فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۴، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۴)، صص ۲۳۷ تا ۲۵۳

تحقیقی دربارهٔ آموزش و یادگیری احتمال (بخش اول)*

سی. باتانرو، ای. جی. چرنوف، ای. اِنگل، اچ. اس. لی، ای. سانچس
ترجمهٔ مهدی شمس✉، سیدعلی محمدیه

چکیده. این مقاله بخش اول ترجمهٔ کتابچه‌ای است که در آن خلاصهٔ برخی از مهم‌ترین و جدیدترین پژوهش‌ها در آموزش احتمال عرضه شده است. مطالبی که به آنها اشاره می‌شود عبارت‌اند از تحلیل ماهیّت شانس و احتمال، اجزای اصلی دانش و استدلال احتمالاتی، تدریس احتمال در برنامه‌های درسی مدرسه، شهود و مشکلات یادگیری در احتمال، فناوری و منابع آموزشی در آموزش و یادگیری احتمال، آموزش معلمان برای تدریس احتمال. ــ و.

۱ مقدمه

شهروندان به‌منظور عملکرد خوب و درست در جامعه، باید بر تفکّر تعیُّن‌گرایانهٔ خود غلبه کنند و وجود شانس در رخدادهای طبیعی را بپذیرند. در عین حال، باید با راهبردها و روش‌های استدلالی آشنا شوند که به آنها کمک می‌کند در موقعیت‌های روزانه و حرفه‌ای که متضمن وجود شانس هستند، تصمیم‌های مناسبی اتخاذ کنند. بسیاری از مقامات آموزش و پرورش کشورها توانسته‌اند با اضافه کردن مبحث احتمال به برنامهٔ درسی در مقاطع تحصیلی دانش‌آموزان و دوره‌های ضمن خدمت معلمان، سواد آماری را در میان مردم رشد دهند. با این حال، گنجاندن یک موضوع در برنامهٔ درسی یک دورهٔ تحصیلی به‌طور خودکار آموزش و یادگیری صحیح آن را تضمین نمی‌کند، چراکه برخی

عبارات و کلمات کلیدی: احتمال، استدلال احتمالاتی، برنامه‌های آموزشی، شناخت‌شناسی، آموزش ریاضی
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۲/۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۱۴

*Batanero, C., Chernoff, Egan J., Engel, J., Lee, Hollylynne S., Sánchez, E., *Research on Teaching and Learning Probability*, Springer Open, New York, 2016, 1-12.

doi: 10.30504/mct.2023.1389.1977

ویژگی‌های خاص احتمال، از جمله دیدگاه چندگانهٔ احتمال یا برگشت‌ناپذیریِ آزمایش‌های تصادفی، در دیگر موضوعات علمی یافت نمی‌شود و باعث چالش‌هایی خاص برای معلم‌ها و دانش‌آموزان می‌شود. با پژوهش در حوزهٔ آموزش احتمال، در تلاش هستیم تا به چالش‌های مزبور پاسخ دهیم و همان‌طور که گروه مطالعاتیِ تدریس و یاددهیِ احتمال[۱] در سیزدهمین همایش بین‌المللی آموزش ریاضی[۲](ICME) [۱] نشان داد، بنای این فرآیند پژوهشی به‌خوبی نهاده شده است. همچنین می‌توان پژوهش دربارهٔ آموزش احتمال را در مقاله‌های بسیاری دربارهٔ این موضوع مشاهده کرد که این مقاله‌ها در کنفرانس‌هایی مانند کنفرانس اروپایی آموزش ریاضی[۳](CERME) [۲، ۱۱]، کنفرانس بین‌المللی آموزش آمار[۴](ICOTS) [۱۷] و همچنین در کنفرانس‌های منطقه‌ای یا ملّی مانند کنفرانس آمریکای لاتین در آموزش ریاضی[۵](RELME) ارائه شده‌اند. در این مطالعهٔ پیمایشی مطابق با آخرین پیشرفت‌های علمی، پیش از پرداختن به برخی اندیشه‌ها و سؤال‌هایی که می‌توانند در چارچوب‌بندیِ برنامهٔ پژوهشیِ آینده مؤثر باشند، به مرور پژوهش‌های کنونی در زمینهٔ آموزش احتمال می‌پردازیم.

۲ مطالعهٔ پیمایشی مطابق با آخرین پیشرفت‌های علمی

پژوهش در زمینهٔ آموزش احتمال، سابقه‌ای نسبتاً طولانی دارد و همان‌طور که در بخش‌های بعدی توضیح داده خواهد شد، شامل تحلیل‌های نظری و پژوهش‌های تجربی دربارهٔ موضوعات گوناگون بوده و از دیدگاه‌های متفاوت بررسی شده است. با مرور مقاله‌های موجود دربارهٔ آموزش احتمال، مشخص می‌شود که چندین موضوع اصلی مطرح شده‌اند. از این موضوع‌ها برای مرور مختصرِ درک فعلی ما از آموزش احتمال استفاده شده است و در راستای بحث‌های مربوط به گروه مطالعات موضوعی ،ICME ۲۰۱۶ ارائه شده است.

۱.۲ ماهیّت شانس و احتمال

دربارهٔ هر زمینه‌ای از آموزش ریاضی که بخواهیم پژوهش کنیم، پشتوانهٔ پژوهش ما باید اندیشه‌های شناخت‌شناسانه دربارهٔ اشیای مورد بحث باشد. این تفکرات به‌ویژه هنگام تمرکز روی احتمال، مهم و سودمند هستند، زیرا در این موضوع، رویکردهای مفهومیِ گوناگون که هم بر تفسیر ماهیّت تصادف و هم بر برنامهٔ درسی مدارس تأثیر می‌گذارند، هنوز محل مناقشه و بحث در مجامع علمی است.

1. Teaching and Learning of Probability Topic Study Group 2. 13th International Congress of Mathematics Education 3. the European Mathematics Education Conference 4. the International Conference on Teaching Statistics 5. the Latin-America Mathematics Education Conference

موضوعِ احتمال از زمان پیدایش، در دو مسیر بر مبنای دو دیدگاه اصلی و البته متفاوت، پرورش یافته است [۳۲]. جنبهٔ آماری احتمال، به نیاز برای یافتنِ قوانین ریاضیِ عینی حاکم بر فرایندهای تصادفی مربوط است؛ مقدارهای عددیِ احتمال پیشامدها از طریق داده‌های به‌دست آمده از جست‌وجو و تکرار آزمایش‌ها تعیین می‌شوند. اما جنبهٔ شناختی که تکمله‌ای بر دیدگاه پیشین است، احتمال را درجه‌ای از باورهای شخصی می‌داند که وابسته به اطلاعات گردآوری‌شده توسط فردی است که می‌خواهد احتمال را تعیین کند. بر اساس این دو دیدگاه اصلی، رویکردهای متعددی به مطالعهٔ احتمال در طول تاریخ وجود داشته‌اند که در آنها سهم آثار نویسندگان مهم در پیشرفت موضوعِ احتمال، نمایان بوده است [۴، ۵، ۶، ۷، ۱۵، ۲۱]. در حال حاضر، تعبیرهای اصلی احتمال عبارت‌اند از شهودی، کلاسیک، فراوانی‌گرا، شخصی، منطقی، تمایل طبیعی و اصل‌موضوعی. هر یک از این دیدگاه‌ها شامل برخی مسائل فلسفی می‌شوند و عمدتاً برای مدل‌سازی پدیده‌های خاص دنیای واقعی و یا برای گنجاندن در دورهٔ تحصیلی برای دانش‌آموزان خاص مناسب هستند. در بخش‌های بعدی، ویژگی‌های اصلی دیدگاه‌های پیشگفته دربارهٔ احتمال را به‌طور مختصر بیان می‌کنیم که بخشی از آن در برنامهٔ درسی مدارس نیز آمده است.

