فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۴، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۴)، صص ۵۹ تا ۷۸

تکینگیِ معادله‌های انتگرالی

خدیجه ندائی اصل

چکیده. در این مقاله، نگاهی کوتاه به تاریخچهٔ معادله‌های انتگرالی می‌اندازیم و بر عملگرها و معادله‌های انتگرالیِ تکین متمرکز می‌شویم. سه نوع تکینگی ــ تکینگیِ ضعیف، تکینگیِ قوی و اَبَرتکینگی ــ را با آوردن مثال‌هایی از معادله های انتگرالی، معادله‌های شامل عملگرهای انتگرالیِ آبل، کوشی و معادله های انتگرالیِ مرزی تعریف می‌کنیم. به‌طور خاص، نحوهٔ استخراج معادلهٔ انتگرالیِ حجمی را به‌عنوان یک معادلهٔ انتگرالیِ تکینِ قوی به‌کمک بازنویسیِ معادلات ماکسول بیان می‌کنیم.

۱ مقدمه

معمولاً معادلات انتگرالی مانند معادلات دیفرانسیل از مدل‌سازی مسائل فیزیک به‌دست می‌آیند، چراکه مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری پیوندی تنگاتنگ با مباحث مکانیک دارند. معادلات انتگرالی به دو صورت در کاربردها ظاهر می‌شوند. این معادلات را می‌توان از بازنویسیِ معادلهٔ دیفرانسیل با انتگرال‌گیری از عملگر مشتق به‌دست آورد. از طرفی، برخی از پدیده‌ها را می‌توان با کمک مدل‌هایی که نیاز به انتگرال‌گیری نسبت به متغیر زمان یا متغیر مکان و یا هر دو دارند، توصیف کرد که منجر به یک معادلهٔ انتگرالی می‌شود [۲۰].

ظهور معادلات دیفرانسیلی را می‌توان از زمان ارائهٔ قانون دوم نیوتن دربارهٔ حرکت، یعنی از سال ۱۶۸۷ در نظر گرفت، اما وضعیت برای معادلات انتگرالی متفاوت هست. رد این نوع معادلات را باید در متون ریاضی اواخر نیمهٔ اول قرن نوزدهم جستجو کرد که در واقع همان بازنویسی معادلهٔ

عبارات و کلمات کلیدی: تکینگی، معادلهٔ انتگرالیِ آبل، معادلهٔ انتگرالیِ کوشی، معادلات ماکسول
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۶/۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۰/۲۴

doi: 10.30504/mct.2024.1422.1999

دیفرانسیل به‌صورت انتگرالی است. عبارت «معادلهٔ انتگرالی» را اولین‌بار پاول دوبوئاریمون[۱] در سال ۱۸۸۸ برای معادلاتی که در آن، تابع مجهول، زیر علامت انتگرال قرار می‌گرفت، استفاده شد [۱۲]. در اوایل قرن بیستم، ویتو ولترّا[۲] و ایوار فردهولم[۳] موفق شدند نظریه‌های بنیادی برای دو نوع معادلات انتگرالی خطی ارائه دهند. بر همین مبنا، یک تقسیم‌بندی مهم در نوشته‌های مربوط به معادلات انتگرالی در حال حاضر، دو ردهٔ معادلات انتگرالیِ ولترّا و معادلات انتگرالیِ فردهولم است. به عبارت دیگر، بازنویسیِ یک مسئلهٔ مقدار اولیهٔ خطی منجر به معادلهٔ انتگرالی ولترّای

$$u(x) = f(x) + \int_a^x k(x,y)u(y)\mathrm{d}y \qquad (۱.۱)$$

می‌گردد که در آن، تابع $u(x)$ مجهول است و تابع هسته $k(x,y)$ و تابع سمت راست $f(x)$ معلوم هستند. از طرف دیگر، بازنویسیِ یک مسئلهٔ مقدار مرزی باعث تولید یک معادلهٔ انتگرالی موسوم به معادلهٔ فردهولم می‌گردد که شکل آن در حالت خطی به‌صورت

$$u(x) = f(x) + \int_\Omega k(x,y)u(y)\mathrm{d}y, \qquad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \qquad (۲.۱)$$

است.

معادلات انتگرالی و روش حل آنها به نام‌هایی همچون فردهولم، هیلبرت،[۴] نیستروم،[۵] آدامار،[۶] رادُن[۷] و ریاضی‌دانان بسیار دیگری گره خورده است. نظریهٔ معادلات انتگرالی در قرن بیستم نقشی بسیار پُررنگ در پیشبُرد و توسعهٔ آنالیز داشت. در سال ۱۹۰۳، فردهولم در مجلهٔ \اکتا متمتیکا[۸] مقاله‌ای منتشر کرد و در آن، هستهٔ معادلهٔ (۲.۱) را یک تابع پیوستهٔ حقیقی‌مقدار در نظر گرفت. فکر او این بود معادلهٔ انتگرالی را به‌صورت حدی از دستگاه خطی نامتناهی از معادلات جبری که انتگرال با کمک مجموع‌های ریمانی تقریب زده می‌شود، در نظر بگیرد. دستاوردهای فردهولم، آغازی بر توسعهٔ آنالیز تابعی جدید در دههٔ ۱۹۲۰ شد. در سال ۱۹۱۶، فریدیِش ریس[۹] تعمیم نتایج فردهولم را برای شکل کلی معادلهٔ (۲.۱) به‌صورت

$$u = f + Ku$$

به‌دست آورد که در آن، $K : X \to X$ یک عملگر خطی فشرده است. اما عرصه برای درخشیدنِ

1. Paul du Bois-Reymond 2. Vito Volterra 3. Ivar Fredholm 4. David Hilbert 5. Evert J. Nyström 6. Jacques Salomon Hadamard 7. Johann Karl August Radon 8. Acta Mathematica 9. Frigyes Riesz

معادلات انتگرالی با معرفی روش‌های وردشی[1] برای معادلات دیفرانسیل جزئی در آغاز قرن بیستم، تنگ شد و آنها مقداری از اهمیت خود را از دست دادند. این به‌دلیل دشواریِ صورت‌بندیِ نتایج دقیق دربارهٔ وجود و یکتایی جواب برای معادلات انتگرالیِ کلاسیک بود [۲۲].

در میانهٔ قرن بیستم، اتفاقاتی افتاد که یافتن جواب عددی برای معادلات دیفرانسیل جزئی مهم شد و در نتیجه معادلات انتگرالی با عنوان روش معادلات انتگرالی به صحنه برگشت. روش معادلات انتگرالی به روش‌هایی گفته می‌شود که معادلات دیفرانسیل بیضوی را به معادلات انتگرالیِ مرزی تبدیل می‌کنند. این تبدیل دارای مزایایی قابل‌توجه است؛ آن‌قدر که موجب ایجاد یک رده در روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی در کنار روش‌هایی مانند عناصر متناهی و تفاضل متناهی شد که آن را به‌نام روش عناصر مرزی می‌شناسیم. آنچه موجب اهمیت این رده از روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل شده است، کاهش بُعد دامنه (در معادلهٔ انتگرالیِ مرزی فقط با مرز دامنه سروکار داریم) و سادگیِ بررسی معادلاتی با مرزهای پیچیده و حتی بی‌کران است. از دیدگاه نظری، معرفی نظریهٔ توزیع (توابع تعمیم‌یافته) توسط شوارتس[2] و سوبلیف[3] (برای آشنایی با مقدمات این نظریه، فصل سوم [۲۶] را بخوانید)، به این حیات دوبارهٔ معادلات انتگرالی، معنایی دوچندان بخشید. نظریه‌های کلاسیک قرن گذشته در این چارچوب جدید، در خدمت بررسی وجود و یکتایی جواب برای معادلات انتگرالیِ مرزی قرار گرفت. در تبدیل معادلات دیفرانسیل بیضوی به معادلات انتگرالی، تابع گرین[4] نقشی مهم دارد و در هستهٔ معادلهٔ انتگرال به‌دست آمده قرار می‌گیرد. تکینگیِ تابع گرین و ناهمواریِ دامنهٔ انتگرال‌گیری باعث می‌شود که در برخی موارد، حتی بررسی نظریِ معادلهٔ انتگرالیِ حاصل، در چارچوب نتایج به‌دست آمده توسط ریس ممکن نباشد. این سرآغازِ چالش با عملگرهای انتگرالیِ تکین است.

