان ۳ - خمینه‌های بسته را نیز به روشی مشابه رده‌بندی رویه‌ها از طریق قضیهٔ وحدت‌بخشی، درک و رده‌بندی نمود. برای توضیح این مطلب، ابتدا باید ببینیم هندسه‌های متناظر در بعد سه کدامند. به زبان هندسهٔ ریمانی، یک ساختار هندسی بر خمینهٔ M ، متریک ریمانی کامل موضعاً همگن g است. بنابراین، M را می‌توان به‌صورت خارج قسمت $\Gamma/G/H$ بیان کرد که در آن G گروه طولپایی فضای پوششی عام (\tilde{M}, g) است و Γ و H به‌ترتیب زیرگروه‌های گسسته و فشردهٔ گروه لی G هستند. ترستن نشان داد^۱ هشت هندسهٔ سادهٔ همبند G/H (توصیف شده در بالا) در بعد سه وجود دارد که خارج قسمت‌های

(۱) رده‌بندی ترستن اصولاً حالت خاصی از رده‌بندی بسیار قدیمی‌تری بیانکی از متریک‌های همگن فضا - زمان است که از نسبییت عام ناشی می‌شوند. برای نکات بیشتر دربارهٔ (فرهنگ مرتبط با) این رده‌بندی، [۳] را نگاه کنید.

فشرده می‌پذیرند. مانند بعد دو، مهمترین هندسه‌ها آن‌هایی هستند که دارای خمیدگی ثابت‌اند: هندسه هذلولوی \mathbb{H}^3 با خمیدگی -1 ، هندسه اقلیدسی \mathbb{R}^3 با خمیدگی 0 و هندسه کروی \mathbb{S}^3 با خمیدگی $+1$. پنج هندسه باقیمانده، حاصلضرب یا حاصلضرب تابدار با هندسه‌های دو بُعدی‌اند. S^1 - کلاف‌های (تاری) بدیهی بر پایه یک رویه از گونه g ($g > 1$) دارای هندسه $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ هستند، در حالی که کلاف‌های نابديهی دارای هندسه $SL(2, \mathbb{R})$ می‌باشند^۱؛ S^1 - کلاف‌های نابديهی بر پایه چنبره T^2 دارای هندسه پوچ^۲ هستند، در حالی که T^2 - کلاف‌های نابديهی بر پایه S^1 دارای هندسه سل^۳ (یا پوچ یا هندسه \mathbb{R}^3) هستند؛ سرانجام S^1 - کلاف‌ها بر پایه S^2 دارای هندسه $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ (یا S^3) هستند. مثلاً هر 3 - خمینه تاریندی شده زایفر، یعنی 3 - خمینه‌ای که یک S^1 - عمل موضعاً آزاد می‌پذیرد، دارای چنین ساختار هندسی است.

3 - خمینه‌های هندسی، یعنی 3 - خمینه‌هایی که ساختار هندسی می‌پذیرند، بلوک‌های ساختمانی 3 - خمینه‌های پیچیده‌تر هستند. برای سادگی، در سراسر این مقاله فرض می‌کنیم همه خمینه‌های M جهت‌پذیرند. بلوک‌های ساختمانی به روش جمع همینند در امتداد کره‌های 2 - بعدی S^2 و نیز در امتداد چنبره‌های T^2 گرد هم می‌آیند. به عنوان یک مثال ساده چنین گردهم آمدن، فرض کنید M_i مجموعه‌ای با پایان از 3 - خمینه‌های تاریندی شده زایفر^۴ بر رویه‌های Σ_i با مرز ناتهی باشد، چنان که ∂M_i متشکل از چنبره‌هاست. این چنبره‌ها را می‌توان دوبه‌دو توسط وایرسانی‌هایی به یکدیگر چسباند تا یک 3 - خمینه بسته یا یک 3 - خمینه با مرز چنبره (ای) به دست آید. 3 - خمینه‌ای که به این ترتیب حاصل می‌شود، خمینه گرافی [یعنی خمینه‌ای که مجموعه‌های تجزیه چنبره‌ای آن، فقط خمینه‌های زایفر باشند] نام دارد (به هر فضای تاریندی شده زایفر، یک رأس و به هر چنبره که دو چنین فضای زایفر را به هم وصل می‌کند، یک ضلع نسبت داده می‌شود). یک T^2 - کلاف بر پایه S^1 یک خمینه گرافی است، زیرا برابر است با اجتماع دو فضای تاریندی شده زایفر بر $S^1 \times I$. خمینه‌های گرافی و بررسی کامل ساختارشان توسط والد هاوزن^۵

(۱) $SL(2, \mathbb{R})$ عبارت است از گروه لی پوششی عام $SL(2, \mathbb{R})$ با یک متریک ریمانی ناوردای چپ - م.
 (۲) Nil عبارت است از گروه لی پوچ توان هاینبرگ 3 - بعدی متشکل از ماتریس‌های به صورت $\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 همراه با متریک ریمانی پوچ توان - م.
 (۳) Sol عبارت است از گروه لی حل‌پذیر پوانکاره - لورنتس $E(1, 1)$ متشکل از حرکت‌های صلب یک فضا زمان 2 - بعدی با متریک تخت $dx^2 - dt^2$. در حالت‌های 2 و 3 فضای پوششی عام خمینه معرفی شده، الگوی ذاتی هندسه مطلوب را ارائه می‌کند - م.
 (۴) خمینه فشرده N^3 ، فضای تاری زایفر (Seifert) نامیده می‌شود اگر یک برگ‌بندی با برگ‌های S^1 بپذیرد (ن.ک. ص ۲ از [۲۰]) - م.

معرفی و انجام شده است.

به عکس، فرض کنید M یک ۳ - خمینه بسته دلخواه و مانند قبل جهت‌پذیر باشد، آن‌گاه بر اساس ساختار ساده‌ترین رویه‌هایی که در M نشانده می‌شوند (یعنی کره‌ها و چنبره‌ها)، M به قطعه‌هایی تجزیه یا شکافته می‌شود. از نظر توپولوژیکی، این کار به کمک نتایج کلاسیک ذیل در توپولوژی ۳ - خمینه‌ها انجام می‌پذیرد:

تجزیه کره‌ای (یا اول) (کینسر، میلنر)

فرض کنید M یک ۳ - خمینه بسته باشد، آن‌گاه M یک تجزیه جمع همبند باپایان به صورت

$$M = (K_1 \# \dots \# K_p) \# (L_1 \# \dots \# L_q) \# (\#^r S^2 \times S^1) \quad (3)$$

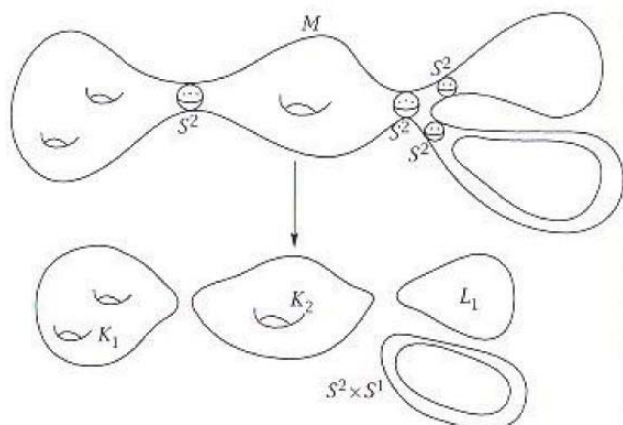
می‌پذیرد. در اینجا عامل‌های K و L ، ۳ - خمینه‌های بسته تحویل‌ناپذیرند، یعنی هر ۲ - کره نشانده شده S^2 (در M) مرز یک گوی سه‌بعدی می‌باشد. عامل‌های K دارای گروه بنیادی بی‌پایان هستند و عبارتند از ۳ - خمینه‌های غیرکروی $(K(\pi, 1))$ (ها) در حالی که عامل‌های L دارای گروه بنیادی باپایان هستند و فضای پوششی عام آن‌ها یک ۳ - کره هموتوبی است. چون $M \# S^2 = M$ ، فرض می‌کنیم هیچ عامل L ، S^2 نیست مگر این‌که $M = L = S^2$. عامل‌ها در تجزیه (۱) با تقریب جایگشت یگانه‌اند و از M با اعمال جراحی^۲ بر مجموعه‌ای از فضاها^۱ اساسی یعنی ۲ - کره‌های توپولوژیکی نابدیهی (نشانده شده) در M (با جایگزینی ناحیه‌های $S^2 \times I$ با دو نسخه از B^3)، به دست می‌آیند. شکل ۱ را ببینید. عامل‌های K در تجزیه (۱) ممکن است چنبره‌های توپولوژیکی اساسی را دربرداشته باشند. یک چنبره نشانده شده T^2 در M تراکم‌ناپذیر نامیده می‌شود اگر نگاشت شمول آن در $M : M \rightarrow M : T^2 \hookrightarrow$ ، نگاشت یک‌به‌یک $\pi_1(M) \rightarrow \pi_1(T^2) : d_{\#} : \pi_1(T^2) \rightarrow \pi_1(M)$ روی گروه π_1 الفا کند. یک ۳ - خمینه N چنبره تحویل‌ناپذیر نامیده می‌شود اگر هر چنبره نشانده شده تراکم‌ناپذیر را بتوان به یک چنبره در ∂N تغییر شکل داد. بنابراین اگر $\partial N = \emptyset$ ، آن‌گاه N هیچ چنبره تراکم‌ناپذیر ندارد.

