

تقارن آینه‌ای

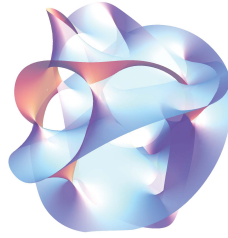
سید محمدباقر کاشانی

چکیده. در این مقاله، تقارن آینه‌ای و نظریهٔ ریسمان، به‌کوتاه شناسانده و جایگاه آنها در فیزیک و ریاضی و کاربردهایشان در هندسهٔ جبری شمارشی، نظریهٔ کوانتومی میدان، فیزیک نظری، کیهان‌شناسی، ریاضی فیزیک و دیگر زمینه‌های مرتبط بیان می‌شود.

۱ مقدمه: تقارن آینه‌ای چیست؟

در هندسهٔ جبری و فیزیک نظری، تقارن آینه‌ای رابطه‌ای است بین خمینه‌های کالابی-یائو^۱ (بخش بعد را ببینید). تقارن آینه‌ای هنگامی به‌کار می‌رود که دو خمینهٔ کالابی-یائو از دیدگاه هندسی کاملاً متفاوت ولی از نظر فیزیکی به‌عنوان نتیجهٔ فشردن سازی بُعدهای افزودهٔ نظریهٔ ریسمان هم‌ارز باشند. مفهوم تقارن آینه‌ای را در آغاز فیزیک‌دانان کشف کردند. ریاضی‌دان‌ها در حدود سال ۱۹۹۰ پس از آنکه کندلاس^۲ و دیگر پژوهشگران نشان دادند که این مفهوم را می‌توان برای یافتن پاسخ‌هایی در هندسهٔ جبری شمارشی^۳ به‌کار برد به آن علاقه‌مند شدند [۱۸]. این پژوهشگران نشان دادند که تقارن آینه‌ای را می‌توان برای شمارش خم‌های گویا^۴ (پیوست ۱) بر خمینه‌های کالابی-یائو به‌کار بُرد و بنابراین مسئله‌ای را که مدت طولانی حل‌نشده بود حل کردند. اگرچه رویکرد آغازین به مفهوم تقارن آینه‌ای بر پایهٔ ایده‌های فیزیکی بود ([۶۶]) که از آنها درک ریاضی دقیقی در دست نبود،

عبارات و کلمات کلیدی: تقارن آینه‌ای، نظریهٔ ریسمان، نظریهٔ کوانتومی میدان، کیهان‌شناسی، هندسهٔ جبری شمارشی
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۷/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۲۸



شکل ۱. برش یک خمینه کالابی-یائو درجه پنج

اکنون پیش‌بینی‌هایش اثبات‌های دقیق ریاضی یافته است؛ به‌ویژه صورتی از تقارن آینه‌ای در نظریه توپولوژیک ریمان (صورتی ساده‌شده از نظریه ریمان ادوارد ویتن) [۲۸، ۳۸، ۴۴]. تقارن آینه‌ای ابزاری بنیادی برای محاسبه در نظریه ریمان است. همچنین از تقارن آینه‌ای برای درک جنبه‌هایی از نظریه میدان کوانتومی^۱ بهره برده می‌شود. نظریه میدان کوانتومی ترکیبی از نظریه میدان کلاسیک و نسبیت خاص و مکانیک کوانتومی است. این نظریه در فیزیک ذرات بنیادی برای ساختن مدل‌های فیزیکی از ذرات زیراتمی و در فیزیک ماده چگال^۲ برای ساختن مدل‌هایی از شبه‌ذرها^۳ (الکترون‌ها و فرمیون‌ها) به‌کار می‌رود. نظریه میدان کوانتومی، ذرات را حالت‌های برانگیخته^۴ (به‌نام کوانتا^۵) میدان‌های کوانتومی زمینه‌شان (که بنیادی‌تر از ذرات است) در نظر می‌گیرد. معادله حرکت ذره با کمینه کردن لاگرانژی یک تابع^۶ از میدان‌های وابسته به ذره مشخص می‌شود. برهم‌کنش بین ذرات با جمله‌های برهم‌کنش در لاگرانژی که در بردارنده میدان‌های کوانتومی وابسته‌شان هستند، توصیف می‌شود. هر برهم‌کنش می‌تواند با نمودار فاینمن بر پایه نظریه پیرشیدگی^۷ در مکانیک کوانتومی نمایش داده شود. در نظریه ریمان برای کار با نمودارهای فاینمن، نمودارهای یک‌بُعدی نشان‌دهنده مسیر حرکت یک ذره نقطه‌ای، با رویه‌های دو بُعدی نشان‌دهنده حرکت ریمان یک بُعدی جایگزین می‌شود ([۱۴]).

رویکردهای اصلی به تقارن آینه‌ای عبارت است از تقارن آینه‌ای مانستگی^۸ (پیوست ۲) از ماکسیم گنتسویچ^۹ و انگاره^{۱۰} SYZ (پیوست ۶) از استرومنجر،^{۱۱} یائو^{۱۲} و زازلو^{۱۳}. انگاره (های) جبری گنتسویچ و هندسی SYZ، مفهوم تقارن آینه‌ای را به مفهومی بسیار فراتر از ابزاری در هندسه جبری شمارشی گسترش داد. ماکسیم گنتسویچ در یک سخنرانی در کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان در سال ۱۹۹۴، انگاره ریاضی جدیدی به‌نام تقارن آینه‌ای مانستگی بر پایه ایده‌های فیزیکی تقارن

1. quantum field theory 2. condensed matter physics 3. quasiparticles 4. excited state 5. quanta
6. functional 7. perturbation theory 8. homological mirror symmetry 9. Maxim Kontsevich 10.
conjecture 11. Andrew Eben Strominger 12. Shing-Tung Yau 13. Eric Zaslow

آینه‌ای در نظریهٔ توپولوژیک ریسمان، ارائه داد. این نگاره تقارن آینه‌ای را به شکل یک هم‌ارزی بین دو ساختار ریاضی صورت‌بندی می‌کند: رسته مشتق‌شدهٔ بافه‌های منسجم بر یک خمینهٔ کالابی-یائو و رستهٔ فوکایا بر خمینهٔ آینه‌ای اش [۴۲]. به‌علاوه حدود سال ۱۹۹۵، کنتسویچ با بررسی نتیجه‌های کندلاس که فرمولی کلی برای شمارش خم‌های گویا بر یک چندگونای سه‌بُعدی درجهٔ پنج به‌دست می‌داد، انگارهٔ ریاضی دقیقی در این باره ارائه کرد [۴۱].

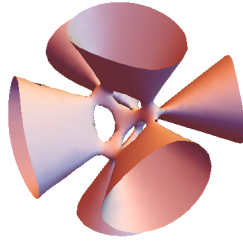
در سال ۱۹۹۶، گیونتال مقاله‌ای چاپ و ادعا کرد که این انگاره را ثابت کرده است [۲۸]. پس از این مقاله که درکش سخت بود، برخی دیگر از ریاضی‌دانان برهان‌هایی مستقل در چند مقالهٔ پی‌درپی ارائه دادند. همهٔ این مقاله‌ها برهان‌هایی ریاضی برای آنچه در آغاز، فیزیک‌دانان در این زمینه با به‌کاربردن تقارن آینه‌ای به‌دست آورده بودند، فراهم ساخته است ([۶۶، ص ۷۰]). در سال ۲۰۰۰، هُری^۱ و وفا برهان فیزیکی دیگری از تقارن آینه‌ای بر پایهٔ T -دوگانگی ارائه دادند. امروزه تقارن آینه‌ای شاخهٔ پژوهشی مهم، به‌روز، جذاب و فعال ریاضی فیزیک است و حتی در برنامه‌های آموزشی فیزیک نظری و هندسه در دانشگاه‌ها از جایگاه شایسته‌ای برخوردار است. برای مطالعهٔ مراجع جدید خواننده می‌تواند [۱۶، ۶۳، ۶۹] را ببیند.

برای سودمندی بیشتر و آسان‌سازی خواندن مقاله، مفهوم‌های فیزیکی و ریاضی نه‌چندان آشنا را در بخش پیوست‌ها آورده‌ایم. مطالب بسیاری را از [۵۱] اقتباس کرده‌ایم.

۲ خمینهٔ کالابی-یائو

یک رویهٔ $K3$ ی تحلیلی مختلط یک خمینهٔ مختلط همبند فشرده با بُعد مختلط ۲ و با کلاف ذاتی بدیهی و نامنظمی صفر است. یک رویهٔ $K3$ ی جبری بر هر میدان عبارت است از یک رویهٔ جبری هموار سرهٔ هندسی همبند که شرط‌های بالا را برآورده می‌کند. در رده‌بندی انریکس-گُدیرا^۲ از رویه‌ها (که رویه‌های مختلط فشرده را به ۱۰ رده، رده‌بندی می‌کند و رویه‌های هر رده با یک فضای مدولی پرمایش می‌شود)، رویه‌های $K3$ یکی از چهار ردهٔ رویه‌های مینیمال با بُعد گُدیرای صفر هستند. ساده‌ترین نمونهٔ رویهٔ $K3$ ، رویهٔ درجهٔ چهار فرما، $w^4 + z^4 + y^4 + x^4 = 0$ ، است.

خمینهٔ کالابی-یائو خمینهٔ مختلط گسترش‌دهندهٔ رویه‌های $K3$ به هر بُعد مختلط است. تعریف آغازین آن، خمینهٔ فشردهٔ کلر^۳ دارای ردهٔ اول چرن^۴ صفر و متریک ریچی‌تخت^۵ است [۶۶]. تعریف‌هایی دیگر (برخی ناهم‌ارز با تعریف آغازین) از این مفهوم نیز در نوشته‌های هندسی یافت



شکل ۲. نمایش بخشی از نقاط حقیقی در یک رویه K3

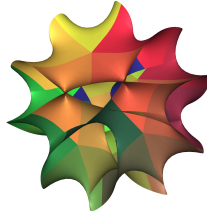
می‌شود. برای اطلاعاتی دربارهٔ خمینه‌های مختلط به [۹، ۱] مراجعه کنید.

هر چندگونای جبری^۱ X نشانده‌شده در یک فضای (خمینه) افکنشی مختلط، خمینه کُلی است، زیرا متریک فوبینی-اشتودی^۲ فضای افکنشی را می‌توان به آن چندگونا تحدید کرد. بنابر تعریف خمینه کالابی-یائو، اگر کلاف ذاتی^۳ K_X (اگر $K_X = \Lambda^n T^*X$, $n = \dim X$) بدیهی باشد، آنگاه X خمینه کالابی-یائو است.

در بُعد مختلط ۱، تنها خمینه‌های کُلی، خانوادهٔ یک‌متغیرهٔ چنبره‌های مختلط یک‌بُعدی است. متریک ریچی تخت بر چنبره متریکی تخت است. گفتنی است که هر خمینه کالابی-یائو یک‌بُعدی، خم بیضوی^۴ مختلط است و لذا جبری (یعنی مجموعهٔ ریشه‌های یک چندجمله‌ای همگن) است. خم بیضوی به‌کمک یک میدان \mathbb{K} تعریف می‌شود و نقطه‌هایی از \mathbb{K}^2 را توصیف می‌کند. اگر مشخصهٔ میدان ۲ و ۳ نباشد، خم بیضوی را می‌توان یک خم جبری مسطح متشکل از جواب‌های (x, y) برای معادلهٔ $y^2 = x^3 + ax + b$ دانست که $a, b \in \mathbb{K}$. فرض می‌شود خم ناکین است، یعنی تیزی ندارد و خود را قطع نمی‌کند (این شرط هم‌ارز است با این که $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ ، یعنی جملهٔ x^2 در معادلهٔ خم یافت نشود). به‌علاوه فرض می‌شود که خم در صفحهٔ افکنشی است با نقطهٔ O که یکتانقطه در بی‌نهایت است. اگر مشخصهٔ میدان ۲ یا ۳ باشد، معادلهٔ بالا همهٔ خم‌های درجهٔ سه ناکین را به‌دست نمی‌دهد. خم بیضوی یک چندگونای آبلی است، یعنی یک قانون عمل گروه دارد که به‌طور جبری تعریف می‌شود و نسبت به آن، خم یک گروه آبلی و O عضو بدیهی آن گروه است. [۳۵].

در بُعد مختلط ۲، رویه‌های K3 تنها خمینه‌های کالابی-یائو همبند ساده (یعنی با گروه بنیادی بدیهی) هستند. این خمینه‌ها را می‌توان به‌عنوان رویه‌های درجه‌چهار در $\mathbb{P}C^3$ ساخت مانند

$$M = \{[z_0, z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{P}C^3 \mid z_0^4 + z_1 + z_2 + z_3^4 = 0\}.$$



شکل ۳. یک برش دو بُعدی از یک خمینه کالابی-یائو شش بُعدی

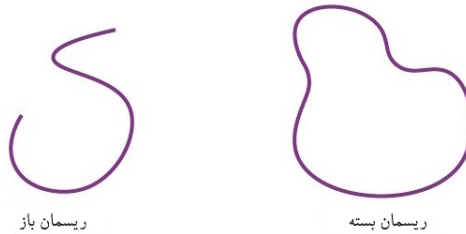
نمونه‌های دیگر، تارسازی‌های^۱ بیضوی است، یعنی خارج‌قسمت‌هایی از رویه‌های آبلبی یا رویه‌های با اشتراک‌های کامل [۶۲]. چندگونای جبری V در فضای افکنشی، با اشتراک کامل است اگر ایده‌آل V دقیقاً با k عضو تولید شود که در اینجا $k = \text{codim} V$ ؛ یعنی اگر V دارای بُعد m در فضای افکنشی $\mathbb{P}C^n$ باشد، باید $k (= n - m)$ چندجمله‌ای همگن مانند $(F_i(z_0, \dots, z_n), 1 \leq i \leq k)$ ، نسبت به مختص‌های همگن z_j یافت شود که همه چندجمله‌ای‌های همگن دیگر را که بر V صفر می‌شوند، تولید کنند. نمونه‌هایی که همبند ساده نیستند، به کمک رویه‌های آبلبی (چندگونای دو بُعدی آبلبی، چندگونای جبری افکنشی که گروه آبلبی نیز هست) به دست می‌آید که چنبره‌های حقیقی \mathbb{T}^4 همراه با یک ساختار خمینه مختلط است.

