فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۳، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۳)، صص ۱۲۱ تا ۱۴۶

مروری بر مسئلهٔ پوشش یک گروه توسط زیرگروه‌هایش

سید مجید جعفریان امیری

تقدیم به دکتر علی‌اکبر محمدی حسن‌آبادی و دکتر علیرضا عبدالهی به پاس سال‌ها شاگردی ایشان

چکیده. منظور از یک پوشش برای یک گروه مفروض مجموعه‌ای متناهی از زیرگروه‌های سرهٔ آن است به‌طوری که اجتماع آن‌ها برابر گروه بشود. در این مقاله گزارشی از مهم‌ترین نتایج به دست آمده دربارهٔ مسئلهٔ پوشش یک گروه را بیان می‌کنیم.

۱ مقدمه

تمرینی ساده در جبر مقدماتی نشان می‌دهد که یک گروه نمی‌تواند به‌صورت اجتماع دو زیرگروه سره‌اش باشد. به‌عبارت‌دیگر، اجتماع دو زیرگروه از یک گروه خود یک زیرگروه است اگر و تنها اگر یکی از آن دو، زیرگروه دیگری باشد. به‌طور مشابه برای ساختارهای جبری دیگر نظیر حلقه‌ها، مدول‌ها، فضاهای برداری، و ... نیز چنین حکمی برقرار است. ولی ۴ـگروه کلاین $K_۴ = \{۱, a, b, ab\}$ اجتماع سه زیرگروه $\{۱, a\}$، $\{۱, b\}$، و $\{۱, ab\}$ است. همچنین گروه متقارن از درجهٔ ۳ ، $S_۳$ ، اجتماع چهار زیرگروه سره‌اش، گروه متناوب از درجهٔ ۴، $A_۴$ ، اجتماع پنج زیرگروه سره‌اش، و گروه دو وجهی از مرتبهٔ ۱۰ ، $D_{۱۰}$، اجتماع شش زیرگروه سره‌اش است. نشان خواهیم داد که برای هر عدد طبیعی $n > ۲$ می‌توان گروهی یافت که اجتماع n زیرگروه سره‌اش باشد. ازطرفی واضح است که یک گروه دوری هرگز اجتماع زیرگروه‌های سره‌اش نیست. به نظر می‌رسد اولین مقاله‌ای که به بررسی این موضوع پرداخته است مقالهٔ [۷۶] به سال ۱۹۰۶ است. البته میلر در آن مقاله

عبارات و کلمات کلیدی: گروه متناهی، پوشش گروه، عدد پوششی، اجتماع متناهی زیرگروه‌های سره
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱/۲۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۳/۲۱

doi: 10.30504/mct.2024.1467.2031

گروه‌هایی را در نظر گرفته است که اجتماع آن دسته از زیرگروه‌هایی بودند که اشتراک هر دو زیرگروه متمایز موجود در آن اجتماع، بدیهی بود (مانند مثال‌های بالا).

هدف ما از نوشتهٔ حاضر جمع‌آوری نتایج موجود دربارهٔ پوشش گروه‌ها و موضوعات وابسته است. اجازه دهید مفهوم پوشش یک گروه توسط زیرگروه‌ها و چند اصطلاح مربوط به آن را تعریف کنیم.

تعریف ۱.۱. فرض کنید G یک گروه (نه لزوماً متناهی) و $\Gamma = \{H_i : i \in I\}$ خانواده‌ای ناتهی و متناهی از زیرگروه‌های سرهٔ G باشد.

(الف) Γ را یک پوشش[1] برای G گوییم هرگاه $G = \bigcup_{i \in I} H_i$.

(ب) پوشش Γ برای G را بی‌فزونه[2] گوییم هرگاه هر زیرخانوادهٔ سرهٔ آن یک پوشش برای G نباشد.

(پ) پوشش Γ را یک nـ‌پوشش برای G گوییم هرگاه $|\Gamma| = n$. در این حالت می‌گوییم G دارای یک nـ‌پوشش است.

(ت) پوشش Γ را یک افراز برای G گوییم هرگاه اشتراک هر دو عضو متمایز Γ زیرگروه بدیهی باشد.

حدود بیست‌سال بعداز تحقیقات میلر، که عمدتاً دربارهٔ افراز زیرگروه‌ها بود، اسکورسا، ریاضی‌دان ایتالیایی، در ۱۹۲۶ به مسئلهٔ پوشش گروه توسط زیرگروه‌ها پرداخت. او یک شرط لازم و کافی برای گروه‌هایی که دارای ۳ـ‌پوشش‌اند پیدا کرد. البته در آن زمان اصطلاح پوشش به کار نمی‌رفت و معمولاً از همان اصطلاح اجتماع استفاده می‌شد. قضیهٔ اصلی اسکورسا به‌صورت زیر است [۹۴].

قضیه ۲.۱. گروه G اجتماع سه زیرگروه سره‌اش است اگر و تنها اگر ۴ـ‌گروه کلاین تصویر همریخت آن باشد.

به‌عبارت‌دیگر، یک گروه دارای ۳ـ‌پوشش است اگر و تنها اگر دارای خارج قسمتی یکریخت با ۴ـ‌گروه کلاین باشد. البته این نتیجه را افراد دیگری ازجمله هابر و روزنفلد [۴۹] در سال ۱۹۵۹ و بروک هِایمر، برایان، و میور [۲۹] در سال ۱۹۷۰ به‌طور مستقل، بدون اطلاع از نتایج اسکورسا، به دست آوردند. واضح است که هر ۳ـ‌پوشش خودبه‌خود بی‌فزونه است. اما در بررسی nـ‌پوشش‌ها برای $n \geq ۴$ لازم است شرط بی‌فزونگی لحاظ گردد.

1. cover 2. irredundant

اسکورسا (۱۸۷۶-۱۹۳۹)

بعداز ۳-پوشش ها طبیعی است به سراغ شناسایی گروه‌هایی که دارای ۴-پوشش‌اند برویم. گرکو در ۱۹۵۶ چنین گروه‌هایی را به‌طورکامل مشخص کرد [۴۷]. قبل‌از بیان این نتیجه لازم است که تعریفی بیاوریم.

تعریف ۳.۱. فرض کنید G یک گروه و خانوادهٔ $\Gamma = \{H_i : i \in I\}$ یک پوشش برای G باشد. Γ را با خاصیت اشتراک بی‌مغزه[1] گوییم هرگاه $\mathrm{Core}_G(\cap_{i\in I} Hi) = ۱$.

یادآوری می‌کنیم که برای زیرگروه H ازگروه G مغزهٔ H در G عبارت است از $\cap_{g\in G} g^{-۱}Hg$ که با نماد $\mathrm{Core}_G(H)$ یا H_G نمایش داده می‌شود. می‌توان نشان داد که $\mathrm{Core}_G(H)$ بزرگ‌ترین زیرگروه نرمال (نسبت به رابطهٔ شمول) در G است که مشمول در H است.

قضیه ۴.۱. فرض کنید G یک گروه و $\Gamma = \{H_۱, H_۲, H_۳, H_۴\}$ یک پوشش بی‌فزونه با اشتراک بی‌مغزه برای G باشد. بنویسید $D = \cap_{i=۱}^{۴} H_i$. اگر همهٔ H_iها زیرگروه ماکسیمال G باشند، آنگاه یکی از دو حکم زیر برقرار است

(الف) $D = ۱$ و G یکریخت با $S_۳$ یا $C_۳ \times C_۳$ است؛

(ب) $|D| = ۲$، $|G| = ۱۸$ و G قابل نشاندن در $S_۳ \times S_۳$ است.

اگر حداقل یکی از H_iها ماکسیمال نباشد، آنگاه یکی از دو حکم زیر برقرار است

(الف) $D = ۱$ و G یکریخت با $D_۸$، $C_۴ \times C_۲$، یا $C_۲ \times C_۲ \times C_۲$ است؛

(ب) $|D| = ۲$ و G یکریخت با $C_۲ \times D_۸$ است که در آن $D_۸$ گروه دووجهی از مرتبهٔ ۸ است.

گفتنی است که در قضیهٔ ۴.۱ شرط اشتراک بی‌مغزه می‌تواند حذف شود با این تفاوت که در حکم به‌جای D و G کافی است به ترتیب $\frac{D}{D_G}$ و $\frac{G}{D_G}$ را جایگزین کنیم. دلیل این امر آن است که اگر $\{H_i : i \in I\}$ یک پوشش بی‌فزونه با اشتراک D برای گروه G باشد، آنگاه $\{\frac{H_i}{D_G} : i \in I\}$ یک پوشش بی‌فزونه با اشتراک بی‌مغزه برای گروه $\frac{G}{D_G}$ است.

1. core-free

به نظر می‌رسد که شناسایی کامل گروه‌های دارای n–پوشش برای $n \geq ۵$ پیچیده باشد. البته برای $n \in \{۵, ۶, ۷\}$ در حالت خاصی که عناصر پوشش، زیرگروه‌های ماکسیمال و پوشش با اشتراک بی‌مغزه باشد طبقه‌بندی شده‌اند. به‌طور دقیق‌تر، در سال ۱۹۹۷ برایس، فدری، و سرنا [۳۰] گروه‌های با ۵–پوشش متشکل‌از زیرگروه‌های ماکسیمال و با اشتراک بی‌مغزه، در سال ۲۰۰۵ نتایج مشابه‌ای در [۶] برای ۶–پوشش‌ها، و در ۲۰۰۷ در [۷] برای ۷–پوشش‌ها به دست آمده است. البته در شرایط خاص نتایجی در [۱۳] و [۱۴] برای ۸–پوشش و ۹–پوشش ها به دست آمده است.

۲ بزرگ‌ترین شاخص اشتراک n–پوشش‌ها

یکی از بهترین و جالب‌ترین نتایج در زمینهٔ پوشش متناهی از آن بی. اچ. نویمان[۸۰] است که اکثر اثبات‌ها در این زمینه نیز بر آن استوار است. او ثابت کرد که در هر پوشش متناهی از یک گروه می‌توان اعضایی از پوشش را که دارای شاخص (اندیس) نامتناهی هستند حذف کرد و همچنان زیرگروه‌های باقی‌مانده یک پوشش برای گروه تشکیل دهند. صورت دقیق قضیهٔ نویمان را در زیر می‌آوریم.

قضیه ۱.۲. فرض کنید G یک گروه باشد و $G = \cup_{i=1}^{n} H_i g_i$ که در آن $H_۱$، $H_۲$، …، و H_n زیرگروه‌های (نه لزوماً متمایز) G باشند. اگر از این اجتماع هم‌مجموعه‌های $H_i g_i$ را که $|G : H_i|$ برای آن‌ها نامتناهی است حذف کنیم، آنگاه اجتماع باقی‌مانده هم‌مجموعه‌ها برابر کل G است.

به‌عبارت‌دیگر، اگر گروهی دارای n–پوشش بی‌فزونه باشد و $n < \infty$، آنگاه شاخص اشتراک همهٔ اعضای پوشش در آن گروه متناهی است. بنابراین شرط لازم و کافی برای اینکه یک گروه دلخواه دارای پوشش باشد در [۸۱] ثابت می‌شود.

قضیه ۲.۲. یک گروه (نه لزوماً متناهی) دارای پوشش است اگر و تنها اگر داری یک خارج‌قسمت متناهی غیردوری باشد.