تجزیه چنبره‌ای (یا کو - شالین، یوهانسن)

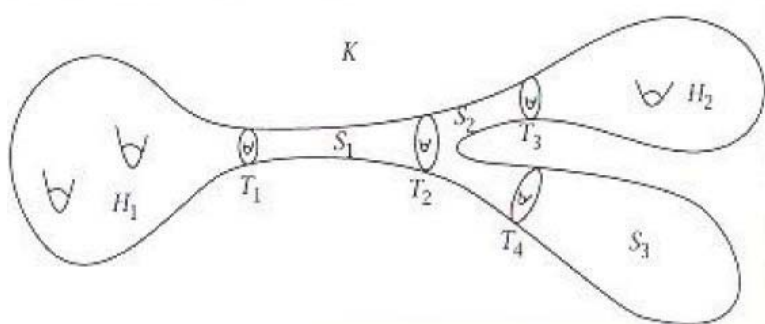
فرض کنید M یک ۳ - خمینه بسته تحویل‌ناپذیر باشد. در این صورت، مجموعه‌ای باپایان و احتمالاً تهی از چنبره‌های تراکم‌ناپذیر مجزا در M وجود دارد که M را به

(۱) فضای توپولوژیک $X = K(\pi, 1)$ عبارت است از فضای توپولوژیکی که $\pi_i(X) = \{0\}$ برای $i \neq 1$ ، $\pi_1(X) = \pi$ و هر گروه داده شده است. ن.ک. صفحه ۴۸۴ از [۲۴].

(۲) ن.ک. صفحه‌های ۳۲۵ و ۳۲۶ از [۲۱] - م.



شکل ۱. تجزیه کره‌ای



شکل ۲. تجزیه چنبره‌ای. S_i فضای زایفر تاریندی شده، H_j فضای چنبره - تحویل‌ناپذیر

مجموعه‌ای با پایان از ۳ - خمینه‌های فشرده (با مرز چنبره‌ای) تجزیه می‌کند و هر یک از آن‌ها ۳ - خمینه چنبره‌تحویل‌ناپذیر یا فضای زایفر تاریندی شده می‌باشد. یک تجزیه درشت‌تر ولی اصولاً هم‌ارز، توسط چنبره‌هایی داده می‌شود که M را به عامل‌های چنبره‌تحویل‌ناپذیر یا خمینه گرافی جداسازی می‌کنند. شکل ۲ را ببینید.

به استثنای $S^2 \times S^1$ و \mathbb{Z}_2 - خارج قسمت جهت‌پذیر آن $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \simeq S^2 \times_{\mathbb{Z}_2} S^1$ ،
 ۲ - کره‌های اساسی مانع‌هایی برای وجود ساختار هندسی بر یک ۳ - خمینه هستند. این مطلب درباره چنبره‌های اساسی نیز درست است، مگر این‌که M یک خمینه زایفر تاریندی شده یا یک ۳ - خمینه سُلب باشد. بنابراین تجزیه‌های کره‌ای و چنبره‌ای، M را به صورت توپولوژیک به

قسمت‌هایی تقسیم می‌کنند که این مانع‌های شناخته‌شده حذف می‌شوند.

حدسیه هندسی سازی (ترستن). اگر M یک ۳ - خمینه بسته جهت‌دار باشد، آن گاه هر مولفه تجزیه کره‌ای و چنبره‌ای، یک ساختار هندسی می‌پذیرد.

حدسیه هندسی سازی، رده‌بندی کامل و مؤثری از همه ۳ - خمینه‌های بسته ارائه می‌دهد که از خیلی جنبه‌ها به رده‌بندی رویه‌ها شباهت دارد. به‌طور دقیق‌تر، این حدسیه، رده‌بندی ۳ - خمینه‌ها را به رده‌بندی ۳ - خمینه‌های هندسی تحویل می‌کند. رده‌بندی ۳ - خمینه‌های هندسی نسبتاً ساده است و به‌جز برای حالت ۳ - خمینه‌های هذلولوی که یک شاخه فعال تحقیقی باقیمانده است، برای سایر حالت‌ها کاملاً شناخته شده است.

برای نشان دادن قدرت حدسیه ترستن، ببینیم چگونه می‌توان حدسیه پوانکاره را از آن نتیجه گرفت. اگر M یک ۳ - خمینه ساده همبند باشد، آن گاه تجزیه کره‌ای (۱) متضمن این است که M یک L عامل باشد. حدسیه هندسی سازی نتیجه می‌دهد که L هندسی است و بنابراین $L = S^3/\Gamma$. از این‌رو $M = L = S^3$.

تحقیقات و تدوین ترستن درباره (از) حدسیه هندسی سازی، موضوع توپولوژی خمینه‌های سه‌بعدی را متحول ساخت. برای ملاحظه شرحی در این خصوص، [۱۸] و [۱۹] و مرجع‌های آن‌ها را ببینید. او دریافت که در رده ۳ - خمینه‌ها (ی تحویل‌ناپذیر)، ۳ - خمینه‌های هذلولوی مانند حالت رویه‌ها عمومی‌ترین خمینه‌ها هستند و ایده‌ها و روش‌های بسیاری برای فهم ساختار ۳ - خمینه‌ها ارائه کرد. ترستن و محققان دیگر، حدسیه هندسی سازی را در چند حالت مهم ثابت کردند که مشهورترین آن‌ها عبارت است از قضیه خمینه هکن: اگر یک ۳ - خمینه هکن تحویل‌ناپذیر باشد، یعنی M یک رویه تراکم‌ناپذیر با گونه $g \geq 1$ را دربرداشته باشد، آن گاه حدسیه هندسی سازی برای M برقرار است.

دو مؤلفه مهم در رویکرد ترستن عبارتند از مفهوم تغییر (شکل) و تبهگونی ساختارهای هذلولوی بر خمینه‌های نافشرده (یا تغییر شکل ساختارهای هذلولوی تکین بر خمینه‌های فشرده). هشت ساختار هندسی که در ابتدای این بخش اشاره کردیم، ضلبنند، یعنی هیچ ساختار هندسی وجود ندارد که به‌طور پیوسته بین آن‌ها قرار گیرد. بنابراین بریک ۳ - خمینه مرکب، ساختار هندسی هر عامل (در تجزیه (۱)) در گذر از آن عامل به عامل دیگر، باید تبهگون شود؛ هیچ ساختار یا متریکی وجود ندارد که هندسی سازی همه M را بدهد. مثلاً در شکل ۲، تکه‌های H ممکن است خمینه‌های هذلولوی باشند که به‌وسیله چنبره‌ها از تکه‌های زایفر‌تار بندی شده S جدا شده‌اند. اگرچه این شکافت، توپولوژیکی خوش‌تعریف است، هندسه‌ها در ناحیه‌های به هم چسبیده، سازگار نیستند و از نظر متریکی، هیچ ناحیه طبیعی وجود ندارد که در آن، عمل چسباندن انجام شود.

به‌طور مستقل و تقریباً همزمان با ترستن، گروموف [۱]، [۸] نیز تغییر شکل و تبهگونی متریک‌های ریمانی کلی‌تری را فقط با شرط خمیدگی کراندار به‌جای خمیدگی ثابت، مطالعه (می) کرد. ایده او این است که رفتار یک متریک یا یک خانواده از متریک‌ها را با قرار دادن یک

کران یکنواخت بر تانسور خمیدگی ریمانی متریک (ها)، می توان کنترل کرد^۱. این ایده، منجر به قضیه مهم فشرده سازی گروموف^۲، نظریه ساختاری خمینه های تقریباً تخت^۳ و نظریه خمینه های ریمانی فروریختنی^۴ شد که به تفصیل توسط او، چیگر و فوکایا مطالعه و اثبات شده است.

صورتی از این نتایج به ویژه به اهداف ما مربوط است. فرض کنید (M, g) یک خمینه بسته ریمانی با حجم نرمال شده واحد باشد و فرض کنید

$$|Riem| \leq \Lambda \quad (۴)$$

برای یک ثابت دلخواه $\Lambda < \infty$. متریک g یک تجزیه طبیعی از M به بخش های ضخیم و نازک، $M = M^\nu \cup M_\nu$ به دست می دهد که

$$M^\nu = \{x \in M \mid vol B_x(1) \geq \nu\}, \quad M_\nu = \{x \in M \mid vol B_x(1) < \nu\} \quad (۵)$$

در اینجا $B_x(1)$ گوی ژئودزیکی حول x به شعاع ۱ و $\nu > 0$ عدد دلخواه کوچک ثابت است. اکنون رده همه n - خمینه های ریمانی با حجم واحد که در شرط (۲) صدق می کنند و تجزیه های متناظر (۳) را در نظر بگیرید. در این صورت، هندسه و توپولوژی M^ν به طور اولی کنترل می شود، یعنی برای یک $\nu > 0$ داده شده، فقط تعدادی باپایان (وابسته به ν و Λ) نوع توپولوژیکی ممکن برای M^ν وجود دارد. همچنین، فضای متریک ها بر M^ν به معنی طبیعی فشرده است: هر دنباله دارای زیردنباله ای همگرا در توپولوژی $C^{1,\alpha}$ ، $\alpha < 1$ است (با تقریب و ابرسانی ها)^۵. برای ν به اندازه کافی کوچک، بخش نازک M یعنی M_ν یک F - ساختار به معنی چیگر - گروموف می پذیرد. در بعد سه، این مطلب دقیقاً بدین معنی است که M_ν یک خمینه گرافی با مرز چنبره ای (یا تهی) است. به ویژه، توپولوژی M_ν قویاً محدود شده است. یک متریک بر M_ν قویاً فرو می ریزد بدین معنی که دایره ها در تکه های زایفر تاریندی شده M_ν و چنبره هایی که این بخش ها را به هم می چسبانند