۱.۱.۲ دیدگاه شهودی احتمال

نظریهٔ احتمال اساساً تلفیق ظاهریِ دیدگاه‌های شهودی دربارهٔ شانس است که پیامدی بنیادی دارد و آن، اختصاص اعدادی به‌عنوان احتمال رخداد به پیشامدهای تصادفی است. به‌لحاظ تاریخی، نگرش شهودی به مفهوم شانس در فرهنگ‌های گوناگون خیلی زود ریشه دواند و با مسائل مرتبط با شرط‌بندیِ منصفانه در بازی‌های شانسی، پیوند برقرار کرد [۵، ۸]. تاسِ مکعبی در فرهنگ برخی تمدن‌های نخستین (همچون مصری، چینی، یونانی و رومی) بسیار رواج داشته است و آنها از بازی‌های شانسی برای پیش‌بینی یا مهار سرنوشت در تصمیم‌گیری‌ها یا مراسم مذهبی استفاده می‌کردند. جالب است که پیشرفت نظریهٔ احتمال، موضوعی بسیار جدیدتر است و هیچ علّت مشخصی هم برای توضیح این تأخیر وجود ندارد [۲۳].

درک شهودی از شانس و احتمال، حتی در خردسالان نیز نمود دارد که از عبارت‌هایی کیفی (مانند «احتمال داره» یا «امکان نداره») برای بیان میزان باورشان به رخداد پیشامدهای تصادفی استفاده می‌کنند. معلم می‌تواند از این دیدگاه‌های شهودی استفاده و به بچه‌ها کمک کند تا درک خود را از موضوع احتمال عمق ببخشند و احتمال را به‌عنوان ابزاری برای مقایسهٔ شانس رخدادِ پیشامدهای مختلف در دنیایی پُر از عدم قطعیت به‌کار گیرند.

۲.۱.۲ تعبیر کلاسیک

پیشرفت‌های نظریِ آغازین در نظریهٔ احتمال، به بازی‌های شانسی مانند پرتاب تاس مرتبط بودند. برای مثال، پاسکال [۴۶] در همکاری خود با فرما، این مسئله را حل کردند که در میانهٔ یک بازی شانسی، اگر بازی «به‌اضطرار» متوقف شود، تخمین مبلغ منصفانه‌ای که باید به هر بازیکن داده شود چیست: به نسبت شانس بُرد هر بازیکن، پول بین آنها تقسیم می‌شود. در مثالی دیگر، کاردانو [۱۸] به بازیکن‌ها توصیه کرد که تعداد کل امکان‌ها و تعداد روش‌هایی که منجر به نتایج مساعد می‌شود را در نظر بگیرند و دو عدد را مقایسه کنند تا یک شرط‌بندی منصفانه انجام دهند.

تعجب‌آور نیست که اساس این مفهوم بر این فرض استوار بود که همهٔ پیشامدهای مقدماتی هم‌شانس هستند، زیرا این فرضی منطقی برای بسیاری از بازی‌های شانسی است. طبق تعریف کلاسیک احتمال که توسط آبراهام دموآور[1] در سال ۱۷۱۸ در کتاب آموزش مبانی محاسبهٔ شانس [۲۵] ارائه شد و سپس توسط لاپلاس در سال ۱۸۱۴ در کتابی با عنوان رساله‌ای فلسفی درباب احتمال [۳۸] اصلاح شد، احتمال صرفاً یک کسر است: تعداد حالت‌های مساعد با یک پیشامد خاص تقسیم بر تعداد همهٔ موارد ممکن. از زمان انتشار این تعریف، انتقادهای فراوان به آن شده است، زیرا فرضِ هم‌شانس‌بودنِ برآمدها، ذهنی است و مانع به‌کارگیری احتمال برای طیف گسترده‌ای از پدیده‌های طبیعی می‌شود که چنین فرضی برایشان معتبر نیست.

۳.۱.۲ تعبیر فراوانی‌گرا

همگرا شدنِ فراوانی‌های نسبیِ یک پیشامد ثابت به یک عدد مشخص پس از انجام تعداد زیادی آزمایش‌های تصادفیِ مستقل، توسط پژوهشگران زیادی بررسی شده است. برنولی [۱۰] در تلاش برای گسترش پهنهٔ احتمال به مسائل مربوط به امید به زندگی و بیمه، اولین نسخه از قانون اعداد بزرگ[2] را ثابت کرد. بر اساس این قضیه، فراوانی نسبی h_n برای یک پیشامد معین پس‌از انجام آزمایش تصادفی به دفعات بسیار، باید نزدیک به p، احتمال نظری آن پیشامد، باشد و با انجام آزمایش‌های بیشتر، این نزدیکی باید بیشتر شود.[3] با توجه به اینکه فراوانی‌های پایدار قابل‌مشاهده هستند، این قضیه به‌عنوان برهانی بر عینی[4] بودنِ احتمال نیز در نظر گرفته شد [۲۹]. در این رویکردِ فراوانی‌گرا که بعداً توسط فون‌میزِس [۵۱] و رِنی [۴۹] پیگیری شد، احتمال یک پیشامد، عددی

۳. در این قضیه ثابت می‌شود که برای هر $\varepsilon > 0$ و $\alpha > 0$ به‌دلخواه کوچک، با فرضِ $q = 1 - p$ اگر $n > \frac{pq}{\varepsilon\alpha^2}$، آنگاه $P(|h_n - p| < \epsilon) \geq 1 - \alpha$.

1. Abraham de Moivre 2. law of large numbers 4. objective

فرضی است که وقتی آزمایش تصادفیِ وابسته به آن پیشامد بی‌نهایت بار تکرار می‌شود، فراوانی‌های نسبی به آن میل می‌کنند. از آنجا که این همگرایی عملاً در بسیاری از پدیده‌های طبیعی قابل‌مشاهده است، این تعریف خاص از احتمال، حوزهٔ کاربردهای آن را گسترش زیادی داد.

ایراد عملیِ دیدگاه فراوانی‌گرا این است که به این روش، فقط برآوردی از احتمال را به‌دست می‌آوریم، زیرا دنبالهٔ فراوانی‌های نسبی از مجموعه‌ای از تکرارهای آزمایش تصادفی (که نمونه‌ها نامیده می‌شوند) به مجموعهٔ دیگر تغییر می‌کند. علاوه بر این، اگر تکرار یک آزمایش تحت شرایط دقیقاً یکسان امکان‌پذیر نباشد، رویکرد فراوانی‌گرا مناسب نیست [۶، ۷]. بنابراین مهم است که تفاوت بین مدل نظری احتمال و داده‌های فراوانی به‌دست آمده از واقعیت را که برای ایجاد یک مدل احتمال استفاده می‌شوند، برای دانش‌آموزان روشن کنیم. گاهی اوقات این تفاوت را در کلاس توضیح نمی‌دهند و این ممکن است باعث سردرگمی دانش‌آموزانی شود که می‌خواهند از دانش انتزاعی برای حل مشکلات در زندگی واقعی استفاده کنند.