به‌علاوه، نویمان [۸۱] ثابت کرد که اگر $\{H_۱, H_۲, \cdots, H_n\}$ یک n–پوشش بی‌فزونه برای گروه G باشد و $D = \cap_{i=1}^{n} H_i$ آنگاه $|G : D|$ دارای کران بالایی است که تابعی فقط از n است. تامکینسون [۹۹] با توجه به این نتیجه در مقاله‌ای تحسین‌برانگیز یک تابع به‌صورت زیر روی

مجموعهٔ اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ تعریف کرد: برای عدد طبیعی $n > ۲$،

$$f(n) = \max\{|G : D| : \text{گروه } G \text{ دارای یک } n - \text{پوشش بی‌فزونه با اشتراک } D \text{ است}\}.$$

از نتایج اسکورسا و گرکو به ترتیب داریم $f(۳) = ۴$ و $f(۴) = ۹$. بریس و همکاران [۳۰] نشان دادند که $f(۵) = ۱۶$. همچنین در [۶] و [۷] نشان داده شده است که $f(۶) = ۳۶$ و $f(۷) = ۸۱$؛ البته این نتایج در تأیید حدس تامکینسون به دست آمده‌اند. درحقیقت، تامکینسون [۹۹] یک کران بالا و پایین به‌صورت زیر ارائه داده است

$$A \cdot ۳^{\frac{۲(n-۱)}{۳}} \leq f(n) \leq \max\{(n-۱)^۲, (n-۲)^۳\}(n-۳)!$$

که در آن

$$A = \begin{cases} ۴ \times ۳^{-\frac{۴}{۳}} & n = ۳k \\ ۱ & n = ۳k + ۱ \\ ۱۶ \times ۳^{-\frac{۸}{۳}} & n = ۳k + ۲ \end{cases} \tag{۱.۲}$$

در جدولی که در [۹۹] آمده است، می‌توان مشاهده کرد که برای $۳ \leq n \leq ۷$ نتایج به دست آمده با کران پایین گفته‌شده مطابقت دارد.

یکی از کاربردهای این تابع در تعیین ساختار گروه‌ها با استفاده از تعداد مرکزی‌ساز عناصر در گروه‌های متناهی است، به عنوان مثال در [۱۱] از رابطهٔ $f(۵) = ۱۶$ و در [۹] از $f(۶) = ۳۶$ به ترتیب در تعیین ساختار گروه‌های با شش مرکزی‌ساز و هفت و هشت مرکزی‌ساز استفاده شده است. اخیراً از رابطهٔ $f(۷) = ۸۱$ در شناسایی کامل گروه‌های با ۹ و ۱۰ مرکزی‌ساز استفاده شده است [۶۰، ۶۱]. برای آشنایی بیشتر دربارهٔ مرکزی‌سازها و نقش آن‌ها درشناسایی گروه‌های متناهی به‌ویژه گروه‌های ساده می‌توانید به [۱] مراجعه کنید.

تامکینسون در لم ۱.۳ از [۹۹] این نتیجه جالب را اثبات می‌کند که به‌ازای هر دو عدد طبیعی m, n داریم $f(m+n-۱) \geq f(m)f(n)$. در اثبات این لم می‌بینیم که اگر گروه $G_۱$ دارای یک m–پوشش بی‌فزونه مانند $\{X_۱, \ldots, X_m\}$ با اشتراک $D_۱$ و $|G_۱ : D_۱| = f(m)$ و ازطرف‌دیگر گروه $G_۲$ دارای یک n–پوشش بی‌فزونه مانند $\{Y_۱, \ldots, Y_n\}$ با اشتراک $D_۲$ و $|G_۲ : D_۲| = f(n)$ باشد، آنگاه گروه $G = G_۱ \times G_۲$ دارای $m + n - ۱$–پوشش بی‌فزونه متشکل از $X_۱ \times Y_۱$، $X_i \times G_۲$ برای $۱ \leq i \leq m$ و $G_۱ \times Y_j$ برای $۱ \leq j \leq n$ است.

همچنین اشتراک این پوشش اخیر برابر $D = D_۱ \times D_۲$ است و لذا $|G : D| = f(m)f(n)$.
با استفاده از این لم می‌توان نشان داد که به‌ازای هر عدد طبیعی $n > ۲$ می‌توان گروهی یافت که دارای یک n–پوشش بی‌فزونه باشد! بدین‌ترتیب ادعایی که قبلاً مطرح کردیم اثبات می‌شود. در [۲] با الهام از اثبات این نتیجه روشی برای تعیین یک مجموعهٔ بلوکی مینیمال (تعریف ۳.۷ را ببینید) در هندسهٔ تصویری متناهی به دست آمده است. تامکینسون در [۹۹] علاوه‌بر $f(n)$ توابع جالب دیگری نیز مرتبط با پوشش گروه‌ها تعریف کرده است که خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند ویژگی‌های آن‌ها را مطالعه کند.

قبل‌از اتمام این بخش می‌خواهیم یک نتیجهٔ مهم دیگر از تامکینسون [۹۹] را بیان کنیم.

گزاره ۳.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی و $\Gamma = \{H_۱, \ldots, H_n\}$ یک n–پوشش بی‌فزونه باشد. اگر $|G : H_i| = \alpha_i$ و $\alpha_۱ \leq \alpha_۲ \leq \cdots \leq \alpha_n$، آنگاه $\alpha_۲ \leq n - ۱$. چنانچه $\alpha_۲ = n - ۱$، در این صورت $\alpha_۲ = \alpha_۳ = \cdots = \alpha_n = n - ۱$ و $H_i \cap H_j \leq H_۱$ برای هر $i \neq j$.

نتیجهٔ بالا در اثبات قضیه‌های n–پوشش‌ها (البته برای nهای کوچک) نقش کلیدی دارد؛ زیرا اولین نتیجه‌ای که می‌توان از یک n–پوشش بی‌فزونه گرفت این است که شاخص حداقل یکی از عناصر پوشش کمتر یا مساوی $n - ۱$ است و با این مطلب می‌توان اثبات را ادامه داد.

۱.۲ مختصری دربارهٔ زندگی نویمان

به‌علت نقش مهم و تأثیرگذار نویمان در مسئلهٔ پوشش گروه‌ها مختصری دربارهٔ زندگی برنهارت نویمان را در این بخش می‌آوریم؛ برای توضیحات بیشتر [۹۰] را مطالعه کنید. برنهارت نویمان در ۱۵ اکتبر ۱۹۰۹ در برلین در یک منطقهٔ ثروتمند متولد شد. او در ۱۹۲۸ برای تحصیل ریاضی وارد دانشگاه فرایبورگ شد؛ اما دو ترم بیشتر در آنجا تحصیل نکرد و عازم دانشگاه فریدریک ویلهلم در برلین شد. او

برنهارت نویمان (۱۹۰۹–۲۰۰۲) درکنار همسر اولش هانا

در آنجا تحت تاثیر استادانی نظیر اشمیت، رِماک[1]، و شور قرار گرفت. رِمارک در گرایش او به سمت نظریهٔ گروه‌ها نقش به‌سزایی داشت. در نوامبر ۱۹۳۱ رسالهٔ دکترایش را آماده کرد و در ژوئیهٔ ۱۹۳۲ دکترایش را گرفت؛ شور و اشمیت اعضای کمیتهٔ داوری بودند. او در آنجا اولین بار هانا را که دانشجوی تحصیلات تکمیلی بود ملاقات کرد. دو ماه بعداز این آشنایی بود که هیتلر به قدرت رسید و زندگی در آلمان برای برنهارت که یهودی بود سخت شد. او با اینکه قبلاً دکترایش را گرفته بود برای دورهٔ دکترا در دانشگاه کمبریج ثبت نام کرد. در آنجا فیلیپ هال استاد راهنمای او شد. هال ابتدا یک مسئله دربارهٔ حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها را به او پیشنهاد کرد ولی نویمان پیشرفت زیادی در حل آن نکرد. به محض آنکه به نظریهٔ گروه برگشت به‌سرعت پیشرفت کرد. نویمان دومین دکترایش را در ۱۹۳۵ دریافت کرد. او دو سال در کمبریج بیکار بود (پس برای ریاضی‌دان برجسته‌ای همانند برنهارت نویمان هم هیچ تضمینی برای استخدام وجود نداشت). در ۱۹۳۷ به عنوان دستیار آموزشی در کاردیف منصوب شد که شغلی موقت به مدت سه سال بود. هانا هم که رفتاری ضد نازی داشت، تحصیلات دورهٔ دکترایش را نیمه‌کاره رها کرد و پیش برنهارت در کاردیف رفت؛ آن‌ها در سال ۱۹۳۸ با هم ازدواج کردند.

سال ۱۹۳۹ جنگ جهانی دوم شروع شد و وضعیت برای برنهارت آلمانی‌تبار مقیم انگلستان، علی‌رغم آنکه از دست نازی‌ها فرار کرده بود، سخت شد؛ درهرحال او یک دشمن خارجی به حساب می‌آمد. گرچه در ۱۹۴۰ بخشیده شد، دانشگاه کاردیف از او برای بازگشت به کار دعوت نکرد. برنهارت و هانا مجبور شدند به آکسفورد بروند. هانا در آنجا دورهٔ دکترایش را شروع کرد و در ۱۹۴۴ از رساله‌اش دفاع کرد. برنهارت دو سال را به‌صورت سرباز در قسمت‌های مختلف نظامی گذراند و در ۱۹۴۶ در دانشگاه هال به سِمَت مدرس منصوب شد و هانا نیز در آنجا به او پیوست. برنهارت در ۱۹۴۸ در دانشگاه منچستر مشغول شد و سه سال در آن دانشگاه بود که یک دعوت‌نامهٔ کاری ازطرف دانشگاه ملی استرالیا دریافت کرد؛ به کانبرا رفت و تا آخر عمر در آن شهر زندگی کرد. او در سال ۱۹۷۳ با همسر دومش، که سابقهٔ دوستی خانوادگی داشتند، ازدواج کرد. هرچند در سال ۱۹۷۴ به انگلستان برگشت ولی محل زندگی او کانبرا باقی ماند. نویمان سرانجام در ۲۱ اکتبر ۲۰۰۲ در کانبرای استرالیا چشم از جهان فرو بست. هانا هم در یک سلسله سخنرانی‌هایی که در کانادا به سال ۱۹۷۱ ایراد کرد در شهر اوتاوا به‌ناگاه دچار نارسایی مغزی شد و دو روز بعد به کما رفت و درگذشت. ثمرهٔ ازدواج برنهارت با هانا پنج فرزند بود که یکی از مشهورترین آن‌ها پیتر

1. Robert Erich Remak

نویمان است که دو مقالهٔ مشترک با پدر و مادرش [۸۳، ۱۹] دارد.

نویمان یکی از افراد برجسته در نظریهٔ گروه به حساب می‌آید که در زمینه‌های مختلف نقش مؤثری داشته است. او اولین مقاله‌اش را در برلین تحت عنوان «گروه خودریختی‌های یک گروه آزاد» منتشر کرد. اما رسالهٔ دکترایش در کمبریج یک حوزهٔ جدید در پژوهش‌های نظریهٔ گروه‌ها ایجاد کرد. در این رساله مطالعهٔ چندگوناهای گروه‌ها را آغاز کرد. چندگونا به رده‌هایی از گروه‌ها اطلاق می‌شود که اعضای هر گروه به‌صورت یک متغیر در یک دسته از قوانین صدق می‌کنند.

۳ پوشش مینیمال گروه‌ها و عدد پوششی

در سال ۱۹۹۴ کوهن، که متخصص نظریهٔ اعداد بود، موضوع پوشش مینیمال را مطرح کرد [۳۵]. ابتدا تعریف و سپس نتایج مهم در این زمینه را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. n–پوشش $\Gamma = \{H_1, \ldots, H_n\}$ برای G را مینیمال گوییم هرگاه G دارای هیچ m–پوشش دیگری برای هر $m < n$ نباشد؛ در این حالت می‌نویسیم $\sigma(G) = n$ و آن را عدد پوششی گروه G می‌نامیم.

