فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۳، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۳)، صص ۱۴۷ تا ۱۷۱

اصول متافیزیکی در منطق موجهات آزاد

اسدالله فلاحی

چکیده. منطق آزاد منطقی غیرکلاسیک است که برخی قاعده‌های سور مربوط به منطق محمول‌ها را انکار می‌کند. دربارهٔ اهمیت این منطق بسیار نگاشته‌اند اما به اهمیت آن در منطق‌های موجهات بسیار کم پرداخته شده است. در این مقاله می‌خواهم به اهمیت منطق آزاد در منطق‌های موجهات (و نیز در منطق زمان) بپردازم. در منطق موجهات کلاسیک اصول متافیزیکی فراوانی اثبات می‌شوند که از دیدگاه فلسفی مورد تردیدند، مانند فرمول‌های بارکن، بوریدان، و عکس بارکن. این فرمول‌ها در منطق موجهات آزاد معادل دو اصل متافیزیکی قوی زیر هستند: ضرورت‌گرایی و بالفعل‌گرایی. این دو اصل در منطق زمان آزاد به‌صورت اصل‌های متافیزیکی دیگری ظاهر می‌شوند: سرمدگرایی و حال‌گرایی. ازآنجاکه این اصول و فرمول‌های بارکن و بوریدان در منطق‌های «کلاسیک» موجهات و زمانْ قضیه و قابل اثبات‌اند ناگزیر در این منطق هم‌ارز و هم‌توان‌اند، اما در منطق‌های «آزاد» موجهات و زمان، نه قابل اثبات‌اند نه هم‌ارز یا هم‌توان. ازاین‌رو، می‌توان روابط و نسب آن‌ها با یکدیگر را در منطق‌های آزاد به دست آورد و نشان داد که کدام‌یک از آن‌ها دیگری را نتیجه می‌دهد و افزودن هریک از آن‌ها به‌عنوان اصلی متافیزیکی چه نتایجی در پی دارد.

۱ مقدمه

منطقِ آزاد[1] یکی از مهم‌ترین منطق‌های غیرکلاسیک است که در برخی از قواعد منطق کلاسیک محمول‌ها تردید می‌کند. این منطق در منطق موجهات[2]، منطق زمان[3]، و فلسفهٔ ریاضیات، به‌ویژه در فلسفهٔ شهودگرایی و ساخت‌گرایی ریاضیات کاربرد ویژه‌ای پیدا کرده است. ازآنجاکه در این مقاله

عبارات و کلمات کلیدی: منطق آزاد، منطق موجهات، منطق زمان، فرمول بارکن، فرمول بوریدان، عکس فرمول بارکن
نوع مقاله: پژوهشی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۷/۲۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۳/۳۱

1. free logic 2. modal logic 3. temporal logic

doi: 10.30504/mct.2024.1432.2006

به‌تفصیل به کاربرد منطق آزاد در منطق موجهات و منطق زمان خواهم پرداخت، در اینجا صرفاً اشاره‌ای کوتاه به منابعی در فلسفهٔ ریاضیات که منطق آزاد را به کار برده‌اند خواهم کرد.

در این مقاله، قصدم این است که اهمیت منطق آزاد در منطق موجهات و منطق زمان را بررسی کنم. در مقالهٔ دیگری نشان داده‌ام که منطق کلاسیک محمول‌ها و منطق آزاد محمول‌ها، به ترتیب، مناسب قضایای حقیقیه و خارجیه هستند [۸]. این امر نشان می‌دهد که منطق آزاد توانایی بیان بخشی از گزاره‌های طرح شده در منطق سینوی را دارد و این ازنظر تاریخ منطق اهمیت بسیار دارد.[۱]

در این مقاله، می‌خواهم نشان دهم که منطق آزاد در منطق معاصر نیز از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است که بسیار کم به آن توجه شده است و اینکه منطق‌های موجهات و زمان را به‌جای اینکه به منطق کلاسیک محمول‌ها بیفزاییم اگر به منطق آزاد اضافه کنیم بینش‌ها و بصیرت‌هایی به دست می‌آوریم که در منطق‌های موجهات و زمان کلاسیک به آن‌ها نمی‌توانیم برسیم.