نوعی دیگر از دسته‌بندی این معادلات، عبارت است از معادلات انتگرالیِ نوع اول و معادلات انتگرالیِ نوع دوم. شکل معمول معادلات انتگرالیِ نوع اول ولترّا و فردهولم، به‌ترتیب به‌صورت

$$f(x) = \int_a^x k(x,y)u(y)\mathrm{d}y \qquad (۳.۱)$$

و

$$f(x) = \int_\Omega k(x,y)u(y)\mathrm{d}y, \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^d, \quad d \in \{۱, ۲, \dots\} \qquad (۴.۱)$$

1. variational methods 2. Laurent Schwartz 3. Sergei Lvovich Sobolev 4. Green function

است. البته تفاوت معادلات انتگرالیِ نوع اول و نوع دوم، فراتر از تفاوت‌های ظاهری است که در بالا مشاهده می‌کنیم. بررسی معادلات انتگرالی نوع دوم به‌دلیل داشتنِ ساختاری به‌صورت $I - K$ که در آن K عملگری فشرده است، آسان‌تر است، زیرا می‌توان آن را یک پریشیدگی[1] فشرده از عملگر همانی تفسیر کرد [۱۵]. برای مطالعهٔ بحثی جامع در این باره، به فصل اول [۱۱] مراجعه کنید. معادلات انتگرالی را از نگاهی دیگر هم می‌توان دسته‌بندی کرد. در ساختار هر معادلهٔ انتگرالی، یک عملگر انتگرالی وجود دارد و آن نیز شامل مجهول و یک جزء دیگر است که آن را هسته می‌نامیم. اگر هستهٔ معادلهٔ انتگرالی هموار باشد، آن را معادلهٔ انتگرالیِ هموار و اگرنه، آن را معادلهٔ انتگرالیِ تکین[2] می‌نامیم. اهمیت بحث دربارهٔ تکینگیِ عملگرهای انتگرالی در گسترهٔ مسائلی است که توسط معادلات انتگرالیِ تکین مدل‌سازی می‌شوند. از جملهٔ آنها می‌توان به مسائل الکتریسیتهٔ ساکن، ایرودینامیک و الکترومغناطیس اشاره کرد. امروزه بخشی از پژوهش‌ها در زمینهٔ حل عددیِ معادلات دیفرانسیل، به بررسی روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری اختصاص دارد و همان‌طور که در ادامه نیز اشاره خواهیم کرد، عملگرهای کسری در بُعد یک، ترکیبی از عمل مشتق کلاسیک و عملگر آبل (که در این مقاله به‌عنوان یک عملگر تکینِ ضعیف معرفی می‌شود) است. بدیهی است که شناخت رفتار جواب معادله در اولین گام، بهترین رهنمون جهت یافتن روش صحیح عددی برای تقریب جواب است و لذا از این حیث، بار دیگر می‌توان به اهمیت این طبقه‌بندی پی بُرد.

در نوشته‌های مربوط به معادلات انتگرالی، سه نوع تکینگی را می‌توان تشخیص داد: تکینگی ضعیف، تکینگی قوی و اَبَرتکینگی.[3] این تفکیک ناشی از رفتار هستهٔ عملگر انتگرالی است. به عبارت ساده‌تر، اینکه چه چیزی داخل انتگرال قرار بگیرد، تعیین می‌کند که معادلهٔ انتگرالی هموار یا تکین باشد و نوع تکینگیِ آن چه باشد. در ادامهٔ مقاله، ابتدا انواع تکینگی را در بُعد یک با ارائهٔ تعریف آن بر مبنای هسته بررسی و معادله‌های انتگرالیِ آبل و کوشی را به‌عنوان نماینده‌های معادلات انتگرالیِ تکینِ ضعیف و قوی تعریف می‌کنیم.

۲ معادلات انتگرالیِ تکینِ یک‌بُعدی

معادلات انتگرالیِ ولترّا (۱.۱) و (۳.۱) و یا معادلات انتگرالی فردهولم (۲.۱) و (۴.۱) را برای $\Omega = [a, b]$ در نظر بگیرید. اگر هستهٔ معادله، $k(x, y)$، تابعی اندازه‌پذیر روی $[a, b] \times [a, b]$

1. perturbation 2. singular 3. hypersingularity

باشد و به‌ازای یک $0 \leq \alpha < 1$ در نامساوی

$$|k(x,y)| \leq c|x-y|^{-\alpha}, \qquad x,y \in [a,b] \tag{۱.۲}$$

صدق کند، آنگاه معادلات مذکور، همگی تکینِ ضعیف هستند.

۱.۲ معادلهٔ انتگرالی آبل

یکی از اولین معادلات انتگرالی به‌دست آمده، موسوم به معادلهٔ انتگرالیِ آبل است (بعد از معادلات انتگرالیِ مرزی که گاوس به‌دست آورد و در بخش بعد به آنها می‌پردازیم). در سال ۱۸۲۳، نیلس هنریک آبل برای یافتن جواب مسئلهٔ خم هم‌زمانی[1] با استفاده از قانون پایستگی، به معادلهٔ انتگرالی زیر رسید

$$f(y) = \int_0^y \frac{u(x)}{\sqrt{y-x}}\mathrm{d}x. \tag{۲.۲}$$

جزئیات بیشتر و محاسبات را می‌توان در فصل اول [۱۶] یافت. هستهٔ معادلهٔ انتگرالیِ (۲.۲) را می‌توان به‌صورت کلی‌ترِ

$$k(x,y) = (y-x)^{-\alpha}, \qquad \alpha \in (0,1) \tag{۳.۲}$$

نوشت. در اینجا انتگرالده به‌ازای $x = y$ دارای تکینگی است، یعنی انتگرال ریمان آن در بازهٔ $[0,x]$ وجود ندارد. سمت راست را می‌توان به‌صورت یک انتگرال ناسره تعریف کرد:

$$\int_0^x (y-x)^{-\alpha}u(y)\mathrm{d}y = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_0^{x-\epsilon} (y-x)^{-\alpha}u(y)\mathrm{d}y.$$

علت اینکه این عملگر را تکینِ ضعیف می‌نامیم، از این تعریف ناشی می‌شود. هستهٔ معادلهٔ انتگرالیِ آبل، از جنس توزیع $u(x) = |x|^{-\alpha}$ است که $x \in \mathbb{R}^d$ و $|\cdot|$ نشان‌دهندهٔ نرم اقلیدسی است. می‌توان دید که برای $\alpha < d$، $u(x)$ روی $\mathbb{R}^d$ موضعاً انتگرال‌پذیر است و لذا یک توزیعِ هموار تعریف می‌کند، اما برای $\alpha \geq d$، $u(x)$ یک توزیع تکین است. جزئیات بیشتر را در مثال ۵.۲.۲ از [۱۸] دنبال کنید.