در بُعد مختلط ۳، رده‌بندی خمینه‌های کالابی-یائو مسئله‌ای حل نشده است؛ اگرچه یائو می‌انگارد که خانواده‌هایی متناهی از چنین خمینه‌ها می‌توان یافت. انگاره‌ای از رید^۲ بیانگر این است که نامتناهی نوع توپولوژیک^۳ از خمینه‌های کالابی-یائو سه بُعدی یافت می‌شود. یک نمونه خمینه کالابی-یائو سه بُعدی، یک ابررویه درجه پنج در $\mathbb{P}C^4$ ، یعنی چندگونای جبری متشکل از ریشه‌های یک چندجمله‌ای همگن ناتکین درجه پنج برحسب مختص‌های همگن $\mathbb{P}C^4$ است.

برای عدد صحیح مثبت n ، ریشه‌های یک چندجمله‌ای همگن ناتکین از درجه $n + 2$ در $\mathbb{P}C^{n+1}$ ، خمینه کالابی-یائو با بُعد n است. این خمینه، اگر $n = 1$ ، خم بیضوی و اگر $n = 2$ ، رویه $K3$ است. همه خمینه‌های ابرکلر^۴، خمینه‌های کالابی-یائو (و ریچی‌تخت) هستند. خمینه ابرکلر خمینه‌ای ریمانی (M, g) همراه با سه ساختار تقریباً مختلط انتگرال‌پذیر I, J, K است که نسبت به متریک ریمانی g ، کلر باشند و $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1_{TM}$. پس خمینه (M, g) با سه ساختار بالا، ابرمختلط است؛ خمینه‌ای که کلاف مماس‌اش دارای عمل جبر چهارگان‌ها است و چهارگان‌های I, J, K و ساختارهای تقریباً مختلط انتگرال‌پذیر را به دست می‌دهد.

۳ نگاهی گذرا به نظریهٔ ریسمان

در فیزیک نظری، نظریهٔ ریسمان چارچوبی نظری است برای درک اینکه چگونه و چرا جهان به صورتی است که اکنون مشاهده می‌کنیم. در این نظریه، ذرات نقطه‌گون آشنا در نظریهٔ فیزیک ذرات بنیادی، با اشیائی یک‌بُعدی به نام «ریسمان» جایگزین می‌شوند. این ریسمان‌ها مانند تکه‌های باز کوچک یا

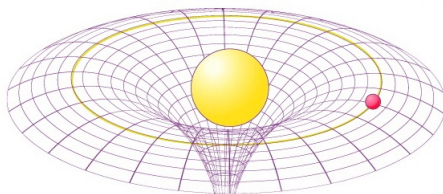


شکل ۰۴. ریسمان‌های باز و بسته اشیای بنیادی در نظریهٔ ریسمان هستند.

طوقه‌هایی^۱ (خم‌هایی بسته) از ریسمان معمولی هستند. نظریهٔ ریسمان پراکندگی^۲ و برهم‌کنش ریسمان‌ها را در فضا توصیف می‌کند. در مقیاس‌های بزرگ‌تر از مقیاس ریسمان‌ها، ریسمان دقیقاً مانند ذرهٔ معمولی همراه با جرم، بار و دیگر ویژگی‌های ذره (که با حالت ارتعاشی^۳ ریسمان مشخص می‌شود) دیده می‌شود. شکافت^۴ و بازترکیب^۵ ریسمان‌ها، متناظر با برون‌پاشی^۶ (تابش) (الکترون‌فشانی همراه با گرما یا تابش‌گری و غیره) و جذب^۷ ذره است که برهم‌کنش^۸ بین ذرات را در پی دارد. در نظریهٔ ریسمان، یکی از حالت‌های ارتعاشی ریسمان متناظر با گراویتون^۹ است، یعنی ذرهٔ مکانیک کوانتومی که حامل نیروی گرانشی است. بنابراین نظریهٔ ریسمان، نظریهٔ نیروی گرانش کوانتومی است. این نظریه موضوعی گسترده است که به بررسی و پاسخ به پرسش‌های ژرف در فیزیک ذرات بنیادی می‌پردازد. فیزیک ذرات بنیادی بخشی از فیزیک است که در آن، نیروهای بنیادی (گرانش، الکترومغناطیس، نیروهای هسته‌ای قوی و ضعیف) مطالعه می‌شود. نظریهٔ ریسمان همهٔ نیروهای بنیادی و صورت‌های ماده را توصیف می‌کند و پیشرفت‌های زیادی از ریاضی فیزیک را در پی آورده است. خوشبختانه کتاب‌های قابل اعتمادی نیز در این زمینه به فارسی موجود است، از جمله [۵، ۸، ۲، ۶].

در قرن بیستم دو چارچوب نظری برای صورت‌بندی قانون‌های فیزیک پدیدار شد. چارچوب اول، نظریهٔ نسبیت عام اینشتین است؛ نظریه‌ای که نیروی گرانش و ساختار فضا-زمان را در

1. loop 2. scattering 3. vibrational state 4. splitting 5. recombination 6. emission 7. absorption
8. interaction 9. graviton



شکل ۵. فضا-زمان خم شده توسط نیروی گرانش

اندازه‌های ماکروسکوپی (بزرگ) توضیح می‌دهد. چارچوب دوم، مکانیک کوانتومی است؛ یک صورت‌بندی کاملاً متفاوت که بر پایه نظریه احتمال، پدیده‌های فیزیکی را در اندازه‌های میکروسکوپی (بسیار کوچک) توصیف می‌کند. تا پایان دهه ۱۹۷۰، این دو چارچوب برای توضیح اغلب ویژگی‌های مشاهده‌شده در جهان، از ذرات بنیادی گرفته تا ستارگان و حتی کل جهان به‌عنوان یک هستی، کافی به نظر می‌رسید [۱۴].

با وجود همه این کامیابی‌ها، هنوز مسئله‌های فیزیکی زیادی پدیدار می‌شد که باید حل می‌شدند. یکی از ژرف‌ترین مسئله‌ها در فیزیک جدید، مسئله گرانش کوانتومی^۱ است. نظریه نسبیت عام در چارچوب فیزیک کلاسیک صورت‌بندی شده است، ولی نیروهای بنیادی دیگر در چارچوب مکانیک کوانتومی توصیف می‌شوند. برای سازگار کردن نظریه نسبیت عام با اصل‌های مکانیک کوانتومی، نظریه گرانش کوانتومی نیاز است، ولی به‌کار بردن توصیف‌های معمولی نظریه کوانتومی برای نیروی گرانشی، مشکل است ([۷۰] را ببینید). افزون بر مسئله ارائه نظریه‌ای سازگار برای گرانش کوانتومی، مسئله‌های حل‌نشده بنیادی دیگری در فیزیک هسته‌ای، فیزیک ماده چگال، سیاه‌چاله‌ها،^۲ پارادوکس‌های مرتبط با آنها و کیهان‌شناسی یافت می‌شود که فیزیک‌دانان برای حل آنها و درک پدیده حبس^۳ کوآرک (گونه‌ای ذره بنیادی و یک سازنده بنیادی ماده) و سرچشمه انرژی تاریک (صورتی ناشناخته از انرژی که در مقیاس‌های بسیار بزرگ بر جهان اثر دارد) و دیگر چیزها پژوهش می‌کنند. یکی از گام‌های تکاملی مهم در دهه‌های گذشته در نظریه ریسمان، کشف برخی دوگانی‌ها^۴ است، یعنی تبدیل‌هایی ریاضی که یک نظریه فیزیکی را با نظریه فیزیکی دیگر یکسان

۲. سیاه‌چاله بخشی از فضا-زمان است که در آن، میدان گرانشی چنان نیرومند است که هیچ ذره یا تابشی نمی‌تواند از آن بیرون رود. ۳. confinement، پدیده‌ای است که در آن، ذرات باردار رنگی (مانند کوآرک‌ها) نمی‌توانند منزوی باشند و بنابراین نمی‌توان آنها را مستقیماً در شرایط عادی زیر دمای دو تتراکولین مشاهده کرد. کوآرک‌ها بنا بر پیش‌فرض، بهم می‌پیوندند و تشکیل هادرون می‌دهند.

می‌گیرد [۳۸]. رابطه تقارن آینه‌ای نمونه‌ای از دوگانی است. دوگانی‌ها نقشی مهم در فیزیک جدید به‌ویژه در نظریهٔ ریسمان دارند. دوگانی‌های دیگر (بجز تقارن آینه‌ای) S -دوگانی، T -دوگانی و تناظر AdS/CFT (پیوست ۹) است. فیزیک‌دانان چندین دوگانی بین صورت‌های گوناگون نظریهٔ ریسمان کشف کرده‌اند. این دوگانی‌ها به این انگاره انجامیده است که همهٔ صورت‌های سازگار نظریهٔ ریسمان در یک چارچوب به‌نام نظریهٔ M گنجانده و یکپارچه می‌شود. در آغاز، ادوارد ویتن^۱ وجود چنین نظریه‌ای را در یک کنفرانس دربارهٔ نظریهٔ ریسمان در دانشگاه کالیفرنیا در سال ۱۹۹۵ در قالب یک انگاره بیان کرد. این بیان آغازگر فعالیت‌های پژوهشی بسیاری به‌نام انقلاب دوم نظریهٔ ریسمان شد. اگرچه صورت‌بندی کاملی از نظریهٔ M وجود ندارد، کوشش‌هایی جدید برای صورت‌بندی آن عموماً بر پایهٔ نظریهٔ ماتریس و تناظر AdS/CFT است. ویتن در سال ۱۹۹۵ وجود چنین نظریه‌ای را به‌عنوان انگاره بیان کرد ([۱۴]).

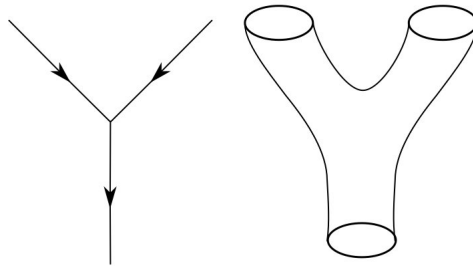
در تلاش برای پاسخ‌گویی به پرسش‌های بالا، پژوهش‌ها در نظریهٔ ریسمان نتیجه‌های زیادی به‌دست داده است. در پایان سال ۱۹۹۷، پژوهش‌ها به کشف نظریهٔ تناظر میدان همدیس^۲ با یاد دو سیترا^۳ یا AdS/CFT انجامید ([۱۴]). این تناظر نتیجه‌ای نظری است که نظریهٔ ریسمان را به دیگر نظریه‌های فیزیکی بهتر درک‌شده پیوند می‌دهد. تناظر AdS/CFT پیامدهایی برای مطالعهٔ سیاه‌چاله‌ها و گرانش کوانتومی داشته است و در موضوع‌های دیگری مانند فیزیک مادهٔ چگال و فیزیک هسته‌ای نیز به‌کار می‌رود [۴۰، ۵۰، ۵۸].

یکی از هدف‌های پژوهش‌های امروزی در نظریهٔ ریسمان، شناسایی ذرات بنیادی و یافتن سازوکاری پذیرفتنی برای توجیه انبساط کیهان^۴ است. با اینکه پیشرفت‌هایی به‌سوی این هدف‌ها در نظریهٔ ریسمان به‌دست آمده است، ولی هنوز نظریه با چالش‌هایی روبه‌رو است. یکی از چالش‌های نظریهٔ ریسمان این است که نظریه در همهٔ زمینه‌ها دارای تعریف رضایت‌بخش نیست. پراکندگی ریسمان‌ها با به‌کار بردن شگردهای نظریهٔ پریشیدگی، سراسر است‌ترین تعریف را می‌پذیرد، ولی تعریف کلی نظریه را بدون پریشیدگی نمی‌دانیم. نظریهٔ پریشیدگی گردایه‌ای از طرح‌های تقریب^۵ است که مستقیماً با پریشیدگی ریاضی^۶ (برای توصیف یک دستگاه کوانتومی پیچیده به‌کمک یک دستگاه ساده‌تر) مربوط است. رویکرد این روش عبارت است از آغاز با یک دستگاه ساده که حل ریاضی‌اش را می‌دانیم و افزودن پریشوندهٔ هامیلتونی^۷ که عبارت است از اغتشاشی^۸ ضعیف به دستگاه. اگر اغتشاش خیلی بزرگ نباشد، کمیت‌های فیزیکی گوناگون وابسته به دستگاه پریشیده (یعنی سطح‌های

1. Edward Witten 2. conformal field theory 3. anti-de Sitter 4. cosmic inflation 5. approximation schemes 6. mathematical perturbation 7. Hamiltonian perturbing 8. disturbance

انرژی و حالت‌های ویژه)، می‌تواند به‌کمک تصحیح‌هایی که به کمیتهای متناظر از دستگاه آغازین ساده اعمال می‌شود، بیان شود. این تصحیح‌ها که در سنجش با اندازهٔ خود، کمیتهای کوچک است، با به‌کاربردن روش‌های تقریب مانند سری‌های مجانبی، محاسبه می‌شوند. بنابراین دستگاه پیچیده بر پایهٔ داده‌های دستگاه سادهٔ حل‌پذیر، مطالعه و توصیف می‌شود [۳۷].