۴.۱.۲ تعبیر تمایل طبیعی

پوپر [۴۸] مفهوم تمایل طبیعی[1] را معیار تمایل یک سامانهٔ تصادفی به رفتاری خاص و همچنین میل طبیعت به تولید برآمدی از یک نوع معین، تعریف کرد. در همین راستا، پِیرس [۴۷] مفهومی از احتمال را پیشنهاد کرد که بر اساس آن، برای مثال یک تاس، تمایل‌هایی قابل‌انتظار برای برآمدهای ممکن ناشی از پرتاب آن دارد؛ این تمایل‌ها مستقیماً به نتایج تکرار بلندمدتِ پرتاب‌ها و به‌طور غیرمستقیم به پیشامدهای خاص مرتبط هستند.

در تکرار بلندمدت، تمایل‌ها به ایجاد فراوانی‌های نسبی با مقادیر خاص گرایش دارند، اما این مقدارها خودِ احتمال‌های رخداد پیشامدها نیستند [۳۱]. برای مثال، یک تاس مکعبی گرایش (تمایل طبیعی) شدیدی به آمدن عدد ۵ در پرتاب بلندمدت با فراوانی نسبیِ $\frac{۱}{۶}$ دارد. مقدار احتمال $\frac{۱}{۶}$ کوچک است و لذا نمی‌تواند معیاری برای سنجش این تمایل شدید باشد. در نظریهٔ تک‌وضعیتی (مثلاً رجوع کنید به [۴۰])، تمایل‌ها همان مقادیر احتمال هستند و به‌عنوان گرایش‌های علّی احتمالاتی برای ایجاد یک خروجی خاص در یک موقعیت ویژه در نظر گرفته می‌شوند.

مجدداً می‌گوییم این تعبیر تمایل طبیعی برای احتمال، بحث‌برانگیز است. در تعبیر بلندمدت، تمایل برحسب سایر کمیّت‌های تجربیِ قابل‌تأیید بیان نمی‌شود و لذا هیچ روشی برای یافتن مقدار یک تمایل به روش تجربی نداریم. در مورد تعبیر تک‌وضعیتی، اختصاص دادنِ احتمال عینی به

1. propensity

رخداد پیشامدهای خاص، امری دشوار است [۳۱]. همچنین مشخص نیست که آیا نظریه‌های تمایل‌های طبیعیِ تک‌وضعیتی از محاسبات احتمالاتی پیروی می‌کنند یا خیر.

۵.۱.۲ دیدگاه منطق‌گرا

پژوهشگرانی همچون کینز [۳۴] و کارناپ [۱۹]، نظریه‌های منطقی احتمال را بر اساس همان اندیشهٔ کلاسیک ارائه دادند که می‌گفت می‌توان احتمال‌ها را پیش از رخداد پیشامدها با بررسی همهٔ برآمدهای ممکن تعیین کرد؛ هرچند ممکن است به احتمال‌ها وزن‌های نابرابر اختصاص داده شود. بر اساس این دیدگاه، احتمال، درجه‌ای از استلزام است که میزان پشتیبانی شاهد E از فرض معین H را می‌سنجد. درجه‌های احتمال، بین قطعیت (۱) و عدم امکان (۰) واقع هستند. این دیدگاه، منطق صوری را تقویت می‌کند، زیرا استلزام و ناسازگاری را می‌توان حالت‌های فرین احتمال در نظر گرفت.

کارناپ [۱۹] یک زبان صوری ایجاد کرد و احتمال یک پیشامد را درجه‌ای از تصدیق عقلانیِ رخداد آن تعریف کرد. درجهٔ تصدیق عقلانیِ فرض H به‌شرط آگاهی از شاهد E، یک احتمال شرطی است و کاملاً به ویژگی‌های منطقی و معناییِ H و E و پیوندهای میان آنها بستگی دارد. بنابراین احتمال تنها برای زبان صوری خاصی تعریف می‌شود که در آن، این پیوندها به‌روشنی بیان شده‌اند.

از دیگر مشکلات نظریهٔ منطقیِ احتمال این است که بسته به انتخاب‌های ممکن برای مقادیر اولیه و زبانی که فرض در آن بیان می‌شود، توابع تصدیق بسیاری وجود دارد. مشکل دیگر، انتخاب شواهد کافی و مناسب E به‌روش عینی است، زیرا اعتبار شاهد، می‌تواند از فردی به فرد دیگر تغییر کند [۵].

۶.۱.۲ تعبیر ذهنی

در رویکردهای ارائه شدهٔ قبلی، احتمال، یک مقدار عینی است که به هر رویداد اختصاص می‌دهیم. با این حال، قضیهٔ بیز که در سال ۱۷۶۳ منتشر شد، نشان داد که احتمال یک پیشامد را می‌توان با در دست داشتنِ داده‌های جدید، اصلاح کرد. در یک نسخهٔ ساده از این قضیه ثابت می‌شود که اگر A_iها پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار باشند، $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ و احتمال‌های «پیشین» $P(A_i)$ و درستنمایی $P(B|A_i)$ برای احتمال B به‌علّت A_i، معلوم باشند، آنگاه

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \times P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) \times P(A_j)}.$$

بنابر قضیهٔ بیز، احتمال پیشین می‌تواند با استفاده از داده‌های جدید، به احتمال «پسین» تبدیل شود و در نتیجه احتمال، ویژگی عینی‌بودنش را از دست می‌دهد. پیرو این تعبیر، برخی ریاضی‌دانان (برای مثال کینز، رَمزی[1] و دِفینتّی[2])، احتمال را میزان باور شخصی در نظر گرفتند که به دانش یا تجربهٔ شخص بستگی دارد. با این حال، حتی اگر تأثیر پیشین توسط داده‌های عینی از بین برود، باز هم وضعیت توزیع پیشین در این رویکرد به‌عنوان یک مقدار ذهنی مورد انتقاد است و دِفینتّی [۲۴] در سال ۱۹۳۷، مجموعه‌ای از اصول موضوعه را پیشنهاد کرد تا این دیدگاه را توجیه کند.

بر اساس این دیدگاه ذهنی، تکرار یک وضعیت برای معنادار کردنِ احتمال، ضروری نیست و به همین دلیل، کاربردهای احتمال وارد زمینه‌هایی مانند سیاست و اقتصاد شد که اطمینان یافتن از تکرار آزمایش‌ها در آنها امری دشوار است. امروزه دیدگاه بیزی برای استنباطی که مبتنی بر این رویکرد است، طرفداران بسیاری در زمینه‌های متعدد گرد آورده است.

۷.۱.۲ روش اصل‌موضوعی

علی‌رغم همهٔ بحث‌های فلسفی عمیق دربارهٔ مبانی، کاربرد احتمال در همهٔ علوم و بخش‌های گوناگون فعالیت‌های انسانی به‌سرعت در حال گسترش است. در طول قرن بیستم، ریاضیدانان بسیاری تلاش کردند تا نظریهٔ ریاضی احتمال را صورت‌بندی کنند. در پیِ پژوهش‌های بورل[3] در زمینهٔ نظریهٔ اندازه و مجموعه‌ها، کولموگوروف[4] [۳۵] که هوادار دیدگاه فراوانی‌گرا بود، نظریهٔ اصل‌موضوعیِ احتمال را ارائه کرد. مجموعهٔ S متشکل از همهٔ برآمدهای ممکن یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ایِ آن آزمایش نامیده می‌شود.[۵] برای تعریف احتمال، جبر پیشامدهای $\mathcal{A}$ در نظر گرفته شد که خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای است که نسبت به عمل‌های اجتماع‌گیریِ شمارا و متمم‌گیری، بسته است.[۶] متمم پیشامد $\bar{A}$، متشکل از همهٔ برآمدهایی است که در A نیستند. پیشامد $S = A \cup \bar{A}$