از دیدگاهی دیگر، σ تابعی از ردهٔ گروه‌های متناهی به مجموعهٔ اعداد طبیعی است. بنابه قرارداد $\sigma(C_k) = \infty$ که در آن C_k گروه دوری از مرتبهٔ k است. واضح است که هر پوشش مینیمال یک پوشش بی‌فزونه است، ولی عکس آن درست نیست! در اینجا بدون کاستن از کلیت مطلب می‌توانیم اعضای پوشش مینیمال یک گروه را زیرگروه‌های ماکسیمال در نظر بگیریم و بنویسیم $\sigma(G) = \sigma(\frac{G}{\Phi(G)})$ که در آن $\Phi(G)$ زیرگروه فراتینی G است، یعنی اشتراک زیرگروه‌های ماکسیمال G. در اثبات قضیه‌ها باید هشدار دهیم که اگر $H < G$، آنگاه لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $\sigma(H) \leq \sigma(G)$.

اکنون چند خاصیت جالب از تابع σ را می‌آوریم.

لم ۲.۳. (الف) فرض کنید G گروهی متناهی باشد و $N \trianglelefteq G$. در این صورت $\sigma(G) \leq \sigma(\frac{G}{N})$.
(ب) \اگر G_1 و G_2 دو گروه متناهی باشند، آنگاه $\sigma(G_1 \times G_2) \leq \min\{\sigma(G_1), \sigma(G_2)\}$.
تساوی وقتی \اتفاق می\افتد که $\gcd(|G_1|, |G_2|) = 1$.

با توجه به مطالب ابتدایی، برای هر گروه متناهی G داریم $\sigma(G) \neq 2$. ظاهراً کوهن هم از نتیجهٔ اسکورسا اطلاع نداشته و نشان داده است که برای گروه G داریم $\sigma(G) = 3$ اگر و تنها اگر G

دارای حداقل دو زیرگروه متمایز از شاخص ۲ باشد، و $\sigma(G) = ۴$ اگر و تنها اگر $\sigma(G) \neq ۳$ و G دارای حداقل دوزیرگروه متمایز از شاخص ۳ باشد. همچنین کوهن نشان داد که $\sigma(G) = ۵$ اگر و تنها اگر $\sigma(G) \neq ۳, ۴$ و G دارای حداقل یک زیرگروه ماکسیمال با شاخص ۴ است. ولی مشابه این نتایج را نمی‌توان برای $\sigma(G) = ۶$ بیان کرد زیرا $\sigma(A_۵) = ۱۰$ و $\sigma(S_۵) = ۱۶$ درحالی‌که گروه متقارن $S_۵$ و متناوب $A_۵$ دارای پنج زیرگروه با شاخص ۵ هستند. البته کوهن توانست فقط کوچک‌ترین گروه‌های G با این خاصیت را تعیین کند. در [۱۲] بررسی‌هایی روی گروه‌های G با شرط $\sigma(G) \in \{۶, ۷\}$ انجام شده است. در [۶] نیز گروه‌های G با شرط $\sigma(G) = ۶$ کاملاً تعیین شده‌اند.

اما برای کوهن وضعیت $\sigma(G) = ۷$ متفاوت به نظر می‌آمد و بررسی‌های او در این زمینه او را به این حدس رساند که گروه متناهی G با شرط $\sigma(G) = ۷$ وجود ندارد. این حدس کوهن را تامکینسون در سال ۱۹۹۷ تأیید کرد [۱۰۱]. با این نتیجه این سؤال مطرح شد که چه اعداد طبیعی به‌غیراز ۲ و ۷ نمی‌توانند در بُرد تابع σ قرار گیرند. تامکینسون حدس زد که اعدادی مانند ۱۱، ۱۳، و ۱۵ نمی‌توانند در برد σ باشند. در [۴] نشان داده شده است که حدس تامکینسون برای عدد ۱۳ درست نیست. درحقیقت در آنجا ثابت شده است که $\sigma(S_۶) = ۱۳$. البته در [۳۱] نشان داده شده است که $\sigma(\mathrm{PSL}(۲, ۷)) = ۱۵$. اما در سال ۲۰۰۸ حدس تامکینسون برای عدد ۱۱ تأیید شد [۷۲]. در آنجا نشان داده شده است که گروه G با شرط $\sigma(G) = ۱۱$ وجود ندارد. با دقت در شکل اعداد ۲، ۷، و ۱۱ می‌بینیم آن‌ها به‌صورت $q + ۱$ نیستند که در آن q توانی از یک عدد اول است. پس چنانچه بخواهیم دنبال اعداد بعدی از این نوع باشیم، باید سراغ ۱۶، ۱۹، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۵ و غیره برویم. در [۴۱] ثابت شده است که بین اعداد ۱۶ تا ۲۵ فقط اعداد ۱۹، ۲۱، ۲۲، و ۲۵ در برد تابع σ نیستند. اخیراً در [۴۳] همهٔ اعداد صحیح مثبت $n \leq ۱۲۹$ را که نمی‌توانند عدد پوشش یک گروه باشند معیّن کرده‌اند. البته کوهن در مقاله‌اش نشان داد که اگر p یک عدد اول و n عدد طبیعی دلخواهی باشد، آنگاه می‌توان گروهی مانند G یافت به‌طوری که $\sigma(G) = p^n + ۱$. به‌علاوه او حدس زد که تعداد عناصر هر پوشش مینیمال یک گروه حل‌پذیر غیردوری باید به‌صورت $p^m + ۱$ باشد که در آن p اول و m عدد طبیعی است. باز هم تامکینسون دومین حدس کوهن را در [۱۰۱] تأیید کرد. البته در [۶۲] جزئیات بیشتری دربارهٔ اعضای پوشش‌های مینیمالِ گروه‌های حل‌پذیر متناهی بررسی شده است و در [۶۳] نیز ثابت شده است که اگر تعداد زیرگروه‌های ماکسیمال گروه حل‌پذیر G کمتر یا مساوی $۲\sigma(G)$ باشد، آنگاه می‌توان ساختار گروه $\frac{G}{\Phi(G)}$ را مشخص کرد.

با مشخص شدن σی گروه‌های حل‌پذیر، توجه‌ها به گروه‌های غیرحل‌پذیر ازجمله گروه‌های ساده غیرآبلی معطوف شد. ابتدا در سال ۱۹۹۹در [۳۱] برای گروه‌های خطی $(\mathrm{P})\mathrm{GL}(۲, q)$ و $(\mathrm{P})\mathrm{SL}(۲, q)$ مقدار σ به دست آمد. در [۲۲] این عدد برای گروه‌های $(\mathrm{P})\mathrm{GL}(n, q)$ و $(\mathrm{P})\mathrm{SL}(n, q)$ به دست آمد. همچنین در سال ۲۰۰۳ این مقدار برای گروه‌های سوزوکی یعنی $\mathrm{Sz}(q)$ تعیین شد [۷۱]. در [۵۱] این عدد برای تعداد زیادی از گروه‌های ساده پراکنده به دست آورده شده است و در [۷۴] نیز برای بعضی گروه‌های متقارن و متناوب تعیین شده است. در [۸] تعداد عناصر در پوشش مینیمال برای گروه‌های کاملاً تحویل‌پذیر (یعنی حاصل‌ضرب مستقیم تعدادی از گروه‌های ساده) محاسبه شده است. در [۵۷] نیز بعضی گروه‌های آفین از بُعد ۲ این عدد محاسبه شده است. خواننده می‌تواند برای اطلاعات بیشتر [۴۵، ۴۶، ۵۲] را مطالعه کند.

۴ پوشش گروه‌ها توسط زیرگروه‌هایی با ویژگی‌های مفروض

زمانی که گروه G دارای یک پوشش متناهی باشد، طبیعتاً انتظار داریم که بتوان با استفاده از ویژگی‌های زیرگروه‌های پوشش‌دهنده اطلاعات ساختاری دربارهٔ گروه G به دست آوریم. در این باره برنهارت نویمان [۸۱] سؤال زیر را مطرح کرد.

مسئله ۱.۴. فرض کنید $\{H_۱, H_۲, \dots, H_n\}$ یک پوشش متناهی با اشتراک D برای گروه G باشد. اگر همهٔ H_iها دارای خاصیت $\mathcal{P}$ باشند، آنگاه در مورد D با توجه به G یا دربارهٔ خود G چه می‌توان گفت؟

قبل‌از نویمان، راینهولت بِر[1] ثابت کرد گروه G دارای یک پوشش متناهی متشکل از زیرگروه‌های آبلی است اگر و تنها اگر G مرکز در متناهی[2] باشد (یعنی شاخص مرکز G، $Z(G)$، در G متناهی است). به نظر می‌رسد که این نتیجه محرک اصلی نویمان برای طرح پرسش فوق باشد. به‌عبارت‌دیگر، اگر در پرسش فوق $\mathcal{P}$ را خاصیت آبلی‌بودن در نظر بگیریم، آنگاه $D \leq Z(G)$ و لذا گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{Z(G)}$ متناهی است. البته در بخش کاربردها، درخصوص پوشش‌های متشکل از زیرگروه‌های آبلی بیشتر صحبت خواهیم کرد.

کاپِه[3] یکی از محققان این حوزه است. او در سال ۱۹۸۸ به پرسش فوق درحالتی که $\mathcal{P}$ خاصیت ۲ـاِنگل بودن[4] داشته باشد پاسخ داد [۶۵]. یادآوری می‌کنیم که برای هر دو عنصر x, y از گروه

۲. center-by-finite، این برابرنهاده پیشنهادِ دکتر علیرضا جمالی است. ـــ و. ۴. Friedrich Engel (۱۸۶۱–۱۹۴۱)، ریاضی‌دان آلمانی.

1. Reinhold Baer 3. L. C. Kappe

G تعریف می‌کنیم $[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$ و آن را جابه‌جاگر x و y در G می‌گویند. اگر n عددی طبیعی باشد، تعریف می‌کنند $[x,_n y]=[[x,_{n-1} y],y]$ و

$$R_n(G)=\{x\in G:[x,_n y]=1 ,y\in G \text{ برای هر }\}.$$

گروه G را n–اِنگل گویند اگر $L_n(G)=G$. زیرگروه H از G را n–انگل گویند هرگاه به‌عنوان یک گروه n–انگل باشد. واضح است که هر گروه آبلی ۱–انگل است. پس بعداز نتیجهٔ بِر طبیعی بود که سراغ پوشش‌های متشکل از زیرگروه‌های ۲–انگل برویم. در [۶۷] ثابت شده است که $R_2(G)$ زیرگروه مشخصهٔ G است. کاپه وضعیت گروه را در این حالت مشخص کرده است. اکنون آماده‌ایم تا نتایج کاپه را بیان کنیم.

قضیه ۲.۴. (الف) گروه G دارای یک پوشش متناهی متشکل از زیرگروه‌های ۲-انگل است اگر وتنها اگر $\frac{G}{R_2(G)}$ متناهی باشد[۶۵].

(ب) گروه G دارای یک پوشش متناهی از زیرگروه‌های نرمال است اگر و تنها اگر گروه آبلی مقدماتی $C_p\times C_p$ یک تصویر همریخت G باشد که در آن p یک عدد اول است[۲۵].