تفاوت‌هایی چشمگیر بین جهان توصیف‌شده به‌کمک نظریهٔ ریسمان و جهان روزمره دیده می‌شود. در زندگی روزمره، به سه بُعد مکانی و یک بُعد زمانی نیاز داریم. بنابراین به زبان فیزیک جدید، فضا-زمان، چهار بُعدی است. یکی از ویژگی‌های شگفت‌انگیز نظریهٔ ریسمان این است که برای سازگاری ریاضی‌اش، به بُعدهای افزوده‌شده (۶ یا ۷ یا بیشتر) نیاز است. از این‌رو این نظریه در بُعدهای ۱۰ یا ۱۱ یا حتی ۲۶، به‌صورت سازگار مطالعه می‌شود.

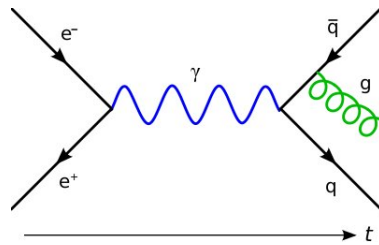


شکل ۶. برهم‌کنش در جهان کوانتومی: خط‌های جهانی ذرات نقطه‌گون یا لایه جهانی جارو شده (پوشانده‌شده) با ریسمان‌های بسته در نظریهٔ ریسمان

کاربرد مکانیک کوانتومی برای اشیای فیزیکی مانند میدان الکترومغناطیسی که در فضا-زمان پخش است، نظریهٔ میدان کوانتومی نام دارد. میدان الکترومغناطیسی، میدانی کلاسیک (ناکوانتومی) و پیامد حرکت بارهای الکتریکی است که با الکترودینامیک کلاسیک توصیف می‌شود و همزاد کلاسیک میدان تانسوری الکترومغناطیسی کوانتومی شده در الکترودینامیک کوانتومی است. میدان الکترومغناطیسی، با سرعت نور پخش می‌شود و با بارها و جریان‌های الکتریکی برهم‌کنش دارد. همزاد کوانتومی‌اش، یکی از چهار نیروی بنیادی طبیعت است. میدان الکترومغناطیسی را می‌توان ترکیبی از میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی دانست. میدان الکتریکی با بارهای ثابت تولید می‌شود و میدان مغناطیسی با بارهای متحرک. این دو، غالباً سرچشمه‌های میدان الکترومغناطیسی هستند. بارها و جریان‌ها با میدان الکترومغناطیسی بر پایهٔ معادله‌های ماکسول برهم‌کنش دارند.

در فیزیک ذرات بنیادی، نظریه‌های میدان کوانتومی پایهٔ درک فیزیک‌دانان از ذرات بنیادی است که به صورت برانگیختگی‌هایی در میدان‌های بنیادی مدل‌سازی می‌شوند. در نظریهٔ میدان کوانتومی، معمولاً احتمال‌های پیشامدهای فیزیکی گوناگون با به‌کاربردن روش‌های نظریهٔ پریشیدگی محاسبه می‌شود. در نظریهٔ میدان کوانتومی پریشیده که فاینمن و فیزیک‌دانان دیگر آن را در نیمهٔ اول قرن بیستم ابداع کردند، نمودارهایی به نام نمودار فاینمن (پیوست ۱۱) برای محاسبه به‌کار می‌رود. این نمودارها برای بیان دگرگونی‌ها و برهم‌کنش‌های ذرات نقطه‌گون به‌کار می‌رود [۵۸]. برای مثال، در نمودار فاینمن شکل ۷، یک الکترون (e^-) و یک پوزیترون (e^+) با هم ترکیب می‌شوند و یک فوتون (γ) تولید می‌کنند (موج سینوسی آبی) که تبدیل به یک جفت کوارک-ضدکوارک می‌شود (کوارک q و ضدکوارک \bar{q}) و پس از آن، ضدکوارک یک گلوئون^۱ (g) انتشار می‌دهد که با ماریچ سبز نمایش داده شده است.

در نظریهٔ فیزیک ذرات بر پایهٔ نظریهٔ ریسمان، طول ریسمان‌ها حدود ثابت پلانک^۲ یا 10^{-35} متر گرفته می‌شود، یعنی اندازه‌ای (طولی) که در آن، اثر میدان گرانشی مهم ارزیابی می‌شود [۱۴]. در اندازه‌های بسیار بزرگ‌تر از 10^{-35} متر مانند اندازه‌های مشاهده‌پذیر در آزمایشگاه‌های فیزیک،



شکل ۷. در این نمودار فاینمن، یک الکترون (e^-) و یک پوزیترون (e^+) با هم ترکیب می‌شوند و یک فوتون (γ) تولید می‌کنند.

چنین اشیائی (ریسمان‌ها) با ذرات صفر بُعدی (نقطه‌گون) یکی گرفته می‌شود و حالت ارتعاشی ریسمان، گونهٔ^۳ ذره را به دست می‌دهد.

صورت آغازین نظریهٔ ریسمان، نظریهٔ ریسمان بوزونی^۴ بوده است. این نظریه تنها بوزون‌ها را توصیف می‌کند، یعنی خانواده‌ای از ذرات که نیروهای بین ذرات مادی یا فرمیون‌ها^۵ را انتقال می‌دهد. در فیزیک ذرات، بوزون مانند فوتون یک ذره زیراتمی^۶ است که عدد کوانتومی اسپین‌اش، عدد صحیح نامنفی است و با توصیف آماری (منسوب به بوز و اینشتین) شناخته می‌شود. بوزون‌ها

1. gluon 2. Planck constant 3. type 4. Bosonic 5. Fermions 6. subatomic

یکی از دو ذرهٔ بنیادی زیراتمی هستند. ذرهٔ بنیادی زیراتمی دیگر، فرمیون با اسپین $\frac{k}{4}$ ، $k \in \mathbb{N}$ است. فرمیون‌ها از اصول آماری (آمار کوانتومی) فرمی-دیراک پیروی و در اصل طرد پائولی^۱ صدق می‌کنند (هر ذرهٔ زیراتمی مشاهده‌شده بوزون یا فرمیون است). در فرآیند پیشرفت دانش فیزیک، نظریهٔ ریسمان بوزونی با نظریه‌های آبریسمان^۲ جایگزین شده است. در نظریه‌های آبرتقارن، هر بوزون، یک همزاد^۳ به نام فرمیون دارد و به‌عکس ([۱۴]).

۴ بُعدهای افزوده و فشرده‌سازی

نظریهٔ نسبیت اینشتین، زمان را در کنار سه بُعد فضایی، به‌عنوان بُعد چهارم می‌گیرد. در نظریهٔ نسبیت عام، فضا و زمان در قالب هستی‌های جداگانه مدل نمی‌شود، بلکه در چارچوب فضا-زمان چهار بُعدی، یکدست می‌شوند. در این چارچوب، پدیدهٔ گرانش نتیجه‌ای از هندسهٔ فضا-زمان گرفته می‌شود ([۶۵، ص ۴]). با اینکه جهان با مدل فضا-زمان چهار بُعدی به‌خوبی توصیف می‌شود، به علل گوناگون، فیزیک‌دانان نظریه‌هایی در فضاهای با بُعدهایی بجز ۴ را نیز بررسی می‌کنند. این کار یا بنا بر ضرورت یا برای به‌دست آوردن دید بهتر یا امکان محاسبهٔ آسان‌تر، انجام می‌شود.

به‌منظور سازگاری ریاضی در نظریه‌های ریسمان، به بُعدهایی بیشتر از ۴ نیاز است. در نظریهٔ ریسمان بوزونی، فضا بیست‌وشش بُعدی و در نظریهٔ آبریسمان، فضا ده بُعدی و در نظریهٔ M ، فضا یازده بُعدی است. در توصیف پدیده‌های فیزیکی حقیقی با نظریهٔ ریسمان، مشاهده‌گر، بُعدهای افزوده را در آزمایش‌ها نمی‌بیند ([۷۰]). فشرده‌سازی، راهی برای کاستن بُعدهای افزوده در یک نظریهٔ فیزیکی است. در فشرده‌سازی، برخی از بُعدهای افزوده، بر خود بسته می‌شوند تا تشکیل دایره دهند ([۶۶، فصل ۶]). در حالت حدی که این بُعدهای خمیده بسیار کوچک می‌شوند، نظریه‌های با بُعدهای کمتر به‌دست می‌آید. باید دانست که هر فشرده‌سازی بُعدهای افزوده، مدلی درست برای توصیف طبیعت به‌دست نمی‌دهد. در یک مدل کامیاب فیزیک ذرات، خمینهٔ فشردهٔ به‌دست آمده از بُعدهای افزوده باید (همانند) خمینهٔ کالابی-یاثو باشد ([۶۶، فصل ۶]). در نظریهٔ ریسمان، این خمینه شش بُعدی گرفته می‌شود. کالتوسا^۴ و کلاین^۵ الکترومغناطیس و گرانش در فضای چهار بُعدی را با به‌دست آوردن هر دو برهم‌کنش از گرانش (به‌تنهایی) در فضای پنج بُعدی، یکپارچه کردند. این کاهش بُعد، با به‌کاربردن تقارن دستگانه انجام شد. با گسترش رویکرد کالتوسا-کلاین، فشرده‌سازی در

۱. اصل طرد پائولی بیانگر این است که در یک دستگاه کوانتومی، دو ذرهٔ یکسان با اسپین $\frac{k}{4}$ ، $k \in \mathbb{N}$ (یعنی فرمیون‌ها) نمی‌توانند یک حالت کوانتومی داشته باشند.

نظریهٔ ریسمان به کمک تقارن‌های دستگاه صورت می‌گیرد. در این فشرده‌سازی، فضا-زمان D بُعدی M^D (برابر 10 یا 11 یا 26 است) به صورت $M^D = M^4 \times M^{D-4}$ تجزیه می‌شود که M^4 فضا-زمان نافشردهٔ چهار بُعدی و M^{D-4} خمینهٔ کالابی-یائو (معمولاً شش بُعدی، $6 = D - 4$) است. برای آشنایی بیشتر با فشرده‌سازی در نظریهٔ ریسمان، [۲۶، ۳۰] را مطالعه کنید.

در رویکردی دیگر برای کاستن از بُعدهای افزوده، (جلد دوم [۵۵] و [۵۴] را ببینید) فیزیک‌دانان، جهان مشاهده‌پذیر را زیرفضایی چهار بُعدی از یک فضای با بُعد بالاتر می‌گیرند. در چنین مدل‌هایی، بوزون‌های تراز نیرو در فیزیک ذرات بنیادی، از ریسمان‌های باز که دو سر ریسمان‌ها به آن زیر فضای چهار بُعدی پیوست شده است، ناشی می‌شود و گرانش، از ریسمان‌های بسته که در فضای بزرگ‌تر پخش هستند، سرچشمه می‌گیرد. این رویکرد، نقشی مهم در تکامل مدل‌هایی از فیزیک جهان حقیقی بر پایهٔ نظریهٔ ریسمان دارد و توضیحی طبیعی برای ضعف گرانش نسبت به نیروهای بنیادی دیگر به دست می‌دهد [۵۵].

پس از پدیدار شدن خمینه‌های کالابی-یائو در فیزیک به عنوان ابزاری برای فشرده‌سازی بُعدهای افزوده، فیزیک‌دانان زیادی دریافته‌اند که با این فشرده‌سازی از نظریهٔ ریسمان، نمی‌توان تنها یک خمینهٔ کالابی-یائو به دست آورد، بلکه دو صورت متفاوت از نظریهٔ ریسمان به نام گونه‌های A و B می‌تواند بر خمینه‌های کالابی-یائو کاملاً متفاوت، منجر به یک نظریهٔ فیزیکی شود. در این حالت، دو خمینه را خمینه‌های آینه‌ای^۱ و رابطهٔ بین دو نظریهٔ فیزیکی را تقارن آینه‌ای می‌نامند [۱۱]. شکل خمینه‌های کالابی-یائو با به‌کاربردن آرایه‌ای از عددها به نام عددهای هاج^۲ توصیف می‌شود. آرایه‌های وابسته به خمینه‌های کالابی-یائو (که آینهٔ یکدیگرند) در حالت کلی متفاوت است. این تفاوت، شکل‌های متفاوت خمینه‌ها را بازتاب می‌دهد، ولی این آرایه‌ها با تقارنی به هم مربوط هستند ([۶۶، ص ۱۶۰-۱۶۳] را ببینید).