(۱) تانسور خمیدگی، یک $(3, 1)$ تانسور پیچیده است که برحسب مشتق های مرتبه دوم متریک بیان می شود. در یک دستگاه مختصات موضعی نرمال به مرکز یک نقطه داده شده، مؤلفه های تانسور ریمان به صورت

$$R_{ijkl}^i = -\frac{1}{2}(\partial_i \partial_k g_{jl} + \partial_j \partial_l g_{ik} - \partial_j \partial_k g_{il} - \partial_i \partial_l g_{jk})$$

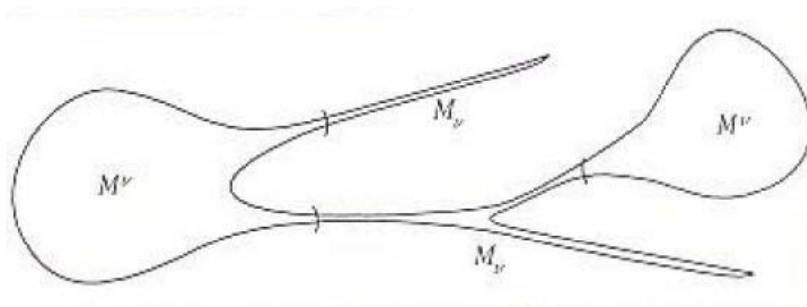
(۲) ن. ک. صفحات ۱۱۸-۱۱۹ از [۲۱] - م.

(۳) خمینه ریمانی (M^n, g) ، ϵ - تخت نامیده می شود اگر خمیدگی M^n کرانی به صورت $|Rm| \leq \frac{\epsilon}{diam^2(M^n, g)}$ برحسب قطر خمینه داشته باشد. گفته می شود M^n تقریباً تخت است اگر برای هر $\epsilon > 0$ ، ϵ - تخت باشد. در اینجا $Rm(x, y, w, z) := g(R(x, y)w, z)$ که $(3, 1)$ تانسور خمیدگی ریمانی M^n است (ن. ک. ص ۱۷ از [۲۰]) - م.

(۴) خمیده ریمانی (M^n, g) ، ϵ - فروریخته ($\epsilon > 0$) نامیده می شود اگر $inj(x) \leq \epsilon, \forall x \in M$ که $inj(x)$ شعاع یکایکی خمینه در نقطه x است. گفته می شود خمینه M^n فرو می ریزد اگر خانواده ای از متریک های ریمانی $\{g_\epsilon : \epsilon > 0\}$ بپذیرد چنان که $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\sup inj_{g_\epsilon}(x)) = 0$ (ن. ک. صص ۱۱-۱۵ از [۲۱]) - م.

(۵) ن. ک. صفحه های ۳۰۱-۳۰۳ و ۳۰۸-۳۱۱ از [۲۳] - م.

قطر بسیار کوچکی، وابسته به ν دارند. شکل ۳ را به عنوان یک تصویر نمونه ببینید. نیز، برای هر $\nu > 0$ ثابت، وقتی $\frac{\nu'}{\nu} \rightarrow 0$ ، فاصله بین $M^{\nu'}$ و بخش نازک دلخواه $M_{\nu'}$ به دلخواه بزرگ می‌شود. توجه کنید که نتایج مشابه به طور موضعی و نیز برای خمینه‌های نافشرده کامل برقرار است. بنابراین نرمال‌سازی به حجم واحد (که قبلاً گفته شد) اساسی نیست. رویکرد ترستن به هندسی سازی درباره «بخش هندلولوی» حدسیه، پیشرفت زیادی کرده است. در مقایسه با این پیشرفت، پیشرفت کمی در «بخش خمیدگی مثبت» حدسیه حاصل شده است؛ مثلاً حدسیه پوانکاره. قابل ذکر است که در بین هشت هندسه، هندسه‌های با خمیدگی ثابت \mathbb{H}^3 و \mathbb{S}^3 مهمترین هندسه‌ها برای درک موضوع هستند (از نظر مشخص کردن این که کدام خمینه‌ها هندسی‌اند). هندسه‌های (مخلوط) دیگر در مقام مقایسه، بسیار ساده‌ترند.



شکل ۳. تجزیه ضخیم - نازک

از نقطه نظر هندسه ریمانی، حدسیه ترستن به طور اصولی وجود «بهترین متریک» ممکن بر یک ۳ - خمینه بسته را ارائه می‌دهد. در حالتی که M خودش هندسی نباشد، باید اجازه داد که متریک بهینه، دارای ناحیه‌های تبهگون باشد. بحث و شکل‌های قبل حاکی از این است که تبهگونی باید از طریق تجزیه در امتداد ۲ - کره‌ها (تجزیه کره‌ای) و فرو ریختن خمینه‌های گرافی در امتداد دایره‌ها و چنبره‌ها (تجزیه چنبره‌ای) رخ دهد.

۳. شار ریچی

یک روش یافتن بهترین متریک بر یک خمینه عبارت است از یافتن یک معادله تحولی طبیعی که به وسیله یک میدان برداری تعریف شده بر فضای متریک‌ها توصیف شود و تلاش برای اثبات این که خط‌های شار (خم‌های انتگرال میدان برداری = جواب‌های معادله تحولی) برای همه زمان‌ها وجود دارند و به یک حد هندسی میل می‌کنند. در حالتی که یک خط شار همگرا نباشد، متریک‌های وابسته، تبهگون می‌شوند و لذا نیاز است که تبهگونی با توپولوژی M مرتبط شود. به طور اصولی فقط یک میدان برداری (یا دقیق‌تر، خانواده‌ای از میدان‌های برداری) ساده و

طبیعی بر فضای متریک‌ها وجود دارد. این میدان با فرمول

$$\frac{d}{dt}g(t) = -2Ric_{g(t)} + \lambda(t).g(t) \quad (6)$$

داده می‌شود. در اینجا Ric عبارت است از خمیدگی ریچی که در مختصات موضعی با فرمول $Ric_{ij} = (Ric)_{ij} = \sum_k R_{ikj}^k$ داده می‌شود. بنابراین Ric اثر $trace$ (تانسور خمیدگی ریمانی است. ضریب ۲ در معادله فوق فقط برای آسانی است و می‌تواند با بازپیمایش زمان تغییر کند؛ $\lambda(t)$ ثابتی است که به زمان t بستگی دارد. شار ریچی، معرفی شده توسط همیلتون [۱۱] با قرار دادن $\lambda = 0$ به دست می‌آید، یعنی

$$\frac{d}{dt}g(t) = -2Ric_{g(t)} \quad (7)$$

دلیل این‌که معادله (۴) تنها معادله شار طبیعی است، اصولاً همان دلیلی است که منجر به معادله‌های میدان اینشتین در نسبیت عام شد. خمیدگی ریچی یک فرم دوخطی متقارن مانند تانسور متریک است. علاوه بر ضریب‌های متریک، فرم ریچی تنها فرمی است که به مشتق‌های (حداکثر) مرتبه دوم متریک بستگی دارد و نسبت به تغییر مختصات ناورد است، یعنی یک $(2, 0)$ تانسور به دست آمده از متریک. با بازمقیاس‌بندی متریک و متغیر زمان t ، می‌توان معادله (۵) را به (۴) تبدیل کرد. مثلاً بازمقیاس‌بندی شار ریچی (۵) چنان‌که حجم $(M, g(t))$ (ثابت) نگه‌داشته شود، منجر به معادله شار (۴) با $\lambda = 2 \int R$ می‌شود، یعنی λ دو برابر مقدار میانگین خمیدگی عددی R است.

در یک دستگاه مختصات موضعی مناسب، معادله (۵) شکلی خیلی طبیعی دارد. بنابراین در زمان t ، با انتخاب مختصات موضعی همساز که نگاهت‌های موضعاً تعریف شده همساز برحسب متریک $g(t)$ باشند، (۵) به صورت

$$\frac{d}{dt}g_{ij} = \Delta g_{ij} + Q_{ij}(g, \partial g) \quad (8)$$

درمی‌آید که Δ عملگر لاپلاس - بلترامی بر نگاهت‌ها $(C^\infty(M))$ نسبت به متریک $g = g(t)$ می‌باشد و Q یک عبارت برحسب (مشتقات) مرتبه پایین‌تر است که برحسب g و مشتق‌های جزئی مرتبه اول آن، از درجه دو می‌باشد. این، یک معادله غیرخطی حرارت - گونه برای g_{ij} است. از بررسی این معادله دیفرانسیل جزئی، وجود و یگانگی جواب‌های شار ریچی بر یک فاصله زمانی با هر متریک اولیه هموار، به دست می‌آید. این امر، دلیل وجود علامت منها (-) در معادله (۵) است. علامت به اضافه (+) در معادله (۵) منجر به معادله حرارت - گونه پسرو می‌شود که در حالت کلی هیچ جوابی ندارد.