(پ) گروه G دارای یک پوشش متناهی از زیرگروه‌های نرمال آبلی است اگر و تنها اگر گروه $\frac{G}{Z(G)}$ متناهی و G گروه ۲-انگل باشد[۲۵].

(ت) گروه G دارای یک پوشش متناهی از زیرگروه‌های نرمال ۲-انگل است اگر و تنها اگر گروه $\frac{G}{R_2(G)}$ متناهی باشد و G یک گروه ۳-انگل باشد[۶۵].

نتایج دیگری از کاپه را می‌توانید در [۲۷، ۲۶، ۶۶] ببینید. تامکینسون در ۱۹۹۲ نشان داد که یک گروه دارای پوشش متناهی متشکل از زیرگروه‌های پوچ‌توان است اگر و تنها اگر ابرمرکز در متناهی باشد [۱۰۰]. پوشش گروه‌ها توسط زیرگروه‌های هال در [۵۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. در [۲۶] بررسی گروه‌هایی با پوشش متشکل از زیرگروه‌های زیرنرمال عرضه شده است.

۵ افراز یک گروه توسط زیرگروه‌هایش

واضح است که هر پوشش برای یک گروه نمی‌تواند افرازی به‌معنای عام آن (در نظریهٔ مجموعه‌ها) برای آن گروه باشد چون اشتراک هر دو عضو متمایز از یک پوشش تهی نیست. در نظریهٔ گروه‌ها، همان‌طور که قبلاً اشاره شد، یک افراز برای گروه G عبارت است از پوشش Γ که اشتراک هر دو عضو متمایز آن زیرگروه بدیهی باشد. به‌عبارت‌دیگر، هر عضو نابدیهی G متعلق به یک و فقط یک

عضو از Γ باشد. به‌عنوان مثال ۴ـگروه کلاین، گروه متقارن $S_۳$، و گروه دووجهی از مرتبهٔ ۱۰ دارای افراز می‌باشند. توجه کنید که اگر گروهی دارای افراز متناهی باشد، آنگاه بنابه نتیجهٔ عمیق نویمان (قضیهٔ ۱.۲) آن گروه باید متناهی باشد.

میلر [۷۶] مسئلهٔ شناسایی گروه‌هایی را که دارای افرازند در سال ۱۹۰۶ (بیست‌سال قبل‌از اولین نتیجهٔ اسکورسا دربارهٔ ۳ـپوشش) شروع کرد. لذا به نظر می‌رسد که منشاء پیدایش پوشش گروه‌ها نیز مسئلهٔ افرازها بوده باشد. میلر نشان داد که تنها گروه‌های آبلی متناهی که دارای افرازند همان pـگروه‌های آبلی مقدماتی‌اند (گروه‌هایی که مرتبهٔ هر عضو غیرهمانی آن عدد اول p است)؛ البته اصطلاح افراز را اولین بار یانگ [۱۰۴] به کار برده است.

بعداز میلر، ابتدا بِر در [۱۵، ۱۶، ۱۷] کار شناسایی گروه‌های دارای افراز را ادامه داد و سپس کگل، که دانشجوی بِر بود، توانست در حالتی که G یک pـگروه نباشد و $F(G) \neq ۱$ (زیرگروه فیتینگ[1]، یعنی بزرگ‌ترین زیرگروه نرمال پوچ‌توانِ G) کار را ادامه دهد [۶۹]. سرانجام سوزوکی با شناسایی گروه‌های غیرحل‌پذیر دارای افراز کار را تمام کرد [۹۵]. مقالهٔ سوزوکی را می‌توان یکی از مهم‌ترین آثار در طبقه‌بندی گروه‌های ساده متناهی دانست، به‌ویژه او از ابزار نظریهٔ سرشت در تعیین مرتبهٔ گروه‌های غیرحل‌پذیر دارای افراز بهره جست.

قبل‌از بیان خلاصه نتایج اصلی بِر، کگل، و سوزوکی لازم است مفهومی مهم را تعریف کنیم. اگر G گروهی متناهی و p عددی اول باشد، $H_p(G)$ را زیرگروه تولیدشده توسط اعضایی از G در نظر می‌گیریم که مرتبهٔ آن‌ها p نیست. هیوز در [۵۳] حدس زد که اگر $۱ \neq H_p(G) \neq G$ آنگاه $|G : H_p(G)| = p$. زیرگروه $H_p(G)$ را زیرگروه هیوز G گویند. در حالتی که گروه متناهی، pـگروه نباشد هیوز و تامپسون به این حدس پاسخ مثبت دادند [۵۴]. ولی وال مثالی نقض در [۱۰۲] برای حدس فوق داده است. درحقیقت او توانست یک ۵ـگروه G بسازد به‌طوری که $|G : H_۵(G)| = ۲۵$. گروه متناهی G را که pـگروه نباشد و $H_p(G) \neq G$ گروه هیوزـتامپسون گویند. همچنین کگل هم در [۶۸] نشان داد که اگر G گروه متناهی با شرط $H_p(G) \neq G$ باشد، آنگاه $H_p(G)$ پوچ‌توان است. اکنون آماده‌ایم نتایج یادشده را بیاوریم.

قضیه ۱.۵. فرض کنید G گروهی متناهی باشد. در این صورت G دارای یک افراز است اگر و تنها اگر در یکی از شرایط زیر صدق کند.

(الف) اگر $F(G) \neq ۱$ (زیرگروه فیتینگ G) آنگاه

1. Hans Fitting (1906-1938)

(۱) G یک گروه فروبنیوس است؛
(۲) G یک گروه هیوز–تامپسون است؛
(۳) G یک p- گروه متناهی است با شرط $H_p(G) \neq G$ و $|G| \geq p^۲$؛
(۴) G با گروه متقارن روی ۴ حرف، یعنی $S_۴$، یکریخت است.

(ب) اگر $F(G) = ۱$ آنگاه G با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است.
(۱) $\mathrm{PGL}(۲, q)$ با شرط $q \geq ۴$؛
(۲) $\mathrm{PSL}(۲, q)$ با شرط $q \geq ۴$؛
(۳) $\mathrm{Sz}(q)$، گروه سادهٔ سوزوکی.

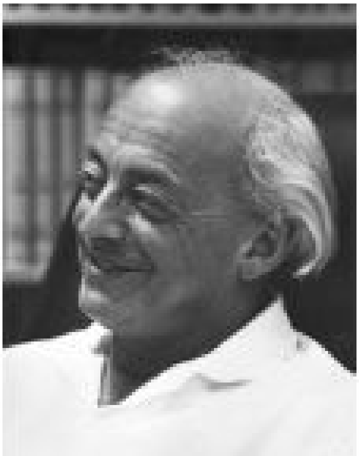
شناسایی p–گروه‌های متناهی که دارای افرازند در حالت کلی به نظر پیچیده است؛ هرچند در [۷۰] نتایجی در این باره به دست آمده است. در [۵۵] هم ثابت شده است که اگر p–گروه متناهی G دارای افرازی باشد که اعضای افراز از مرتبهٔ برابرند، آنگاه نمای G (کوچک‌ترین مضرب مشترک مرتبهٔ عناصر G) برابر p است.

علاوه‌بر حالت کلی، افرازها را نیز مانند پوشش‌ها می‌توان با فرض ویژگی‌های خاص اعضا مطالعه کرد. در [۴۲] مشابه عدد پوششی، $\sigma(G)$، برای گروه‌ها، عدد افراز، $\rho(G)$، برای گروه‌های دارای افراز تعریف شده است؛ اگر گروه G دارای افراز باشد $\rho(G)$ را کوچک‌ترین اندازهٔ یک افراز برای G تعریف کرده‌اند. آن‌ها گروه‌های G با شرط $\rho(G) = \sigma(G)$ را شناسایی کردند. البته پرداختن به مبحث مهم و جالب افراز گروه‌ها خود مجال دیگری را می‌طلبد که از حوصلهٔ این نوشته خارج است و خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند نتایج به دست آمده در این زمینه را در [۱۰۵] مشاهده کند.

۱.۵ مختصری از زندگی بِر

راینهولت بِر در ژوئیهٔ ۱۹۰۲ در برلین در خانواده‌ای مرفه متولد شد. پدرش صاحب تولیدی پوشاک و مادرش هم از یک خانواده تاجر بود. از سال ۱۹۰۸ تحصیلات مدرسه‌ای را در شارلوتنبورک شروع و در ۱۹۲۰ از آنجا فارغ‌التحصیل شد. وقتی فقط ۱۲ سال داشت پدرش را از دست داد و آیندهٔ خانوادهٔ او کاملاً نامعلوم به نظر می‌رسید. بِر جوان در رویاهایش دوست داشت مهندس شود تا بتواند تکیه‌گاهی برای خانواده باشد. او یک سال در رشتهٔ مهندسی مکانیک در هانوفر درس خواند، حتی در تابستان هم درس عملی را گذراند؛ ولی فهمید که این رشته مناسب او نیست و لذا به ریاضی روی آورد. بدین‌ترتیب در ۱۹۲۱ تحصیلات ریاضی را در فرایبورگ آغاز کرد. او در تمام دوران

زندگیش به شهر فرایبورگ به علت مناظر زیبایش علاقه‌مند بود. اما متوجه شد که گوتینگن دارای سطح ریاضی بالایی است و تصمیم گرفت که به آنجا برود. راینهولت تحت تأثیر تدریس و نوع نگاه ریاضی امی نوتر قرار گرفت. بِر از طریق هلموت کنزر[1] بیشتر جذب توپولوژی رویه‌ها از نگاه هندسی شد و رسالهٔ دکترایش را در همین زمینه نوشت. بعداز آن به‌عنوان دستیار در فرایبورگ مشغول شد و در آنجا تحت تأثیر آلفرد لووی به جبر علاقه‌مند شد. در آنجا بود که با ماریانا کریستین، که دانشجوی ریاضی بود، آشنا شد و در ۱۹۲۹ با او ازدواج کرد.



راینهولت بِر (۱۹۰۲–۱۹۷۹)

بِر سپس به دانشگاه منچستر دعوت شد. در سفری به آکسفورد با هرمان وایل ملاقات کرد. وایل که استاد دانشگاه پرینستون بود بِر را به آنجا دعوت کرد و او قبول کرد. بین سال‌های ۱۹۳۵–۱۹۳۷ در آنجا دربارهٔ گروه‌های آبلی نامتناهی که در منچستر شروع کرده بود مطالعه کرد. در ۱۹۳۸ آرتور بی. کابل[2] از او با سِمتِ دانشیاری برای تدریس در دانشگاه ایلینویز دعوت کرد. راینهولت در ایلینویز در سال ۱۹۴۴ به رتبهٔ استادی ارتقا یافت. او به همراه ماریانا ۱۸ سال در آنجا ماند و شهروند آمریکا شد. درهرحال آنجا (اُربانا شَمپین) مکان ایدئالی برای آن‌ها نبود زیراکه آن‌ها عاشق کوهستان بودند. البته بِر در ۱۹۳۹ برای اولین بار به استیز پارک در کلرادو، که رشته کوه‌های راکی در آنجا واقع بود، سفر کرد و تا سال ۱۹۵۰ هر ساله به همراه دوستانش ازجمله ریچارد براوئر[3]، هرمان وایل، و ماکس دِن[4] به آنجا می‌رفت و بدین‌ترتیب بِر تأثیر بسیار مثبتی روی زندگی ریاضی‌دانان ایلینویز داشت [۸۴].