۵. فضای نمونه‌ای می‌تواند متناهی، شمارای نامتناهی یا ناشمارای باشد. وقتی بتوان یک تناظر یک‌به‌یک بین فضای نمونه‌ای و مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ پیدا کرد، آنگاه فضای نمونه‌ای شمارای نامتناهی است. ۶. برای فضاهای نمونه‌ای متناهی و شمارای نامتناهیِ S، ردهٔ $\mathcal{A}$ مشتمل بر همهٔ زیرمجموعه‌های S است. برای فضاهای نمونه‌ای متناهی، $\mathcal{A}$ یک جبر بولی است؛ در مورد فضای نمونه‌ای شمارای نامتناهی، $\mathcal{A}$ یک σ-جبر است، یعنی نسبت به عمل‌های اجتماع‌گیری و اشتراک‌گیریِ شمارا و متمم‌گیری، بسته است. برای فضاهای نمونه‌ای ناشمارا (پیوسته)، جبری از مجموعه‌ها که برای تخصیص احتمال در نظر گرفته می‌شود، همهٔ زیرمجموعه‌های S را شامل نمی‌شود، بلکه $\mathcal{A}$ به مجموعه‌ای از پیشامدهای S محدود می‌شود که نسبت به عمل‌های اجتماع‌گیری و اشتراک‌گیریِ شمارا و متمم‌گیری بسته است [۲۲].

1. Frank Ramsey 2. Bruno de Finetti 3. Émile Borel 4. Andrey Kolmogorov

که همیشه رخ می‌دهد، پیشامد حتمی نامیده می‌شود.

احتمال، تابعی از $\mathcal{A}$ به بازهٔ $[\text{۰}, \text{۱}]$ از اعداد حقیقی است که در سه اصل موضوع زیر صدق می‌کند. بر پایهٔ این اصول، می‌توان بسیاری از ویژگی‌ها و قضیه‌های احتمال را ثابت کرد:

۱. برای هر $A \in \mathcal{A}$، $P(A) \geq \text{۰}$؛

۲. $P(S) = \text{۱}$؛

۳. (الف) برای فضای نمونه‌ای متناهیِ S و پیشامدهای ناسازگار (جدا از هم) A و B؛ یعنی $A \cap B = \varnothing$، رابطهٔ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ برقرار است.

(ب) برای فضای نمونه‌ای نامتناهیِ S و هر خانوادهٔ شمارا از مجموعه‌های دوبه‌دو جدا از هم مانند A_i، $i = \text{۱}, \text{۲}, \ldots$، رابطهٔ $P(\bigcup_{i=\text{۱}}^{\infty} A_i) = \sum_{i=\text{۱}}^{\infty} P(A_i)$ برقرار است.

نظریهٔ اصل‌موضوعی توسط مکتب‌های مختلف احتمال پذیرفته شده است، زیرا با کمی مسامحه، ریاضیات احتمال (کلاسیک، فراوانی‌گرا یا ذهنی) را می‌توان در چارچوب نظریهٔ کولموگوروف صورت‌بندی کرد. با این حال، تعبیر هر فرد از چیستیِ احتمال، می‌تواند بسته به اینکه آن فرد هوادار چه دیدگاهی باشد، متفاوت از دیگران باشد. بحث دربارهٔ مفهوم احتمال هنوز هم در رویکردهای مختلف به آمار وجود دارد. این پیوند میان احتمال و فلسفه می‌تواند مبیّن بینش شهودیِ افراد نسبت به احتمال باشد که غالباً هم با قوانین ریاضی احتمال در تعارض است [۱۴].

۸.۱.۲ خلاصهٔ دیدگاه‌ها

بررسی‌ها نشان می‌دهد که دیدگاه‌های گوناگونی که دربارهٔ احتمال بیان شده‌اند، شامل تفاوت‌های خاصی نه‌تنها در تعریف خود احتمال، بلکه در مفهوم‌های مربوطه، ویژگی‌ها و روش‌هایی هستند که برای حل مشکلات متعدد مربوط به هر دیدگاه پدیدار شده‌اند. برخی از این تفاوت‌ها را در شکل ۱ خلاصه کرده‌ایم که بخشی از آن از [۵] اقتباس شده است.

۹.۱.۲ دیدگاه‌های متفاوت احتمال در برنامهٔ درسیِ مدارس

اگرچه به همهٔ رویکردهای احتمال توجه یکسانی نشده است، اما مباحث بالا در برنامهٔ درسی بازتاب داشته و دارند. قبل از سال ۱۹۷۰، دیدگاه کلاسیک احتمال مبتنی بر محاسبات ترکیبیاتی، بر برنامهٔ درسی دبیرستان در کشورهایی مانند فرانسه حاکم بود [۳۳]. از آنجا که این دیدگاه تا حد

دیدگاه احتمال	روش‌ها	ویژگی‌ها	برخی مفهوم‌های مربوطه
کلاسیک	• ترکیبیات • تناسب‌ها • تحلیل آغازین ساخت آزمایش	• نسبت حالت‌های مساعد به تعداد کل امکان‌ها • هم‌شانس‌بودنِ پیشامدهای مقدماتی	• مقدار مورد انتظار • منصفانه‌بودن
فراوانی‌گرا	• یک گردایه پسین از داده‌های آماری • تحلیل آماری داده‌ها • برازش منحنی	• «حد» فراوانی‌های نسبی در تکرار بلندمدت • عینی؛ بر اساس وقایع تجربی • آزمایش‌های تکرارپذیر	• فراوانی نسبی • توزیع داده‌ها • همگرایی • استقلال آزمایش‌ها
تمایل طبیعی	• تحلیل پیشین حالت‌های تجربی	• گرایش یا تمایل طبیعی • مناسب برای حالت‌های تک‌وضعیتی • مربوط به شرایط آزمایشی	• تمایل طبیعی • گرایش علّی احتمالاتی
منطق‌گرا	• تحلیل پیشین فضای امکان‌ها • منطق گزاره‌ها • منطق استقرایی	• میزان عینی‌بودنِ باور • قابل اصلاح با تجربیات • پیوندهای میان دو گزاره، استلزام را تعمیم می‌دهد.	• شواهد • فرض • درجهٔ استلزام
ذهنی	• قضیهٔ بیز • احتمال شرطی	• ذهنی‌بودن • قابل اصلاح با تجربیات	• درستنمایی • تبادل‌پذیری • احتمال (یا توزیع) پیشین • احتمال (یا توزیع) پسین
اصل موضوعی	• نظریهٔ مجموعه‌ها • جبر مجموعه‌ها	• تابع اندازه‌پذیر	• فضای نمونه‌ای • پیشامد حتمی • جبر پیشامدها • اندازه

جدول ۱. مؤلفه‌هایی که دیدگاه‌های گوناگون احتمال را طبقه‌بندی می‌کنند (اقتباس‌شده از [۵، ص ۱۱۷]).

زیادی بر استدلال ترکیبیاتی استوار است، مطالعهٔ احتمال، جدای از برخی مسائل بسیار ساده، برای دانش‌آموزان دشوار بود.