عملگر انتگرالیِ

$$(Ku)(x) = \int_a^x k(x,y)u(y)\mathrm{d}y$$

1. tautochrone curve

را که هستهٔ آن با (۳.۲) بیان شود، عملگر آبل می‌نامیم. این عملگر نقشی مهم در تعریف مشتق‌ها و معادلات دیفرانسیل کسری در بُعد یک دارد. دو دستهٔ مهم از این نوع معادلات، یعنی معادلات دیفرانسیل کسریِ کاپُتو[1] و معادلات دیفرانسیل کسریِ ریمان–لیوویل[2] با کمک آن تعریف می‌شود. در ادامه، تعریف‌های آنها را بیان می‌کنیم. برای هر $\alpha > ۰$ که $n - ۱ < \alpha < n$، $n \in \mathbb{N}$، انتگرال‌های راست و چپ کسری روی بازهٔ کراندار $[a, b]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$({}_aI_x^\alpha u)(x) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-۱} u(y) \mathrm{d}y \qquad \text{(انتگرال کسریِ چپ)}$$

و

$$({}_xI_b^\alpha u)(x) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (y-x)^{\alpha-۱} u(y) \mathrm{d}y \qquad \text{(انتگرال کسریِ راست)}$$

عبارت عملگر انتگرالیِ کسری، از نوشته‌های مربوط به معادلات دیفرانسیل کسری عاریه گرفته شده است و اینها عملگر آبل هستند. مشتق کسریِ ریمان–لیوویل چپ از مرتبهٔ α برای تابع u مناسب، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a^R D_x^\alpha u = D^n \, {}_\circ I_x^{n-\alpha} u$$

که در آن عملگر D^n نشان‌دهندهٔ مشتق کلاسیک از مرتبهٔ n است. مشتق ریمان–لیوویل کسریِ راست متناظر آن عبارت است از

$${}_x^R D_b^\alpha u = (-۱)^n D^n \, {}_x I_b^{n-\alpha} u.$$

علاوه بر این، مشتق کاپُتوی چپ و مشتق کاپُتوی راست از مرتبهٔ α به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_\circ^C D_x^\alpha u = {}_\circ I_x^\alpha \, D^n u$$

و

$${}_x^C D_b^\alpha u = (-۱)^n \, {}_x I_b^\alpha D^n u.$$

دیده می‌شود که عملگرهای دیفرانسیل کسری کلاسیک از ترکیب دو عملگر مشتق و عملگر انتگرالیِ کسری به‌دست می‌آید. هر معادله‌ای را که در آن، عملگر مشتق ریمان–لیوویل یا کاپُتو حضور داشته باشد، معادلهٔ دیفرانسیل کسری ریمان–لیوویل یا معادلهٔ دیفرانسیل کسری کاپُتو می‌نامیم.

1. Michele Caputo 2. Riemann-Liouville

۲.۲ عملگر انتگرالی کوشی

انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_a^b \frac{1}{y-x}\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon_1\to 0+}\int_a^{y-\epsilon_1}\frac{1}{y-x}\mathrm{d}x + \lim_{\epsilon_2\to 0+}\int_{y+\epsilon_2}^b \frac{1}{y-x}\mathrm{d}x.$$

اگر ϵ_1 و ϵ_2 مستقلاً به صفر میل کنند، انتگرال ناسره وجود نخواهد داشت. اگر $\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon$ به صفر میل کند، مقدار انتگرال بالا برابر با $\log(\frac{y-a}{b-y})$ می‌شود که آن را مقدار اصلی کوشی انتگرال می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\text{p.v.}\int_a^b \frac{1}{y-x}\mathrm{d}x = \log\Big(\frac{y-a}{b-y}\Big).$$

به‌طور کلی اگر انتگرالده (هسته) دارای نقطهٔ تکین و در آن نقطه به‌طور ناسره انتگرال‌پذیر باشد، تکینگی را ضعیف و اگرنه، آن را تکینگیِ قوی می‌نامیم. بنابراین اگر در (۱.۲) نمای α برابر با ۱ باشد، تکینگی قوی است. حال تبدیل هیلبرت

$$(\mathcal{H}u)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(y)}{x-y}\mathrm{d}y \qquad (۴.۲)$$

را در نظر بگیرید. این انتگرال به‌معنای مقدار اصلی کوشی وجود دارد و تنها عملگر انتگرالیِ تکینِ قوی در بُعد یک است. اگر به‌دنبال پیوندی میان قسمت‌های حقیقی و موهومی مقادیر مرزی یک تابع تحلیلی باشیم، به انتگرال تکین (۴.۲) می‌رسیم [۴، ۶].

۳ معادلات انتگرالیِ تکین در بُعد بالا

در مقدمه به نقش معادلهٔ انتگرالیِ مرزی اشاره شد. از سوی دیگر، معادلات انتگرالیِ تکین در ابعاد بالا نقشی پُررنگ‌تر در کاربردها دارند که از جمله می‌توان به اولین معادلات انتگرالیِ به‌دست آمده توسط گاوس، حاصل از مطالعهٔ نظریهٔ پتانسیل و معادلات انتگرالی که از بازنویسیِ مسائل وارون[۱] به‌دست می‌آیند، اشاره کرد. تبدیل معادلهٔ دیفرانسیل بیضوی با ضرایب ثابت به معادلهٔ انتگرالی، می‌تواند منجر به معادلات انتگرالیِ تکین یا اَبَرتکین شود. در ادامه مسئلهٔ لاپلاس–دیریکله را به یک معادلهٔ انتگرالیِ مرزی تبدیل و سپس همواری یا تکینگیِ آن را بررسی می‌کنیم. عملگر لاپلاسیِ کسری را به‌عنوان نمونه‌ای از عملگرهای انتگرالیِ اَبَرتکین معرفی می‌کنیم. در نهایت، با آغاز از

1. inverse problems

معادلات ماکسول، به معادلهٔ انتگرالیِ حجمی برای میدان الکتریکی می‌رسیم که نمونه‌ای از یک معادلهٔ انتگرالیِ تکینِ قوی است.

در مقدمهٔ بخش ۲ به نحوهٔ تشخیص یک عملگر انتگرالیِ تکینِ ضعیف اشاره شد. قبل از پرداختن به مثال‌هایی از عملگرهای انتگرالیِ تکین در ابعاد بالا، با توجه به آنچه که در بخش ۲.۲ گفته شد، معنای «تکینِ قوی» و «اَبَرتکین» را روشن می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. ([۱۸]) فرض کنیم $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ و برای $x, y \in \Omega$،

$$|x-y| = \Big(\sum_{j=۱}^{d} (x_i - y_i)^۲\Big)^{۱/۲}.$$

عملگر انتگرالیِ

$$I(u)(x) = \int_\Omega \frac{f(x,y)}{|x-y|^\alpha} u(y)\mathrm{d}y$$

را برای تابع هموار $f(x,y)$ در نظر بگیرید. اگر $\alpha < d$، آنگاه $I(u)$ یک عملگر تکینِ ضعیف است. برای $\alpha = d$، $I(u)$ دارای تکینگیِ قوی است و برای $\alpha > d$، با یک عملگر اَبَرتکین مواجه هستیم.