بِر در ایلینویز فعال بود و حدود ۲۰ دانشجوی دکترا فارغ‌التحصیل کرد، همچنین تأثیر زیادی بر پیشرفت گروه ریاضی ایلینویز داشت. او سوزوکی[5] را به گروه ریاضی ایلینویز آورد و آنجا را به قطب تحقیقات گروه‌های سادهٔ متناهی تبدیل کرد. بِر یکی از مؤسسان مجلهٔ مشهور مجلهٔ ریاضی \ایلینویز بود. او با مطالعهٔ مشبکهٔ گروه‌های آبلی مفهوم مدول‌های انژکتیو را مطرح کرد، در نظریهٔ گروه‌ها گروهی به‌نام بِر نام‌گذاری شده است. آثار ریاضی او گسترهٔ وسیعی دارند: توپولوژی، گروه‌های آبلی، و هندسهٔ تصویری. در ۱۹۵۲ کتاب جبرخطی و هندسهٔ تصویری را منتشر کرد. فوخس[6]، که نویسندهٔ

1. Hellmuth Kneser (1898-1973) 2. Arthur Byron Coble (1878-1966) 3. Richard Brauer (1901-1977)
4. Max Dehn (1878-1952) 5. Michio Suzuki (1926-1998) 6. László Fuchs (1924-)

کتاب مهمی در زمینهٔ گروه‌های آبلی است، اشاره می‌کند که بارها از نظرات سازندهٔ بِر در کتاب‌هایش استفاده کرده است و همین امر باعث شده است کتاب‌هایش برای ریاضی‌دانان متخصص در نظریهٔ گروه‌های آبلی بسیار مفید باشد.

درهرحال بِر از کار و زندگی در دانشگاه ایلینویز لذت نمی‌برد، به‌خصوص از تدریس سطح پایینِ دانشگاه. او قصد داشت بعداز پایان جنگ و سقوط هیتلر به آلمان برگردد؛ اما چون از قبل در آنجا هیچ سمت رسمی نداشت، برگشتن او کمی مشکل بود. تا سال ۱۹۵۶ در ایلینویز ماند و سرانجام با پیگیری‌های زیاد موفق شد در دانشگاه گوتهٔ فرانکفورت مشغول کار شود. در سال ۱۹۶۷ از آنجا بازنشسته شد و در زوریخ اقامت گزید.

بِر مدت‌ها ویراستار مجلهٔ معروف *Arch. der Math.* بود که بلافاصله پس‌از جنگ جهانی دوم تأسیس شده بود. از دانشجویان معروف او می‌توان از هیگمن، هاینِکن، کگل، کاپه، آر. اشمیت، هاوزن، و آمبرک نام برد. کگل دربارهٔ او می‌نویسد: «بِر برای ایجاد انگیزه در تیم تحقیقاتیش برای هر موضوع تحقیقات دانشجویانش مهمان‌ها و سخنران‌هایی را به مدت دو هفته ترتیب می‌داد. مهمان‌هایی که برای کار ما مهم‌تر بودند مدت طولانی‌تری نزد ما می‌ماندند. گاهی سمینارها را به مکان دیگری منتقل می‌کرد که البته فرصت خوبی برای ارتباطات علمی و شخصی بود. البته همواره ماریانا نیز همراه او بود». سرانجام بِر در اکتبر ۱۹۷۹ به‌علت عارضهٔ سرطان معده درگذشت. با آخرین تصویری که یکی از دانشجویانش از او بازگو می‌کند این بخش را به پایان می‌بریم: «ظاهری مرتب و آراسته، ملبس به پیراهن سفید یقه‌باز با شلوار پشمی، کفش ورزشی تنیس به پا، لبخندی بر چهره‌اش، ماریانا در کنارش، و ریاضی‌دانان جوان گرداگردش».

۶ رویکردهای دیگر به مسئلهٔ پوشش گروه‌ها

۱.۶ پوشش‌های متشکل از زیرگروه‌های آبلی و تعیین کران بالا برای شاخص مرکز

همان‌طور که در بخش قبل اشاره شد بِر ثابت کرد که گروه G دارای یک پوشش متناهی از زیرگروه‌های آبلی است اگر و تنها اگر $|G:Z(G)|<\infty$ که در آن $Z(G)$ مرکز گروه G است (برای اثبات [۸۱] را ببینید). حال مشابه پوشش مینیمال، یعنی $\sigma(G)$، فرض کنید $a(G)$ کمترین تعداد زیرگروه‌های آبلی مورد نیاز برای یک پوشش برای گروه G باشد. این پرسش به‌طور طبیعی به ذهن می‌رسد که آیا می‌توان کران‌های بالایی برای $|G:Z(G)|$ برحسب $a(G)$ به دست آورد؟ اگر $a(G)=\kappa$ یک کاردینال نامتناهی باشد، آنگاه در [۸۶] ثابت شده است که $|G:Z(G)|\leq ۲^{\kappa}$

و این کران دقیق است. حال اگر $a(G) < \infty$، نویمان در [۸۱] نشان داد که ثابت c وجود دارد که $|G : Z(G)| \leq c^{۲^{a(G)}}$. در ۱۹۸۷ تامکینسون [۹۹] این کران را بهبود بخشید و ثابت کرد که

$$|G : Z(G)| \leq \max\{(a(G) - ۱)^۲, ۲(a(G) - ۲)^{\log_۲(a(G)-۲)}\}$$

در هر گروه ناآبلی G برقرار است. تامکینسون با بررسی حالت‌های زیادی پیشنهاد کرد که احتمالاً $(a(G) - ۱)^۲$ کران بالای دقیقی است. اما در [۸۷] نشان داده شده است که هیچ کران بالایی برای $|G : Z(G)|$ وجود ندارد که به‌صورت چندجمله‌ای برحسب $a(G)$ باشد. برای مشاهده اثبات این حکم و نتایج جالب دیگر در این زمینه مطالعهٔ [۸۷] پیشنهاد می‌شود. در بخش کاربردها دوباره به شاخص مرکزها در گروه‌ها می‌پردازیم.

۲.۶ پوشش گروه‌ها توسط رده‌های تزویج از زیرگروه‌ها

تمرینی ساده در نظریهٔ گروه‌ها بیان می‌کند که یک گروه متناهی نمی‌تواند اجتماع همهٔ مزدوج‌های یک زیرگروه سره‌اش باشد. به‌عبارت‌دیگر، اگر G گروهی متناهی و H یک زیرگروه سرهٔ آن باشد، آنگاه همواره داریم $G \neq \cup_{g\in G} H^g$ که در آن $H^g = g^{-۱}Hg$. ولی این وضعیت برای گروه‌های نامتناهی متفاوت است. به‌عنوان مثال، گروه خطی عام $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (گروه ماتریس‌های $n \times n$ وارون‌پذیر با درایه‌های مختلط) اجتماع مزدوج‌های زیرگروهی مانند H است که در آن H مجموعه‌ای متشکل از تمام ماتریس‌های بالا مثلثی وارون‌پذیر $n \times n$ می‌باشد. دلیل این امر آن است که هر ماتریسْ مزدوج (مشابه) یک ماتریس بالامثلثی است. البته یک گروه متناهی می‌تواند اجتماع مزدوج‌های دو زیرگروه سره‌اش باشد، مانند گروه $S_۳$ که اجتماع سه ۲ـزیرگروه سیلویش به همراه تنها ۳ـزیرگروه سیلویش است. بنابراین این سؤال ممکن است مطرح شود که ساختار گروه‌های متناهی که اجتماع مزدوج‌های برخی از زیرگروه‌هایش است چیست؟

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. پوشش Γ از G را نرمال گوییم هرگاه برای هر $H \in \Gamma$ و هر $g \in G$ داشته باشیم $g^{-۱}Hg \in \Gamma$. همچنین پوشش نرمال را مینیمال گوییم هرگاه در میان همهٔ پوشش‌های نرمال گروه G دارای کمترین تعداد رده‌های تزویج باشد، تعداد رده‌های تزویج در یک پوشش نرمال مینیمال گروه G را با نماد $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم. واضح است که همواره $\gamma(G) \neq ۱$. اگر G یک گروه پوچ‌توان غیردوری متناهی باشد، آنگاه $\sigma(G) = \gamma(G)$. در [۴۴] گروه‌های G با شرط $\gamma(G) = ۲$، و گروه‌های G با شرط $\sigma(G) = \gamma(G)$ بررسی شده است. برخلاف σ، تابع γ می‌تواند هر مقدار $n \geq ۲$ را اختیار کند ([۳۶] را ببینید). به خوانندهٔ علاقه‌مند

به پوشش‌های نرمال مطالعهٔ [۲۳، ۳۲] پیشنهاد می‌شود. دیدگاهی دیگر از پوشش گروه‌ها توسط مزدوج زیرگروه‌ها را می‌توانید در [۳۷] ببینید.

در ابتدای همین بخش دیدیم که اگر G یک گروه متناهی و $H < G$، آنگاه $G \neq \cup_{g\in G} H^g$. به‌عبارت‌دیگر، $G \neq \bigcup_{\alpha\in \mathrm{Inn}(G)} H^\alpha$ که در آن $\mathrm{Inn}(G)$ گروه خودریختی‌های درونی G و H^α تصویر H تحت α است. به زیرگروه H از G زیرگروه‌پوشش گویند هرگاه $G = \bigcup_{\alpha\in \mathrm{Aut}(G)} H^\alpha$. به‌عنوان مثال، به‌راحتی قابل بررسی است که هر زیرفضای dبعدی از یک فضای برداری nبعدی به‌ازای $1 \leq d \leq n$ یک زیرگروه‌پوشش تحت عمل جمع است. برَند در سال ۱۹۸۱ [۲۱] به چنین پوشش‌هایی با زیرگروه‌پوششِ حل‌پذیر توجه کرد و حدس زد یک گروه با زیرگروه‌پوششِ حل‌پذیر، حل‌پذیر است. این حدس در ۱۹۸۸ در [۹۳] اثبات شد. در [۸۹، ۸۸] نیز پوشش‌های $\Gamma = \{H^\alpha : \alpha \in A\}$ که در آن $\mathrm{Inn}(G) < A \leq \mathrm{Aut}(G)$ بررسی شده است.

۳.۶ پوشش توسط مرکزی‌ساز عناصر و نرمال‌ساز زیرگروه‌ها

واضح است که هر گروه ناآبلی متناهی دارای پوششی مرکب از مرکزی‌ساز عضوهایش است. جالب است اگر بتوانیم کمترین تعداد مرکزی‌سازهای لازم برای پوشش یک گروه ناآبلی متناهی G را تعیین کنیم؛ این عدد را با $\sigma_c(G)$ نشان می‌دهیم. در [۵۰] برای برخی گروه‌ها این عدد محاسبه شده است و نشان داده شده است که این عدد برابر با عدد غلبهٔ[1] گراف جابه‌جایی گروه G است. به‌علاوه نشان داده شده است که به‌ازای هر عدد طبیعی $n > 2$ گروه G با شرط $\sigma_c(G) = n$ وجود دارد.

اخیراً در [۱۰] نتایجی دربارهٔ پوشش گروه‌های متناهی توسط نرمال‌ساز برخی زیرگروه‌ها به دست آمده است و به‌طور مشابه $\sigma_n(G)$ را برابر کمترین تعداد نرمال‌ساز زیرگروه‌ها برای پوشاندن گروه G تعریف کرده‌اند؛ اگر چنین پوششی موجود نباشد آنگاه $\sigma_n(G) = \infty$. توجه کنید اگر G گروه ساده باشد آنگاه $\sigma_n(G) = \sigma(G)$. همچنین واضح است که گروه‌های ددکیند و گروه‌های دووجهی دارای پوشش نرمال‌ساز نیستند. یادآوری می‌کنیم که گروه G با $\sigma(G) = 7$ وجود ندارد ولی می‌توان دید که $\sigma_n(S_4) = 7$.