در اینجا چند مثال ساده از جواب‌های صریح شار ریچی ارائه می‌کنیم. اگر متریک اولیه $g(0)$ خمیدگی ریچی ثابت داشته باشد، یعنی $Ric = \alpha.g$ ، آن‌گاه متریک تحولی $g(t)$ دقیقاً یک بازمقیاس‌بندی $g(0)$ است: $g(t) = (1 - 2\alpha t)g(0)$. توجه کنید که اگر $\alpha > 0$ ، آن‌گاه شار،

متریک را منقبض می‌کند، در حالی که اگر $\alpha < 0$ ، شار، متریک را در همه جهت‌ها به طور یکنواخت منبسط می‌کند. بنابراین اگر $g(t)$ باز مقیاس بندی شود چنان که خمینه حجم ثابت داشته باشد، خم حاصل ثابت است. نقطه‌های پایدار شار ریچی با حجم نرمال شده، دقیقاً رده متریک‌های اینشتین هستند، یعنی متریک‌های با خمیدگی ریچی ثابت. در بعد سه، متریک‌های اینشتین دارای خمیدگی ثابت‌اند و بنابراین هندسه‌های \mathbb{H}^3 ، \mathbb{R}^3 و S^3 را به دست می‌دهند.

به طور کلی‌تر، اگر $Ric(x, t) > 0$ ، آن‌گاه شار، متریک $g(t)$ را در همسایگی x ، (با بزرگ شدن t مثبت) منقبض می‌کند، در حالی که اگر $Ric(x, t) < 0$ ، آن‌گاه شار، $g(t)$ را در همسایگی x منبسط می‌کند. در یک نقطه عمومی، جهت‌هایی با خمیدگی ریچی مثبت و جهت‌هایی با خمیدگی ریچی منفی وجود دارد که در امتداد آن‌ها، متریک موضعاً منقبض یا منبسط می‌شود.

فرض کنید $g(0)$ یک متریک حاصلضرب بر $\sum S^1 \times \sum$ باشد که رویه‌ای با متریک دارای خمیدگی ثابت است. در این صورت $g(t)$ یک متریک حاصلضرب باقی می‌ماند و طول عامل S^1 نیز ثابت است، در حالی که عامل رویه بر حسب علامت خمیدگی اش منبسط یا منقبض می‌شود.

سرانجام، شار ریچی با عمل گروه واپرسانی‌ها جابه‌جا می‌شود، بنابراین همه طولپای‌های متریک اولیه را حفظ می‌کند. پس ۳ - خمینه‌های هندسی، هندسی باقی می‌مانند. برای هندسه‌های «نامثبت» مخلوط $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ، $SL(2, \mathbb{R})$ ، پوچ و سل، شار ریچی با حجم نرمال شده، عامل‌های S^1 یا T^2 را منقبض می‌کند و عامل رویه (پایه) را بسط می‌دهد در حالی که برای هندسه مثبت مخلوط $S^2 \times \mathbb{R}$ ، شار با حجم نرمال شده، S^2 را منقبض و عامل \mathbb{R} را بسط می‌دهد.

اکنون معادله شار ریچی (۵) را در حالت کلی در نظر بگیرید. از شکل آن واضح است که شار $g(t)$ وجود دارد اگر و تنها اگر خمیدگی ریچی آن کراندار باقی بماند. از این مطلب، نتیجه می‌شود که برای بررسی وجود $g(t)$ باید معادله‌های تحولی خمیدگی القاشده از معادله شار برای متریک، مورد رسیدگی قرار گیرد. ساده‌ترین معادله از این نوع، عبارت است از معادله تحولی خمیدگی عددی، یعنی $R = tr_g Ric = \sum_{i,j} g^{ij} Ric_{ij}$:

$$\frac{d}{dt} R = \Delta R + 2 | Ric |^2 \quad (9)$$

محاسبه (۷) در نقطه‌ای که کمینه R بر M ، یعنی R_{min} حاصل می‌شود، این حقیقت مهم را نتیجه می‌دهد که R_{min} در امتداد شار، یکنواختی نازلولی است. به ویژه، شار ریچی خمیدگی مثبت را (در همه بعدها) حفظ می‌کند. به علاوه اگر $R_{min}(0) > 0$ ، همان بحث نتیجه می‌دهد که

$$\frac{d}{dt} R_{min} \geq \frac{2}{n} R_{min}^2, \quad n = \dim M$$

حال بنا بر نامساوی کُشی - شوارتز، $| Ric |^2 \geq \frac{1}{n} R^2$ و یک انتگرال‌گیری ساده نامساوی

$$t \leq \frac{n}{2 R_{min}(0)} \quad (10)$$

را به دست می دهد. بنابراین، اگر $R_{min}(0) > 0$ ، شار ریچی فقط تا زمان بیشینه $\frac{n}{\sqrt{R_{min}(0)}}$ وجود دارد. به عکس، در ناحیه‌هایی که خمیدگی ریچی منفی معین است، شار برای هر زمان (مثبت) وجود دارد.

تحول خمیدگی ریچی همان شکل کلی (۷) را دارد:

$$\frac{d}{dt} Ric_{ij} = \Delta Ric_{ij} + \tilde{Q}_{ij} \quad (11)$$

عبارت \tilde{Q} خیلی پیچیده‌تر از خمیدگی ریچی در (۷) است ولی فقط شامل جمله‌های درجه دوم خمیدگی است. با وجود این، \tilde{Q} متضمن تانسور کامل خمیدگی ریمانی $Riem, g$ ، و نه فقط خمیدگی ریچی است (مانند رابطه (۷) که متضمن خمیدگی ریچی و نه فقط خمیدگی عددی است). یک ویژگی مقدماتی ولی مهم در بعد سه این است که خمیدگی ریمانی، $Riem$ ، به طور کامل به صورت جبری به وسیله خمیدگی ریچی مشخص می شود. نتیجه این مطلب این است که به طور کلی، فرصت «مطالعه و کارکردن» روی شار ریچی در بعد سه فراهم تر است. مثلاً تحلیل \tilde{Q} نشان می دهد که شار ریچی، مثبت بودن خمیدگی ریچی را در بعد سه حفظ می کند: اگر $Ric_{g(0)} > 0$ ، آن گاه $Ric_{g(t)} > 0$ برای $t > 0$. این مطلب در بعدهای بالاتر درست نیست. از طرف دیگر، در ابعاد بزرگتر از ۲، شار ریچی، منفی بودن خمیدگی ریچی و وجود یک کران پایینی کلی $Ric \geq -\lambda$ ، به ازای $\lambda > 0$ را حفظ نمی کند. از این پس، فرض می کنیم $\dim M = 3$.

در قضیه فشردگی گروموف و تجزیه ضخیم/نازک (۳)، فرض وجود کران برای $|Riem|$ را می توان با فرض وجود کران برای $|Ric|$ جایگزین نمود (زیرا بعد سه را مطالعه می کنیم). به علاوه، در فاصله زمانی $[0, t]$ که $|Ric|$ کراندار است، متریک های $g(t)$ همگی به عنوان فرم های دوخطی با یکدیگر نیم - طولپایند: $cg(0) \leq g(t) \leq Cg(0)$ که c و C به t وابسته اند. بنابراین، ناحیه به دلخواه نازک M_ν ، $\nu \ll 1$ فقط با فرض کراندار بودن $|Ric|$ در زمان های به اندازه دلخواه بزرگ، می تواند بروز کند.

بحث بالا نشان می دهد شار ریچی مفهومی بسیار طبیعی است و ویژگی های جالب زیادی دارد. به کمک تصویر ترستن از ۳ - خمینه ها، برخی ارتباط های هندسی یا توپولوژیکی را می توان دید. با وجود این، اولین نشانه حقیقی مبنی بر این که شار ابزار مهم جدیدی در مطالعه مسائل هندسی است، عبارت است از نتیجه ذیل از همیلتون:

- قضیه فضا - فرم [۸]. اگر $g(0)$ یک متریک با خمیدگی ریچی مثبت بر ۳ - خمینه M باشد، آن گاه شار ریچی با حجم نرمال شده برای همه زمان ها وجود دارد و به متریک کامل (کروی) بر S^3/Γ میل می کند که Γ یک زیرگروه باپایان $SO(4)$ است که بر S^3 آزاد عمل می کند.

بنابراین شار ریچی، ۳ - خمینه های با خمیدگی ریچی مثبت را «هندسی سازی» می کند. از زمان اثبات این نتیجه بنیادی، یک سؤال باز این بوده است که آیا این نتیجه می تواند به متریک های اولیه با خمیدگی عددی مثبت تعمیم یابد؟

اگرچه تحول خمیدگی در امتداد شار ریچی برای متریک‌های اولیه عمومی بسیار پیچیده است، بررسی تفصیلی (۹) منجر به نتایج مهم ذیل می‌شود:

- تخمین تنگی خمیدگی [۱۰]، [۱۲]. فرض کنید $g(t)$ جوابی برای شار ریچی بر ۳- خمینه بسته M باشد. در این صورت نگاشت ناصعودی $\mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty) : \phi$ وجود دارد که $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ ، همچنین ثابت C که فقط به $g(0)$ بستگی دارد چنان وجود دارد که

$$Riem(x, t) \geq -C - \phi(R(x, t)) \cdot |R(x, t)|. \quad (12)$$

این عبارت بدین معنی است که همه خمیدگی‌های مقطعی R_{ijji} حاصل از $g(t)$ ، $\{e_i\}$ پایه یک متعامد در (x, t) است) به وسیله سمت راست معادله (۱۰) از پایین کراندار می‌شوند.