۱.۳ معادلهٔ انتگرالیِ مرزی

عملگر دیفرانسیل خطی $\mathcal{L}$ را در نظر بگیرید. جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$\mathcal{L}\{F(x,x_\circ)\} = -\delta(x-x_\circ), \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

را جواب اساسی[۱] می‌نامیم که در آن، $\delta(x-x_\circ)$ نشان‌دهندهٔ دلتای دیراک[۲] در نقطهٔ $x_\circ$ است. فرض کنیم $G(x,x_\circ)$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی با شرط مرزیِ همگن

$$\mathcal{L}(G(x,x_\circ)) = -\delta(x-x_\circ), \qquad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d,$$

$$\mathcal{B}(G(x,x_\circ)) = \circ, \qquad x \in \Gamma = \partial\Omega$$

باشد. $G(x,x_\circ)$ را تابع گرین وابسته به این معادلهٔ دیفرانسیل با شرط مرزی (مسئله مقدار مرزی)

1. fundamental solution 2. Paul Dirac

می‌نامیم. عملگر لاپلاس عبارت است از

$$\Delta : H^k(\Omega) \to H^{k-۲}(\Omega), \qquad \Delta := \sum_{i=۱}^{d} \frac{\partial^۲}{\partial x_i^۲} \qquad (k \geq ۲,\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^d)$$

و جواب اساسی آن

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{۱}{۲\pi} \log |x-y| & x,y \in \mathbb{R}^۲ \\ \frac{۱}{۴\pi |x-y|} & x,y \in \mathbb{R}^۳ \end{cases}$$

است. فرض کنیم Ω یک ناحیهٔ همبند ساده در $\mathbb{R}^d$ به‌ازای $d = ۲, ۳$ و مرز آن، $\Gamma := \partial\Omega$ هموار باشد. مسئلهٔ لاپلاس–دیریکله

$$\begin{cases} \Delta u(x) = ۰ & x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & x \in \Gamma \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$$[v(x)]_\Gamma := v(x)|_{x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega} - v(x)|_{x \in \overline{\Omega}}.$$

با استفاده از اتحاد گرین، می‌توان نمایش

$$u(x) = \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}(y)} G(x,y) [u(y)]_\Gamma \mathrm{d}l(y) - \int_\Gamma G(x,y) [\partial_{\mathbf{n}} u(y)]_\Gamma \mathrm{d}l(y) \qquad (۱.۳)$$

را برای جواب روی $\mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ نوشت. حال به‌ازای ϕ و ψهای انتگرال‌پذیر، عملگرهای انتگرالی موسوم به پتانسیل تک‌لایه[۱] و پتانسیل دو لایه[۲] را در نظر می‌گیریم

$$(\mathcal{S}\phi)(x) = \int_\Gamma G(x,y)\phi(y) \mathrm{d}l(y), \qquad (\mathcal{D}\psi)(x) = \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}(y)} G(x,y) \psi(y) \mathrm{d}l(y).$$

طرف راست (۱.۳) را می‌توان مجموعی از پتانسیل تک‌لایه و پتانسیل دو لایه تلقّی کرد. اگر قرار دهیم $u(x)|_{x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega} = ۰$، آنگاه نمایش

$$u(x) = -\int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}(y)} G(x,y) u(y) \mathrm{d}l(y) + \int_\Gamma G(x,y) \partial_{\mathbf{n}} u(y) \mathrm{d}ly, \qquad x \in \Omega$$

1. single layer 2. double layer

را خواهیم داشت و به‌ازای $[u(x)]_\Gamma = ۰$ با توجه به فرمول نمایش برای چگالی نامعلوم φ، داریم

$$-\int_\Gamma G(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}l(y) = g(x), \qquad x \in \Gamma.$$

معادلهٔ اخیر، نمونه‌ای از یک معادلهٔ انتگرالیِ مرزی است که با توجه به هسته، یک معادلهٔ انتگرالیِ تکینِ ضعیف است. با در نظر گرفتنِ $[\partial_{\mathbf{n}} u]_\Gamma \equiv ۰$، نمایش پتانسیل دو لایه برای چگالی نامعلوم ψ به‌دست می‌آید

$$u(x) = \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}(y)} G(x,y)\psi(y)\mathrm{d}l(y), \qquad x \in \Omega.$$

با توجه به شرط مرزی، به معادلهٔ انتگرالیِ

$$-\frac{۱}{۲}\psi(x) + \int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}(y)} G(x,y)\psi(y)\mathrm{d}l(y) = g(x), \qquad x \in \Gamma$$

می‌رسیم. اگر Γ هموار باشد، می‌توان نشان داد که برای $d = ۲$ عبارت $\partial_{\mathbf{n}(y)} G(x,y)$ زمانی که y به x نزدیک می‌شود، قابل توسیع به یک تابع پیوسته است. علاوه بر این، برای $d = ۳$ با توجه به تعریفِ ۱.۳ به‌ازای $\alpha = ۲$، تکینِ ضعیف است. لذا برای مرز هموار، با یک معادلهٔ انتگرالیِ فردهولم نوع دوم مواجه می‌شویم (جزئیات را از فصل اول و دوم کتاب [۱۳] دنبال کنید)، اما اگر مرز دارای تیزی یا تکینگی باشد، آنگاه انتگرال

$$\int_\Gamma \partial_{\mathbf{n}(y)} G(x,y)\psi(y)\mathrm{d}l(y)$$

را باید به معنای کوشی تعریف کرد و معادلهٔ انتگرالی به‌دست آمده یک معادلهٔ تکینِ قوی است [۸].

۲.۳ عملگر لاپلاسیِ کسری

نمی‌توان از انتگرال تکین سخن گفت و تعریف انتگرال لاپلاسیِ کسری را فراموش کرد. برای عملگر لاپلاسیِ کسری، تعریف‌های متنوعی وجود دارد که در اینجا به جزئیات همهٔ آنها نمی‌پردازیم و خوانندهٔ علاقه‌مند را به [۱۷، ۱۹] ارجاع می‌دهیم. فرض می‌کنیم $\alpha \in (۰, ۲)$ و قرار می‌دهیم

$$c_{d,\alpha} = \frac{۲^\alpha \Gamma(\frac{d+\alpha}{۲})}{\pi^{\alpha/۲}\left|\Gamma(-\alpha/۲)\right|}.$$

تبدیل فوریهٔ هر $u \in L^{1}(\mathbb{R}^d)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{F}\{u\}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(\xi \cdot x) u(x) \mathrm{d}x.$$

تبدیل فوریه را به عملگر لاپلاس (۱.۳) اعمال می‌کنیم و به تساوی

$$\mathcal{F}\{-\Delta u\}(\xi) = |\xi|^{2} \mathcal{F}\{u\}(\xi)$$

می‌رسیم. توان ۲ را با توان کلی‌ترِ α جایگزین می‌کنیم و تبدیل فوریهٔ عملگر لاپلاسیِ کسری را به‌دست می‌آوریم [۲۷]

$$\mathcal{F}\{(-\Delta)^{\alpha/2} u\}(\xi) = |\xi|^{\alpha} \mathcal{F}\{u\}(\xi).$$

در نهایت، به‌کمک وارون تبدیل فوریه، به عملگر لاپلاسیِ کسری می‌رسیم

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u(x) := \mathcal{F}^{-1}\{|\xi|^{\alpha} \mathcal{F}\{u\}\}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{۲.۳}$$

عملگر انتگرالیِ

$$\begin{aligned}(Lu)(x) &= \lim_{\epsilon \to 0+} c_{d,\alpha} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\epsilon(x)} (u(x+z) - u(x)) \frac{1}{|z|^{d+\alpha}} \mathrm{d}z \\ &= \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\epsilon(x)} (u(x+z) - u(x)) \nu_\epsilon(z) \mathrm{d}z\end{aligned}$$

به‌ازای $\nu_\epsilon(z) = \frac{c_{d,\alpha}}{|z|^{d+\alpha}} \chi_{\mathbb{R}^d \setminus B_\epsilon(z)}$ که در آن $\chi_{\mathbb{R}^d \setminus B_\epsilon(z)}$ تابع مشخصهٔ مجموعهٔ $\mathbb{R}^d \setminus B_\epsilon(z)$ است، تعریف می‌شود. چه پیوندی میان این عملگر و عملگر لاپلاسیِ کسری (۲.۳) وجود دارد؟ این دو در واقع معادل هستند و اثبات این ادعا را می‌توانید در گزارهٔ ۳.۳ از [۹] ببینید.