در ادامه، پس‌از معرفی منطق آزاد، به معرفی منطق آزاد موجهات می‌پردازم و اهمیت آن را در ارتباط با فرمول‌های بارکن[۲]، بوریدان[۳]، و عکس بارکن و نیز اصول متافیزیکی ضرورت‌گرایی، امکان‌گرایی، و بالفعل‌گرایی نشان می‌دهم. در پایان (بدون پرداختن به مباحث تاریخی) اشاره کوتاهی به منطق آزاد زمان می‌کنم و اهمیت آن را در ارتباط با فرمول‌ها و اصول یاد شده خاطر نشان خواهم کرد.

منطق آزاد و ریاضیات

در برخی ساختارها و مدل‌ها برخی عبارت‌های ریاضی تعریف‌نشده یا فاقد مصداق هستند، برای نمونه تقسیم بر صفر در ساختار اعداد صحیح، ریشهٔ عدد دو در اعداد گویا، ریشهٔ زوج اعداد منفی در اعداد حقیقی، مجموعهٔ راسل با تعریف $\{x|x \notin x\}$ در مدل‌های نظریهٔ مجموعه‌ها، یا وصف خاص شامل تناقض $\iota x(Fx \,\&\, \neg Fx)$ در مدل‌های منطق مرتبهٔ اول (مقصود از نماد ι ــ حرف یونانی یوتا ــ نماد وصف خاص برتراند راسل است که برای تحلیل حرف تعریف در زبان انگلیسی وضع شده است؛ برای توضیحات بیشتر بنگرید به [۱۲، ص ۳۳۳]). ازاین‌رو، به کاربردن این عبارات ازنظر منطقی می‌تواند دشواری‌هایی پدید آورد. درنتیجه، برخی فیلسوفان ریاضی شهودگرا/ساخت‌گرا برای پرهیز از این دشواری‌ها به منطق آزاد متوسل شده‌اند. برای نمونه، وان دالن در مقالهٔ مفصل

۱. در مقالهٔ دیگری نیز نشان داده‌ام که چگونه می‌توان به منطقی واحد رسید که منطق کلاسیک محمول‌ها و منطق آزاد محمول‌ها را به گونه‌ای ترکیب کند و به منطق واحد برسد [۹].

2. Ruth Barcan Marcus 3. Jean Buridan

خود بر منطق شهودگرایی در بخش پایانی با عنوان «منطق وجود»، و ترولسترا و وان دالن در کتاب خود درآمدی به ریاضیات ساخت‌گرا در فصل دوم که راجع‌به منطق است بخش دوم آن را به «منطق با محمول وجود» اختصاص داده‌اند که قواعد استنتاجی آن همان قواعد منطق آزاد است، هرچند از به کاربردن عنوان «منطق آزاد» پرهیز کرده‌اند و به ترتیب عنوان‌های The logic of existence و E-logic را برای آن برگزیده‌اند (رک. [۳۲، ص ۳۲۷–۳۲۹] و [۳۱، ص ۵۰–۵۶]). البته این رویکرد چندان عمومیت ندارد و برای نمونه، مایکل راتجین در مقالهٔ نخست از دستنامهٔ ریاضیات ساختی که به منطق شهودگرایی اختصاص دارد اشاره‌ای به قواعد منطق آزاد نکرده است [۲۶].

همچنین برخی از فیلسوفان ریاضیات در مبحث «ضرورت یا عدم ضرورت وجود اشیای ریاضی» به لزوم استفاده از منطق آزاد اشاره کرده‌اند. برای نمونه، نیل تَنِت در مقاله‌ای با عنوان «دربارهٔ وجود ضروری اعداد» صراحتاً به نیاز به منطق آزاد تصریح کرده است [۲۸، ص ۳۱۱، ۳۱۶، ۳۱۹، ۳۳۴].[۱] در همین زمینه بنگرید به کتاب خدا و اشیای انتزاعی، سازگاری الهیات که بخشی را به منطق آزاد اختصاص داده است [۱۷، ص ۲۱۸–۲۲۴]. در این کتاب، نظرات فیلسوفان، ریاضی‌دانان، و فیلسوفان ریاضیاتی، مانند مایکل دامت[۲]، باب هیل، کریسپین رایت، جان برجس[۳]، گیدون روزن[۴]، و پیتر ون اینواگن[۵] در فصل اول و بسیاری دیگر در سایر فصل‌ها مطرح و بررسی شده است.