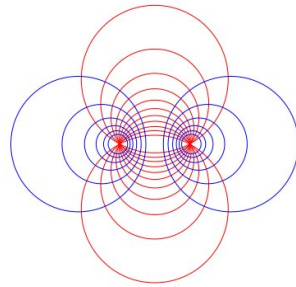
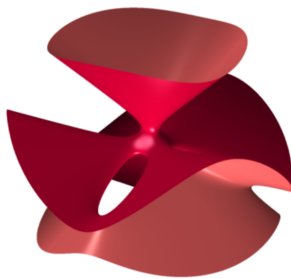
۵ کاربردها

هندسهٔ شمارشی بیشتر کاربردهای مهم تقارن آینه‌ای در هندسهٔ جبری شمارشی است. در این زمینهٔ پژوهشی، ریاضی‌دانان به دنبال شمارش تعداد جواب‌های مسائل هندسی با به‌کاربردن ابزارهای هندسهٔ جبری هستند. یکی از قدیمی‌ترین مسئله‌های هندسهٔ جبری شمارشی که حدود ۲۰۰ سال پیش از میلاد، ریاضی‌دان یونانی آپولونیوس^۳، آن را طرح کرده است، این است که در یک صفحه،

1. mirror manifolds 2. Hodge number 3. Apollonius

چند دایره می‌تواند بر سه دایره داده شده مماس باشد؟ پاسخ این پرسش، ۸ دایره است ([۶۶]، ص ۶۰). مسئله‌ای دیگر، نتیجه‌ای مشهور از ریاضی‌دانان قرن نوزدهم و بیانگر این است که دقیقاً ۲۷ خط راست بر رویه مکعبی کلیش^۱ (گردایه ریشه‌های یک چندجمله‌ای چهار متغیره درجه سه) یافت می‌شود ([۶۶]، ص ۱۶۷).

تا سال ۱۹۹۱ بیشتر مسئله‌های کلاسیک هندسه شمارشی (به کمک تقارن آینه‌ای و نیز دیگر روش‌ها) حل شد و علاقه به هندسه شمارشی فروکش کرد، ولی این موضوع دوباره با کارهای چند



شکل ۸. شکل سمت راست نشان‌دهنده دایره‌های آپولونیوس است. هر دایره آبی، دایره‌ای قرمز را با زاویه‌ای مناسب قطع می‌کند. هر دایره قرمز رنگ، از دو نقطه مشخص در شکل می‌گذرد و دایره‌های آبی، این دو نقطه را از هم جدا می‌کنند. شکل سمت چپ نمایانگر یک رویه کلیش در مقیاس موضعی است.

فیزیک‌دان در سال ۱۹۹۱ رونق یافت. آنها نشان دادند که تقارن آینه‌ای را می‌توان برای شمارش خم‌های درجه سه بر یک چندگونای/خمینه شش‌بُعدی درجه پنج به کار برد؛ دقیقاً ۳۱۷۲۰۶۳۷۵ خم! ([۶۶]، ص ۱۶۹). آنها نتیجه‌های کلی بیشتری برای شمارش خم‌های گویا به دست آوردند که بسیار فراتر از دستاوردهای ریاضی‌دانان در این زمینه بود. امروزه پیش‌بینی‌های شمارشی نظریه تقارن آینه‌ای، برهان‌های ریاضی دارد ([۶۶]، ص ۱۷۲).

فیزیک نظری تقارن آینه‌ای، ابزاری بنیادی برای انجام محاسبه در نظریه ریسمان است. در مدل A از نظریه توپولوژیک ریسمان، کمیت‌های فیزیکی جالب برحسب بی‌شمار عدد به نام ناورداهای گروموف-ویتن^۲ که محاسبه آنها بسیار سخت است، بیان می‌شود. نظریه توپولوژیک ریسمان، مدل ۲. Gromov-Witten invariants، ناورداهای گروموف-ویتن، عددهایی گویا هستند که تعداد خم‌های شبه‌تمام‌ریخت (نگاشتی هموار از یک رویه ریمان به یک خمینه تقریباً مختلط که در معادله کوشی-ریمان صدق می‌کند) با شرط‌های داده‌شده در یک خمینه هم‌تافته مانند X (تعداد خم‌هایی که n زیرخمینه داده‌شده از X را قطع می‌کنند) می‌شمارند. این ناورداهای n می‌توان به صورت رده‌های مانستگی یا همانستگی در فضایی مناسب یا برحسب حاصل ضرب ناوی تغییر شکل‌یافته همانستگی کوانتومی بیان کرد.

A همراه با یک فضای هدف است که یک فضا-زمان کلر گسترش یافته با بُعد حقیقی شش است. در این نظریه، با ریسمان‌های بنیادی (رویه‌های دو بُعدی) سروکار داریم. بسامدهای پراکنش این ریسمان‌ها تنها به فرم کلر فضا-زمان بستگی دارد و نه به ساختار مختلط آن.

نظریه ریسمان میدان که ریسمان‌های بسته مدل A را بررسی می‌کند، گرانش کلر نامیده می‌شود. با به‌کاربردن تقارن آینه‌ای، فیزیک‌دانان نظری می‌توانند محاسبه‌های سخت در مدل A را به محاسبه‌های آسان‌تر هم‌ارز (انتگرال‌های کلاسیک) در مدل B تبدیل کنند. مدل B نیز دارای ریسمان‌های بنیادی است، ولی بسامدهای پراکنش، کاملاً به ساختار مختلط بستگی دارد و به ساختار کلر بستگی ندارد. از طریق تقارن آینه‌ای، این بسامدهای محاسبه‌شده به بسامدهای مدل A مربوط می‌شوند و محاسبه ناوردهای GW را امکان‌پذیر می‌سازند ([۳۴، ۵۳۳-۵۳۴]).

تقارن آینه‌ای بجز کاربرد در نظریه ریسمان، برای درک جنبه‌هایی از نظریه میدان کوانتومی نیز به‌کار می‌رود. برای آگاهی از کاربردهای بیشتر، [۳۸، ۶۷۹-۷۷۷] و نیز [۳۹] را ببینید.

۶ نظریه اَبَرریسمان

نظریه اَبَرریسمان^۱ کوششی است برای توضیح همه ذرات و نیروهای بنیادی طبیعت در یک نظریه با مدل کردن آنها به کمک ارتعاشات ریسمان‌های بسیار کوچک اَبَرمتقارن. واژه اَبَرریسمان کوتاه‌شده واژه ریسمان اَبَرمتقارن است، زیرا برخلاف نظریه ریسمان بوزونی، این نظریه صورتی از نظریه ریسمان است که فرمیون‌ها و بوزون‌ها را بررسی می‌کند و اَبَرمتقارن را برای مدل کردن گرانش به‌کار می‌برد. از زمان انقلاب دوم اَبَرریسمان، پنج نظریه اَبَرریسمان به‌عنوان حدهای گوناگون یک نظریه به‌نام نظریه M، در نظر گرفته می‌شود. ژرف‌ترین مسئله در فیزیک نظری، سازگار کردن نظریه نسبیت عام با مکانیک کوانتومی است. نسبیت عام به توصیف گرانش می‌پردازد و برای ساختارهای با اندازه بزرگ (ستاره‌ها و کهکشان‌ها و اَبَرخوشه‌ها) به‌کار می‌رود، ولی مکانیک کوانتومی سه نیروی بنیادی دیگر را که بر اندازه‌های اتمی عمل می‌کنند، توصیف می‌کند.

مدل استانده نظریه کوانتومی میدان برای توصیف نیروهای بنیادی به‌کار می‌رود، ولی این مدل، بی‌شمار مقدار برای کمیتهای فیزیکی به‌دست می‌دهد. فیزیک‌دانان به‌کمک شگرد بازهنجارش، این مقادیرهای بی‌شمار را به تعدادی متناهی که بتواند آزمایش شود، تبدیل می‌کنند. این شگرد برای بررسی سه نیروی بنیادی، یعنی نیروهای الکترومغناطیسی، هسته‌ای قوی و هسته‌ای ضعیف (ولی نه برای گرانش) می‌تواند به‌کار رود. بنابراین پیشرفت نظریه گرانش کوانتومی، به ابزارهایی دیگر

بجز آنچه برای این نیروها به کار می‌رود) نیاز دارد [۵۴]. در نظریهٔ ریسمان، ریسمان‌ها با بسامدهای تشدید^۱ ارتعاش می‌کنند. هر ریسمان در این نظریه دارای یک همسازی^۲ یکتا است و همسازی‌های گوناگون، ذرات بنیادی گوناگون را به دست می‌دهند. نیروی کشش در یک ریسمان از مرتبهٔ نیروی پلانک (10^{44} نیوتن) است. برای نمونه، گراویتون^۳ با این نظریه، ریسمانی با دامنهٔ موج^۴ صفر انگاشته می‌شود. بررسی اینکه چگونه در نظریهٔ ریسمان می‌توان فرمیون‌ها را مطالعه کرد، ابداع مفهوم اَبَرْتقارن^۵ را در سال ۱۹۷۱ در پی داشت ([۵۶، ص ۱۰۴] را ببینید). نظریه‌های ریسمان که ارتعاشات فرمیون‌ها را بررسی می‌کنند، اکنون به نام نظریه‌های اَبَرریسمان شناخته می‌شود.

۷ تعداد نظریه‌های اَبَرریسمان

فیزیک‌دانان نظری از وجود پنج نظریهٔ گوناگون اَبَرریسمان برآشفته بودند.^۶ یک راه‌حل احتمالی این تنگنا، در آغاز آنچه انقلاب دوم اَبَرریسمان نامیده می‌شود، در دههٔ ۱۹۹۰ پیشنهاد شد. این پیشنهاد بیانگر این است که این پنج نظریه می‌تواند حدهایی از یک نظریهٔ بنیادی به نام نظریهٔ M باشد. این بیان هنوز انگاره است (جلد دوم از [۵۴] را ببینید). پنج نظریهٔ اَبَرریسمان سازگار عبارت‌اند از:

- نظریهٔ ریسمان گونهٔ I دارای یک اَبَرْتقارن ده‌بعدی (یعنی فضا-زمان ده‌بعدی) (۱۶ اَبَر بار^۷) است. این نظریه به این معنی ویژه است که ریسمان‌هایش، باز و بدون جهت یا بسته‌اند، ولی در دیگر نظریه‌ها ریسمان‌ها بسته و جهت‌دار هستند.
- نظریه‌های ریسمان گونهٔ II دارای دو اَبَرْتقارن ده‌بعدی (۳۲ اَبَر بار) هستند. این نظریه‌ها یا از گونهٔ IIA یا از گونهٔ IIB هستند. نظریهٔ گونهٔ IIA ناتکدست^۸ است، ولی نظریهٔ IIB تکدست است.
- نظریه‌های ریسمان دگرگونه بر پایهٔ چندگانه‌ای ویژه^۹ (غیرعادی) از اَبَرریسمان گونهٔ I و ریسمان بوزونی است. دو نوع ریسمان دگرگونه یافت می‌شود که در گروه‌های پیمان‌های ده‌بعدی با هم متفاوت‌اند. ریسمان دگرگونه $E_8 \times E_8$ و ریسمان دگرگونه $SO(32)$.

۳. ذرهٔ تَرابَر نیروی گرانشی ۵. تبدیلی ریاضی بین بوزون‌ها و فرمیون‌ها ۶. رویکردی دیگر به تعداد نظریه‌های اَبَرْتقارن، به ساختاری ریاضی به نام جبر ترکیب‌ها (composition algebra) منجر می‌شود. بر میدان عددهای حقیقی \mathbb{R} تنها هفت‌تا جبر ترکیب وجود دارد. در سال ۱۹۹۰ دو فیزیک‌دان در استرالیا بیان کردند که هفت نظریهٔ اَبَرْتقارن کلاسیک، در تناظر دوسویی با جبرهای ترکیب است. ۷. اَبَر بار مولدی از تبدیل‌های اَبَرْتقارن است؛ اَبَر بار نمونه‌ای از مفهوم کلی بار در فیزیک است.

جدول ۱

گونه	بُعد فضا/زمان	مولدهای اُبرتقارن Y SUS	نظریه‌های بی‌تقارن	ریسمان‌های باز	فشرده‌سازی دگرگونه	گروه پیمانه‌ای	ذرات با تندی بیش از تندی نور
بوزونی (بسته)	۲۶	$N = 0$	نه	نه	نه	هیچ	بله
بوزونی (باز)	۲۶	$N = 0$	نه	بله	نه	$v(1)$	بله
I	۱۰	$N = (1, 0)$	بله	بله	نه	SO(۳۲)	نه
IIA	۱۰	$N = (1, 1)$	نه	نه	نه	$v(1)$	نه
IIB	۱۰	$N = (2, 0)$	بله	نه	نه	هیچ	نه
Ho	۱۰	$N = (1, 0)$	بله	نه	بله	SO(۳۲)	نه
HE	۱۰	$N = (1, 0)$	بله	نه	بله	$E_8 \times E_8$	نه
نظریه M	۱۱	$N = 1$	نه	نه	نه	هیچ	نه

[۵۴]، ج ۲). E_8 یکی از گروه‌های لی مختلط ساده استثنایی با بُعد مختلط ۲۴۸ و رتبه^۱ ۸ است. دستگاه ریشه^۲ این گروه در \mathbb{R}^8 است. نام E_8 از رده‌بندی کارتان-کیلینگ برای جبرهای لی مختلط ساده می‌آید که به چهار سری نامتناهی با نام‌های A_n, B_n, C_n و D_n و پنج حالت استثنایی با نام‌های G_2, F_4, E_6, E_7 و E_8 نام‌گذاری شده است. جبر E_8 بزرگ‌ترین و پیچیده‌ترین جبر در بین حالت‌های استثنایی است. برای کسب آگاهی بیشتر در این زمینه [۱۰] را ببینید.