در بیشتر متون، عملگر لاپلاسیِ کسری با نماد

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u = c_{d,\alpha} \text{ p.v.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{d+\alpha}} \mathrm{d}y$$

نشان داده می‌شود که در آن،

$$\text{p.v.} \int_{\mathrm{R}^d} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{d+\alpha}} \mathrm{d}y = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathrm{R}^d \setminus B_{\epsilon(x)}} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\alpha+d}} \mathrm{d}y.$$

با توجه به تعریف ۱.۳ این عملگر، یک عملگر اَبَرتکین است.

تأکید می‌کنیم که برای تعریف عملگر لاپلاسیِ کسری روی یک مجموعهٔ باز کراندار Ω به دو صورت می‌توان عمل کرد. یکی اینکه توان عملگر لاپلاس را به‌صورت طیفی تحلیل کنیم، یعنی برای تابع داده‌شدهٔ u تجزیهٔ طیفی برحسب توابع ویژهٔ $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ در مسئلهٔ لاپلاس–دیریکله با شرط مرزی همگن را بنویسیم و مقادیر ویژه ($\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$) را به‌ترتیب به توان $\alpha/۲$ برسانیم. به عبارت دیگر،

$$(-\Delta)^{\alpha/۲}u(x)=\sum_{k=۱}^{\infty}\lambda_k^{\alpha/۲}(u,\psi_k)_{L^۲(\Omega)}\psi_k(x), \qquad x\in\Omega.$$

دوم اینکه با کمک فرآیندهای تصادفی و استفاده از مولد بینهایت‌کوچکِ فرآیند لویِ[۱] پایدار، عملگر لاپلاسیِ کسری را در $\mathbb{R}^d$ یا Ω تعریف کنیم. برای آگاهی از جزئیات بیشتر، خوانندهٔ علاقه‌مند را به مطالعهٔ [۲، ۳] دعوت می‌کنیم.

۳.۳ معادلات انتگرالیِ حجمی

فرض کنیم بُعد دامنهٔ مسئله بیشتر از یک باشد. هنگامی که معادلهٔ دیفرانسیل به معادلهٔ انتگرالی تبدیل می‌شود، اگر عملگر انتگرالی روی دامنه یا بخشی از آن در نظر گرفته شود، برخلاف معادلهٔ انتگرالیِ مرزی که انتگرال روی مرز دامنه گرفته می‌شود، معادلهٔ انتگرالی از نوع حجمی خواهد شد. انتشار امواج اکوستیک زمان–همساز[۲] در فضای سه‌بُعدی را می‌توان با معادلهٔ هلمهولتس[۳] در محیط ناهمگن

$$\Delta u(x)+k^۲n(x)u(x)=۰, \qquad x\in\mathbb{R}^۳$$

توصیف کرد. جواب این معادله، فشار موج صوتی است که به مکان x و زمان t بستگی دارد. تابع $n(x)$ نشان‌دهندهٔ ضریب شکست محیط ناهمگن و k نیز عدد موج است.

تعریف ۲.۳. توزیع $g_k(x)$ جواب اساسی معادلهٔ هلمهولتس در $\mathbb{R}^d$ خوانده می‌شود هرگاه

$$(\Delta+k^۲)g_k(x)=-\delta_۰(x)$$

که در آن، $\delta_۰$ توزیع دیراک در صفر است.

1. Paul Lévy 2. time-harmonic 3. Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz

می‌توان نشان داد که به‌ازای $d = ۳$، جواب اساسی معادلهٔ مذکور برابر با

$$g_k(x) = \frac{\exp(ik|x|)}{۴\pi|x|}$$

است. معادلهٔ هلمهولتس با داشتن رفتار مناسب جواب در بی‌نهایت که از آن به شرط تابش زومرفلت[۱] یاد می‌شود، در معادلهٔ انتگرالیِ

$$u(x) = f(x) - k^۲ \int_{\mathbb{R}^۳} g_k(x-y)(۱-n(y))u(y)\mathrm{d}y$$

صدق می‌کند [۱۶] که در آن، f جواب معادلهٔ هلمهولتس در خلأ است. معادلهٔ اخیر نمونه‌ای معادلات انتگرالی موسوم به معادلات حجمی است. این معادله را در نوشتجات فیزیک کوانتوم و نظریهٔ پراکندگی با نام معادلهٔ لیپمن–شووینگر[۲] می‌شناسند. این معادله را می‌توان در ردیف معادلات انتگرالیِ تکینِ ضعیف جای داد. اما نمونه‌هایی دیگر از معادلات انتگرالیِ حجمی نیز وجود دارد که رفتار آنها بسیار متفاوت از معادلات انتگرالی لیپمن–شووینگر است. برای مطالعهٔ این نمونه‌ها، یادآور می‌شویم که عملگرهای انتگرالی را که هستهٔ آنها انتگرال‌پذیر لبگ نباشند، تکینِ قوی می‌نامیم. بررسی این نوع انتگرال‌ها با چالش بیشتری روبه‌رو است، چراکه ابتدا باید به‌طور مناسب تعریف شوند. در ادامه معادلهٔ انتگرالیِ حجمی را که در حل عددی معادلات ماکسول[۳] ظاهر می‌شود، به‌عنوان مثالی از خانوادهٔ معادلات انتگرالی تکینِ قوی، بررسی می‌کنیم. این معادلهٔ انتگرالی حجمی محبوب فیزیکدان‌ها و مهندسان است [۲۱، ۲۴، ۲۸، ۲۹، ۳۲، ۳۰]، زیرا با ساده‌ترین روش ممکن آن را گسسته می‌کنند و جواب تقریبی را به‌دست می‌آورند (برای آگاهی از این روش گسسته‌سازی موسوم به تقریب دوقطبی گسسته،[۴] به [۳۱] مراجعه کنید. تحلیل روش مذکور را نیز می‌توانید در [۷] مشاهده کنید).