این تخمین، کران پایین یکنواخت بر حسب زمان برای $Riem(x, t)$ به دست نمی‌دهد، ولی وقتی با این حقیقت توأم شود که خمیدگی عددی $R(x, t)$ از پایین به طور یکنواخت کراندار است، نتیجه خواهد داد که $|Riem(x, t)| \gg 1$ فقط هنگامی که $R(x, t) \gg 1$. بنابراین برای کنترل اندازه خمیدگی کامل، $|Riem|$ کافی است فقط یک کران بالا برای خمیدگی عددی R بیابیم. این امر قابل توجه است، زیرا خمیدگی عددی نسبت به خمیدگی کامل، ناوردای متریکی خیلی ضعیف‌تری است. به علاوه، در نقاطی که خمیدگی به اندازه کافی بزرگ است، (۱۰) نشان می‌دهد که $Riem(x, t)/R(x, t) \geq -\delta$ به ازای یک δ کوچک. بنابراین اگر متریک چنان مقیاس بندی شود که $R(x, t) = 1$ ، آن‌گاه $Riem(x, t) \geq -\delta$. در چنین مقیاسی، متریک در یک همسایگی (x, t) تقریباً دارای خمیدگی نامنفی است.

- تخمین هرنیک [۹]. فرض کنید $(N, g(t))$ جوابی برای شار ریچی با خمیدگی نامنفی و کراندار $Riem \geq 0$ و $g(t)$ متریک ریمانی باشد. در این صورت برای $0 < t_1 \leq t_2$ داریم

$$R(x_2, t_2) \geq \frac{t_1}{t_2} \exp\left(-\frac{d_{t_1}^2(x_1, x_2)}{2(t_2 - t_1)}\right) R(x_1, t_1) \quad (13)$$

که d_{t_1} نگاشت فاصله بر (N, g_{t_1}) است.

این تخمین ارتباط یا کنترل هندسه جواب شار ریچی را در نقطه‌های مختلف فضا - زمان ممکن می‌سازد. یافتن تخمینی مشابه (۱۱) در حالت کلی، یعنی بدون فرض $Riem \geq 0$ یکی از موانع عملی برای پیشرفت شار ریچی بوده است.

بررسی بالا نشان می‌دهد که خمیدگی متریک حاصل از شار ریچی به خمیدگی مثبت مطلوب میل می‌کند. تمایل شار، به تحول برای مثبت‌تر شدن خمیدگی است و قوی‌ترین نتایج در حالت خمیدگی مثبت به اثبات رسیده است، مطلبی که تا اندازه‌ای در تضاد با رویکرد ترستن است.

۴. تشکیل تکینی

بررسی عمیق‌تر شار ریچی به تکینی‌هایی که در زمان باپایان بروز می‌کنند، مربوط می‌شود. همان‌طور که رابطه (۸) نشان می‌دهد، در حالت کلی شار ریچی برای زمان به دلخواه بزرگ وجود ندارد. در حالت متریک‌های اولیه با خمیدگی ریچی مثبت، تکینی با بازمقیاس‌بندی شار ریچی چنان‌که حجم ثابت بماند، برطرف می‌شود. قضیه فضا-فرم همیلتون نشان می‌دهد که شار با حجم نرمال‌شده برای همه زمان‌ها وجود دارد و به‌طور هموار به یک متریک کامل (کروی) میل می‌کند. با وجود این، وضعیت برای متریک‌هایی که خمیدگی ریچی مثبت ندارند، الزاماً بسیار پیچیده‌تر است؛ مثلاً متریک‌های اولیه با خمیدگی عددی مثبت را در نظر بگیرید. هر خمینه که جمع همبند عامل‌های S^2/Γ و $S^1 \times S^1$ باشد، دارای متریک با خمیدگی عددی مثبت است (با تجزیه کره‌ای (۱) مقایسه کنید). بنابراین به دلایل توپولوژیکی روشن، شار ریچی با حجم نرمال‌شده به صورت مطلوب نمی‌تواند به متریک کامل (با خمیدگی مثبت) میل کند، حتی شار نرمال‌شده، تکینی تولید می‌کند.

تکینی‌ها مکرراً در رده‌های متعددی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی ظاهر می‌شوند و طی چند دهه، مطالعه زیادی بر روی آن‌ها انجام شده است. به‌ویژه در متن‌های هندسی، روش معمول برای درک ساختار تکینی‌ها این است که جواب (شار ریچی) بر دنباله‌ای که به تکینی میل می‌کند، بازمقیاس‌بندی یا بازنرمال‌سازی شود تا آن را کراندار کند و تلاش شود تا به جوابی حدی از مسأله بازنرمال‌سازی رسید. این جواب حدی به‌عنوان الگویی برای تکینی در نظر گرفته می‌شود و انتظار این است که الگوهای تکینی، ویژگی‌های خاصی داشته باشند که آن‌ها را از جواب دلخواه معادله، بسیار ساده‌تر کند.

تکینی شار ریچی فقط در صورتی امکان تشکیل دارد که خمیدگی بی‌کران شود. در این صورت فرض کنید $\lambda_i^2 = |Riem|(x_i, t_i) \rightarrow \infty$ به‌ازای دنباله‌ای از نقطه‌های $x_i \in M$ و زمان‌های $t_i \rightarrow T < \infty$. آن‌گاه طبیعی است که متریک‌ها و زمان‌های بازمقیاس‌بندی شده

$$\tilde{g}_i(\tilde{t}_i) = \lambda_i^2 g(t), \quad \tilde{t}_i = \lambda_i^2 (t - t_i) \quad (14)$$

را بررسی کنیم. متریک‌های \tilde{g}_i نیز جواب‌هایی از شار ریچی‌اند و در نقطه‌های $(x_i, 0)$ دارای خمیدگی کراندار می‌باشند. به‌ازای انتخاب‌های مناسب x_i و t_i ، خمیدگی در همسایگی x_i کراندار است و برای زمان‌های گذشته نزدیک، $\tilde{t}_i \leq 0$ ، می‌توان نقطه‌هایی برگزید که خمیدگی $(M, g(t))$ ، در آن نقاط بیشینه باشد.

بازمقیاس‌بندی (۱۲) همه فاصله‌ها را با ضریب λ_i و زمان را با ضریب λ_i^2 منبسط می‌کند. بنابراین عملاً مطالعه ما به ناحیه‌های بسیار کوچک حول (x_i, t_i) با اندازه فضایی از مرتبه $r_i = \lambda_i^{-1}$ منحصر می‌شود و با به‌کاربردن روش‌های میکروسکوپی، می‌توان ویژگی‌های در مقیاسی با اندازه حدود یک را بررسی نمود. در این بررسی، به‌طور ضمنی فرض می‌شود مختصات در همسایگی x_i

با به‌کار بردن و ابرسانی‌های موضعی مرتبط با بازمقیاس‌بندی متریک، تغییر می‌کند.

صورتی موضعی از قضیه فشردگی گروموف، گذر به جواب حدی شار ریچی را مجاز می‌سازد که حداقل موضعاً در فضا و زمان تعریف شده است، مشروط بر این‌که حجم‌های موضعی خمینه‌های (های) ریمانی بازمقیاس‌بندی شده، دارای کران پایین باشند. به‌طور صریح‌تر، باید x_i در $M^\nu(\bar{g}_i(\bar{t}_i))$ (برای یک $\nu > 0$ ثابت) انتخاب شود؛ (۳) را ببینید. این بدان معنی است که برحسب شار اولیهٔ مقیاس‌بندی نشده، متریک $g(t)$ نباید بر مبنای مقیاس خمیدگی‌اش، موضعاً فرو ریخته شود، یعنی

$$\text{vol}B_{x_i}(r_i, t_i) \geq \nu r_i^4.$$

یک حد همبند پیشینه $(N, \tilde{g}(\tilde{t}, x))$ شامل نقطهٔ پایه‌ای $x = \lim x_i$ ، الگوی تکینی نامیده می‌شود. مشاهده کنید که توپولوژی خمینهٔ حدی N ممکن است از خمینهٔ اولیهٔ M متمایز باشد و ممکن است بیشتر قسمت‌هایش در بازمقیاس‌بندی، به بینهایت واگرا شود.

برای توصیف مفید بودن بالقوهٔ این فرایند، فرض کنید نافروریختگی [فصل‌های ۸ و ۹ از [۲۱] را ببینید] موضعی بر مقیاس خمیدگی را داشته باشیم و نقطه‌های با خمیدگی پیشینه در فضا و زمان $0 \leq t \leq t_i$ انتخاب شده باشند. آنگاه (حداقل در امتداد یک زیردنباله) یک جواب حدی برای شار ریچی $(N, \tilde{g}(\tilde{t}, x))$ بر پایهٔ x (که دست‌کم برای زمان‌های $(-\infty, 0)$ تعریف شده است) به دست می‌آید. به علاوه، $\tilde{g}(\tilde{t})$ یک متریک ریمانی کامل بر N است. در اصطلاح همیلتون، این جواب‌ها، جواب‌های قدیمی شار ریچی نامیده می‌شوند. به کمک تخمین‌های (۱۰) و (۱۱) می‌توان نشان داد که چنین الگوهای تکینی در حقیقت دارای ویژگی‌های مهمی هستند که آن‌ها را از جواب‌های عمومی شار ریچی بسیار ساده‌تر می‌کند. همچنان که متعاقب (۱۰) بحث شد، تخمین تنگی متضمن این است که خمینهٔ ریمانی حدی، خمیدگی نامنفی داشته باشد. به علاوه، توپولوژی خمینه‌های کامل N با خمیدگی نامنفی در بعد سه کاملاً شناخته شده است. اگر N نافشرده باشد، آنگاه با $S^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ یا خارج قسمتی از این فضاها و ابرسان است. اگر N فشرده باشد، آنگاه صورتی کمی قوی‌تر از قضیهٔ همیلتون متضمن این است که N با $S^2/\Gamma, S^1 \times S^1$ یا $S^2 \times_{\mathbb{Z}_2} S^1$ و ابرسان باشد. همچنین، تخمین هرنگ (۱۱) در حد برقرار است.