۴.۶ پوشش ماکسیمال برای یک گروه

در مقابل مفهوم پوشش مینیمال می‌توان پوشش ماکسیمال را مطرح کرد. پوشش Γ را برای گروه G ماکسیمال گوییم هرگاه تعداد عناصر Γ از تعداد عناصر هیچ پوشش دیگری کمتر نباشد؛ تعداد

1. domination number

چنین پوششی برای G را با $\lambda(G)$ نشان می‌دهند. این مسئله بحثِ اصلی [۹۲] است و در آنجا گروه‌های G با شرط $\lambda(G) \in \{۳,۴,۵\}$ مشخص شده‌اند.

۵.۶ گروه‌ها با پوشش یکتا

واضح است که ۴ـگروه کلاین، گروه متقارن $S_۳$، و گروه چهارگان $Q_۸$ فقط دارای یک پوشش بی‌فزونه هستند. لذا سؤال جالب این است که آیا می‌توان گروه‌هایی را که فقط دارای یک پوشش بی فزونه‌اند مشخص کرد؟ در سال ۲۰۰۳ در [۲۴] گروه‌هایی با پوشش بی‌فزونهٔ یکتا بررسی و ثابت شد که این گروه‌ها عبارت‌اند از

(الف) G پوچ‌توان است و با $Q_۸$، $Q_۸ \times C_m$، $C_p \times C_p$، یا $C_p \times C_p \times C_n$ یکریخت است که در آن m فرد، p اول، و $\gcd(p,n) = ۱$؛

(ب) G غیر پوچ‌توان است و $\frac{G}{Z(G)}$ از مرتبهٔ pq و $Z(G)$ به‌طور دوری در G نشانده می‌شود که در آن p و q اعداد اول متمایزند.

همچنین او توانست برای هر عدد طبیعی r گروهی بسازد که فقط دارای rتا پوشش بی‌فزونه باشد.

۷ کاربردهایی از پوشش گروه‌ها توسط زیرگروه‌ها

در این بخش به دو کاربرد از کاربردهای پوشش گروه‌ها توسط زیرگروه‌ها می‌پردازیم.

۱.۷ زیرمجموعهٔ ماکسیمال از عناصر دوبه‌دو ناجابه‌جایی در یک گروه متناهی

فرض کنید G یک گروه ناآبلی متناهی باشد. زیرمجموعهٔ $X \subset G$ را دوبه‌دو ناجابه‌جایی گوییم هرگاه برای هر دو عضو $a, b \in X$ داشته باشیم، $ab \neq ba$. به‌علاوه در میان همهٔ مجموعه‌های دوبه‌دو ناجابه‌جایی G بزرگ‌ترین اندازه را با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم. از دیدگاهی دیگر، $\omega(G)$ همان عدد خوشه‌ای گراف ناجابه‌جایی گروه G است. یادآوری می‌کنیم که گراف ناجابه‌جایی $\Gamma(G)$ دارای مجموعهٔ رئوس $G \setminus Z(G)$ و دو رأس متمایز x و y به هم وصل می‌شوند هرگاه $xy \neq yx$. برای دور نشدن از موضوع اصلی بحث، خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به [۳، ۴۰، ۷۷، ۳۸] برای بحث بیشتر دربارهٔ گراف ناجابه‌جایی و عدد خوشه‌ای آن مراجعه کند. در زیر ارتباط بین یک مجموعهٔ دوبه‌دو ناجابه‌جایی با بزرگ‌ترین اندازه در G و یک پوشش خاص از G را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۷ ([۹۹، قضیهٔ ۱.۵]). فرض کنید $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_r\}$ یک زیرمجموعه از اعضای دوبه‌دو ناجابه‌جایی گروه G با بزرگ‌ترین اندازه باشد. در این صورت احکام زیر برقرارند.

(۱) $\{C_G(x_1), C_G(x_2), \ldots, C_G(x_r)\}$ یک پوشش بی‌فزونه برای گروه G است که در آن $C_G(x_i)$ مرکزی‌ساز عنصر x_i در G است.

(۲) $Z(G) = \cap_{i=1}^{r} C_G(x_i)$.

با استفاده از تابع شاخص اشتراک روی پوشش‌های متناهی بی‌فزونه، که قبلاً تعریف شد، می‌بینیم که $|G : Z(G)| \leq f(\omega(G))$. در [۹] گروه‌های با $\omega(G) \in \{3, 4\}$ و در [۵۹] گروه‌های G با $\omega(G) = 5$ مطالعه شده است. احتمالا سّابقهٔ این مسئله به پاسخ نویمان به سؤالی از اردوش درخصوص گراف ناجابه‌جایی یک گروه می‌رسد.

عدد رنگی گراف ناجابه‌جایی G را با نماد $\chi(G)$ نشان می‌دهیم. به‌آسانی می‌توان دید که $\omega(G) \leq \chi(G)$ و $a(G) = \chi(G)$ که در آن $a(G)$ همان کمترین تعداد عناصر یک پوشش برای G متشکل از زیرگروه‌های آبلی ماست. لذا برای یک کران بالای خوب برای تعیین عدد خوشه‌ای چنین گرافی، کافی است برای گروه مورد نظر، پوششی مینیمال متشکل از زیرگروه‌های آبلی یافت؛ روشی که اغلب به کار می‌رود. در [۲۸] نشان داده شده است که $\omega(S_n) \neq \chi(S_n)$ برای $n \geq 15$.

حال می‌توانیم سؤل اردوش را که در ۱۹۷۵ مطرح کرد بیان کنیم.

مسئله ۲.۷. فرض کنید G گروهی (نه لزوماً متناهی) باشد که شامل هیچ خوشهٔ نامتناهی نیست. در این صورت آیا کران متناهی برای اندازهٔ خوشه‌های $\Gamma(G)$ وجود دارد؟

در همان سال نویمان [۸۲] به این سؤال پاسخ مثبت داد. درحقیقت او نشان داد که اگر گراف ناجابه‌جایی گروه G شامل هیچ خوشهٔ نامتناهی نباشد، آنگاه G دارای یک پوشش متناهی متشکل از زیرگروه‌های آبلی است. پس‌از آن نتایج دیگری در [۷۵، ۹۱، ۳۳] به دست آمد.

مطلب آخر اینکه در کنار $\omega(G)$ کمیت جدید $\omega'(G)$ در [۵۰] تعریف شده است که برابر کمترین تعداد عناصر یک مجموعه دوبه‌دو ناجابه‌جایی ماکسیمال (نسبت به رابطهٔ شمول) در G است. با توجه به تعریف $\sigma_c(G)$ از بخش ۳.۶ می‌توان بررسی کرد که $\sigma_c(G) \leq \omega'(G)$ و بنابه گزارهٔ ۷.۳ از [۵۰] داریم $\sigma_c(G) = \omega'(G) = p + 1$ برای p–گروه‌های فوق‌العاده خاص[1]. همچنین تساوی برای برخی گروه‌های سادهٔ ناآبلی نیز برقرار است (گزاره‌های ۲.۵ و ۳.۵ از [۵۰] را ببینید)؛ هرچند $7 = \sigma_c(S_4) < \omega'(S_4) = 9 < \omega(S_4) = 10$ (اثبات قضیهٔ ۳.۱ از [۵۸] و گزارهٔ ۵.۵ از [۵۰] را ببینید).

1. extra-special p-groups

۲.۷ مجموعهٔ بلوکی مینیمال در فضاهای تصویری

فرض کنید V یک فضای برداری از بُعد $n+۱$ روی میدان متناهی با q عضو $\mathbb{F}_q$ باشد. در این صورت مجموعهٔ همهٔ زیرفضاهای ناصفر V را فضای تصویری nبعدی گوییم و با نماد $\mathrm{PG}(n,q)$ نشان می‌دهیم. در این فضای تصویری منظور از نقاط همان زیرفضاهای ۱بُعدی V هستند. همچنین از جبرخطی یادآوری می‌کنیم که هر زیرفضای nبعدی از V یک ابرصفحه است. هرگاه p یک عدد اول و n یک عدد طبیعی باشند، گروه آبلی مقدماتی $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \times \cdots \times \mathbb{F}_p$ از مرتبهٔ $p^{n+۱}$ یک فضای برداری از بعد $n+۱$ روی میدان $\mathbb{F}_p$ است و هر زیرگروه بیشین آن یک ابرصفحه است. اکنون یک مجموعهٔ بلوکی (مینیمال) در فضای تصویری $\mathrm{PG}(n,q)$ را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۷. یک مجموعهٔ بلوکی در $\mathrm{PG}(n,q)$ مجموعه‌ای از نقاط است که با هر ابرصفحه دارای اشتراک غیربدیهی باشد. مجموعهٔ بلوکی را مینیمال گوییم هرگاه به‌طور سره هیچ مجموعهٔ بلوکی را در برنگیرد.

در اینجا ارتباط بین پوشش‌های بی‌فزونهٔ گروه‌های آبلی مقدماتی متناهی و مجموعهٔ بلوکی کمین روی میدان‌های متناهی را بیان می‌کنیم؛ جزئیات بیشتر را در [۵] ببینید. اما قبل‌از آن چند نماد: فرض کنید $\mathbb{F}_q$ میدان با q عضو، n عددی طبیعی باشد، و $y=(y_۱,\ldots,y_n)\in(\mathbb{F}_q)^n$. تعریف کنید

$$M_y=\{(x_۱,\ldots,x_n)\in(\mathbb{F}_q)^n : x_۱y_۱+\cdots+x_ny_n=\circ\}.$$

به‌راحتی می‌توان دید که برای هر بردار غیرصفر y مجموعهٔ M_y یک ابرصفحه برای فضای برداری $(\mathbb{F}_q)^n$ است و اگر $\circ\neq\lambda\in\mathbb{F}_q$ آنگاه $M_{\lambda y}=M_y$. لذا اگر Y یک زیرفضای یک‌بعدی با پایهٔ $\{y\}$ باشد می‌توانیم بنویسیم $M_Y:=M_y$. اکنون آماده‌ایم نتایج را بیان کنیم.

گزاره ۴.۷. فرض کنید B زیرمجموعه‌ای از نقاط در $PG(n,q)$ باشد و $\Gamma=\{M_b : b\in B\}$. در این صورت

(۱) B یک مجموعهٔ بلوکی است اگر و تنها اگر Γ یک $|B|$-پوشش برای گروه آبلی $(\mathbb{F}_q)^{n+۱}$ باشد.

(۲) B یک مجموعهٔ بلوکی مینیمال است اگر و تنها اگر Γ یک $|B|$-پوشش بی‌فزونه برای گروه آبلی $(\mathbb{F}_q)^{n+۱}$ باشد.

برای مطالعهٔ بیشتر در مورد مجموعه‌های بلوکی مینیمال و پوشش گروه‌ها می‌توانید [۲، ۵، ۴۸] را ببینید. البته لازم است اشاره کنیم که کاربردهای مهم مجموعهٔ بلوکی در نظریهٔ بازی‌ها و نظریهٔ کدگذاری است که به خوانندهٔ علاقه‌مند مطالعهٔ [۲۰، ۱۸] را توصیه می‌کنیم.

۳.۷ کاربردهای دیگر

با اعمال برخی محدودیت‌های طبیعی روی پوشش گروه‌های آبلی یا فضاهای برداری متناهی، ارتباط نزدیکی بین مسائل پوشش گروه‌ها و مسائل ترکیبیاتی مانند حدس سه شارش[1]، حدس پایهٔ جمعی[2]، و حدسی از اَلون[3]، یِگر[4]، و تارسی[5] دربارهٔ بردارهای هیچ‌جا صفر وجود دارد؛ به خوانندهٔ علاقه‌مند مطالعهٔ مقالهٔ زیبای [۹۸] را پیشنهاد می‌کنیم.