جدول ۱ نظریه‌های ریسمان و ویژگی‌های آنها را نشان می‌دهد.

۸ هم‌آمیزی نسبیت عام و مکانیک کوانتومی

نظریه نسبیت عام بیشتر در جایی به‌کار می‌رود که با جرم‌های بزرگ در دامنه‌هایی بزرگ از فضا-زمان سروکار داریم، ولی مکانیک کوانتومی معمولاً برای پدیده‌هایی در مقیاس اتمی (دامنه‌های کوچک فضا-زمان) به‌کار می‌رود. عمومی‌ترین حالتی که این دو نظریه با هم به‌کار می‌روند، در مطالعه سیاه‌چاله‌ها است. با داشتن حداکثر چگالی، یعنی حداکثر مقدار ممکن ماده در یک فضا و دامنه‌ای بسیار کوچک، هر دو نظریه باید هم‌زمان به‌کار روند تا بتوان وضعیت چنین مکان‌هایی را پیش‌بینی کرد، ولی هنگامی که این دو نظریه با هم به‌کار می‌رود، معادله‌ها فرومی‌ریزد و جواب‌های ناممکن مانند فاصله‌های موهومی و بُعد کمتر از ۱ به‌دست می‌آید!

مسئله اصلی در ناهم‌نهستی این دو نظریه این است که در طول‌های با مقیاس پلانک نسبیت عام، رویه‌ای هموار پیش‌بینی می‌کند، ولی مکانیک کوانتومی رویه‌ای تابدار^۳ و تصادفی^۴ به‌دست می‌دهد. این رویه‌ها را می‌توان به‌صورت پرده و پرده‌ها را به‌عنوان اشیائی با یکرختی بین آنها در

۱. بُعد چنبره بیشین‌اش (زیرگروه لی فشرده جابه‌جایی بیشین)

نظر گرفت. ریخت در این زمینه، وضعیتی از ریسمانی است که بین پرده‌های A و B کشیده شده است.

پیوست‌ها

۱ خم گویا نگاشت گویا از یک چندگونای تحویل‌ناپذیر^۱ X به چندگونای دیگر Y که با نماد $Y \dashrightarrow X$ نشان داده می‌شود، یک ریختار^۲ از یک مجموعه باز ناتهی $U \subseteq X$ به Y است. بنابر تعریف توپولوژی زاریسکی بر X ، U در X چگال (مکمل زیرمجموعه‌ای با بُعد کمتر از بُعد X) است. چنین ریختاری برحسب مختص‌های X و Y با نگاشتی گویا (به شکل $\frac{p}{q}$ که p و q چندجمله‌ای هستند و $q \neq 0$) بیان می‌شود. نگاشت دو سو گویا^۳ از X به Y ، نگاشت گویای $Y \dashrightarrow X$ است که دارای وارون گویای $X \dashrightarrow Y$ باشد. نگاشت دو سو گویا یک یکریختی از مجموعه‌ای باز و ناتهی از X به روی مجموعه‌ای باز و ناتهی از Y است. در این صورت می‌گوییم X و Y دو سو گویا هم‌ارز^۴ یا دو سو گویا هستند.

خم جبری، یک چندگونای جبری یک‌بُعدی است. خم گویا خمی جبری است که با یک خط (در فضای افکنشی مختلط) دو سو گویا هم‌ارز باشد. در اینجا خط یعنی چندگونای خطی یک‌بُعدی [۳۵].

۲ تقارن آینه‌ای مانستگی در نظریه ریسمان و نظریه‌های وابسته به آن، پوسته^۵ یک مفهوم فیزیکی است که مفهوم ذره نقطه‌ای را به بُعدهای بالاتر گسترش می‌دهد. برای نمونه، ذره نقطه‌ای، پوسته‌ای با بُعد صفر است، ولی ریسمان، پوسته‌ای یک‌بُعدی است. پوسته‌هایی که بُعد بزرگ‌تر از ۱ دارند را نیز می‌توان بررسی کرد ([۵۲]).

در نظریه ریسمان هر ریسمان می‌تواند باز یا بسته باشد. D -پوسته‌ها رده‌ای مهم از پوسته‌ها در بررسی پوسته‌های باز است. هنگامی که یک ریسمان باز در فضا-زمان پراکنده می‌شود، دو سر آن باید بر یک D -پوسته باشد. حرف D در D -پوسته نشانگر برآورده شدن شرط مرزی دیریکله است ([۵۲]). در زبان ریاضی، پوسته‌ها با کاربرد مفهوم رسته توصیف می‌شوند ([۱۱]). در رسته، اشیاء D -پوسته‌ها و ریختارهای بین پوسته‌های α و β ، حالت‌های ریسمان‌های باز با دو سر در α و β هستند ([۳۴]).

در مدل B برای نظریه توپولوژیک ریسمان، D -پوسته‌ها زیرخمینه‌های فشرده یک خمینه

کالابی- یائو همراه با داده‌های فیزیکی دیگر به دست آمده از دو سر ریسمان‌ها هستند ([۳۴]). رسته این پوسته‌ها، رسته مشتق شده بافه‌های منسجم^۱ بر خمینه کالابی- یائو است. در مدل A نیز D - پوسته‌ها را می‌توان زیرخمینه‌های یک خمینه کالابی- یائو گرفت. در این مدل، آنها زیرخمینه‌های لاگرانژ ویژه^۲ هستند ([۱۱]). بنابراین بُعد این زیرخمینه‌ها نصف بُعد فضایی است که در آن نشسته‌اند. به علاوه این زیرخمینه‌ها کمینه‌کننده طول، مساحت یا حجم هستند ([۶۶]). این رسته، رسته فوکایا^۳ نامیده می‌شود ([۱۱]). رسته مشتق شده بافه‌های منسجم، با ابزارهای هندسه مختلط و رسته فوکایا با ابزارهای هندسه هم‌تافته ساخته و مطالعه می‌شود.

بنابر انگاره تقارن آینه‌ای مانستگی کنتسویچ (HMS) رسته مشتق شده بافه‌های منسجم بر یک خمینه کالابی- یائو با رسته فوکایای خمینه آینه‌اش هم‌ارز است ([۱۱]). این هم‌ارزی یک صورت‌بندی ریاضی دقیق از تقارن آینه‌ای در نظریه توپولوژیک ریسمان و نیز یک پیوند پیش‌بینی‌نشده بین هندسه‌های مختلط و هم‌تافته به دست می‌دهد ([۶۶]).

۳ بافه منسجم فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. پیش‌بافه F بر X از داده‌های پایین تشکیل شده است (U ها و V ها مجموعه‌های باز هستند):

- نظیر هر U ، گردایه $F(U)$. عضوهای $F(U)$ برش‌های F بر U نامیده می‌شود. برش‌های F بر X برش‌های سراسری F نامیده می‌شود.
- نظیر هر شمول $V \subseteq U$ ، نگاشت $\text{res}_{V,U} : F(U) \rightarrow F(V)$. این نگاشت‌ها را ریختارهای تحدید نامند. اگر $s \in F(U)$ ، اغلب با $s|_V$ نشان داده می‌شود. این ریختارها دارای ویژگی‌های پایین نیز هستند:

- برای هر U ، نگاشت $\text{res}_{U,U} : F(U) \rightarrow F(U)$ ریختار همانی است.

- برای هر شمول $W \subseteq V \subseteq U$ داریم $\text{res}_{W,V} \circ \text{res}_{V,U} = \text{res}_{W,U}$.

یک بافه، پیش‌بافه‌ای است که ویژگی‌های زیر را نیز برآورده کند:

موضعی بودن: برای هر U و هر پوشش باز $\{U_i\}_{i \in I}$ از U و $s, t \in F(U)$ ، اگر

$$s|_{U_i} = t|_{U_i}, \quad i \in I \text{ آنگاه } s = t.$$

۲. جفت (M^{2n}, ω) را خمینه هم‌تافته نامیم اگر M^{2n} خمینه هموار $2n$ -بُعدی و ω یک ۲-فرم بسته ناتبایده بر M باشد. زیرخمینه $X \subseteq M$ را لاگرانژی خوانیم اگر $\dim X = n$ و $\omega|_X = 0$. اگر M خمینه کلر یا کالابی- یائو هم باشد، می‌توان یک n -فرم تمام‌ریخت $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$ بر M در نظر گرفت که Ω_1 و Ω_2 به ترتیب، بخش‌های حقیقی و موهومی Ω است. در این حالت، زیرخمینه لاگرانژی $X \subseteq M$ را زیرخمینه لاگرانژی ویژه می‌نامند اگر $\Omega_2|_X = 0$.

چسبانند: برای هر U و هر پوشش باز $\{U_i\}_{i \in I}$ از U و خانواده $\{s_i \in F(U_i)\}_{i \in I}$ ، اگر $s_i|_{V_i \cap U_j} = s_j|_{V_i \cap U_j}$ برای هر $i, j \in I$ ، آنگاه برش $s \in F(U)$ یافت می‌شود که $s|_{U_i} = s_i$ برای هر $i \in I$.

بخشی از ریاضیات که به مطالعهٔ بافه‌ها اختصاص دارد نظریهٔ بافه نامیده می‌شود؛ برای اطلاعاتی در این زمینه [۷] را مطالعه کنید.

مثال. (۱) فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک است و برای هر مجموعهٔ باز U ، گیریم $F(U)$ گردایهٔ همهٔ نگاشت‌های حقیقی (یا مختلط) پیوسته بر U باشد.

(۲) فرض کنیم X یک خمینهٔ هموار باشد و برای هر مجموعهٔ باز U ، گیریم $F(U)$ گردایهٔ همهٔ نگاشت‌های حقیقی هموار بر U باشد.

(۳) فرض کنیم X یک خمینهٔ همورا باشد و برای هر مجموعهٔ باز U ، گیریم $F(U)$ گردایهٔ همهٔ p -فرم‌های دیفرانسیل بر U ، $0 \leq p \leq \dim X$ باشد.

یک فضای حلقه‌ای،^۱ خانواده‌ای از حلقه‌های (جابه‌جایی) پارامتری شده با زیرمجموعه‌های باز یک فضای توپولوژیک همراه با هم‌ریختی‌های حلقه‌ای است که هم‌ریختی‌ها نقش تحدید را دارند. به بیان دقیق، فضای حلقه‌ای، یک فضای توپولوژیک X همراه با بافه‌ای از حلقه‌ها بر X به نام بافهٔ ساختاری است. بافهٔ منسجم را می‌توان گسترشی از کلاف‌های برداری دانست. برخلاف کلاف‌های برداری، بافه‌های منسجم تشکیل یک رستهٔ آبلی می‌دهند. بنابراین این رسته نسبت به عمل‌هایی مانند گرفتن هسته،^۲ نگاره^۳ و هم‌هسته^۴ بسته است. بافهٔ منسجم بر فضای حلقه‌ای (X, \mathcal{G}) بافهٔ \mathcal{F} با دو ویژگی زیر است:

• \mathcal{F} بر \mathcal{G}_X گونهٔ متناهی دارد، یعنی هر نقطه از X دارای یک همسایگی باز مانند U در \mathcal{F} است که برای آن، به‌ازای یک عدد طبیعی n ، ریختار پوشای $\mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{G}_X^n|_U$ یافت می‌شود؛

• برای هر مجموعهٔ باز U در X و هر عدد طبیعی n و هر ریختار $\mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{G}_X^n|_U$: φ از \mathcal{G}_X -مدول‌ها، هستهٔ φ گونهٔ متناهی دارد.

برای آشنایی بیشتر با نظریهٔ بافه [۱۷، ۵۷] را ببینید.

۴ رستهٔ مشتق‌شده رستهٔ مشتق‌شدهٔ $D(A)$ به‌دست آمده از رستهٔ آبلی A ، رسته‌ای است که اشیای آن، همبافت‌های زنجیری در A هستند. دو همبافت زنجیری (دو عضو $D(A)$) یکریخت

1. ringed space 2. kernel 3. image 4. cokernel

هستند اگر نگاشتی زنجیری بین آن دو یافت شود که در مانستگی‌های آن دو همبافت، یکرختی به‌دست دهد. ابداع رسته مشتق‌شده توسط گروتندیک^۱ و دانشجویش، وردیه^۲ پس از سال ۱۹۶۰ نقطه عطفی در گسترش انفجاری جبر مانستگی است. تعریف دقیق رسته مشتق‌شده بر پایه رسته مثلث‌بندی‌شده و نیز موضعی‌سازی رسته (گسترشی از موضعی‌سازی حلقه) است. برای آشنایی بیشتر، [۳] را ببینید.