این ویژگی‌های عمومی الگوهای تکینگی مسلماً نویدبخش‌اند. با وجود این، برای هر گونه بهره‌برداری واقعی از این توصیف، باید بر مسائل زیادی غلبه کرد.

(۱) باید نافروریختگی در مقیاس خمیدگی ثابت شود تا یک الگوی تکینگی به دست آید.

(۲) به‌طور کلی، خمیدگی ممکن است در مقیاس‌ها یا (با) سرعت‌های مختلف بسیاری به بینهایت واگرا شود و شناخت ساختار الگوهای تکینی در نقطه‌های فضا - زمان با خمیدگی پیشینه، به تنهایی کافی نیست. پدیده‌هایی نسبتاً مشابه (با نام متداول پدیده‌های حبابی) در بسیاری از مسائل هندسی وردشی دیگر ظهور می‌کند، مثلاً نگاشت‌های همساز، معادله‌های یانگ - میلر، متریک‌های اینشتین و مثال‌های دیگر (در این بسترهای بیضوی، مشکلات

مربوط به مقیاس‌های چندگانه، به‌طور مؤثر برطرف شده است).
 (۳) حتی اگر کسی بتواند دو مسأله قبلی را حل کند، مسأله اصلی باقی است و آن عبارت است از مرتبط کردن ساختار تکین‌ها با توپولوژی خمینه زمینه.
 مطالعه تشکیل تکین‌ها در شار ریچی را همیلتون [۱۰] آغاز کرد. همچنین [۴] را برای مطالعه جدیدترین مرور این موضوع ببینید. اگرچه در خلال دهه گذشته پیشرفت‌های فنی بیشتری حاصل شده است، مسأله‌های اصلی در وجود ساختار الگوهای تکین و ارتباطشان با توپولوژی تا زمان ظهور تحقیقات پرلن در سال‌های ۲۰۰۲ و ۲۰۰۳، لاینحل باقی مانده بود.

۵. کار پرلن

تحقیقات اخیر پرلن [۱۵]–[۱۷] (همراه با یک مقاله کمتر اساسی که قرار است منتشر شود)، حل کامل حدسیه هندسی‌سازی را دربردارد. این اثبات با معرفی ایده‌های هندسی بسیار نوآورانه و تکنیک‌هایی برای درک شار ریچی، حاصل شده است. به‌ویژه، کار پرلن موضوع‌های (مانع‌های) ۱ تا ۳ پیشگفته را کاملاً حل (برطرف) کرده است (می‌کند). در اینجا الزاماً به اختصار بعضی از سرخط‌های کار وی را توصیف می‌کنیم.

الف) نافروریختن

عمل (گر) هیلبرت – اینشتین

$$\mathcal{R}(g) = \int_M R(g) dV_g \quad (15)$$

را به‌عنوان تابعی بر فضای متریک‌های ریمانی \mathbb{M} بر یک خمینه M در نظر بگیرید. نقطه‌های بحرانی \mathcal{R} متریک‌های ریچی تخت ($Ric = 0$) هستند. عمل (گر) را می‌توان مثلاً با افزودن یک ثابت کیهانی 2Λ – تعدیل کرد تا عملی به‌دست آید که نقطه‌های بحرانی‌اش، متریک‌های اینشتین با خمیدگی ریچی ثابت باشد^۱. طبیعی است تلاش کنیم تا شار ریچی را با \mathcal{R} مرتبط سازیم. مثلاً آیا شار ریچی، شار گرادیان \mathcal{R} (نسبت به یک L^2 متریک طبیعی بر فضای \mathbb{M}) است؟ با وجود این، اگرچه این فرض نزدیک به صحت است، برای مدتی طولانی خلاف آن استنباط می‌شد. در حقیقت، شار گرادیان \mathcal{R} حتی وجود ندارد، زیرا وجود آن متضمن وجود معادله حرارت – گون پسر و برای خمیدگی عددی R است (مشابه (Y) ولی با یک علامت منها قبل از Δ). اکنون تابع تقویت‌کننده \mathcal{R} را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{F}(g, f) = \int_M (R + |\nabla f|^2) e^{-f} dV_g \quad (16)$$

(۱) عمل (۱۳) منجر به معادلات میدان خلاء اینشتین در نسبیت عام برای متریک‌های لورنتزی بر یک خمینه ۴ بعدی می‌شود. جمله $\lambda(t)$ در (۴) البته مشابه ثابت کیهانی است.

این نگاشت، تابعکی بر فضای بزرگتر $\mathbb{M} \times C^\infty(M, \mathbb{R})$ یا معادلاً خانواده‌ای از تابعک‌ها بر \mathbb{M} ، پرمایش شده به وسیله $C^\infty(M, \mathbb{R})$ است. اندازه هموار dm را بر M تثبیت کنید و نگاشت اتصال پرلن را با این الزام که (g, f) در رابطه

$$e^{-f} dV_g = dm \quad (17)$$

صدق کند، تعریف کنید. تابعک حاصل

$$\mathcal{F}^m(g, f) = \int_M (R + |\nabla f|^2) dm \quad (18)$$

تابعکی با قلمرو \mathbb{M} است. در نگاه اول ممکن است این تابعک خیلی پیچیده‌تر از عمل (۱۳) به نظر آید. با وجود این، برای هر $g \in \mathbb{M}$ رده بزرگی از نگاشت‌های f (یا اندازه‌های dm) وجود دارد چنان‌که شار L^2 - گرادیان \mathcal{F}^m در g وجود دارد و به سادگی از رابطه

$$\frac{d\tilde{g}}{dt} = -\mathfrak{Z}(Ric_g + D^2 f) \quad (19)$$

به دست می‌آید. در اینجا $D^2 f$ هسیان f نسبت به \tilde{g} است. معادله تحولی (۱۷) برای \tilde{g} چیزی نیست جز شار ریچی (۵) که به وسیله یک وابرسانی بسیار کوچک اصلاح شده است:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)\phi_t = \nabla f \quad \text{در آن} \quad D^2 f = \left(\frac{d}{dt}\right)(\phi_t^* \tilde{g})$$

بنابراین، شار گرادیان \mathcal{F}^m عبارت است از شار ریچی با تقریب وابرسانی‌ها (انتخاب‌های مختلف dm متنظر با انتخاب‌های مختلف وابرسانی‌ها) است. به‌ویژه، تابعک \mathcal{F}^m در امتداد شار ریچی صعود می‌کند.

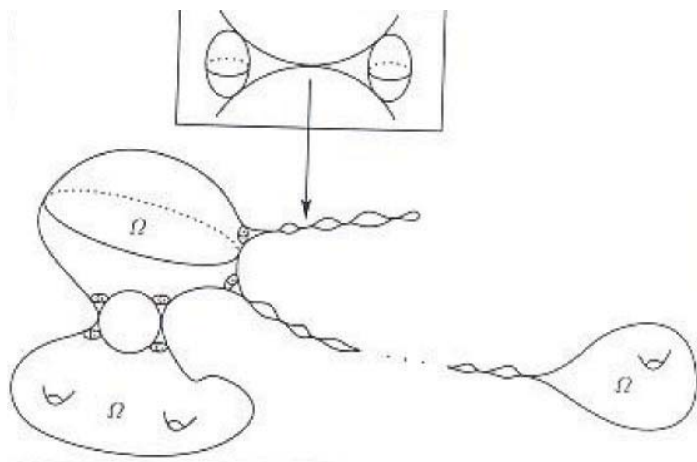
با این تابعک پیچیده‌تر چه می‌توان کرد؟ دیده می‌شود که به‌ازای هر متریک اولیه داده شده $(0) > g$ و t ، نگاشت f (و بنابراین اندازه dm) را می‌توان آزادانه در $g(t)$ مشخص کرد که $g(t)$ با شار ریچی (۵) تحول می‌یابد. پرلن این آزادی را به کار می‌برد تا هندسه (ناشی از) $g(t)$ را با انتخاب‌های مناسب f به‌خوبی بررسی کند. مثلاً او با مطالعه بسیار ساده‌ای از شکل \mathcal{F}^m نشان می‌دهد که فروریختن یا فرووریختن متریک $g(t)$ در همسایگی نقطه $x \in M$ از اندازه $\mathcal{F}^m(g(t))$ را می‌توان (با انتخاب e^{-f} به‌عنوان تقریبی بر یک نگاشت دلتا به مرکز x) آشکار کرد. هرچه متریک $g(t)$ در همسایگی x بیشتر فرووریخته باشد، اندازه $\mathcal{F}^m(g(t))$ بیشتر منفی است $(\mathcal{F}^m(g(t)) < 0)$ ، $|\mathcal{F}^m(g(t))| \gg 1$. فروریختن متریک $g(t)$ با هر مقیاسی در زمان باپایان نفی می‌شود که این حکم از ترکیب مطلب اخیر با این حقیقت ناشی می‌شود که تابعک \mathcal{F}^m در امتداد شار ریچی صعودی است. در حقیقت، این بحث نسبت به تابعکی مقیاس - ناوردا و قدری پیچیده‌تر

(۱) تابعک (۱۴) در نظریه ریمان به‌عنوان عمل مؤثر انرژی - پایین [۵] ظهور می‌کند. نگاشت یا میدان عددی f اتساع نامیده می‌شود. جالب است توجه کنیم که در این زمینه، میدان جاذبه‌ای و میدان اتساع همزمان از کوانتاش انرژی - پایین جهان‌بزرگ ریمانی (الگوی σ) ناشی می‌شوند [۵، ص ۸۳۷].