۲ منطق آزاد

در منطق کلاسیک محمول‌ها دو قاعدهٔ زیر را داریم:

- حذف سور کلی

$$\frac{\forall x\ B(x)}{\therefore B(a)}$$

- معرفی سور جزئی

$$\frac{B(a)}{\therefore \exists x B(x)}$$

۱. مقالهٔ تننت دربارهٔ داوری میان یک نام‌گرای ریاضی، هارتری فیلد، و دو واقع‌گرای ریاضی، کریسپین رایت و باب هیل، است؛ این دو فیلسوف اخیر در دو مقاله به نقد نظر هارتری فیلد پرداخته‌اند [۱۹، ۲۱]. هارتری فیلد اعداد را موجوداتی ممکن (به امکان خاص) می‌داند [۱۸، ۱۹، ۲۰].

2. Michael Dummett 3. John Burgess 4. Gideon Rosen 5. Peter van Inwagen

اما این دو قاعده مثال‌های نقض شگفت‌انگیزی در مورد معدومات دارند:

- حذف سور کلی

$$\frac{\text{همهٔ انسان‌ها با یک سلسلهٔ اجدادی به حضرت آدم (ع) می‌رسند}}{\text{پس سندباد با یک سلسلهٔ اجدادی به حضرت آدم (ع) می‌رسد}}$$

- معرفی سور جزئی

$$\frac{\text{رستم با دیوها جنگیده است}}{\text{پس برخی انسان‌ها با دیوها جنگیده‌اند}}$$

ازآنجاکه سندباد فرزند هیچ‌یک از انسان‌های موجود نیست، ناگزیر نَسَب به حضرت آدم (ع) نمی‌برد، و ازآنجاکه دیوها موجود نیستند هیچ انسانی با دیوها نجنگیده است.

این دو مثال نشان می‌دهد که منطق کلاسیک محمول‌ها مناسب بحث از معدومات نیست[۱]؛ اما فلسفه آکنده است از مباحث متعدد دربارهٔ عدم و معدومات. پیش‌فرض بسیاری از مباحث فلسفی این است که جهانی فرضی از معدومات وجود دارد که می‌توان آن را «عدمستان» نامید و برخی اعضای آن ممتنع بالذات هستند مانند شریک الباری و برخی ممتنع بالغیر مانند رستم، سندباد، و شرلوک هولمز، چنان‌که در میان موجوداتْ برخی واجب بالذات هستند و برخی واجب بالغیر. شمارش و استیفای همهٔ مباحث فلسفی که جهان معدومات و عدمستان فرضی را به نوعی پیش‌فرض می‌گیرند دغدغهٔ این مقاله نیست و خود یک پژوهش تاریخی همه‌جانبه و گسترده می‌طلبد. در منطق آزاد صرفاً ادعا بر این است که چنین مباحثی در فلسفه نیازمند منطقی متمایز از منطق کلاسیک محمول‌ها است و منطق آزاد مدعی این است که مباحث فلسفی مربوط به معدومات را می‌تواند به‌خوبی در بر گیرد.

در منطق آزاد، قواعد سورها به‌صورت زیر اصلاح می‌شوند.

- حذف سور کلی

$$\frac{\forall x\ B(x)}{\therefore\ E!a \to B(a)}$$

۱. این دو مثال نشان می‌دهد که منطق کلاسیک محمول‌ها مناسب بحث از معدومات نیست و اتفاقاً خود منطق‌دانان کلاسیک نیز متوجه این نکته شده و به آن تصریح کرده‌اند. برای نمونه، کواین در ویرایش دوم از کتاب \از دیدگاه منطقی شرط دال بودن ترم را برای حذف سور کلی مطرح می‌کند [۲۶، ص ۱۴۵]، هرچند او این شرط را صرفاً به‌صورت فرازبانی می‌آورد و آن را وارد زبان موضوعی نمی‌کند و قواعد و اصول منطق کلاسیک را تغییر نمی‌دهد. دربارهٔ دیدگاه‌های منطق‌دانان کلاسیک در موضوع نام‌های بدون مصداق در منطق بنگرید [۱۵، ص ۳۷۸].