۵ رسته فوکایا در توپولوژی هماتفه،^۳ رسته فوکایای خمینه هماتفه (M, ω) ، رسته $\mathcal{F}(M)$ است که اشیای آن، زیرخمینه‌های لاگرانژی M و ریختارهایش، گروه‌های زنجیری فلور^۴ است:

$$\text{Hom}(L_0, L_1) = CF(L_0, L_1)$$

ساختار دقیق آن به صورت یک A_∞ -رسته توصیف می‌شود. این واژه پس از آن به کار رفت که فوکایا زبان A_∞ را در زمینه مانستگی مورس معرفی کرد. چون رسته فوکایا یک A_∞ -رسته است، رسته مشتق‌شده وابسته و ابزار بیان تقارن آینه‌ای مانستگی است. فرض کنیم (M, ω) یک خمینه هماتفه باشد. برای زیرخمینه‌های لاگرانژی $L_0, L_1 \subseteq M$ که همدیگر را به طور تراگرد^۵ قطع می‌کنند، همبافت هم‌زنجیری فلور $CF^*(L_0, L_1)$ را مدول تولیدشده $L_0 \cap L_1$ می‌گیریم. همبافت هم‌زنجیری فلور را می‌توان گردایه ریختارها از L_0 به L_1 دانست. رسته فوکایا، A_∞ -رسته است، یعنی افزودن بر ترکیب‌های معمولی، دارای نگاشت‌های ترکیب بالاتر μ_d (نگاشت چندخطی) است که در آن،

$$\mu_d : CF^*(L_{d-1}, L_d) \otimes \cdots \otimes CF^*(L_1, L_2) \otimes CF^*(L_0, L_1) \rightarrow CF^*(L_0, L_1).$$

برای ساختار تقریباً مختلط سازگار J بر (M, ω) و مولدهای

$$p_{d-1,d} \in CF^*(L_{d-1}, L_d), \dots, p_{0,1} \in CF^*(L_0, L_1), p_{0,d} \in CF^*(L_0, L_d),$$

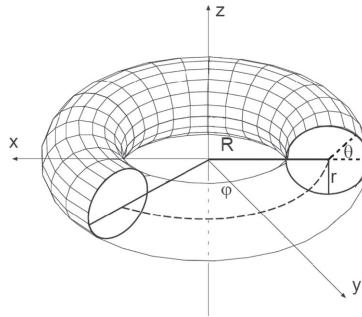
فضای مدولی چندضلعی‌های J -تمام‌ریخت با $(d+1)$ وجه که وجه‌های آن به L_0, L_1, \dots, L_d نگاشته می‌شوند، دارای عدد $n(p_{d-1,d}, \dots, p_{0,1}; q_{0,d})$ در حلقه ضرب است و داریم

$$\mu_d(p_{d-1,d}, \dots, p_{0,1}) = \sum_{q_{0,d} \in L_0 \cap L_d} n(p_{d-1,d}, \dots, p_{0,1}) q_{0,d} \in CF^*(L_0, L_d).$$

برای آشنایی بیشتر [۱۳] را بخوانید.

۶ انگاره SYZ این انگاره تلاشی برای درک تقارن آینه‌ای است. این انگاره را سه ریاضی‌دان به نام‌های استرومینجر و یائو و زازلو در [۵۸] مطرح کردند. این انگاره همراه با انگاره تقارن آینه‌ای مانستگی کاربردترین ابزار برای درک ریاضی تقارن آینه‌ای است. تقارن آینه‌ای مانستگی بر پایه جبر مانستگی و انگاره SYZ، بیانی هندسی از تقارن آینه‌ای است. در روش هندسی تقارن آینه‌ای، خمینه کالابی-یائو به تکه‌هایی ساده‌تر بخش می‌شود و با این فرآیند، خمینه کالابی-یائو آینه‌اش یافت و درک می‌شود ([۶۶]). مهم‌ترین خمینه‌های کالابی-یائو در نظریه ریسمان، شش‌بُعدی هستند. این خمینه‌ها را می‌توان به چنبره‌های سه‌بُعدی $S^1 \times S^1 \times S^1 = T^3$ که با نقطه‌های یک S^3 (گره سه‌بُعدی) اندیس‌دار شده‌اند، برگ‌بندی کرد. هر نقطه از این S^3 با یکی از چنبره‌های T^3 متناظر است، بجز تعدادی بی‌شمار نقطه «بد» که تشکیل بخش‌هایی به شکل شبکه شطرنجی بر خمینه کالابی-یائو می‌دهند و متناظر با چنبره‌های تکین هستند ([۶۶]). همین‌که خمینه کالابی-یائو به بخش‌های ساده‌تر بخش شد، تقارن آینه‌ای به صورت هندسی و شهودی درک می‌شود: برای نمونه، T^2 را (که با دایره‌های افقی (طولی) اندیس‌دار و با نقطه‌های یک دایره عمودی (عرضی) برگ‌بندی شده است) به عنوان فضا-زمان برای یک نظریه فیزیکی در نظر بگیرید. اشیای بنیادی این نظریه، ریسمان‌هایی هستند که بر پایه قانون‌های مکانیک کوانتومی در فضا-زمان پراکندگی دارند. یکی از دوگانی‌های پایه‌ای در نظریه ریسمان، « T -دوگانی» است. T -دوگانی بیانگر این است که پراکندگی یک ریسمان بر دایره به شعاع R ، با پراکندگی بر دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{R}$ هم‌ارز است، یعنی همه کمیت‌های مشاهده‌پذیر در یک توصیف با کمیت‌ها در توصیف دیگر، یکی گرفته می‌شوند ([۳۴]). برای نمونه، هنگامی که یک ریسمان بر دایره می‌پراکند، دارای گشتاور و نیز عدد چرخشی (تعداد دور زدن‌های ریسمان دور دایره) است. اگر ریسمانی دارای گشتاور p و عدد چرخشی n در یک توصیف باشد، دارای گشتاور n و عدد چرخشی p در توصیف دوگان است ([۵۸]).

با به‌کاربردن T -دوگانی هم‌زمان به همه دایره‌هایی که چنبره را برگ‌بندی می‌کنند، اندازه شعاع این دایره‌ها وارون می‌شود و چنبره‌ای فربه‌تر یا نازک‌تر از چنبره آغازین به دست می‌آید که آینه T^2 آغازین است ([۶۶]). T -دوگانی را می‌توان از دایره‌ها به چنبره‌های دو بُعدی در برگ‌بندی رویه $K3$ یا چنبره‌های سه‌بُعدی در برگ‌بندی خمینه شش‌بُعدی کالابی-یائو گسترش داد. به بیان کلی، انگاره SYZ بیانگر این است که تقارن آینه‌ای با کاربرد هم‌زمان T -دوگانی به این چنبره‌ها، هم‌ارز است ([۶۶]). برای هر خمینه کالابی-یائو شش‌بُعدی X ، خمینه کالابی-یائو شش‌بُعدی \hat{X} (آینه X) یافت می‌شود که برای آنها نگاشت‌های پیوسته پوشای $f : X \rightarrow B$ و $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow B$



شکل ۹. یک چنبره پارامتری شده

یک خمینه توپولوژیک فشرده سه‌بُعدی است) با ویژگی‌های زیر را داریم:

- زیرمجموعه چگال $B_{reg} \subseteq B$ یافت می‌شود که برای آن، نگاشت‌های

$$f|_{f^{-1}(B_{reg})} : f^{-1}(B_{reg}) \rightarrow B_{reg} \quad \text{و} \quad \hat{f}|_{\hat{f}^{-1}(B_{reg})} : \hat{f}^{-1}(B_{reg}) \rightarrow B_{reg}$$

تارسازی با تارهای چنبره‌های سه‌بُعدی (زیرخمینه‌های لاگرانژی ویژه ناتکین) هستند. نیز برای هر نقطه $b \in B_{reg}$ ، تارهای چنبره‌ای $f^{-1}(b)$ و $\hat{f}^{-1}(b)$ دوگان (مانند دوگانگی در چندگوناهای آبله) یکدیگر هستند؛

- برای هر $b \in B - B_{reg}$ ، تارهای $f^{-1}(b)$ و $\hat{f}^{-1}(b)$ به ترتیب زیرخمینه‌های لاگرانژی ویژه سه‌بُعدی تکین در X و \hat{X} هستند.

اگر $B = B_{reg}$ ، یعنی اگر هیچ تکنیکی یافت نشود، این حالت را حد نیم‌تخت انگاره SYZ نامند. SYZ را می‌توان در برخی حالت‌های ساده حدهای نیم‌تخت که با چندگوناهای آبله و رویه‌های K3 (تارسازی شده با خم‌های بیضوی) داده شده‌اند، ثابت کرد. انگاره SYZ پالایشی از انگاره آغازین تقارن آینه‌ای است که عددهای هاج خمینه‌های کالابی-یائو آینه یکدیگر را به هم مربوط می‌کند. هر دو انگاره (SYZ و HMS) پیش‌بینی‌های تقارن آینه‌ای را ریاضی‌وار بیان می‌کنند: انگاره HMS به روش جبری و انگاره SYZ به روش هندسی. بین این برداشت‌ها از تقارن آینه‌ای باید پیوندی موجود باشد، ولی تاکنون نمی‌دانیم که آیا این‌ها هم‌ارز هستند یا یکی قوی‌تر از دیگری است. البته می‌دانیم که با شرط‌هایی، تقارن آینه‌ای مانستگی، نظریه هاج تقارن آینه‌ای را به دست می‌دهد. همچنین در حالت‌های ساده می‌توان انگاره‌های HMS و SYZ را به هم پیوند داد. برای یافتن پیوند میان انگاره‌های SYZ و HMS، حالت حد نیم‌تخت برای بررسی آسان است.

در مورد خم بیضوی که یک خمینه کالابی-یائو یک‌بُعدی گرفته می‌شود، لوزی هاج چنین است:

$$\begin{array}{ccc} & ۱ & \\ & \diagdown & \diagup \\ ۱ & & ۱ \\ & \diagup & \diagdown \\ & ۱ & \end{array}$$

در مورد رویه K3 که یک خمینه کالابی-یائو دو بُعدی گرفته می‌شود، لوزی هاج چنین است:

$$\begin{array}{ccc} & ۱ & \\ & \diagdown & \diagup \\ & \circ & \circ \\ ۱ & ۲۰ & ۱ \\ & \diagup & \diagdown \\ & \circ & \circ \\ & ۱ & \end{array}$$

در حالت سه بُعدی که معمولاً خمینه کالابی-یائو نامیده می‌شود، پدیده‌ای جالب رخ می‌دهد. گاهی جفت‌های آینه‌ای به نام M و W (خمینه‌های کالابی-یائو سه بُعدی آینه یکدیگر) یافت می‌شود که دارای لوزی‌های هاج متقارن نسبت به یکدیگر در امتداد یک خط قطری هستند:

$$\begin{array}{ccccccc} & ۱ & & & & ۱ & \\ & \diagdown & & & & \diagup & \\ \circ & & \circ & & & \circ & \circ \\ & \circ & b & \circ & & \circ & a & \circ \\ ۱ & a & a & ۱ & ۱ & b & b & ۱ \\ & \circ & b & \circ & & \circ & a & \circ \\ & \circ & & \circ & & \circ & & \circ \\ & ۱ & & & & ۱ & & \end{array}$$

لوزی هاج W

لوزی هاج M

M و W نظیر مدل‌های A و B از نظریه ریسمان هستند. تقارن آینه‌ای نه تنها بُعدهای فضاها را مانسنگی را جابه‌جا می‌کند، بلکه ساختار هم‌تافته و ساختار مختلط جفت (خمینه)های آینه‌ای را نیز

مدولی $\overline{M}_{g,n}(X, A)$ دارای بُعد حقیقی

$$d := 2c_1^X(A) + (2k - 6)(1 - g) + 2n$$

است. $c_1^X \in H^2(X)$ که در آن، $H^2(X)$ همانستگی مرتبه دوم X است. منظور از c_1^X کلاس اول چرن X است و لذا $c_1^X(A)$ یک عدد است. اگر $\text{st}(C, x_1, \dots, x_n) \in \overline{M}_{g,n}$ پایدارسازی^۱ خم باشد و $Y := \overline{M}_{g,n} \times X^n$ (با بُعد حقیقی $2(k+1)n - 6g$)، نگاشت ارزۀ $\text{ev} : \mathcal{M}_{g,n}(X, A) \rightarrow Y$ یافت می‌شود که

$$\text{ev}(C, x_1, \dots, x_n, f) = (\text{st}(C, x_1, \dots, x_n), f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

نگاشت ارزۀ، رده بنیادی $\overline{M}_{g,n}(X, A)$ را به یک رده مانستگی گویا در $H_d(Y, Q)$ می‌برد که آن را با $GW_{g,n}^{X,A} \in H_d(Y, Q)$ نشان می‌دهند. به یک معنی، این رده مانستگی ناوردای گروموف-ویتن X برای داده‌های g, n و A است. این رده مانستگی، ناوردایی از رده ایزوتوپیی هم‌تافته خمینه X است.