از \mathcal{F} انجام می‌شود. با الهام از مشابهت‌هایی خاص در فیزیک آماری، پرلن آن را تابعک آنتروپی می‌نامد.

(ب) الگوهای تکین

دومین بخش جالب توجه [۱۵] اساساً عبارت است از زرده‌بندی همه الگوهای تکین کامل $(N, g(t))$ که در زمان با پایان رخ می‌دهد. در اینجا، کامل بودن یعنی این که $g(\circ)$ یک متریک ریمانی کامل بر N است. از این به بعد، علامت منهای (-) را از نمادها حذف می‌کنیم. اگر N هموار و فشرده باشد، آن گاه از قضیه فضا-فرم همیلتون نتیجه می‌شود N با S^2/Γ ، $S^1 \times S^1$ یا $S^2 \times \mathbb{Z}_2$ و ابرسان است. در حالت مهم‌تر و مشکل‌تری که N کامل و نافشرده است، پرلن ثابت می‌کند که هندسه N در همسایگی بینهایت (یعنی خارج یک زیرمجموعه فشرده از N) به ساده‌ترین و طبیعی‌ترین صورت ممکن است. در زمان \circ و در نقطه‌های x با شرط $r(x) = \text{dist}(x, x_\circ) \gg 1$ برای یک نقطه پایه‌ای x_\circ ، یک همسایگی بزرگ x (در مقیاسی که $R(x) = 1$) به یک همسایگی بزرگ (نسبت به متریک حاصلضرب بر $S^2 \times \mathbb{R}$) ϵ - نزدیک است. با انتخاب $r(x)$ به اندازه کافی بزرگ می‌توان ϵ را به اندازه کافی کوچک کرد. چنین ناحیه‌ای، ϵ - گردن نامیده می‌شود. بنابراین هندسه، در همسایگی بینهایت در N عبارت است از هندسه اجتماعی از ϵ - گردن‌ها که شعاع به آهستگی متغیر S^2 یا یکنواخت کراندار است یا به بینهایت واگراست، ولی فقط با نرخ خیلی کوچکتر از $r(x)$. همچنین، این ساختار طی یک فاصله زمانی منفی بلندمدت برقرار است، بنابراین در چنین ناحیه‌هایی جواب، به شار ریچی تحولی پسرو بر $S^2 \times \mathbb{R}$ نزدیک است. از نظر توپولوژیکی، N با \mathbb{R}^3 و ابرسان است یا (N, g) با $S^2 \times \mathbb{R}$ طولیاست. پرلن نشان می‌دهد که این نتیجه ساختاری برای الگوهای تکین، برای جواب $g(t)$ در همسایگی خیلی نزدیک زمان تکین T نیز برقرار است.



شکل ۴. شیپورها روی حد تکین

بنابراین در هر نقطه پایه‌ای (x, t) که خمیدگی به اندازه کافی بزرگ باشد، بازمقیاس‌بندی فضا - زمان با خمیدگی مطابق رابطه (۱۲)، بر دامنه‌های فشرده بزرگ، به دامنه بزرگ متناظر در یک مدل تکین کامل، هموار - نزدیک است. مدل‌های تکین کامل «ایدال»، واقعاً هندسه و توپولوژی را در همسایگی هر تکین توصیف می‌کنند. در نتیجه، یک شناخت مشروح موضعی از هندسه و توپولوژی $(M, g(t))$ (برای t در همسایگی T) به دست می‌آید. به ویژه، این مطلب، صورتی عمومی از نامساوی هرنک (۱۱) را به طور اصولی اثبات می‌کند. این نتیجه‌ها البته نسبتاً فنی است و اثبات‌ها ساده نیست. با وجود این، آنقدر مشکل نیستند که غیرقابل درک باشند و عمدتاً مبتنی بر ابزارها و آگاهی‌های جدید برای درک شار ریچی هستند. یک ایده کلیدی عبارت است از به‌کار بردن نتیجه نافرورختنی (قبلاً اشاره شده) در همه مقیاس‌های مرتبط.

پ) رابطه با توپولوژی

اکنون نقطه مبنایی عبارت است از ظهور ۲ - کره‌های S^2 در نزدیکی (همسایگی) تکین‌ها. از رابطه (۱) به خاطر آوردید که قبل از این که بتوان M را هندسی سازی کرد، باید تجزیه کره‌ای را بر آن اعمال نمود. هیچ هندسه‌ای متناظر با تجزیه کره‌ای وجود ندارد^۱. در حالی که تجزیه کره‌ای ساده‌ترین عملی است که می‌توان از نظر توپولوژیکی، هندسی و تحلیلی انجام داد، این تجزیه سخت‌ترین مفهوم ادراکی است. چگونه ۲ - کره‌ها در M کشف می‌شوند تا بر آن‌ها جراحی حاصل از هندسه متریک، اعمال شود؟ مشاهده می‌شود که ۲ - کره‌های نشانده‌شده در ϵ - گردن‌ها، به صورت طبیعی در همسایگی (نزدیکی) تکین‌های شار ریچی ظهور می‌کنند. پس از آن، ایده این است که ۳ - خمینه M در امتداد ۲ - کره‌ها دقیقاً قبل از اولین زمان تکین T جراحی شود. شکل ۴ تصویری نموداری از متریک جزئاً تکین $g(T)$ بر M ارائه می‌دهد. متریک $g(T)$ بر یک دامنه پیشینه $\Omega \subset M$ که در آنجا خمیدگی موضعاً کراندار است، هموار است ولی روی مکمل Ω که در آنجا خمیدگی با میل کردن $T \rightarrow t$ به بینهایت واگرا می‌شود، تکین است، یعنی تعریف شده نیست.

ابتدا فرض کنید $\Omega = \emptyset$ چنان که خمیدگی $g(t)$ همه‌جا بر M هنگامی که $T \rightarrow t$ به بینهایت واگرا شود. در این صورت، گوییم جواب شار ریچی در زمان T به پایان می‌رسد. توجه کنید که $1 \gg R(x, t)$ برای هر $x \in M$ و t در همسایگی T (بنابر تخمین تنگی (۱۰)). با فرض درک الگوی تکین بالا، دیده می‌شود که M با S^2/Γ ، $S^1 \times S^1$ یا $S^1 \times_{\mathbb{Z}_p} S^1$ وابرسان است. در این صورت، مسأله حل شده است، زیرا M هندسی است. اگر $\Omega \neq \emptyset$ ، آن‌گاه نکته اصلی این است که هر همسایگی کوچک مرز $\partial\Omega$ ، متشکل از شیپورها است. یک شیپور، متریکی بر $[\delta, \infty) \times S^2$ است که عامل S^2 آن تقریباً کروی با شعاع کوچک $p(r)$ است و $0 \rightarrow \frac{p(r)}{r}$ وقتی $r \rightarrow 0$. بنابراین شیپور، اجتماعی از ϵ - گردن‌های گردهم آمده با مقیاس‌های کوچک‌تر و کوچک‌تر است. تصویر

(۱) ممکن است چنین اندیشیده شود که هندسه $S^2 \times \mathbb{R}$ متناظر با تجزیه کره‌ای است، ولی این واقعاً درست نیست. این ادعا، در بهترین حالت، فقط در یک زمینه ایدال یا حدی می‌تواند بامعنی باشد.

درون کادر در شکل ۴، نمایانگر یک متریک جزئاً تکین بر خمینه هموار $S^2 \times I$ ، متشکل از یک زوج شیپور است که با متریک ناتمبھگون به هم متصل شده‌اند. در زمان T ، ممکن است Ω تعداد بی‌پایان مؤلفه از اندازه به دلخواه کوچک که حاوی چنین شیپورهایی هستند، داشته باشد. با وجود این، همه به جز تعدادی باپایان از این مؤلفه‌ها، شیپورهای دوگانه‌اند که هرکدام از نظر توپولوژیکی دوباره به صورت $S^2 \times I$ می‌باشد. به بیان کمی، ثابت کوچک $p > 0$ وجود دارد چنان‌که اگر Ω شیپورهایی با کره $\{ \delta \} \times S^2$ از شعاع ناکمتر از p نداشته باشد، آن‌گاه مانند قبل، در حالتی که $\Omega = \emptyset$ ، M با S^3/Γ ، $S^2 \times S^1$ یا $S^2 \times_{\mathbb{Z}_p} S^1$ وابرسان است و در این حالت، اثبات تمام است. اگر شیپورهایی حاوی یک کره $S^2 \times S^1$ از اندازه معین p در Ω وجود داشته باشد، با اعمال جراحی بر هر چنین شیپوری که عبارت است از بریدن آن در امتداد S^2 با شعاع p و چسباندن یک 3 -گوی هموار به آن، مجموعه‌ای از 3 -خمینه‌های نامتقاطع به دست می‌آید. اکنون با چندپارچه کردن M به تعدادی باپایان از مؤلفه‌ها به وسیله جراحی بر 2 -کره‌ها، به طور مجزا شار ریچی بر هر مؤلفه اعمال و بررسی می‌شود. یک بحث مفهوماً آسان ولی از نظر فنی سخت که مبتنی بر کاهش حجم وابسته به هر جراحی می‌باشد، نشان می‌دهد که زمان‌های جراحی موضعاً باپایان است: بر هر فاصله زمانی باپایان، فقط در تعدادی باپایان از زمان‌ها، تکینی رخ می‌دهد.