رویکرد اصل‌موضوعی نیز در دوران جدید ریاضی غالب بود، زیرا احتمال، نمونه‌ای مهم از توانایی ابزارهای نظریهٔ مجموعه‌ها تلقّی می‌شد. با این حال، در رویکردهای کلاسیک و اصل‌موضوعی، کاربردهای چندگانهٔ احتمال در علوم گوناگون برای دانش‌آموزان پنهان بود. در نتیجه احتمال توسط بسیاری از معلمان دبیرستان به‌عنوان یک بخش فرعی از ریاضیات در نظر گرفته می‌شد که تنها با بازی‌های شانسی سروکار دارد و تمایل به این بود که از ساعات تدریس احتمال کاسته شود [۴]. امروزه با افزایش علاقه به موضوع آمار و پیشرفت‌های فناوری، پذیرش رویکرد فراوانی‌گرا در برخورد با مفهوم احتمال، مرجّح است. تعریف تجربی احتمال به‌عنوان حد فراوانی‌های نسبی، در بسیاری از برنامه‌های درسی مدارس و برخی استانداردهای تدریس پیشنهاد شده است (برای مثال، استانداردهای مشترک ایالتی در ریاضیات[1] [CCSSI]، ۲۰۱۰ [۴۴]؛ وزارت آموزش و پرورش، فرهنگ و ورزش[2] [MECD]، ۲۰۱۴ [۴۱]؛ شورای ملی معلمان ریاضیات[3] [NCTM]، ۲۰۰۰ [۴۳]) و کاربرد احتمال به‌عنوان یک ابزار نظری برای مواجهه با مسائل ناشی از تجربیات آماری

1. the Common Core State Standards 2. the Ministerio de Educación, Cultura y Deporte 3. the National Council of Teachers of Mathematics

نیز مطرح شده است. در سطح دبستان، البته دیدگاه شهودی مربوط به شانس و احتمال مورد توجه است. با وجود این، رویکرد اصول‌موضوعی در آموزش مدرسه‌ای مورد استفاده قرار نمی‌گیرد، زیرا خیلی صوری است و تنها برای افرادی که مطالعات ریاضی محض را در دورهٔ تحصیلات دانشگاهی دنبال می‌کنند، مناسب است. جزئیات بیشتر دربارهٔ مفهوم احتمال در برنامهٔ درسیِ مدارس، در بخش ۳.۲ مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت.

۲.۲ استدلال و دانش احتمالاتی

تأکید بیش از حد بر دیدگاه فراوانی‌گرا و رویکردهای غیرصوری در آموزش استنباط، ممکن است منجر به تبدیل آموزش احتمال به آموزش شبیه‌سازی ـ همراه با تمرکز اندک بر قواعد احتمال ـ شود. با این حال، چنان‌که گال [۳۰] می‌گوید، آگاهی از استدلال و دانش احتمالاتی در موقعیت‌های تصمیم‌گیری در محیط‌های روزمره و حرفه‌ای (مانند بازار بورس، تشخیص پزشکی، انتخابات و موارد بسیار دیگر) و نیز برای فهم نمونه‌گیری و استنباط حتی در رویکردهای غیرصوری، برای همهٔ شهروندان ضروری است. علاوه بر این، دانش پیچیده‌تری از احتمال برای آموزش دانشمندان یا متخصصین (مثل مهندسان و پزشکان) در سطح‌های دانشگاهی مورد نیاز است. در نتیجه طراحی برنامه‌های آموزشی که به گسترش استدلال و دانش احتمالاتیِ طیف‌های متعدد دانش‌آموزان کمک کند، نیاز به توضیح مؤلفه‌های مختلف آن دارد.

با اینکه بحث‌های زیادی دربارهٔ ماهیّت تفکر آماری و تفاوت آن با استدلال آماری و سواد آماری (برای مثال، [۹]) شده است، اما بحث دربارهٔ مؤلفه‌های اصلی استدلال احتمالاتی هنوز یک چالش پژوهشی است. در ادامه نکاتی را برای باز کردنِ راه پیشرفت پژوهش در این زمینه بیان می‌کنیم.

۱.۲.۲ استدلال احتمالاتی چیست؟

احتمال عبارت است از یک رویکرد ویژه برای تفکر و استدلال دربارهٔ پدیده‌های زندگی واقعی. استدلال احتمالاتی، نوعی از استدلال است که به قضاوت‌ها و تصمیم‌گیری‌ها در وضعیت‌های متضمن عدم‌قطعیت اشاره دارد و برای مثال، هنگام ارزیابی مخاطره‌ها، با زندگی واقعی پیوند می‌خورد [۲۸]. احتمال، اندیشیدن در چارچوب‌هایی است که امکان تحلیل و ارزیابی برآمدهای ممکن مختلف را در موقعیت‌هایی متضمن عدم‌حتمیت فراهم می‌کنند. بنابراین استدلال احتمالاتی شامل قابلیت‌های زیر است:

- مشخص کردن پیشامدهای تصادفی در طبیعت، فناوری و جامعه؛
- تحلیل شرایط چنین پیشامدهایی و استنتاج فرض‌های مناسب مدل‌سازی؛
- ساخت مدل‌های ریاضی برای موقعیت‌های تصادفی و بررسی روایت‌ها و برآمدهای به‌دست‌آمده از این مدل‌ها؛
- به‌کاربردن فنون و روش‌های احتمال و آمار.

مرحلهٔ مهم در به‌کارگیری احتمال برای پدیده‌های دنیای واقعی، مدل‌سازی موقعیت‌های تصادفی است [۲۰]. مدل‌های احتمال مانند توزیع دوجمله‌ای یا توزیع نرمال، ما را از ابزارهایی برای ساخت واقعیت بهره‌مند می‌سازد؛ آنها ابزارهایی مهم برای شناخت و حل مسائل در دسترس ما قرار می‌دهند. دانش احتمال-بنیان که برای فهم موقعیت‌های زندگی واقعی به‌کار می‌رود، شامل مفهوم‌هایی مانند احتمال‌های شرطی، قواعد استنتاج منطق گزاره‌ها، متغیرهای تصادفی و مقدار مورد انتظار است. همچنین مهم است که بتوان کاربرد مدل‌های احتمالاتی پدیده‌های واقعی را به‌دقت ارزیابی کرد. از آنجا که امروزه بسیاری از پیشامدها برحسب مخاطره بیان می‌شوند، مفهوم‌های اصلی و شیوه‌های استدلال در آن حوزه باید در مدرسه آموزش داده شود و بر تلاش برای درک مفهوم مخاطره توسط دانش‌آموزان نیز تأکید شود [۳۹، ۴۵].

۲.۲.۲ پارادوکس‌ها و نتایج غیرمنطقی

استدلال احتمالاتی با استدلال در منطق دو ارزشیِ کلاسیک که در آن، یک گزاره یا راست است یا دروغ، متفاوت است. قواعد استدلال احتمالاتی نیز با قواعد استدلال در منطق کلاسیک، فرق دارد. مثال معروفی که در آن، ترایاییِ ترجیحات برقرار نیست، تاس ناترایای اِفرون[1] است که در آن، شخص دومی که تاس را برای بازی انتخاب می‌کند، همیشه در بازی برتری دارد (مهم نیست که حریفش در ابتدا کدام تاس را انتخاب کرده باشد) [۵۰]. علاوه بر این، حوزهٔ احتمال مملو از پارادوکس‌ها و چالش‌های شهودی، بدفهمی‌ها و مغالطه‌ها است. [۱۶]. در حالی که این نتایج غیرشهودی در احتمال مقدماتی نیز پدیدار می‌شوند، در دیگر حوزه‌های ریاضی، نتایج غیرشهودی تنها هنگام کار با مفهوم‌های پیشرفته رخ می‌دهند [۳، ۱۲]. برای مثال، شهودی نیست که احتمال آمدنِ چهار شیر متوالی در پرتاب یک سکهٔ سالم، بر احتمال اینکه پرتاب بعدیِ سکه منجر به آمدن شیر شود (مغالطهٔ قمارباز) بی‌تأثیر باشد.