۸ عدد پوششی حلقه‌ها

مشابه گروه‌ها می‌توان پوشش یک حلقه را توسط زیرحلقه‌ها تعریف کرد. فرض کنید R یک حلقهٔ شرکت‌پذیر (نه لزوماً یک‌دار و جابه‌جایی) باشد. یک پوشش برای R خانواده‌ای متناهی از زیرحلقه‌های سرهٔ آن است که اجتماعشان برابر R باشد؛ چنین پوششی را یکانی گویند هرگاه هر عضو پوشش شامل همانی ضربی R باشد. واضح است که هر پوشش یکانی یک پوشش است، ولی حلقه‌های جابه‌جایی متناهی وجود دارند که دارای پوشش هستند ولی پوشش یکانی ندارند. عدد پوششی و عدد پوششی یکانی برای R هم مشابه گروه‌ها تعریف می‌شود که به ترتیب با $\sigma(R)$ و $\sigma_u(R)$ نشان داده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که زیرمجموعهٔ S از R را زیرحلقه R گویند هرگاه نسبت به عمل جمع یک گروه و تحت عمل ضرب بسته باشد. همانند گروه‌ها (قضیهٔ ۲)، می‌توان نشان داد که حلقهٔ R دارای پوشش است اگر تنها اگر ایده‌آلی مانند I از R وجود داشته باشد به‌طوری که حلقهٔ $\frac{R}{I}$ متناهی و دارای پوشش باشد. پس ابتدا باید حلقه‌های متناهی را که دارای پوشش هستند شناسایی کنیم. چون هر حلقه تحت جمع یک گروه آبلی است، لذا یک حلقه نیز نمی‌تواند اجتماع دو زیرحلقهٔ سره‌اش باشد. بنابراین همواره داریم $\sigma(R) \geq ۳$.

در [۷۳] حلقه‌های R با شرط $\sigma(R) = ۳$ مشخص شده‌اند. در [۳۴] نیز حلقه‌های با شرط $\sigma(R) = ۴$ بررسی شده است. در سال ۲۰۲۴ در [۹۶] که ادامهٔ سلسله مقالات [۱۰۳، ۸۵، ۹۷] است تمام اعداد طبیعی که می‌توانند عدد پوششی حلقه‌ها باشند تعیین شده‌اند (برخلاف گروه‌ها) و نشان داده شده است که چگالی مجموعهٔ چنین اعدادی صفر است.

1. three-flow conjecture 2. additive basis conjecture 3. Noga Alon 4. François Jaeger 5. Michael Tarsi

توجه کنید که هرحلقهٔ متناهی ناجابه‌جایی دارای پوششی توسط زیرحلقه‌های دوری تولیدشده توسط عناصرش است. بنابراین باید حلقه‌های جابه‌جایی متناهی را که دارای پوشش هستند شناسایی کرد. فرض کنید $\mathbb{F}_q$ میدان متناهی از مرتبهٔ $q = p^n$ باشد که در آن p عدد اول و n عددی طبیعی است. در این صورت $\mathbb{F}_q$ دارای پوشش نیست چون مولد گروه ضربی در هیچ زیرحلقهٔ سره از $\mathbb{F}_q$ قرار نمی‌گیرد. در [۱۰۳] شرط لازم و کافی برای آنکه حاصل‌ضرب تعدادی متناهی از میدان‌های متناهی دارای پوشش باشد معیّن شده است. با توجه به این قضیه‌ها پوشش‌پذیری این حلقه‌ها به پوشش‌پذیری حاصل‌ضرب میدان‌های متناهی هم‌مرتبه بر می‌گردد. به‌طور دقیق‌تر نتیجهٔ زیر را داریم (برای اثبات به قضیهٔ ۵.۳ از [۱۰۳] مراجعه کنید).

قضیه ۱.۸. فرض کنید $R = \mathbb{F}_q \times \cdots \times \mathbb{F}_q$ حلقه‌ای از مرتبهٔ q^t باشد که در آن $q = p^n$ است.

(۱) فرض کنید $n = ۱$. در این صورت R دارای پوشش است اگر و تنها اگر $t \geq p$.

(۲) فرض کنید $n > ۱$. در این صورت R دارای پوشش است اگر و تنها اگر داشته باشیم $t \geq |\mathrm{Irr}(p,n)|$ که در آن $\mathrm{Irr}(p,n)$ مجموعهٔ تمام چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر تکین از درجهٔ n روی $\mathbb{F}_p$ است.

قضیهٔ بالا از معدود نتایج به دست آمده در حلقه‌های جابه‌جایی پوشش‌پذیر است. همان‌طور که در بالا اشاره شد بیشتر نتایج به دست آمده در زمینهٔ پوشش حلقه‌ها معطوف به تعیین عدد پوششی حلقه‌های پوشش‌پذیر است و کمتر به پوشش‌پذیری حلقه‌های جابه‌جایی متناهی پرداخته شده است. در مقدمهٔ [۱۰۳] گفته شده است که شناسایی چنین حلقه‌هایی حتی برای مرتبه‌های کوچک کار ساده‌ای نیست. اخیراً در [۷۹] حلقه‌های جابه‌جایی از مرتبهٔ $p_۱^{\alpha_۱}p_۲^{\alpha_۲}\cdots p_k^{\alpha_k}$ که دارای پوشش یکانی هستند مشخص شده‌اند (p_iها اعداد اول متمایز و $۱ \leq \alpha_i \leq ۴$ به‌ازای هر i). همچنین در [۷۸] حلقه‌های موضعیِ متناهیِ پوشش‌پذیر مشخص شده‌اند.

برای بررسی مسئلهٔ پوشش دیگر ساختارهای جبری توسط زیرساختارهایشان مانند نیم‌گروه‌ها، نیم‌گروه‌های وارون، طوقه‌ها[۱] (شبه‌گروه دارای عضو همانی)، و تکوارها[۲] خوانندهٔ علاقه‌مند را به مطالعهٔ مقاله‌های جالب [۶۴، ۳۹] دعوت می‌کنیم.

سپاسگزاری ابتدا از سردبیر محترم مجله برای ویراستاری نسخهٔ اولیهٔ مقاله بسیار تشکر می‌کنم، همچنین از داور محترم برای مطالعهٔ دقیق مقاله و ارائهٔ پیشنهادهای سودمند برای بهبود مقاله سپاسگزارم.

1. loops 2. monoids

مراجع

[۱] جعفریان امیری، سیدمجید؛ رستمی، حجت، صد سال با مرکزساز عضوهای یک گروه، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، ۶۵(۱۳۹۸)، ۹۳-۱۱۲.

[2] Abdollahi, A., Groups with maximal irredundant covers and minimal blocking sets, *Ars Combin.*, **113** (2014), 337-339.

[3] Abdollahi, A., Akbari, S., Maimani, H. R., Non-commuting graph of a group, *J. Algebra*, **298** (2006), 468-492.

[4] Abdollahi, A., Ashraf, F., Shaker, S. M., The symmetric group of degree six can be covered by 13 and no fewer proper subgroups, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **30** (2007), 57-58.

[5] Abdollahi, A., Ataei, M. J., Mohammadi Hassanabadi, A., Minimal blocking sets in $\mathrm{PG}(n,2)$ and covering groups by subgroups, *Comm. Algebra*, **36** (2008), 365-380.

[6] Abdollahi, A., Ataei, M. J., Jafarian Amiri, S. M., Mohammadi Hassanabadi, A., On groups with a maximal irredundant 6-cover, *Comm. Algebra*, **33** (2005), 3225-3238.

[7] Abdollahi, A., Jafarian Amiri, S. M., On groups with an irredundant 7-cover, *J. Pure Appl. Algebra*, **209** (2007), 291-300.

[8] Abdolahi, A., Jafarian Amiri, S. M., Minimal coverings of compeletely reducible groups, *Publ. Math. Debrecen*, **72** (1–2) (2008), 167-172.

[9] Abdollahi, A., Jafarian Amiri, S. M., Mohammadi Hassanabadi, A., Groups with specific number of centralizers, *Houston J. Math.*, **33**(1), (2007), 43-57.

[10] Amiri, M., Haji, S., Jafarian Amiri, S. M., On coverings of groups by normalizers (preprint).

[11] Ashrafi, A. R., Counting the centralizers of some finite groups, *Korean J. Comput. Appl. Math.*, **7** (1) (2000), 115-124.

[12] Ashrafi, A. R., On the n-sum groups $n = 6, 7$, *South. Asian Bull. Math.*, **22** (1998), 111-114.

[13] Ataei, M. J., Subdirect products and covering groups by subgroups, *Int. J. Algebra*, **7** (2013), 673-677.

[14] Ataei, M. J., $\mathcal{C}_8$-groups and nilpotency condition, *Int. J. Algebra*, **4** (2010), 1057-1062.

[15] Baer, R., Partitionen endlicher Gruppen, *Math. Z.*, **75** (1960/1961), 333-372.

[16] Baer, R., Einfache Partitionen endlicher Gruppen mit nicht-trivialer Fittingscher Untergruppe, *Arch. Math.*, **12** (1961), 81-89.

[17] Baer, R., Einfache Partitionen nicht-einfacher Gruppen, *Math. Z.*, **77** (1961), 1-7.

[18] Batten, L. M., Blocking sets in designs, *Congr. Numer.*, **99** (1994), 139-154.

[19] Baumslag, G., Neumann, B. H., Neumann, H., Neumann, Peter M., On varieties generated by a finitely generated group, *Math. Z.*, **86** (1964), 93-122.

[20] Berardi, L., Eugeni, F., Blocking sets and game theory, *Mitt. Math. Sem. Giessen*, **201** (1991), 1-17.

[21] Brandl, R., A covering property of finite groups, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **23** (1981), 227-235.

[22] Britnell, J. R., Evseev, A., Guralnick, R. M., Holmes, P. E., Marroti, A., Sets of elements that pairwise generate a linear group, *J. Combin. Theory Ser. A*, **115** (2008), no. 3, 442-465.

[23] Britnell, J. R., Maróti, A., Normal coverings of linear groups, *Algebra Number Theory*, **7** (2013), no. 9, 2085-2102.

[24] Brodie, M. A., Uniquely covered grous, *Algebra Colloq.*, **10** (2003), 101-108.

[25] Brodie, M. A., Chamberlain, R. F., Kappe, L. C., Finite coverings by normal subgroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104** (1988), 669-674.

[26] Brodie, M. A., Morse, R. F., Finite subnormal coverings of certain solvable groups, *Comm. Algebra*, **30** (2002), no. 6, 2569-2581.

[27] Brodie, M. A., Kappe, L. C., Finite coverings by subgroups with a given property, *Glasgow Math. J.*, **35** (1993), no. 2, 179-188,

[28] Brown, R., Minimal covers of S_n by abelian subgroups and maximal subsets of pairwise noncommuting elements, II, *J. Combin. Theory Ser. A*, **56** (1991), 285-289.

[29] Bruckheimer, M., Bryan, A. C., Muir, A., Groups which are the union of three subgroups, *Amer. Math. Monthly*, **77** (1970), 52-57.

[30] Bryce R. A., Fedri V., Serena L., Covering groups with subgroups, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **55** (1997), 469-476.

[31] Bryce, R. A. , Fedri, V., Serena, L., Subgroup coverings of some linear groups, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **60** (1999), 227-238.