به عنوان مثال ملموس، فرض کنید متریک ابتدایی $g(0)$ بر M دارای خمیدگی عددی مثبت باشد، آن‌گاه تخمین (۸) نشان می‌دهد که شار ریچی کاملاً به پایان می‌رسد، یعنی در زمان باپایان از بین می‌رود. بنابراین در خلال شار ریچی، فقط تعدادی باپایان جراحی بر M اعمال می‌شود و از بحث بالا نتیجه می‌شود که M با جمع همبند باپایانی از عامل‌های S^2/Γ و $S^2 \times S^1$ وابرسان است.

نتیجه این فرایند این است که اگر به صورت موفقیت آمیزی چنین مؤلفه‌هایی را که در زمان باپایان محو می‌شوند (و قبلاً از نظر توپولوژیکی مشخص شده‌اند) کنار بگذاریم با آن‌ها چشم‌پوشی کنیم، شار ریچی روی بازه زمانی بی‌پایان $(0, \infty)$ وجود دارد. در این صورت هندسه مؤلفه‌های باقی‌مانده M ، $\{\tilde{M}_i\}$ در زمان به اندازه کافی بزرگ T ، چگونه است؟ در اینجا تجزیه ضمیمه/نازک گروموف-ترستن ظاهر می‌شود. یک مؤلفه $\{\tilde{M}_i\} \in \{M\}$ را تثبیت کنید و متریک باز مقیاس‌بندی شده $\hat{g}(t) = t^{-1}g(t)$ را بررسی کنید. برای $t = T$ ، به آسانی از معادله شار ریچی دیده می‌شود که حجم \hat{M} ، یعنی $vol(\hat{M}, \hat{g}(t))$ به طور یکنواخت کراندار است. برای ν به اندازه کافی کوچک، پرلن ثابت می‌کند که کنترل کافی بر بخش ν -ضمیمه \hat{M}^ν تعریف شده در (۳) وجود دارد چنان‌که \hat{M}^ν با یک 3 -خمینه هذلولوی کامل H (با تعدادی باپایان مؤلفه) وابرسان است. شار ریچی هموار بر \hat{M}^ν برای زمان بی‌پایان وجود دارد و وقتی $t \rightarrow \infty$ ، باز مقیاس‌بندی‌های $t^{-1}g(t)$ به متریک هذلولوی با خمیدگی $1/t$ میل می‌کنند (چون شار ریچی برای همه زمان‌ها وجود دارد، معقول است انتظار داشته باشیم که شار (با حجم نرمال شده) به متریک اینشتین که در مسأله مورد بحث ما الزاماً یک متریک هذلولوی است، میل کند). علی‌رغم آن‌که کنترل کمتری بر بخش ν -نازک \hat{M}^ν وجود دارد، این کنترل چنان هست که نتیجه دهد \hat{M}^ν با یک خمینه گرافی G (با تعدادی باپایان مؤلفه) وابرسان است. اگرچه ممکن است هنوز بینهایت بار جراحی برای ادامه شار ریچی برای همه زمان‌ها لازم

باشد، همه جراحی‌های اضافی در $\hat{M}_\nu = G$ انجام می‌شود^۱.

بنابراین ۳ - خمینه ابتدایی M به صورت توپولوژیکی (در زمان بزرگ متناهی) چنین تجزیه می‌شود:

$$M = (K_1 \# \dots \# K_p) \# (\#_i S^3 / \Gamma_i) \# (\#_r S^2 \times S^1) \quad (20)$$

پرلמן اخیراً نشان داده‌است [۱۷] که عامل‌های S^3 / Γ و $S^2 \times S^1$ الزاماً در زمان کراندار، منسوخ می‌شوند (با کران وابسته به متریک اولیه). بنابراین فقط K عامل‌ها پس از یک زمان به اندازه کافی طولانی وجود دارند (با وجود این، این نتیجه برای حدسیه هندسی سازی، مورد نیاز نیست).

علاوه بر این، هر $K = K_i$ از طریق تجزیه ضمیمه/نازک به اجتماعی به صورت

$$K = H \cup G \quad (21)$$

تجزیه می‌شود که H یک خمینه هذلولوی کامل (احتمالاً ناهمبند) با حجم پایایان است و G یک خمینه گرافنی (احتمالاً ناهمبند) است. اجتماع H و G در امتداد مجموعه‌ای از چنبره‌های نشانده‌شده تشکیل می‌شود. پرلמן با به‌کاربردن اثبات‌های مرجع [۱۱] یا [۱] و [۲] نشان می‌دهد هر چنبره‌ای در K تراکم‌ناپذیر است. این فرایند، هر دو تجزیه کره‌ای و چنبره‌ای M را نتیجه می‌دهد. هرچند گفته نشد که شار ریچی تجزیه بیشتر G به مؤلفه‌های برگ‌بندی شده زایفر را نمایان می‌کند، این مطلب از دیدگاه توپولوژیکی نسبتاً مقدماتی است. مؤلفه‌های چنبره‌ای تحویل‌ناپذیر K به عنوان خمینه‌های هذلولوی شناخته شده‌اند.

در اینجا مرور مختصر ما بر حدسیه هندسی سازی تمام می‌شود. تحقیق‌های پرلמן همچنان بسیار زیادی در جامعه تحقیقاتی ریاضی و نیز در سطحی بزرگتر در جامعه علمی علاقه‌مند، ایجاد کرده‌است. در حالی که در حال حاضر، جزئیات کارش هنوز در دست بررسی است، زیبایی و عمق این کار جدید کاملاً روشن است.

من از بروس کلاینیر، جان لات و جک میلنر به‌خاطر پیشنهادها و نظریات زیادشان که به بهبود مقاله انجامید، بسیار متشکرم.

تشکر مترجم: مترجم از آقای فیروز پاشایی به‌خاطر تهیه صورت تایپی نهایی مقاله سپاسگزار است.

(۱) ادعا نمی‌شود که کران (۲) بر \hat{M}_ν برای هر t بزرگ و برای $\infty < \Lambda$ ، برقرار است.

کتابنامه

- [1] M. Anderson, "Scalar curvature and geometrization conjectures for 3-manifolds", in *Comparison Geometry* (Berkeley 1993-94), MSRI Publications, vol. 30, 1997, pp. 49-82.
- [2] M. Anderson, "Scalar curvature and the existence of geometric structures on 3-manifolds" I, *J. Reine Angew. Math.*, **533**(2002), 125-182.
- [3] L. Anderson, "The global existence problem in general relativity", preprint, 1999, gr-qc/9911032; to appear in *50 Years of the Cauchy Problem in General Relativity*, P. T. Chruściel and H. Friedrich, eds.
- [4] H. D. Cao and B. Chow, "Recent developments on the Ricci flow", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **36**(1999), 59-74.
- [5] E. D'Hoker, "String theory", in *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians, Vol. 2*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [6] M. Gromov, *Structures Métriques pour les Variétés Riemanniennes*, Cedric /Fernand Nauthen, Paris, 1981.
- [7] M. Gromov, "Volume and bounded cohomology", *Inst. Hautes Études Sci. publ. math.*, **50**(1982), 5-100.
- [8] R. Hamilton, "3 - manifolds of positive Ricci curvature", *J. Differential Geom.*, **17**(1982), 255-306.
- [9] —, "The Harnack estimate for the Ricci flow", *J. Differential Geom.*, **37**(1993), 225-243.
- [10] —, "Formation of singularities in the Ricci flow", *Surveys in Differential Geometry*, Vol. 2, International Press, 1995, pp. 7-136.
- [11] —, "Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds", *Comm. Anal. Geom.*, **7**(1999), 695-729.
- [12] T. Ivey, "Ricci solitons on compact three-manifolds", *Differential Geom. Appl.*, **3**(1993), 301-307.
- [13] B. Kleiner and J. Lott, *Ricci flow* website:
<http://www.math.lsa.umich.edu/research/ricciflow/perelman.html>.

- [14] J. Milnor, "Towards the Poincaré Conjecture and the classification of 3 - manifolds", *Notices Amer. Math. Soc.*, **50**(2003), 1226-1233.
- [15] G. Perelman, "The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications", preprint, 2002, math. DG/0211159.
- [16] —, "Ricci flow with surgery on three-manifolds", preprint, math. DG/0303109, 2003.
- [17] —, "Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds", preprint, 2003, math.DG/0307245.
- [18] W. Thurston, *The Geometry and Topology of three-manifolds*, preprint, 1978, Princeton University, available online at <http://www.msri.org/publications/books/gt3m>; and *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Vol. 1, Princeton University Press, 1997.
- [19] —, "Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **6**(1982), 357-381.

مرجع‌های استفاده‌شده و اضافه‌شده توسط مترجم

- [20] B. Chow, & D. Knopf, *The Ricci Flow: An introduction*, Math. Surveys and Monographs, Vol. 110, AMS. 2004.
- [21] J. W. Morgan, & G. Tian, *Ricci Flow and the Poincare Conjecture*, Electronic version at arxiv: math/0607607v2
- [22] J. W. Morgan, & F. T-H. Fong, *Ricci Flow and Geometrization of 3-Manifolds*, Univ. Lect. Series, Vol 53, 2010.
- [23] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, 2nd ed., Springer, 2006.
- [24] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, GTM, Springer, 1993.

مترجم: سید محمدباقر کاشانی
 دانشکده علوم ریاضی - دانشگاه تربیت مدرس
 kashanim@modares.ac.ir