زبان و واژگان در نظریهٔ احتمال، تحکّمی است و همیشه با نمادگذاری‌های رایج در دیگر حوزه-

1. Efron

های ریاضیات همخوانی ندارد (برای مثال، استفاده از حروف یونانی یا حروف بزرگ برای نشان دادن متغیرهای تصادفی). با وجود این، احتمال نه‌تنها پیش‌درآمدی بر آمار استنباطی است، بلکه به خودیِ خود، یک حالت مهم تفکر را ارائه می‌دهد. سهم مهم احتمال در حل مسائل واقعی، گنجاندن آن را در برنامهٔ درسی توجیه می‌کند.

۳.۲.۲ علّیت و شرطی‌سازی

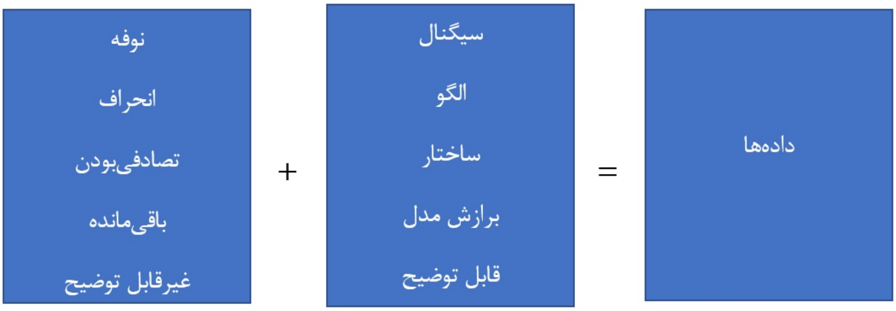
مؤلفهٔ دیگر استدلال احتمالاتی، تمایز قائل شدن بین علّیت و شرطی‌سازی است. اگرچه استقلال به‌لحاظ ریاضی به قانون ضرب تقلیل می‌یابد، تحلیل استنتاجیِ استقلال باید شامل بحث و بررسی پیوندهای میان استقلال فیزیکی و استقلال تصادفی و مسائل روان‌شناختی مرتبط با تبیین علّی باشد که غالباً به استقلال نسبت داده می‌شود [۱۳]. در حالی که وابستگی در احتمال، یک رابطهٔ دوسویه را مشخص می‌کند، دو جهتِ درگیر در احتمال‌های شرطی، از دیدگاه علّی دارای معنای کاملاً متفاوتی هستند. برای مثال، با اینکه شرط وجودِ نوعی ویروس برای مشاهدهٔ نتیجهٔ مثبت در یک آزمایش تشخیصی، علّی است، جهت عکس این علّتِ شرطی مهم است؛ یعنی از مشاهدهٔ مثبت بودنِ نتیجهٔ آزمایش به وجود ویروس پی ببریم. به عبارت دیگر، گرچه مثبت بودنِ نتیجهٔ آزمایش ناشی از یک بیماری است، نتیجهٔ مثبتِ آزمایش، علّتی برای بیماری نمی‌شود.

در بسیاری از موقعیت‌های زندگی واقعی، رویکردهای احتمالاتی و علّی با هم ادغام می‌شوند. غالباً پدیده‌هایی را مشاهده می‌کنیم که به‌دلیل عوامل مؤثر علّی همراه با برخی اختلال‌های تصادفی، یک رفتار ویژه از خود نشان می‌دهند. بنابراین چالشی که اغلب با روش‌های آماری مورد حمله قرار می‌گیرد، تفکیک تأثیر علّی از تأثیر تصادفی است. فهم درست احتمال‌های شرطی برای درک همهٔ این موقعیت‌ها و همچنین برای فهم مبانی آمار استنباطی لازم است.

۴.۲.۲ تغییرات علّی و تصادفی

مؤلفهٔ کلیدی دیگر در استدلال احتمالاتی، تمایز قائل شدن بین تغییرات علّی و تغییرات تصادفی است. تغییرپذیری ویژگی مهم داده‌های آماری است و فهم تغییر، مؤلفهٔ اصلی فهم استدلال آماری است [۵۲]. با وجود این، گرچه تغییر در نمونه‌های مختلف از یک جامعهٔ آماری یا فرایند یکسان (برای مثال، قد دانش‌آموزان مختلف) را می‌توان به تأثیرات تصادفی نسبت داد، تفاوت بین نمونه‌ـ های مربوط به جامعه‌های آماری مختلف (برای مثال، تفاوت بین قد پسرها و دخترها)، گاهی به‌طور

علّی تحلیل می‌شود. به‌علاوه هرچه اندازهٔ یک تغییر خاص بزرگ‌تر باشد، مقدار تغییری که می‌توان به علّت‌های نظام‌مند نسبت داد، کوچک‌تر است.



شکل ۱. نسخه‌های مختلف از معادلهٔ ساختاری

یک تشبیه مفید در این رابطه، جداسازی سیگنال (تفاوت علّی صحیح) از نوفه (تغییر تصادفی تنها) است [۳۷]. نویسندگان، تحلیل داده را ابزاری برای جست‌وجوی سیگنال‌ها (متغیرهای علّی) در فرایندهای نوفه‌ای (که شامل تغییرهای تصادفی هستند) قرار دادند. در [۱۱]، یک معادلهٔ ساختاری[۱] معرفی شد که داده‌ها را به نوفه و سیگنالی که باید بازیابی شود، تجزیه می‌کند. شکل ۱ پنج تبیین از اندیشهٔ سیگنال–اغتشاش را از دیدگاه‌های مختلف نشان می‌دهد. معادلهٔ ساختاری، ابزار اصلی در مدل‌سازی داده‌های آماری است و استعاره‌ای برای واکنش انسانیِ ما در مواجهه با انبوه اطلاعات مرتبط و غیرمرتبط در داده‌های موجود است. چگونگیِ تفکیک منابع علّی از منابع تصادفیِ تغییر، به هیچ‌وجه یکتا نیست. بنابراین احتمال بیشتر ماهیّت یک ابزار اکتشافی را در تحلیل واقعیت دارد.

منابع تصادفی و علّیِ تغییر، مکمل یکدیگر هستند، زیرا هر دوی آنها در مدل‌سازی فرایندهای تصمیم‌گیریِ آماری در نظر گرفته می‌شوند. برای مثال، این مسئلهٔ تصمیم را در نظر بگیرید که آیا مقادیر مورد انتظارِ دو متغیر تصادفی متفاوت هستند یا خیر. تحققهای متعدد مربوط به این دو متغیر یکسان نیست و به احتمال زیاد، میانگین‌های تجربی آنها نیز برابر نخواهند بود. بر اساس یک نمونه از تحقق‌های هر یک از متغیرهای تصادفی، تحلیلی را انجام می‌دهیم که منجر به آزمون آماریِ دو–نمونه‌ایِ کلاسیک می‌شود. اگر تفاوت‌های مشاهده‌شده به‌دلیل تغییر تصادفی یا علّی باشند، استنتاج آماری مبتنی بر استدلال احتمالاتی، روش‌ها و معیارهایی با حاشیهٔ خطا برای تصمیم‌گیری ارائه می‌دهد.