برای بیان تعبیر هندسی ناوردای گروموف-ویتن، β را یک رده مانستگی در $\overline{M}_{g,n}$ و $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ را رده‌های مانستگی در X چنان می‌گیریم که جمع نقص بُعدهای α ها و β برابر با d باشد. فرض کنیم

$$GW_{g,n}^{X,A}(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n) := GW_{g,n}^{X,A} \cdot \beta \cdot \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n \in H_0(Y, Q)$$

که در آن «۰» نشانگر ضرب اشتراکی^۲ در مانستگی گویای Y است. این عدد گویا، ناوردای گروموف-ویتن برای رده‌های داده‌شده است. این عدد، شمارشی مجازی از تعداد خم‌های شبه‌تمام‌ریخت (در رده A از گونای g با دامنه در بخش β از فضای دلینی-مامفورد) به دست می‌دهد که n نقطه نشاندارشان به چرخه‌های نماینده α_i ها نگاشته می‌شود. به بیان ساده‌تر، یک ناوردای GW تعداد خم‌هایی را که n زیرخمینه داده‌شده از X را قطع می‌کنند، می‌شمارد، ولی به دلیل طبیعت مجازی شمارش، این عدد لزوماً عددی طبیعی نیست، زیرا فضای نگاشت‌های پایدار، مدارگون^۳ است که نقطه‌های ایزوتوپیی‌اش می‌توانند مقدرهایی را که عدد درست نیستند، در ناوردا در پی آورند [۴۸].

۹ تناظر پاد دو سیتِر تناظر پاد دو سیتِر با نظریه میدان همدیس (AdS/CFT) که گاهی دوگانی مالداسنا^۴ یا دوگانی پیمانهای/گراناش نامیده می‌شود، رابطه‌ای انگاره‌ای بین دو نظریه فیزیکی

است. در یک سو فضاها ی پاد دو سیترا از بُعد n ،

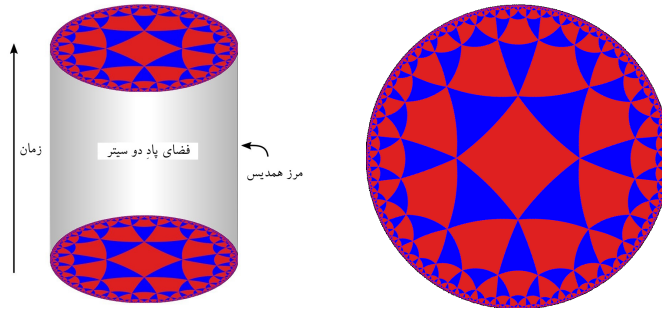
$$\text{AdS}_n = \{x \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -1\}$$

است که نظریه های گرانث کوانتومی صورت بندی شده برحسب نظریه ریسمان یا نظریه M ، بر آن به کار می رود. در سوی دیگر، تناظر نظریه های میدان همدیس (CFT) است که نظریه های میدان کوانتومی هستند. این دوگانی، پیشرفتی بزرگ را در درک نظریه ریسمان و گرانث کوانتومی موجب شده است، زیرا این تناظر، صورت بندی ناپریشیده از نظریه ریسمان با شرطهایی مرزی فراهم می کند. این دوگانی موفقیت آمیزترین تحقق اصل تمام نگاشت^۱ در گرانث کوانتومی است. این تناظر همچنین ابزاری قوی برای مطالعه نظریه های میدان کوانتومی قوی جفت شده است. انگاره تناظر AdS/CFT را مالدا سنا در پایان سال ۱۹۹۷ بیان کرد. پس از آن، فیزیک دانان بسیاری انگاره را در حالت های گوناگون بررسی کرده اند و به نتیجه های زیبای زیادی رسیده اند.

در تناظر AdS/CFT نظریه ریسمان یا نظریه M بر فضای زمینه پاد دو سیترا بررسی می شود؛ یعنی هندسه فضا-زمان برحسب جواب ویژه ای از معادله اینشتین به نام فضای پاد دو سیترا توصیف می شود. به بیان بسیار ساده، فضای پاد دو سیترا، آن مدل ریاضی از فضا-زمان است که در آن، مفهوم فاصله بین نقطه ها با مفهوم فاصله در هندسه اقلیدسی متفاوت است. این فضا بسیار به فضای هذلولوی دو بُعدی نزدیک است. فضای هذلولوی دو بُعدی را می توان قرصی دو بُعدی مثلث بندی شده (با مثلث ها و مربع ها) در نظر گرفت. فاصله بین نقطه های قرص را می توان چنان تعریف کرد که همه مثلث ها و مربع ها، یک اندازه باشند و فاصله دایره لبه ای از هر نقطه درونی، بی نهایت باشد. اکنون توده ای از قرص های هذلولوی را که هر کدام، حالتی از جهان را در یک زمان داده شده نشان می دهد، در نظر بگیرید. فضای هندسی به دست آمده، فضای پاد دو سیترا سه بُعدی است. این فضا همانند استوانه ای توپُر است که هر برش آن، نسخه ای از قرص هذلولوی است. رویه (جانبی) استوانه، نقشی مهم در تناظر AdS/CFT دارد. مانند صفحه هذلولوی، فضای پاد دو سیترا چنان خمیده است که فاصله هر نقطه درونی رویه از رویه جانبی، بی نهایت است [۶۷].

این ساخت، یک جهان فرضی را با دو امتداد فضایی و یک امتداد زمانی توصیف می کند و می توان آن را به هر بُعد گسترش داد؛ یعنی فضاهای هذلولوی (قرص ها) می توانند دارای بُعد بزرگ تر از ۲ باشند. ویژگی مهم فضای پاد دو سیترا لبه آن است (که در فضای پاد دو سیترا سه بُعدی همانند استوانه است). یک ویژگی این لبه این است که هر همسایگی کوچک گرداگرد هر نقطه آن، همانند

۱. holographic principle، اصل تمام نگاشت یک ویژگی نظریه (های) ریسمان و یک ویژگی مفروض برای گرانث کوانتومی است و بیانگر آن است که توصیف بخشی از فضا می تواند بر لبه آن بخش به رمز درآورده شود.



شکل ۱۰. شکل سمت راست، نشانگر سنگ‌فرش صفحه‌هذلولوی با مثلث‌ها و مربع‌ها است و شکل سمت چپ، فضای پاد دو سیتِر سه‌بُعدی مانند توده‌ای از قرص‌های هذلولوی است که هر یک، حالتی از جهان را در یک زمان داده‌شده نشان می‌دهد. فضا-زمان به‌دست آمده مانند استوانه توپُر است.

فضای مینکوفسکی است؛ یعنی مدلی از فضا-زمان که در فیزیک ناگرانشی به‌کار می‌رود. بنابراین می‌توان یک نظریهٔ کمکی را در نظر گرفت که در آن، فضا-زمان با لبهٔ فضا-زمان پاد دو سیتِر داده می‌شود. این مشاهده، نقطهٔ آغازین تناظر AdS/CFT است که می‌گوید لبهٔ فضای پاد دو سیتِر می‌تواند فضا-زمان برای یک نظریهٔ میدان همدیس در نظر گرفته شود. در تناظر AdS/CFT ادعا این است که این نظریهٔ میدان همدیس، با نظریهٔ گرانشی بر فضای پاد دو سیتِر بالا هم‌ارز است؛ یعنی قاموسی یافت می‌شود برای تعبیر (انتقال) محاسبه‌ها در یک نظریه به محاسبه‌ها در نظریهٔ دیگر. هر شیء (یا مفهوم) در یک نظریه، همزادی در نظریهٔ دیگر دارد. برای نمونه، یک ذره در نظریهٔ گرانشی ممکن است با مجموعه‌ای از ذرات در نظریهٔ لبه متناظر باشد. افزون بر این، پیش‌بینی‌ها در دو نظریه از نظر کمی یکی است. بنابراین اگر دو ذره در نظریهٔ گرانشی، ۴۰ درصد احتمال برخورد داشته باشند، دو گردایهٔ متناظر در لبه نیز ۴۰ درصد احتمال برخورد دارند.

۱۰ جبرهای کاتس-مودی چون ریسمان‌ها می‌توانند بی‌شمار حالت داشته باشند، تقارن به‌کار رفته برای توصیف نظریهٔ ریسمان به‌کمک جبرهای لی (با بُعد نامتناهی) بیان می‌شود؛ برای اطلاعاتی دربارهٔ جبرهای لی [۴] را ببینید. برخی از جبرهای کاتس-مودی $(K-M)$ که برای تقارن‌های نظریهٔ M بررسی شده است، E_{11} و E_{10} و گسترش‌های اَبَرمتقارن آنها است. جبر $K-M$ (نام‌گذاری شده به‌نام ویکتور کاتس و رابرت مودی که هم‌زمان و مستقل از هم، این جبرها را در سال ۱۹۶۸ کشف کردند) یک جبر لی معمولاً با بُعد نامتناهی است که با مولدها و رابطه‌هایی به‌کمک

ماتریس گسترش یافته کارتتان تعریف می‌شود. این جبرها گسترشی از جبرهای لی نیم‌ساده با بُعد متناهی هستند و بسیاری از ویژگی‌های وابسته به ساختار جبر لی مانند دستگاه ریشه، نمایش‌های تحویل‌ناپذیر و رابطه با خمینه‌های پرچم، همانندهایی طبیعی در جبرهای K-M دارد. رده‌ای از جبرهای K-M به نام جبرهای لی مستوی، در ریاضی و فیزیک نظری به‌ویژه در نظریه میدان همدیس دو بُعدی از اهمیت ویژه برخوردار است. فرض کنیم $C = (c_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ گسترش یافته کارتتان^۱ باشد. جبر لی $\mathfrak{g}'(C)$ با مولدهای $e_i, h_i, f_i, 1 \leq i \leq n$ ، بر پایه رابطه‌های زیر ساخته می‌شود:

$$[h_i, h_j] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

و

$$[h_i, e_j] = c_{ij}e_j, \quad [h_i, f_j] = -c_{ij}e_j, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij}h_i$$

که در آن، δ_{ij} دلتای کرونکر است. به‌علاوه اگر $i \neq j$ ، آنگاه

$$\text{ad}(e_i)^{1-c_{ij}}(e_j) = 0, \quad \text{ad}(f_i)^{1-c_{ij}}(f_j) = 0$$

که $\text{ad}(x)(y) = [x, y]$ ، $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ نمایش الحاقی \mathfrak{g} است. با فرض تقارن‌سازی، $\mathfrak{g}'(C)$ با زیرجبر مشتق شده $[\mathfrak{g}(C), \mathfrak{g}(C)] \equiv \mathfrak{g}'(C)$ از جبر K-M $\mathfrak{g}(C)$ که در ادامه تعریف می‌شود، یکرخت گرفته می‌شود.

ماتریس $n \times n$ گسترش یافته کارتتان $C = (c_{ij})$ از رتبه r را در نظر بگیرید. با تقریب یکرختی یک تحقق^۲ یکتا از C ، یعنی سه‌تایی $(\mathfrak{h}, \{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{\alpha_i^\vee\}_{i=1}^n)$ یافت می‌شود که \mathfrak{h} فضای برداری مختلط، $\{\alpha_i^\vee\}_{i=1}^n$ زیرمجموعه‌ای از \mathfrak{h} و $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ زیرمجموعه‌ای از فضای دوگان \mathfrak{h}^* است که شرط‌های زیر را برآورده می‌کنند:

- فضای برداری \mathfrak{h} بُعد $2n - r$ دارد؛
- گردایه‌های $\{\alpha_i^\vee\}_{i=1}^n$ و $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ مستقل خطی هستند؛
- برای هر $1 \leq i, j \leq n$ ، $\alpha_i(e_j^\vee) = c_{ij}$ ، α_i ها همانندهای^۳ ریشه‌های ساده یک جبر لی نیم‌ساده و α_i^\vee ها هم‌ریشه‌های ساده هستند.

۱. یعنی $C = DS$ که D ماتریس قطری و S ماتریس متقارن است چنان‌که $c_{ii} = 2$ و برای $i \neq j$ ، $c_{ij} \leq 0$ و $c_{ji} = 0$ اگر و تنها اگر $c_{ij} = 0$.

در این صورت، جبر K-M وابسته به C ، جبر لی $\mathfrak{g}(C)$ تعریف شده با مولدهای f_i ، e_i و عضوهای \mathfrak{h} است که

$$\begin{aligned} [h, h'] &= 0 \quad (h, h' \in \mathfrak{h}), & [h, e_i] &= \alpha_i(h)e_i \quad (h \in \mathfrak{h}), \\ [h, f_i] &= -\alpha_i(h)f_i \quad (h \in \mathfrak{h}), & [e_i, f_j] &= \delta_{ij}\alpha_i^\vee \end{aligned}$$

و اگر $i \neq j$ ، آنگاه $\text{ad}(e_i)^{-c_{ij}}(e_j) = 0$ و $\text{ad}(f_i)^{-c_{ij}}(f_j) = 0$. هر جبر لی حقیقی (احتمالاً با بُعد نامتناهی) نیز جبر K-M گرفته می‌شود، اگر مختلط‌سازی آن، جبر K-M باشد.

۱۱ نمودار فاینمن نمودار فاینمن یک نمایش نموداری^۱ از عبارات‌های ریاضی توصیف‌کننده رفتار و برهم‌کنش ذرات زیراتمی است. این نام‌گذاری پس از آن انجام شد که فیزیک‌دان آمریکایی ریچارد فاینمن این نمودارها را در سال ۱۹۴۸ معرفی کرد. نمودارهای فاینمن نمایشی ساده از فرمولی مجرد و اسرارآمیز به دست می‌دهد. این نمودارها تقریباً هر جنبه‌ای از فیزیک نظری را با انقلاب روبه‌رو کرد. در حالی که در آغاز، نمودارها به نظریه میدان کوانتومی اعمال می‌شد، در بخش‌های دیگر فیزیک، مانند نظریه حالت جامد نیز به کار رفتند.