• معرفی سور جزئی

$$\frac{E!a \wedge B(a)}{\therefore \exists x B(x)}$$

• معرفی سور کلی

$$\frac{E!a \to B(a)}{\therefore \forall x\ B(x)}$$

مشروط به اینکه a در فرض‌های باز و در $\forall x\ B(x)$ مورد نداشته باشد.

• حذف سور جزئی

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x\ B(x)\\ E!a\&B(a) \to C\end{array}}{\therefore\ C}$$

مشروط به اینکه a در فرض‌های باز و در $\exists x B(x)$ و در C مورد نداشته باشد.

در این قاعده‌ها، نماد $E!$ به معنای وجود است و تفاوت آن با سور وجودی $\exists$ در این است که نماد $E!$ محمول است اما سور وجودی $\exists$ محمول نیست و بر هیچ شیئی حمل نمی‌شود. به بیانی دیگر، که شاید دقیق‌تر باشد، می‌توان گفت که نماد $E!$ محمول مرتبهٔ اول است و بر اشیاء حمل می‌شود اما سور وجودی $\exists$ محمول مرتبهٔ دوم است و تنها بر محمول‌ها و مفاهیم حمل می‌شود. برای بررسی بیشتر منطق آزاد [۱۴، ۷، ۲۴] را ببینید.

۳ منطق موجهات کلاسیک

در منطق‌های موجهات کلاسیک غالباً از فرمول‌های بارکن، بوریدان، و عکس بارکن سخن گفته می‌شود [۱۲، ص ۱۸۹–۲۴۵ و ۱۱۸–۱۷۸]:

(فرمول بارکن) $$\forall x \Box Fx \to \Box \forall x Fx$$

(فرمول عکس بارکن) $$\Box \forall x Fx \to \forall x \Box F$$

(فرمول بوریدان) $$\exists x \Box Fx \to \Box \exists x Fx$$

غالباً گفته می‌شود که هرچند این فرمول‌ها توجیه منطقی ندارند و صرفاً متافیزیکی هستند [۱۳، ۷] اما در منطق موجهات «کلاسیک» به‌آسانی اثبات می‌شوند [۱۳، ۱۲]. این نشان می‌دهد

که ایرادی در این منطق کلاسیک وجود دارد و ازاین‌رو، به‌پیروی از نظام دوم کریپکی[۱]، غالباً به نظام‌های بسته روی می‌آورند تا راه را بر استنتاج این فرمول‌ها ببندند [۱۲، ۱۳]. اما نظام دوم کریپکی خود دچار این ایراد است که قابلیت بیان نام‌های خاص را ندارد و عملاً دربارهٔ معدومات نمی‌تواند سخن بگوید. ازاین‌رو، به نظر می‌رسد گریزی از روی آوردن به منطقی غیرکلاسیک (مانند منطق آزاد) وجود ندارد.

در منطق‌های موجهات کلاسیک گاهی از اصل‌های متافیزیکی «وجوب همگانی»، «وجوب همهٔ موجودات»، و «وجود همهٔ ممکنات» سخن به میان می‌آید [۲۲]:

(وجوب همگانی) $\forall x \Box \exists y\, x = y$

(وجوب همگانی) $\forall x\, \Box E!x$

(ضرورت‌گرایی: هر موجودی واجب الوجود است) $E!a \to \Box E!a$

(بالفعل‌گرایی: هر ممکن الوجودی موجود است) $\Diamond E!a \to E!a$

دو اصل اخیر را در ترجمهٔ necessitism و actualism آورده‌ام و نقیض بالفعل‌گرایی (یعنی اینکه برخی ممکن الوجودها موجود نیستند) «امکان‌گرایی»[۲] نامیده می‌شود [۱۳، ۲۵].[۳]

این مورد را هم اینجا به‌کوتاهی گزارش می‌کنم. اصل‌های «ضرورت‌گرایی» و «بالفعل‌گرایی» معادل اصل‌های متافیزیکی زیر در فلسفهٔ اسلامی هستند.