در این بخش، جزئیات مربوط به استخراج این معادلهٔ انتگرالی را بیان می‌کنیم، زیرا برخلاف معادلات انتگرالیِ مرزی، این نوع معادلات در بین ریاضی‌دانان چندان شناخته‌شده نیست. برای اطلاع از نوع طبقه‌ای که این معادله در آن جای می‌گیرد، لازم است خواننده برخی از نکات فنی بیان‌شده در این بخش را دنبال کند. معادلات ماکسول در حالت زمان–همساز عبارت‌اند از [۲۵]

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \epsilon\mathbf{E} &= ۰, \qquad \operatorname{curl}\mathbf{E} - \mathrm{i}\omega\mu\,\mathbf{H} = ۰, \\ \operatorname{div} \mu\mathbf{H} &= ۰, \qquad \operatorname{curl}\mathbf{H} + \mathrm{i}\,\omega\epsilon\mathbf{E} = \mathbf{J} \end{aligned}$$

1. Arnold Sommerfeld 2. Lippmann–Schwinger 3. James Clerk Maxwell 4. discrete dipole approximation

که در آن، $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$، به‌ترتیب شدت میدان الکتریکی و شدت میدان مغناطیسی است. عددهای ϵ، μ و ω نیز به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ گذردهیِ الکتریکی، نفوذپذیریِ مغناطیسی و فرکانس زاویه‌ای است. چگالی جریان الکتریکی نیز با علامت $\mathbf{J}$ نشان داده می‌شود. پراش[۱] موج الکترومغناطیسی همساز $\mathbf{E}^{\text{diff}}$ و موج فرودی[۲] $\mathbf{E}^{\text{inc}}$ در رابطهٔ

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{diff}} + \mathbf{E}^{\text{inc}}$$

صدق می‌کنند. به‌طور مشابه برای میدان الکتریکی می‌توان نوشت

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\text{diff}} + \mathbf{H}^{\text{inc}}.$$

زوج $(\mathbf{E}^{\text{diff}}, \mathbf{H}^{\text{diff}})$ در شرط تابش سیلور–مولر[۳] صدق می‌کند

$$\lim_{r\to\infty} (\mathbf{H}^{\text{diff}} \times x - r\mathbf{E}^{\text{diff}}) = \circ, \qquad r = |x|.$$

این شرط معادل شرط سامرفلت است [۵]. حال برای یک محیط همسانگرد[۴] (μ و ϵ تابع‌های عددی روی $\mathbb{R}^{۳}$ هستند) می‌توان $\mathbf{H}$ را از معادلات بالا حذف کرد و به‌دست آورد

$$\operatorname{curl}\Big(\frac{۱}{\mathrm{i}\omega\,\mu}\operatorname{curl}\mathbf{E}\Big) + \mathrm{i}\,\omega\,\epsilon\mathbf{E} = \mathbf{J}.$$

علاوه بر این، به‌جای حذف میدان $\mathbf{H}$، می‌توان میدان $\mathbf{E}$ را حذف کرد که معادلهٔ زیر را نتیجه می‌دهد

$$\operatorname{curl}\Big(\frac{۱}{\mathrm{i}\,\omega\epsilon}\operatorname{curl}\mathbf{H}\Big) + \mathrm{i}\omega\,\mu\,\mathbf{H} = \operatorname{curl}\Big(\frac{\mathbf{J}}{\mathrm{i}\omega\epsilon}\Big).$$

با معرفی مقدارهای نسبیِ $\mu_r(x)$ و $\epsilon_r(x)$ به‌صورت

$$\mu_r(x) = \frac{\mu(x)}{\mu_\circ}, \quad \epsilon_r(x) = \frac{\epsilon(x)}{\epsilon_\circ},$$

معادلات بالا را به‌ترتیب می‌توان به‌صورت

$$\operatorname{curl}\Big(\frac{۱}{\mu_r}\operatorname{curl}\mathbf{E}\Big) - k^{۲}\epsilon_r\mathbf{E} = \mathrm{i}\omega\,\mu_\circ\mathbf{J} \tag{۳.۳}$$

1. diffraction 2. incident 3. Silver-Müller 4. isotropic

و

$$\operatorname{curl}\Big(\frac{۱}{\epsilon_r}\operatorname{curl}\mathbf{H}\Big)-k^۲\mu_r\,\mathbf{H}=\operatorname{curl}\Big(\frac{۱}{\epsilon_r}\,\mathbf{J}\Big) \tag{۴.۳}$$

نوشت که در اینجا $k=\omega\sqrt{\mu_\circ\epsilon_\circ}$ عدد موج است. حال فرض کنیم Ω یک دامنهٔ باز و کراندار در $\mathbb{R}^۳$ باشد و μ و ϵ تکه‌ای پیوسته باشند:

$$\mu=\mu_\circ \quad \text{روی} \quad \mathbb{R}^۳\setminus\Omega \quad \text{و} \quad \mu=\mu_\circ\mu_r \quad \text{روی} \quad \Omega$$

و

$$\epsilon=\epsilon_\circ \quad \text{روی} \quad \mathbb{R}^۳\setminus\Omega \quad \text{و} \quad \epsilon=\epsilon_\circ\epsilon_r \quad \text{روی} \quad \Omega.$$

معادلهٔ (۳.۳) را به‌صورت

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{E}-k^۲\mathbf{E}=-k^۲(۱-\epsilon_r)\,\mathbf{E}+\operatorname{curl}\Big(۱-\frac{۱}{\mu_r}\Big)\operatorname{curl}\mathbf{E}+\mathrm{i}\omega\,\mu_\circ\,\mathbf{J} \tag{۵.۳}$$

بازنویسی می‌کنیم. قرار می‌دهیم $\eta=۱-\epsilon_r$ و $\nu=۱-\frac{۱}{\mu_r}$. بنابر تعریفِ ϵ و μ، مجموعهٔ Ω تکیه‌گاه آنها است. عملگر $\operatorname{curl}\operatorname{curl}$ بیضوی نیست، زیرا هستهٔ آن بدیهی نیست (در واقع، اگر $\nabla_s\mathbf{v}:=\frac{۱}{۲}(\partial_i v_j+\partial_j v_i)$ را یک تانسور کُرنش خطی‌شده در نظر بگیریم، می‌توان نشان داد که $\operatorname{curl}\operatorname{curl}(\nabla_s\mathbf{v})=\circ$. این ویژگی را شرط سازگاری سن ونان[1] می‌نامند [۱]). اگر $-\nabla\operatorname{div}$ را به $\operatorname{curl}\operatorname{curl}$ در معادلهٔ (۵.۳) اضافه و از رابطهٔ

$$\nabla\operatorname{div}-\operatorname{curl}\operatorname{curl}=\boldsymbol{\Delta}$$

استفاده کنیم که در آن، $\boldsymbol{\Delta}$ لاپلاسی برداری است، آنگاه دستگاه بیضویِ

$$-(\boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{E}+k^۲\mathbf{E})=\mathrm{i}\omega\,\mu_\circ\mathbf{J}+\operatorname{curl}(\nu\operatorname{curl}\mathbf{E})-\nabla\operatorname{div}\mathbf{E}-k^۲\eta\,\mathbf{E}$$

را به‌دست می‌آوریم. اگر از دو طرف (۵.۳) دیورژانس بگیریم، نتیجه می‌شود که

$$\nabla\operatorname{div}\mathbf{E}=\nabla\operatorname{div}(\eta\mathbf{E})-\frac{\mathrm{i}}{k^۲}\omega\,\mu_\circ\nabla\operatorname{div}\mathbf{J}$$

---

1. Saint Venant

و با قراردادن این در معادلهٔ قبلی، خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
-(\boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{E}+k^{۲}\,\mathbf{E}) & \\
&= \mathrm{i}\omega\mu_\circ\,\mathbf{J}-\nabla\mathrm{div}\,(\eta\,\mathbf{E})+\frac{\mathrm{i}}{k^{۲}}\omega\,\mu_\circ\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{J}\\
&\quad -k^{۲}\eta\mathbf{E}+\mathrm{curl}(\nu\,\mathrm{curl}\,\mathbf{E})\\
&= \mathrm{i}\omega\mu_\circ\Big(\frac{۱}{k^{۲}}\nabla\mathrm{div}+\mathbb{I}\Big)\mathbf{J}-\nabla\mathrm{div}\,(\eta\mathbf{E})\\
&\quad -k^{۲}\eta\mathbf{E}+\mathrm{curl}(\nu\mathrm{curl}\,\mathbf{E}).
\end{aligned}
$$