نمودار فاینمن بیانی پریشیده از دامنه نوسان انتقال کوانتومی از یک حالت کوانتومی آغازین به حالت کوانتومی پایانی را نمایش می‌دهد. حالت آغازین بیشتر در سمت چپ و حالت پایانی در سمت راست پدیدار می‌شود. نمودار فاینمن متشکل از نقطه‌هایی به نام رأس‌ها و خط‌هایی چسبیده به این رأس‌ها می‌باشد. در الکترودینامیک کوانتومی ذرات دو گونه‌اند: ذرات مادی مانند الکترون‌ها یا پوزیترون‌ها (به نام فرمیون‌ها) و ذرات جابه‌جاگر (به نام بوزون‌های پیمانه‌ای). این ذرات در نمودار فاینمن چنین نمایش داده می‌شوند:

- الکترون در حالت آغازین با یک خط پُر، همراه با پیکانی که نشانگر اسپین ذره است، مانند $(\text{رأس}) \bullet \rightarrow$.
- الکترون در حالت پایانی با خطی همراه با پیکانی نشانگر اسپین ذره، مانند $\bullet \rightarrow (\text{رأس})$.
- پوزیترون در حالت آغازین با خطی پُر همراه با پیکانی نشانگر اسپین ذره، مانند $(\text{رأس}) \leftarrow \bullet$.
- پوزیترون در حالت پایانی با خطی پُر همراه با پیکانی نشانگر اسپین ذره، مانند $\bullet \leftarrow (\text{رأس})$.

• فوتون مجازی در حالت آغازین و پایانی با خط موج‌دار ($\sim \bullet$ و $\bullet \sim$).

در الکترومغناطیس کوانتومی، به هر رأس سه‌تا خط چسبیده است. یک خط بوزونی، یک خط فرمیونی همراه با پیکانی به‌سوی رأس و خطی فرمیونی همراه با پیکانی که از رأس دور می‌شود. رأس‌ها می‌تواند با پخش‌کننده‌های بوزونی یا فرمیونی به هم ببیوند. پخش‌کننده بوزونی با خطی موج‌دار که دو رأس را به هم می‌پیوندد، نمایش داده می‌شود ($\bullet \sim \bullet$). پخش‌کننده فرمیونی با خطی پُر (همراه با پیکانی در یکی از جهت‌ها) بین دو رأس، نمایش داده می‌شود ($\bullet \leftarrow \bullet$).

سپاسگزاری نویسنده از جناب آقای دکتر علی ایمانپور و نیز سردبیر محترم مجله و داور(ان) و ویراستار(ان) گرامی برای پیشنهاد و اصلاح‌ها و ویرایش ارزنده‌شان و همچنین از آقای دکتر رضا یغماییان برای تایپ مقاله صمیمانه سپاسگزاری می‌کند.

مراجع

- [۱] آیزاف، آکساندر و؛ کرانتس، ستیون ج.، دوریا و متریکهای ناورد در آنالیز مختلط، ترجمه ارسلان شادمان، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۱۹ (۱۳۷۹)، شماره ۲، ۳۹-۵۵.
- [۲] پارکر، باری، نظریه جهانشمول فیزیکی از اتم تا ابررسمانها، ترجمه حسن غفوری فرد و جلال‌الدین پاشایی‌راد، نشر مرکز، تهران، ۱۳۷۴.
- [۳] جعفری، امیر؛ یاسمی، سیامک، نظریه رسته‌ها؛ هدف یا ابزار، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۱ (۱۴۰۱)، شماره ۲، ۴۷-۶۱.
- [۴] جهانی‌نژاد، رضا، نگاهی اجمالی به تاریخچه پیدایش نظریه حلقه‌ها، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۴ (۱۴۰۴)، شماره ۱، ۱-۵۷.
- [۵] دایگرف، آر.، ریاضیات نظریه ریمان، ترجمه ویدا میلانی، نشر ریاضی، ۱۶ (۱۳۸۶)، شماره ۲، ۳۵-۴۵.
- [۶] زیمرمن جونز، اندرو؛ رابینز، دنیل، نظریه ریمان، ترجمه مریم ذوقی، آوند دانش، تهران، ۱۳۹۴.
- [۷] سیباخ، ال؛ سیباخ، ال؛ استین، ال.، بافه چیست؟، ترجمه داود حسن‌زاده للکامی و هاجر روشن شکالگورابی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۳۴ (۱۳۹۴)، شماره ۲، ۵۳-۸۰.
- [۸] گوستر، استیون اس.، آشنایی با نظریه ریمان، ترجمه محمدعلی جعفری و محسن ایرج، انتشارات مازیار، تهران، ۱۳۹۶.
- [۹] نریمان، سام، دوره‌های تحلیلی روی خمینه‌های مختلط، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۳۰ (۱۳۹۰)، شماره ۳، ۶۳-۸۶.

[10] Adams, J. F., *Lectures on Exceptional Lie Groups*, Chicago Lecture in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, 1966.

[11] Aspinwall, P. A., et al., *Dirichlet Branes and Mirror Symmetry*, Clay Mathematics Monographs, vol. 4, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

- [12] Atiyah, M. F., *K-theory*, CRC Press, New York, 2018.
- [13] Auroux, D., *A Beginner's Introduction to Fukaya Categories*, Lectures on Contact and Symplectic Topology at Université de Nantes (2013), available at [arxiv: 1301.7056](https://arxiv.org/abs/1301.7056).
- [14] Becker, K., Becker, M., Schwarz, J. H., *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [15] Blackadar, B., *Operator Algebras: Theory of C^* -Algebras and von Neumann Algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [16] Bocklandt, R., *A Gentle Introduction to Homological Mirror Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2021.
- [17] Bredon, G. E., *Sheaf Theory*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 170, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [18] Candelas, P., et al., A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory, *Nuclear Phys. B*, **359** (1991), no. 1, 21-74.
- [19] Candelas, P., et al., Vacuum configurations for superstrings, *Nuclear Phys. B*, **258** (1985), 46-74.
- [20] Candelas, P., et al., Calabi-Yau manifolds in weighted \mathbb{P}^4 , *Nuclear Phys. B*, **341** (1990), no. 2, 383-402.
- [21] Connes, A., *Non Commutative Geometry*, Academic Press, New York, 1994.
- [22] Consani, C., Scholten, J., Arithmetic on a quintic threefold, *Internat. J. Math.*, **12** (2001), no. 8, 943-972.
- [23] Cox, D. A., Katz, S., *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [24] Deligne, P. et al., eds., *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*, vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [25] Dixon, L. J., Some world-sheet properties of super-string compactifications on orbifolds and otherwise, in *Summer Workshop in High-energy Physics and Cosmology*, Trieste, Italy, 1987, 67.
- [26] Font, A., Theisen, S., Introduction to String Compactification, Lecture Notes Physics, vol. 668, Springer-Verlag, Berlin, 2005, 101-181.
- [27] Friedlander, E. M., Grayson, D. R., eds., *Handbook of K-theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [28] Givental, A., Equivariant Gromov-Witten invariants, *Internat. Math. Res. Notices*, **13** (1996), 613-663.
- [29] Givental, A., A mirror theorem for toric complete intersections, in *Topological Field Theory, Primitive Forms and Related Topics*, Birkhäuser, Boston, 1998, 141-175.
- [30] Grana, M., Triendl, H., *String Theory Compactification*, SpringerBriefs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 2017.
- [31] Greene, B., *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory*, W. W. Norton & Company, New York, 2024.
- [32] Greene, B. R., Plesser, M. R., Duality in Calabi-Yau moduli space, *Nuclear Phys. B*, **338** (1990), no. 1, 15-37.
- [33] Griffiths, P., Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994.
- [34] Gowers, T., et al., eds., *The Princeton Companion to Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 2009.
- [35] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [36] Higgs, N., Roe, J., *Analytic K-Homology*, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [37] Holmes, M. H., *Introduction to Perturbation Methods*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2013.
- [38] Hori, K., *Mirror Symmetry*, Clay Mathematics Monographs, vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

- [39] Intriligator, K., Seiberg, N., Mirror Symmetry in three dimensional gauge theories, *Phys. Lett. B*, **387** (1996), no. 3, 513-519.
- [40] Klebanov, I. R., Maldacena, J. M., Solving quantum field theories via curved spacetimes, *Phys. Today*, **62** (2009), no. 1, 28.
- [41] Kontsevich, M., Enumeration of rational curves via torus actions, in *The Moduli Space of Curves*, R. H. Dijkgraaf, et al., eds., Birkhäuser, Boston, 1995.
- [42] Kontsevich, M., Homological algebra of mirror symmetry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich, Switzerland 1994*, Birkhäuser-Verlag, Basel, Switzerland, 1995.
- [43] Lerche, W., et al., Chiral rings in $N=2$ superconformal theories, *Nuclear Phys. B*, **324** (1989), no. 2, 427-474.
- [44] Lian, B., et al., Mirror symmetry and localization I, *Asian J. Math.*, **1** (1997), no. 4, 729-763.
- [45] Lian, B., et al., Mirror symmetry and localization II, *Asian J. Math.* **3** (1999,a), no. , 109-146.
- [46] Lian, B., et al., Mirror symmetry and localization III, *Asian J. Math.* **3** (1999,b), no. 4, 771-800.
- [47] Lian, B., et al., *Mirror Principles IV*, Surveys in Differential Geometry, International Press, Somerville, MA, 2000.
- [48] McDuff, D., Salamon, D., *J-Holomorphic Curves and Symplectic Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 52, Providence, RI, 2004.
- [49] Melnikov, I., et al., Recent developments in $(0, 2)$ mirror symmetry, symmetry, Integrability and geometry: Methods and applications, *SIGMA*, **8** (2012), 068.
- [50] Merali, Z., Collaborative physics: String theory finds a bench mate, *Nature*, **478** (2011), 302-404.
- [51] Mirror symmetry (string theory), in *Wikipedia*, available at [https://en.wikipedia.org/wiki/Mirror_symmetry_\(string_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Mirror_symmetry_(string_theory)).
- [52] Moore, G., What is . . . a brane?, *Notices Amer. Math. Soc.*, **52** (2005), no. 2, 214-215.
- [53] Park, E., *Complex Topological K-Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [54] Polchinski, J. G., *String Theory*, vols. I & II, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, 2005.
- [55] Randall, L., et al., An alternative to compactification, *Phys. Rev. Lett.*, **83**(1999), 4690.
- [56] Rickles, D., *A Brief History of String Theory: From Dual Models to M-Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2014.
- [57] Rosiak, D., *Sheaf Theory Through Examples*, The MIT Press, Massachusetts, 2022.
- [58] Sachdev, S., Strange and stringy, *Sci. Amer.*, **308** (2013), no. 1, 44-51.
- [59] Strominger, A., Yau, S.T., Zaslow, E., Mirror symmetry is T-duality, *Nuclear Phys. B*, **479** (1996), no. 1-2, 243-259.
- [60] Sugihara, K., Anomalous mirror symmetry generated by optical illusion, *Symmetry*, **8** (2016), no. 4, 21.
- [61] Szabo, R. J., *An Introduction to String Theory and D-Brane Dynamics*, 3rd ed., World Scientific, Singapore, 2025.
- [62] Szymik, M., K3 spectra, *Bull. London Math. Soc.*, **42** (2020), no. 1, 137-148.
- [63] Tomasiello, A., *Geometry of String Theory Compactifications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2022.
- [64] Vafa, C., Topological mirrors and quantum rings, in *Mirror Symmetry I*, Shing-Tung Yau, ed., AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 9, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998, 97-120.
- [65] Wald, R. M., *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [66] Yau, S-T., Nadis, S., *The Shape of Inner Space: String Theory and the Geometry of the Universe's Hidden Dimensions*, Basic Books, New York, 2010.
- [67] Zaffaroni, A., Introduction to the AdS/CFT correspondence, *Class. Quantum Gravity*, **17** (2000), 3571-3597
- [68] Zee, A., *Quantum Field Theory in a Nutshell*, 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, 2010.

- [69] Zhang, J., Khan, G., Statistical mirror symmetry, *Diff. Geom. Appl.*, **73** (2020), 101673.
[70] Zwiebach, B., *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

سید محمدباقر کاشانی: دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده علوم ریاضی
رایانامه: kashanim@modares.ac.ir

Mirror Symmetry

S. M. B. Kashani¹

Faculty of Mathematical Sciences, Tarbiat Modares University, Iran

Abstract. In this expository article, mirror symmetry/string theory is introduced shortly and their place in physics and mathematics and their applications in algebraic geometry, quantum field theory, theoretical physics, cosmology and calculation in mathematical physics are given. Among the mentioned applications in enumerative geometry are: the answer to the Apollonius problem and the expression of the number of straight lines on the Clebsch cubic surface, and the counting of 3rd degree rational curves on 5th degree polygons (quintic threefolds)/6-dimensional domes or polytopes (toric varieties) and the counting of rational bends.

Keywords: mirror symmetry, string theory, quantum field theory, cosmology, enumerative algebraic geometry

Article history: Received 7 October 2023; Accepted 17 February 2024

Article type: survey