(الشیء ما لم یجب لم یوجد) $\neg \Box E!a \to \neg E!a$

(الشیء ما لم یمتنع لم یُعدَم) $\neg \Box \neg E!a \to \neg\neg E!a$

در اینجا، مقصود از «وجوب» نه صرفاً وجوب بالذات، بلکه اعم از وجوب بالذات و بالغیر (و یا شاید صرفا وجوب بالغیر) است.

برخی از اصولیان، مانند محقق نائینی، سید ابوالقاسم خوئی، و سید محمدباقر صدر قاعدهٔ

۳. در اصول بالا، مقصود از «وجوب» آیا همان «وجوب بالذات» در فلسفهٔ اسلامی است؟ یا مفهومی اعم از «وجوب بالذات» و «وجوب بالغیر» اراده شده است؟ نگارنده در آثار فلسفهٔ منطق معاصر تصریحی به این تمایز نیافته است هرچند شاید تفسیر این «وجوب» به «وجوب بالذات» محتمل‌تر به نظر برسد، اما در برخی از آثار فیلسوفان مسلمان برداشت مشابهی وجود دارد که به نظر می‌رسد در آن، «وجوب» به معنایی اعم از «بالذات» و «بالغیر» (و یا حتی به معنای «بالغیر») اراده شده است.

1. Saul Aaron Kripke 2. possibilism

«الشیء ما لم یجب لم یوجد» را مستلزم جبر و ازاین‌رو نادرست می‌دانند [۱۱]. غلامرضا فیاضی به پیروی از ایشان دلایل فلسفی چندی بر نادرستی این قاعده اقامه کرده است [۱۰] و عسکری سلیمانی امیری، که در این زمینه پیرو رأی مشهور میان فیلسوفان مسلمان است، دعاوی و دلایل فیاضی را نابسنده می‌داند و در رد آن‌ها می‌کوشد [۶].

در این مقاله، به داوری دربارهٔ این اصل‌های متافیزیکی نخواهم پرداخت؛ بلکه تلاش می‌کنم وضعیت این اصول را از دیدگاه منطق‌های کلاسیک و آزاد بررسی کنم و روابط آن‌ها را به دست بیاورم. به نظر می‌رسد شفافیت حاصل از روشن‌سازی‌های منطقی می‌تواند کمک شایانی برای پیشبرد بهتر مباحث فلسفی باشد.

۴ دلالت‌شناسی منطق موجهات آزاد

دلالت‌شناسی منطق موجهات آزاد همان دلالت‌شناسی منطق موجهات کلاسیک است با این تفاوت که دامنهٔ سخن جهان‌های ممکن یک دامنهٔ ثابت نیست بلکه هر جهان ممکن می‌تواند دامنهٔ سخنی متفاوت از دامنه‌های سخن جهان‌های دیگر داشته باشد؛ به‌اصطلاح، این دلالت‌شناسی «متغیردامنه»[۱] است نه «ثابت‌دامنه»[۲] [۱۲]. غالباً گفته می‌شود که فرمول بارکن هم‌ارز است با شرط دلالت‌شناختی «دامنه‌های انقباضی»[۳] و عکس بارکن هم‌ارز است با شرط سمانتیکی «دامنه‌های گسترشی»[۴] یا «دامنه‌های تودرتو»[۵]:

(دامنه‌های انقباضی) $$\forall w_1 \forall w_2 (Rw_1 w_2 \to D_{w_2} \subseteq D_{w_1})$$

(دامنه‌های گسترشی) $$\forall w_1 \forall w_2 (Rw_1 w_2 \to D_{w_1} \subseteq D_{w_2})$$

برای نمونه، رک. [۱۲، ۲۳]. چنان‌که جیمز گارسن نشان داده است ادعای نخست (هم‌ارزی فرمول بارکن با شرط «دامنه‌های انقباضی») نادرست است [۲۲، ۲۳]. البته مدل نقضی که گارسن ارائه کرده است [۲۲، ص ۶۴۳] بسیار پیچیده است و ازاین‌رو، مدل نقض دیگری (مدل N در بخش ۵.۴) ارائه خواهم کرد که مدعای گارسن را با سادگی بیشتری اثبات خواهد کرد.