1. structural equation

شاید تعجب‌آور و از نظر شناخت‌شناسی مطلوب باشد که بتوان الگوهای تغییر در اندازه‌گیری‌های دقیق یا داده‌های بسیاری از افراد را توسط نوعی از ریاضیات توضیح داد که برای تعیین نتایج آزمایش‌های تصادفی استفاده می‌شود. در واقع اینجاست که داده‌ها و شانس (یعنی آمار به‌عنوان علم تحلیل داده‌ها و احتمال به‌عنوان مطالعهٔ پدیده‌های تصادفی) با هم ترکیب می‌شوند تا مبنای قدرتمند استنباط آماری را ایجاد کنند. با این حال، موارد بالا برای برخی دانش‌آموزان روشن و آشکار نیست؛ دانش‌آموزانی که ممکن است تمایل زیادی داشته باشند که حتی یک تغییر کوچک در پدیده‌های مشاهده‌شده را هم به علل قطعی نسبت دهند. این تمایل در نقل‌قول زیر از یک دانش‌آموز ۱۷ ساله آمده است: «من زمانی که به‌دنبال مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب دو تاس هستم، تصادفی‌بودن را می‌پذیرم، اما دربارهٔ کاهش وزن شخصی که یک رژیم غذایی مشخص را دنبال می‌کند، تصادفی بودنش کجاست؟» [۲۷] اگر این دیدگاه را برگزینیم که کاهش وزن، یک فرایند نوفه‌ای است، می‌شود مشکل دانش‌آموز را حل کرد: پایبندی به یک برنامهٔ غذایی خاص می‌تواند بر اساس یک تابع (تعیّنی)، در طول زمان بر وزن بدن تأثیر بگذارد ولی همین برنامهٔ کاهش وزن، تحت تأثیر عوامل فردیِ غیر قابل‌پیش‌بینی نیز هست که ماهیّت تصادفی دارند.

مردم به‌طور طبیعی تمایل زیادی دارند که علّت‌های خاص را جست‌وجو کنند [۵۲]. این تمایل باعث می‌شود حتی وقتی که داده‌های فردی کاملاً در چنگ تغییرات تصادفیِ مورد انتظار افتاده است، باز هم به‌دنبال علّت‌های تعیّنی باشند. در [۳۶] این تمایل در رویکرد برآمدی[1] لحاظ شده است. این تمایل به‌ویژه در دانش‌آموزان مقطع دبیرستان هم قابل‌مشاهده است؛ دانش‌آموزانی که تمایلشان به دیدگاه تعیّنی–ماشینیِ جهان به‌خوبی ثابت شده است و به‌نظر نمی‌رسد این تمایل با بالا رفتن مقطع تحصیلی‌شان محو شود [۲۶].

۵.۲.۲ استدلال احتمالاتی در مقابل منطق آماری

برای پایان دادن به این بخش، لازم است اشاره کنیم که استدلال احتمالاتی تا حد زیادی به منطق آماری نزدیک و در عین حال، با آن متفاوت است. آمار را می‌توان علم یادگیری از داده‌ها توصیف کرد [۴۲]. در نگاه اول ممکن است تعجب‌آور باشد که داده‌ها (برگرفته از کلمهٔ لاتین datum به معنای «داده») بتوانند با تصادفی‌بودن در پیوند باشند که مفهومی ناشی از غیر قابل‌پیش‌بینی بودن است. برآمد یک آزمایش تصادفی، قطعیت ندارد. چگونه ممکن است بتوان مقادیر گردآوری‌شدهٔ

1. outcome approach

اندازه‌گیری در یک زمینهٔ فیزیکی ملموس را به مفهوم متافیزیکیِ (ماوراء طبیعی) تصادفی‌بودن ربط داد که حتی نمی‌توان آن را با اصطلاحات ریاضی به‌طور دقیق تعریف کرد.

در حالی که هدف استدلال احتمالاتی، پیکربندی تفکر ما از طریق مدل‌سازی است، در استدلال آماری تلاش می‌شود از طریق جست‌وجوی مدل‌هایی که بتوانند داده‌ها را توضیح دهند، داده‌های مشاهده‌شده معنادار شوند. استدلال احتمالاتی معمولاً با طرح مدل‌هایی آغاز می‌شود، سپس توصیف‌هایی گوناگون از نتایج به‌دست آمده ارائه و تلاش می‌شود تا تحققهای ممکن متغیرهای تصادفی بر اساس این مدل‌ها پیش‌بینی شوند. داده‌ها نقاط شروع منطق آماری هستند و مدل‌های مناسب به‌عنوان یک ابزار با این داده‌ها برازش می‌شوند تا درکی عمیق از فرایند مولد داده به‌دست آید. این رویکردهای گوناگون، جملهٔ معروف ایمانوئل کانت[1] را به یادمان می‌آورد با این مضمون که «نظریه بدون داده‌ها هیچ است و داده‌ها بدون نظریه، کور هستند.» هم استدلال آماری و هم استدلال احتمالاتی، به‌تنهایی دارای محدودیت‌ها و مزیت‌های خود هستند. توان کامل آنها برای پیشبُرد دانش بشر فقط در دانشی ترکیبی خود را نشان می‌دهد که اینها دو روی آن سکه هستند.

مراجع

[1] Abrahamson, D., Bridging theory: Activities designed to support the grounding of outcome-based combinatorial analysis in event-based intuitive judgment-A case study, in *Proceedings of Topic Study Group 13 at the 11^{th} International Conference on Mathematics Education (ICME), 2008*, M. Borovcnik, D. Pratt, eds., Monterrey, Mexico.

[2] Azcárate, P., Cardeñoso, J. M., Serradó, S., Randomness in textbooks: the influence of deterministic thinking, in *Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, 2006*, M. Bosch, ed., Sant Feliu de Guixols, Spain.

[3] Batanero, C., Teaching and learning probability, in *Encyclopedia of Mathematics Education*, D. Lerman, ed., Springer-Verlag, Heidelberg, 2013.

[4] Batanero, C., Understanding randomness: Challenges for research and teaching, plenary lecture in *Ninth European Conference of Mathematics Education, 2015*, Prague, Czech Republic.

[5] Batanero, C., Diaz, C., Meaning and understanding of mathematics, The case of probability, in *Philosophical Dimensions in Mathematics Education*, J. P. van Bendegen, K. François, eds., Springer-Verlag, New York, 2007.

[6] Batanero, C., Biehler, R., Maxara, C., Engel, J., Vogel, M., Using simulation to bridge teachers' content and pedagogical knowledge in probability, paper presented at the fifteenth ICMI Study Conference: *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics (2005)*, Aguas de Lindoia, Brazil.

[7] Batanero, C., Henry, M., Parzysz, B., The nature of chance and probability, in *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning*, G. A. Jones, ed., Springer-Verlag, New York, 2005.

[8] Bennett, D. J., *Randomness*, Harvard University Press, Cambridge, 1999.

1. Immanuel Kant

[9] Ben-Zvi, D., Garfield, J. B., eds., *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 2004.

[10] Bernoulli, J., Ars Conjectandi, IREM, Rouen, 1987.

[11] Borovcnik, M., Probabilistic and statistical thinking, in *Proceedings of the Fourth Conference on European Research in Mathematics Education, 2005*, M. Bosch, ed., Sant Feliu de Guissols, Spain.

[12] Borovcnick, M., Strengthening the role of probability within statistics curricula, in *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*, A Joint ICMI/IASE Study, C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, eds., Springer-Verlag, New York, 2011.

[13] Borovcnik, M., Multiple perspectives on the concept of conditional probability, *Av. Invest. Educ. Mat.*, **2** (2012), 5-27.

[14] Borovcnik, M., Bentz, H. J., Kapadia, R., Empirical research in understanding probability, in *Chance Encounters: Probability in Education*, R. Kapadia, M. Borovcnik, M., eds., Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1991.