حال عمل پیچش $*$ با جواب اساسی معادلهٔ هلمهولتس، منجر به معادلهٔ انتگرالیِ

$$
\mathbf{E}=\mathbf{E}^{\mathrm{inc}}-\nabla\mathrm{div}(g_k*\eta\,\chi_\Omega\,\mathbf{E})-k^{۲}g_k*(\eta\chi_\Omega\mathbf{E})+g_k*\mathrm{curl}\,(\nu\chi_\Omega\mathrm{curl}\,\mathbf{E})
$$

برای میدان مغناطیسی می‌شود که در آن، $\mathbf{E}^{\mathrm{inc}}=\mathrm{i}\omega\,\mu_\circ(\frac{۱}{k^{۲}}\,\nabla\mathrm{div}+\mathbb{I})g_k*\mathbf{J}$. لذا در ناحیهٔ Ω معادلهٔ انتگرو-دیفرانسیل حجمیِ

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{x}) =&\mathbf{E}^{\mathrm{inc}}(\mathbf{x})-\nabla\mathrm{div}\int_\Omega g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})(\eta\mathbf{E})(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\\
&-k^{۲}\int_\Omega g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})(\eta\mathbf{E})(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}-\nu\mathrm{curl}\int_\Omega g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{curl}\mathbf{E}\,(\mathbf{y})\mathrm{d}\,\mathbf{y}
\end{aligned}
\tag{۶.۳}
$$

به‌دست می‌آید. معادلهٔ اخیر از نوع تکینِ ضعیف است. در ادامه خواهیم دید که چگونه مشتق‌گیری از انتگرال در معادلهٔ اخیر، موجب ایجاد تکینگیِ قوی خواهد شد.

به‌منظور بازنویسیِ معادلهٔ (۶.۳) به‌صورت یک معادلهٔ انتگرالی، توجه داریم که

$$
\nabla_{\mathbf{x}}g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})=-\nabla_{\mathbf{y}}g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\frac{e^{\mathrm{i}k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{۴\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\Big(\mathrm{i}k\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}-\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{۲}}\Big)
$$

یک تابع انتگرال‌پذیر است. بنابراین می‌توانیم مشتق اول را داخل انتگرال ببریم:

$$
-\nabla\mathrm{div}(g_k*\mathbf{u})(\mathbf{x})=-\nabla((\nabla_{\mathbf{x}}g_k)*\mathbf{u})(\mathbf{x}).
$$

لذا

$$
\nabla\mathrm{div}(g_k*\mathbf{u})(\mathbf{x})=-\nabla\int_{\mathbb{R}^{۳}}\nabla_{\mathbf{y}}g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}.
$$

فرض کنیم $B_\epsilon(\mathbf{x})$ گوی باز به مرکز $\mathbf{x}$ و شعاع ϵ به‌اندازهٔ کافی کوچک در $\mathbb{R}^۳$ باشد. انتگرال بالا را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه کرد:

$$\mathrm{div}(g_k * \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^۳\setminus B_\epsilon(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{y}} g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} + \int_{B_\epsilon(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{y}} g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}.$$

با استفاده از قضیهٔ دیورژانس برای انتگرال دوم، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\int_{B_\epsilon(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{y}} g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} &= \int_{\partial B_\epsilon(\mathbf{x})} g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{y})\mathbf{n}(\mathbf{y})\mathrm{d}l(\mathbf{y})\\ &\quad - \int_{B_\epsilon(\mathbf{x})} g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\nabla\mathbf{u}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}.\end{aligned}$$

حال مشتق دوم را از انتگرال عبور می‌دهیم و می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\nabla\mathrm{div}(g_k * \mathbf{u})(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^۳\setminus B_\epsilon(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}} g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\\ &\quad + \int_{\partial B_\epsilon(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{x}} g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{y})\mathbf{n}(\mathbf{y})\mathrm{d}l(\mathbf{y})\\ &\quad - \int_{B_\epsilon(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{x}} g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\nabla\mathbf{u}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}.\end{aligned}$$

وقتی ϵ به صفر میل می‌کند، انتگرال آخری به صفر میل خواهد کرد. برای انتگرال دوم، $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ را کم و زیاد می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}&\int_{\partial B_\epsilon(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{x}} g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{y})\mathbf{n}(\mathbf{y})\mathrm{d}l(\mathbf{y})\\ &\quad = \int_{\partial B_\epsilon(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{x}} g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})(\mathbf{u}(\mathbf{y})-\mathbf{u}(\mathbf{x})).\mathbf{n}(\mathbf{y})\mathrm{d}l(\mathbf{y})\\ &\qquad + \int_{\partial B_\epsilon(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{x}} g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\mathbf{n}(\mathbf{y})\mathrm{d}l(\mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

به‌دلیل پیوستگیِ $\mathbf{u}(\mathbf{x})$، انتگرال اول هنگامی که ϵ به صفر میل می‌کند، ناپدید می‌شود. در مورد انتگرال دوم، دقت می‌کنیم که برای هر $y \in \partial B_\epsilon$ می‌توان نوشت $\mathbf{x}-\mathbf{y} = -h\mathbf{n}(\mathbf{y})$ که در آن، $h = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$. علاوه بر این، بنابر بسط مکلورن جواب اساسی،

$$\frac{e^{\mathrm{i}kh}}{۴\pi h} = \frac{۱}{۴\pi h} + \frac{\mathrm{i}k}{۴\pi} - \frac{k^۲ h}{۸\pi} + \mathcal{O}(h^۲).$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\nabla_x \frac{e^{ikh}}{۴\pi h}\mathbf{n}(\mathbf{y}) = \frac{۱}{۴\pi}\frac{\mathbf{n}(\mathbf{y})\mathbf{n}^T(\mathbf{y})}{h^۲} + \frac{k^۲}{۸\pi}\mathbf{n}(\mathbf{y})\mathbf{n}^T(\mathbf{y}) + \cdots .$$

با استفاده از مختصات کروی، به‌دست می‌آوریم

$$\lim_{\epsilon\to ۰}\int_{\partial B_\epsilon} \mathbf{n}(\mathbf{y})\mathbf{n}(\mathbf{y})^T \mathrm{d}l(\mathbf{y}) = ۰$$

و

$$\lim_{\epsilon\to ۰}\int_{\partial B_\epsilon} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{y})\mathbf{n}(\mathbf{y})^T}{h^۲}\mathrm{d}l(\mathbf{y}) = \frac{۴\pi}{۳}.$$

در پایان، نتیجه می‌گیریم که

$$\int_{\partial B_\epsilon(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{x}} g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{y})\mathrm{d}l(\mathbf{y}) = \frac{۱}{۳}\mathbf{u}(\mathbf{x})$$

یا

$$-\nabla\mathrm{div}(g_k * \mathbf{u}) = \mathrm{v.\ p.}\int_{\mathbb{R}^۳} \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}} g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} + \frac{۱}{۳}\mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

از این‌رو معادلهٔ انتگرالیِ تکینِ قوی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}) =& \mathbf{E}^{\mathrm{inc}}(\mathbf{x}) + \eta\ \mathrm{v.\ p.}\int_\Omega \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}} g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{E}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\\ &- \eta\ k^۲\int_\Omega g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{E}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} - \mathbf{u}\,\mathrm{curl}\int_\Omega g_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{curl}\mathbf{E}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\\ &+ \frac{۱}{۳}\mathbf{E}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