۵ احکامی در منطق موجهات آزاد

منطق‌های موجهات آزاد، چنان‌که از نامشان پیدا است، ترکیب منطق‌های موجهات گزاره‌ای با منطق

1. variable domain 2. fixed domain 3. contracting domains 4. expanding domains 5. nested domains

آزاد محمول‌ها هستند. در این مقاله، می‌خواهم نشان دهم که در (بیشتر) منطق‌های آزاد موجهات، حکم‌های مهم و نابدیهی زیر را می‌توان اثبات کرد:

(۱) اثبات‌ناپذیری فرمول‌های بارکن، بوریدان، و عکس بارکن؛

(۲) هم‌توانی فرمول‌های بوریدان و عکس بارکن؛

(۳) هم‌توانی فرمول بوریدان با اصل متافیزیکی «وجوب همهٔ موجودات»؛

(۴) هم‌توانی فرمول بارکن با اصل متافیزیکی «وجود همهٔ ممکنات» (با فرض داشتن اصل B)؛

(۵) ضعیف‌تر بودن فرمول بارکن از اصل متافیزیکی «وجود همهٔ ممکنات» (حتی بدون اصل B)؛

(۶) هم‌توانی فرمول‌های بارکن، بوریدان و عکس بارکن (با فرض داشتن اصل B).

مقصود از «هم‌توانی» در عبارت‌های بالا رابطه‌ای ضعیف‌تر از «هم‌ارزی» است. دو فرمول در یک منطق هم‌توان هستند اگر افزودن هریک از آن دو فرمول به آن منطق (به‌عنوان اصل موضوع) فرمول دیگر را اثبات کند. هر دو فرمولِ هم‌ارز البته هم‌توان هم هستند اما عکس آن لزوماً صادق نیست. برای نمونه، اگر متغیر p را به‌عنوان اصل موضوع به یک منطق بیفزاییم، به کمک قاعدهٔ جانشینی، متغیر q نیز اثبات می‌شود، اما این دو متغیر در آن منطق (پیش از افزودن اصل موضوع جدید) هم‌ارز نبودند؛ با وجود این می‌گوییم که هر دو متغیر در آن منطق هم‌توان هستند.

حکم‌های بالا نشان می‌دهند که فرمول‌های بارکن، بوریدان، و عکس بارکن احکامی متافیزیکی و نه منطقی هستند و نشان دادن این مطلب در منطق موجهات کلاسیک ممکن نبوده است.

۱.۵ اثبات‌ناپذیری فرمول‌های بارکن، بوریدان، و عکس بارکن

نشان می‌دهم که هیچ یک از فرمول‌های بارکن، بوریدان و عکس بارکن در منطق موجهات آزاد اثبات نمی‌شوند:

(فرمول بارکن) $$\forall x \Box Fx \to \Box \forall x Fx$$

(فرمول بوریدان) $$\exists x \Box Fx \to \Box \exists x Fx$$

(فرمول عکس بارکن) $$\Box \forall x Fx \to \forall x \Box Fx$$

مدل M

برای نشان دادن اثبات‌ناپذیری فرمول‌های بارکن، بوریدان، و عکس بارکن، مدل دوجهانی M در

دلالت‌شناسی لایب‌نیتس را در نظر بگیرید که a در یک جهان و b در جهان دیگر موجود باشد:

$w_۱$	$E!a$	$E!b$		$E!a$	$E!b$	$w_۲$
	۱	۰		۰	۱	

همهٔ فرمول‌های اتمی دیگر را در هر دو جهان کاذب در نظر می‌گیریم. آشکار است که در این مدل، هیچ‌یک از فرمول‌های «وجوب همهٔ موجودات» و «وجود همهٔ ممکنات» صادق نیست.