[15] Borovcnik, M., Kapadia, R., A historical and philosophical perspective on probability, in *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives*, E. J. Chernoff, B. Sriraman, eds., Springer-Verlag, New York, 2014.

[16] Borovcnik, M., Kapadia, R., From puzzles and paradoxes to concepts in probability, in *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives*, E. J. Chernoff, B. Sriraman, eds., Springer-Verlag, New York, 2014.

[17] Canizares, M. J., Ortiz, J. J., Batanero, C., Serrano, L., Probabilistic language in Spanish textbooks, in *ICOTS-6 Papers for School Teachers*, B. Phillips, ed., International Association for Statistical Education, Cape Town, 2002.

[18] Cardano, G., *The Book on Games of Chances*, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1961.

[19] Carnap, R., *Logical Foundations of Probability*, University of Chicago Press, Chicago, 1950.

[20] Chaput, B., Girard, J. C., Henry, M., Frequentist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching, in *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*, C. Batanero, C. Burrill, C. Reading, eds., Springer-Verlag, New York, 2011.

[21] Chernoff, E. J., Russell, G. L., The fallacy of composition: Prospective mathematics teachers' use of logical fallacies, *Can. J. Sci. Math. Technol. Educ.*, **12** (2012), no. 3, 259-271.

[22] Chung, K. L., *A Course in Probability Theory*, Academic Press, London, 2001.

[23] David, F. N., *Games, Gods and Gambling*, Griffin, London, 1962.

[24] de Finetti, B., Sul concetto di probabilità [On the concept of probability], *Riv. Ital. Stat. Econ. Finanz.*, **5** (1933), 723-747.

[25] de Moivre, A., *The Doctrine of Chances*, Chelsea, New York, 1967.

[26] Engel, J., Sedlmeier, P., On middle-school students' comprehension of randomness and chance variability in data, *ZDM Math. Educ.*, **37** (2005), no. 3, 168-177.

[27] Engel, J., Sedlmeier, P., Worn, C., Modelling scatterplot data and the signal-noise metaphor: Towards statistical literacy for pre-service teachers, in *Proceedings of the ICMI Study 18 and IASE Round Table Conference*, C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, A. Rossman, eds., International Commission on Mathematics Instruction and International Association for Statistical Education, Monterrey, Mexico, 2008.

[28] Falk, R., Konold, C., The psychology of learning probability, in *Statistics for the Twenty-First Century*, F. S. Gordon, S. P. Gordon, eds., Mathematical Association of America, Washington, 1992.

[29] Fine, T. L., *Theories of Probability: An Examination of Foundations*, Academic Press, London, 1971.

[30] Gal, I., Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas, in *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning*, G. A. Jones, ed., Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 2005.

[31] Gillies, D., Varieties of propensities, *Brit. J. Philos. Sci.*, **51** (2000), 807-835.
[32] Hacking, I., *The Emergence of Probability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.
[33] Henry, M., Evolution de l'enseignement secondaire français en statistique et probabilities [Evolution of French secondary teaching in statistics and probability], *Statist. Enseign.*, **1** (2010), no. 1, 35-45.
[34] Keynes, J. M., *A Treatise on Probability*, MacMillan, New York, 1921.
[35] Kolmogorov, A., *Foundations of Probability's Calculation*, Chelsea Publishing Company, New York, 1950.
[36] Konold, C., Informal conceptions of probability, *Cognit. Instr.*, **6** (1989), 59-98.
[37] Konold, C., Pollatsek, A., Data analysis as the search for signals in noisy processes, *J. Res. Math. Educ.*, **33** (2002), no. 4, 259-289.
[38] Laplace, P. S., *Essai Philosophique sur les Probabilités* [Philosophical Essay on Probabilities], Christian Bourgois, Paris, 1986.
[39] Martignon, L., Fostering children's probabilistic reasoning and first elements of risk evaluation. in *Probabilistic Thinking, Presenting Plural Perspectives*, E. J. Chernoff, B. Sriraman, B., eds.,Springer-Verlag, Dordrecht, The Netherlands, 2014.
[40] Mellor, D. H., *The Matter of Chance*, Cambridge University Press, Cambridge, 1971.
[41] Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD), *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria* [Royal Decree Establishing the Minimum Content for Primary Education], Madrid, 2014.
[42] Moore, D. S., *The Basic Practice of Statistics*, 5th ed., Freeman, New York, 2010.
[43] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, 2000.
[44] National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers, *Common Core State Standards for Mathematics*, Washington DC, 2010, available at `http://www.corestandards.org/Math/`.
[45] Pange, J., Talbot, M., Literature survey and children's perception on risk, *ZDM Math. Educ.*, **35** (2003), no. 4, 182-186.
[46] Pascal, B., Correspondance avec Fermat [Correspondence with Fermat], in B. Pascal, *Oeuvres Complètes*, Paris, 1963; original letter written in 1654.
[47] Peirce, C. S., Notes on the doctrine of chances, in Peirce, C. S., *Collected Papers*, vol. 2, Harvard University Press, 1932; original work published in 1910.
[48] Popper, K. R., The propensity interpretation of probability, *Brit. J. Philos. Sci.*, **10** (1959), 25-42.
[49] Rényi, A., *Calcul des Probabilités* [Probability Calculus], Jacques Gabay, Paris, 1992; original work published in 1966.
[50] Savage, R., The paradox of nontransitive dice, *Amer. Math. Monthly*, **101** (1994), no. 5, 429-436.
[51] von Mises, R., *Probability, Statistics and Truth*, William Hodge, London, 1952.
[52] Wild, C., Pfannkuch, M., Statistical thinking in empirical enquiry, *Int. Stat. Rev.*, **3** (1999), 223-266.

مهدی شمس: دانشگاه کاشان، دانشکده علوم ریاضی
رایانامه: mehdishams@kashanu.ac.ir
سیدعلی محمدیه: دانشگاه کاشان، دانشکده علوم ریاضی
رایانامه: alim@kashanu.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 44, Number 1, Spring/Summer 2025, Pages 237–253
doi: 10.30504/mct.2023.1389.1977

Research on Teaching and Learning Probability (I)*

C. Batanero, Egan J. Chernoff, J. Engel, Hollylynne S. Lee, E. Sánchez
Translated by S. A. Mohammadiyeh[1], M. Shams[2]✉

[1]Department of Pure Mathematics, University of Kashan, Iran
[2]Department of Statistics, University of Kashan, Iran

Abstract. This is the first part of a translation of a booklet whose purpose is to update readers on recent developments in mathematics education. This book summarizes the vast amount of research related to teaching and learning probability that has been conducted for more than 50 years in a variety of disciplines. It begins with a synthesis of the most important probability interpretations throughout history: intuitive, classical, frequentist, subjective, logical propensity and axiomatic views. It discusses their possible applications, philosophical problems, as well as their potential and the level of interest they enjoy at different educational levels. Next, the book describes the main features of probabilistic thinking and reasoning, including the contrast to classical logic, probability language features, the role of intuitions, as well as paradoxes and the relevance of modeling.

Keywords: probability, probabilistic reasoning, teaching and learning, epistemology, curriculum
Article history: Received 26 April 2023; Accepted 4 June 2023
Article type: translation

⋆ Batanero, C., Chernoff, Egan J., Engel, J., Lee, Hollylynne S., Sánchez, E., *Research on Teaching and Learning Probability*, Springer Open, New York, 2016, 1-12.

1. alim@kashanu.ac.ir
2. mehdishams@kashanu.ac.ir