[32] Bubboloni , D., Praeger, C. E., Normal coverings of finite symmetric and alternating groups, *J. Combin. Theory Ser. A*, **118** (2011), 2000-2024.

[33] Chin, A. Y. M., On non-commuting sets in an extraspecial p-group, *J. Group Theory*, **8** (2005), 189-194.

[34] Cohen J., On rings as unions of four subrings (2020), available at `arXiv: 2008.03803`.

[35] Cohn, J. H. E., On n-sum groups, *Math. Scand.*, **7** (1994), 44-58.

[36] Crestani, E., Lucchini, A., Normal coverings of soluble groups, *Arch. Math.*, **98** (2012), 13-18.

[37] Cutolo, G., Smith, H., Wiegold, J., Groups covered by conjugates of proper subgroups, *J. Algebra*, **293** (2005), 261-268.

[38] Darafsheh, M. R., Groups with the same non-commuting graph, *Discrete Appl. Math.*, **157** (2009), 833-837.

[39] Donoven C., Kappe L. C., Finite coverings of semigroups and related structures, *Int. J. Group Theory*, **12** (2023), 205-222.

[40] Fouladi, S., Orfi, R., Maximum size of subsets of pairwise non-commuting elements in finite metacyclic p-groups, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **87** (2013), 18-23.

[41] Garonzi, M., Finite groups that are the union of at most 25 proper subgroups, *J. Algebra Appl.*, **12** (2013), 1350002.

[42] Garonzi, M., Dias, M. L., Group partitions of minimal size, *J. Algebra*, **531** (2019), 1-18.

[43] Garonzi, M., Kappe, L. C. , Swartz, E., On integers that are covering numbers of groups, *Exp. Math.*, **31** (2019), 425-443.

[44] Garonzi, M., Lucchini, A., Covers and normal covers of finite groups, *J. Algebra*, **422** (2015), 148-165.

[45] Garonzi, M., Lucchini, A., Direct products of finite groups as unions of proper subgroups, *Arch. Math. (Basel)*, **95** (2010), 201-206.

[46] Garonzi, M., Maróti, A., Covering certain wreath products with proper subgroups, *J. Group Theory*, **14** (2011), 103-125.

[47] Greco, D., Sui gruppi che sono somma di quattro o cinque sottagruppi, *Rend. Accad. Sci. Fis. Math. Napoli*, **23** (1956), 49-59.

[48] Govaerts, P., Storme, L., The classification of the smallest non-trivial blocking sets in $PG(n, 2)$, *J. Combin. Theory Ser. A*, **113** (2006), 1543-1548.

[49] Haber, S., Rosenfield A., Groups as unions of proper subgroups, *Amer. Math. Monthly*, **66** (1959), 491-494.

[50] Haji, S., Jafarian Amiri, S. M., On groups covered by finitely many centralizers and domoination number of the commuting graphs, *Comm. Algebra*, **47** (2019), no. 11, 4641-4653.

[51] Holmes, P. E., Subgroup coverings of some sporadic groups, *J. Combin. Theory Ser. A*, **113** (2006), 1204-1213.

[52] Holmes, P. E., Maróti, A., Pairwise generating and covering sporadic simple groups, *J. Algebra*, **324** (2010), 25-35.

[53] Hughes, D. R., A research problem in group theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **63** (1957), 209.

[54] Hughes, D. R., Thompson, J. G., The H_p-problem and the structure of H_p-groups, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 1097-1101.

[55] Isaacs, I. M., Equally partitioned groups, *Pacific J. Math.*, **49** (1973), 109-116.

[56] Jabara, E., Lucido, M., Finite group with hall coverings, *J. Aust. Math. Soc.*, **78** (2005), 1-16.

[57] Jafarian Amiri, S. M., On minimal subgroup coverings of some affine primitive permutation groups, *J. Algebra Appl.*, **9** (2010), 985-987.

[58] Jafarian Amiri, S. M., Amiri, M., Rostami, H., Finite groups determined by the number of element centralizers, *Comm. Algebra*, **45** (2017), 3792-3797.

[59] Jafarian Amiri, S. M., Madadi, H., On the maximum number of the pairwise noncommuting elements in a finite group, *J. Algebra Appl.*, **16** (2017), no. 1, 1650197.

[60] Jafarian Amiri, S. M., Madadi, H., Rostami, H., On 9-centralizer groups, *J. Algebra Appl.*, **14** (2015), no. 1, 1550003.

[61] Jafarian Amiri, S. M., Madadi, H., Rostami, H., Groups with exactly ten centralizers, *Bull Iran. Math. Soc.*, **44** (2018), no. 5, 1163-1170.

[62] Jamali, A., Mousavi, H., A note On the σ-covers of finite soluble groups, *Algebra Colloq.*, **12** (2005), 691-697.

[63] Jamali, A., Mousavi, H., The structure of $G/\Phi(G)$ in terms of $\sigma(G)$, *Algebra Colloq.*, **13** (2006), 1-8.

[64] Kappe, L. C., Finite coverings: A journey through groups, loops, rings and semigroups, in *Contemp. Math.*,vol. 611, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, 79-88.

[65] Kappe, L. C., Finite coverings by 2-Engel groups, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **38** (1988), 141-150.

[66] Kappe, L. C., Coverings by word subgroups, *Arch. Math.*, **22** (1971), 117-127.

[67] Kappe, W., Die A-Norm einer Grnppe, *Illinois J. Math.*, **5** (1961), 187-197.

[68] Kegel, O. H., Die Nilpotenz der H_p-Gruppen, *Math. Z.*, **75** (1960), 373-376.

[69] Kegel, O. H., Nicht-einfache partitionen endlicher Gruppen, *Arch. Math.*, **13** (1962), 10-28.

[70] Khuhro, E. I., *Nilpotent Groups and their Automorhisms*, De Gruyter, Berlin, 1993.

[71] Lucido, M., On the covers of finite groups, in *Groups St. Andrews 2001 in Oxford, vol. II*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, 395-399.

[72] Lucchini, A., Detomi, E., On the structure of primitive n-sum groups, *Cubo*, **10** (2008), 195-210.

[73] Lucchini, A., Maroti, A., Rings as the union of proper subrings, *Algebr. Represent. Theory*, **15** (2012), 1035-1047.

[74] Maróti, A., Covering the symmetric groups with proper subgroups, *J. Combin. Theory Ser. A*, **110** (2005), 97-111.

[75] Mason, D. R., On coverings of a finite group by abelian subgroups, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **83** (1978), 205-209.

[76] Miller, A., Groups in which all the operators are contained in a series of subgroups such that any two have only identity in commun, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **17** (1906/1907), 446-449.

[77] Moghaddamfar, A. R., Shi, W. J., Zhou, W., Zokayi, A. R., On the noncommuting graph associated with a finite group, *Siberian Math. J.*, **46** (2005), 325-332.

[78] Mohammadlu, K., Esmkhani, M. A., Jafarian Amiri, S. M., On covering of commutative local rings (preprint).

[79] Mohammadlou, K., Esmkhani, M. A., Jafarian Amiri, S. M., On unital covers of commutative rings of small orders by proper subrings, *Mediterr. J. Math.*, **21** (2024), paper no. 217.

[80] Neumann, B. H., Groups covered by permutable subsets, *J. Lond. Math. Soc.*, **29** (1954), 236-248.

[81] Neumann, B. H., Groups covered by finitely many cosets, *Publ. Math. Debrecen*, **3** (1954), 227-242.

[82] Neumann, B. H., A problem of Paul Erdos on groups, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **21** (1976), 467-472.

[83] Neumann, B. H., Neumann, H., Neumann, Peter M., Wreath products and varieties of groups, *Math. Z.*, **80** (1962), 44-62.

[84] O'Connor, J., Robertson, E., MacTutor History of Mathematics Archive, "Reinhold Baer", available at `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Baer/`.

[85] Peruginelli, G., Werner, N., Maximal subrings and covering numbers of finite semisimple rings, *Comm. Algebra*, **46** (2018), 4724-4738.

[86] Podoski, K., Groups covered by an infinite number of Abelian subgroups, *Combinatorica*, **21** (2001), 413-416.

[87] Podoski, K., Szegedy, B., Bounds in groups with finite abelian coverings or with finite derived groups, *J. Group Theory*, **5** (2002), 443-452.

[88] Praeger, C. E., Kronecker classes of fields and covering subgroups of finite groups, *J. Austral. Math. Soc.*, **57** (1994), 17-34.

[89] Praeger, C. E., Covering subgroups of groups and Kronecker classes of fields, *J. Algebra*, **118** (1988), 455-463.

[90] Praeger, C. E., Bernhard Hermann Neumann 1909–2002, *Historical Records of Australian Science*, **21** (2010), 253-282.

[91] Pyber, L., The number of pairwise non-commuting elements and the index of the center in a finite group, *J. Lond. Math. Soc. (2)*, **35** (1987), 287-295.

[92] Rogério, J., A note on maximal coverings of groups, *Comm. Algebra*, **42** (2014), no. 10, 4498-4508.

[93] Saxl, J., On a question of W. Jehne concerning subgroup of groups and Kronecker classes of fields, *J. Lond. Math. Soc. (2)*, **38** (1988), 243-249.

[94] Scorza, G., I gruppi che possono pensarsi come somme di tre loro sottogruppi, *Boll. Un Mat. Ital.*, (1926), 216–218.

[95] Suzuki, M., On finite groups with partition, *Arch. Math.*, **7** (1961), 241-254.

[96] Swartz, E., Werner, N., The covering numbers of rings, *J. Algebra*, **639** (2024), 249-280.

[97] Swartz, E., Werner, N., Covering numbers of commutative rings, *J. Pure Appl. Algebra*, **225**(2021), 106622.

[98] Szegedy, B., Coverings of abelian groups and vector spaces, *J. Combin. Theory Ser. A*, **114** (2007), 20-34.

[99] Tomkinson, M. J., Groups covered by finitely many cosets or subgroups, *Comm. Algebra*, **15** (1987), 845-859.

[100] Tomkinson, M. J., Hypercentre-by-finite group, *Publ. Math. Debrecen*, **40** (1992), 313-321.

[101] Tomkinson, M. J., Groups as the union of proper subgroups, *Math. Scand.*, **81** (1997), 189-198.

[102] Wall G. E., On Hughes' H_p-problem, in *Internat. Conf. Theory of Groups (Canberra, 1965)*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1967, 357-362.

[103] Werner, N., Covering numbers of finite rings, *Amer. Math. Monthly*, **122** (2015), 552-566.

[104] Young, J. W., On the partition of a group and the resulting classification, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **35** (1927), 453-461.

[105] Zappa, G., Partitions and other coverings of finite groups, *Illinois J. Math.*, **47** (2003), 571-580.

سید مجید جعفریان امیری: دانشگاه زنجان، گروه ریاضی

رایانامه: `sm_jafarian@znu.ac.ir`

Mathematical Culture and Thought
Volume 43, Number 2, Fall/Winter 2024, Pages 121–146
doi: 10.30504/mct.2024.1467.2031

A Survey on Covering of a Group by Its Subgroups

S. M. Jafarian Amiri[1]

Department of Mathematics, University of Zanjan, Iran

Abstract. A cover for a given group is a finite set of its proper subgroups whose union is all of the group. In this paper we bring a history of some obtained results about the covering of groups. Also, we give some results on minimal covering, partition, covering number, and certain applications of the covering of groups.

Keywords: finite group, covering group, covering number, finite union of proper subgroups
Article history: Recieved 16 April 2024; Accepted 10 June 2024
Article type: review

1. sm_jafarian@znu.ac.ir