چنان‌که اشاره شد، معادلاتی از این دست را معادلات انتگرالیِ حجمی نیز می‌نامند، زیرا انتگرال روی یک حجم در $\mathbb{R}^۳$ گرفته می‌شود. البته این نامی است که بین فیزیک‌دانان و مهندسان برای این نوع معادلات، مصطلح است. برای توصیف دقیق عملگر انتگرالیِ حجمی به‌شیوهٔ ریاضی، بهترین روش استفاده از نظریهٔ عملگرهای شبه‌دیفرانسیلی و تعریف آن به‌عنوان یک شبه‌دیفرانسیل است، زیرا با تعریف کنونی، خواننده می‌تواند بپرسد که اگر در بحث عملگر لاپلاسیِ کسری، عملگر مذکور روی یک تابع (توزیع) با تکیه‌گاه فشرده عمل کند، انتگرال روی یک حجم خواهد بود؛ پس چرا آن عملگر را انتگرالی حجمی نمی‌خوانیم. برخلاف معادلات انتگرالیِ تکینِ ضعیف (به‌ویژه معادلات انتگرالیِ

مرزی) به معادلات انتگرالیِ حجمی توجه کافی از سوی ریاضی‌دانان صورت نگرفته است. مهم‌ترین دلیل آن، نبودنِ چارچوب آنالیز تابعی مناسب برای بررسی آنها است، زیرا برخلاف عملگرهای تکینِ ضعیف، این نوع عملگرها در فضای L^p فشرده نیستند.

سپاسگزاری این اثر تحت حمایت مادی صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور برگرفته از طرح شماره ۹۹۰۱۳۹۹۱ انجام شده است.

مراجع

[1] Amrouche, C., Ciarlet, P. G., Gratie, L., Kesavan, S., On the characterizations of matrix fields as linearized strain tensor fields, *J. Math. Pures Appl.*, **86** (2006), no. 2, 116-132.

[2] Bogdan, K., Burdzy, K., Chen, Z.-Q., Censored stable processes, *Probab. Theory Related Fields*, **127** (2003), 89-152.

[3] Bogdan, K., Byczkowski, T., Potential theory of Schrödinger operator based on fractional Laplacian, *Probab. Math. Statist.*, **20** (2000), 293-335.

[4] Calderón, A. P., Zygmund, A., On singular integrals, *Amer. J. Math.*, **78** (1956), no. 2, 289-309.

[5] Colton, D. L., Kress, R., *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, 4th ed., Springer-Verlag, New York, 2019.

[6] Constantinescu, F., Boundary values of analytic functions, *Comm. Math. Phys.*, **7** (1968), no. 3, 225-233.

[7] Costabel, M., Dauge, M., Nedaiasl, K., Stability analysis of a simple discretization method for a class of strongly singular integral equations, *Integral Equations and Operator Theory*, **95** (2023), no. 29,

[8] Costabel, M., Principles of boundary element methods. *Computer Physics Reports*, **6** (1987), 243-274.

[9] Di Nezza, E., Palatucci, G., , Valdinoci, E., Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. *Bull. Sci. Math.*, **136** (2012), no. 5, 521-573.

[10] Diethelm, K., Ford, N. J., Analysis of fractional differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **265** (2002), no. 2, 229-248.

[11] Hackbusch, W., *Integral Equations: Theory and Numerical Treatment*, Birkhäuser, Basel, Boston, 1995.

[12] Higham, N. J., Dennis, M. R., Glendinning, P., Martin, P. A., Santosa, F., Tanner, J., *Princeton Companion to Applied Mathematics*, Princeton University Press, 2015.

[13] Hsiao, G. C., Wendland, W. L. *Boundary Integral Equations*, Springer-Verlag, 2008.

[14] Järvenpää, S., Markkanen, J., Ylä-Oijala, P., Broadband multilevel fast multipole algorithm for electric-magnetic current volume integral equation, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **61** (2013), no. 8, 4393-4397.

[15] Kato, T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013.

[16] Kress, R., *Linear Integral Equations*, 3rd ed., Springer-Verlag, New York, 2014.

[17] Kwaśnicki, M., Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **20** (2017), no. 1, 7-51.

[18] Lifanov, I. K., Poltavskii, L. N., Vainikko, M. G., *Hypersingular Integral Equations and Their Applications*, Taylor & Francis, London, New York, 2004.

[19] Lischke, A., Pang, G., et al., What is the fractional Laplacian? A comparative review with new results, *J. Comput. Phys.*, **404** (2020), 109009.

[20] Lonseth, A. T., Sources and applications of integral equations, *SIAM Rev.*, **19** (1977), no. 2, 241-278.
[21] Purcell, E. M., Pennypacker, C. R., Scattering and absorption of light by nonspherical dielectric grains, *The Astrophysical Journal*, **186** (1973), 705-714.
[22] Sauter, S. A., Schwab, C., *Boundary Element Methods*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.
[23] Sayas, F. J., Brown, T. S., Hassell, M. E., *Variational Techniques for Elliptic Partial Differential Equations: Theoretical Tools and Advanced Applications*, CRC Press, Boston, 2019.
[24] Samokhin, A. B., Volume singular integral equations for problems of scattering on three-dimensional dielectric structures, *Differ. Equ.*, **50** (2014), 1201-1216.
[25] Sakly, H., Opérateur intégral volumique en théorie de diffraction électromagnétique, Ph.D. thesis, Université Rennes 1, 2014.
[26] Stakgold, I., Holst, M. J., *Green's Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2011.
[27] Stein, E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, vol. 2, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
[28] Tong, M. S., Meshfree solutions of volume integral equations for electromagnetic scattering by anisotropic objects, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **60** (2012), no. 9, 4249-4258.
[29] Van Beurden, M. C., Van Eijndhoven, S. J. L., Well-posedness of domain integral equations for a dielectric object in homogeneous background, *J. Engrg. Math.*,**62** (2008), 289-302.
[30] Ylä-Oijala, P., Markkanen, J., Järvenpää, S., Kiminki, S. P., Surface and volume integral equation methods for time-harmonic solutions of Maxwell's equations, *Progress in Electromagnetics Research*, **149** (2014), 15-44.
[31] Yurkin, M. A., Hoekstra, A. G., The discrete dipole approximation: An overview and recent developments, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **106** (2007), 558-589.
[32] Zouros, G. P., Budko, N. V., Transverse electric scattering on inhomogeneous objects: Spectrum of integral operator and preconditioning, *SIAM J. Sci. Comput.*, **34** (2012), no. 3, B226-B246.

خدیجه ندائی اصل: دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، دانشکدهٔ ریاضی
رایانامه: nedaiasl@iasbs.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 44, Number 1, Spring/Summer 2025, Pages 59–78
doi: 10.30504/mct.2024.1422.1999

On the Singularity of Integral Equations

Kh. Nedaiasl[1]

Institute for Advanced Studies in Basic Sciences, Iran

Abstract. In this article, we take a brief look at the history of integral equations and then focus on operators and singular integral equations. By providing examples of integral equations, including Abel integral operators, Cauchy integral operators, and boundary integral equations, we introduce three types of singularity: weak singularity, strong singularity, and hypersingularity. In particular, we express the method of extracting a volumetric integral equation as a strong singular integral equation through the rewriting of Maxwell's equations.

Keywords: singularity, Abel integral equation, Cauchy integral equation, Maxwell's equations
Article history: Received 31 August 2023; Accepted 14 January 2024
Article type: survey

1. nedaiasl@iasbs.ac.ir