کذب فرمول بارکن در مدل M

برای نشان دادن اینکه «فرمول بارکن» در این مدل نامعتبر است نشان می‌دهم که نمونه‌جانشین زیر در جهان $w_۱$ کاذب است:

$$\forall x\Box(E!x \to E!a) \to \Box\forall x(E!x \to E!a) \qquad \text{(فرمول بارکن)}$$

در هر جهان از مدل M که a در آن وجود داشته باشد a در آن جهان وجود دارد یعنی راستگوهای زیر را داریم:

$$w_۱ \vDash (E!a \to E!a), \qquad w_۲ \vDash (E!a \to E!a)$$

بنابراین $w_۱ \vDash \Box(E!a \to E!a)$. اما در جهان $w_۱$ فقط a وجود دارد و بنابراین سور کلی $w_۱ \vDash \forall x\Box(E!x \to E!a)$ در این جهان صادق است. پس، مقدم فرمول بارکن در جهان $w_۱$ صادق است. اما تالی فرمول بارکن در هر دو جهان کاذب است زیرا در جهان $w_۲$ داریم $w_۲ \vDash E!b \wedge \neg E!a$. بنابراین $w_۲ \vDash \neg(E!b \to E!a)$. اما در جهان $w_۲$ عضو b وجود دارد؛ بنابراین $w_۲ \vDash \exists x\neg(E!x \to E!a)$. درنتیجه

$$w_۲ \vDash \neg\forall x(E!x \to E!a), \qquad w_۱ \vDash \neg\Box\forall x(E!x \to E!a).$$

کذب فرمول بوریدان در مدل M

برای نشان دادن اینکه «فرمول بوریدان» در مدل M نامعتبر است نشان می‌دهم که نمونه‌جانشین زیر در جهان $w_۱$ کاذب است

$$\exists x\Box(E!x \to E!a) \to \Box\exists x(E!x \to E!a) \qquad \text{(فرمول بوریدان)}$$

صدق مقدم این فرمول از صدق فرمول $w_۱ \vDash \Box(E!a \to E!a)$ و اینکه a در $w_۱$ وجود دارد

به‌آسانی به دست می‌آید. کذب تالی از اینجا به دست می‌آید که در w_2 داریم $w_2 \vDash E!b \wedge \neg E!a$. بنابراین $w_2 \vDash \neg(E!b \rightarrow E!a)$. اما در جهان w_2 فقط b وجود دارد؛ بنابراین $w_2 \vDash \forall x \neg(E!x \rightarrow E!a)$. درنتیجه

$$w_2 \vDash \neg\exists x(E!x \rightarrow E!a), \qquad w_1 \vDash \neg\Box\exists x(E!x \rightarrow E!a).$$

کذب عکس بارکن در مدل $\mathbf{M}$

برای نشان دادن اینکه «عکس بارکن» در مدل $\mathbf{M}$ نامعتبر است نشان می‌دهم که نمونه‌جانشین زیر در جهان w_1 کاذب است

(فرمول عکس بارکن) $\Box\forall x E!x \rightarrow \forall x\Box E!x$.

آشکار است که مقدم در هر دو جهان صادق و تالی در هر دو جهان کاذب است.

۲.۵ هم‌توانی فرمول‌های بوریدان و عکس بارکن

نشان می‌دهم که افزودن هر یک از دو فرمول زیر به منطق موجهات آزاد به عنوان اصل موضوع سبب اثبات‌پذیری دیگری می‌شود:

(فرمول بوریدان) $\exists x\Box Fx \rightarrow \Box\exists x Fx$

(فرمول عکس بارکن) $\Box\forall x Fx \rightarrow \forall x\Box Fx$

اثبات از بوریدان به عکس بارکن

برای اثبات عکس بارکن معادل آن را اثبات می‌کنم:

(فرمول عکس بارکن) $\exists x\Diamond Fx \rightarrow \Diamond\exists x Fx$

۱	۱.	$\exists x\, \Diamond Fx$	مقدمه
۲	۲.	$E!a \wedge \Diamond Fa$	فرض
۲	۳.	$E!a$	۲، حذف عاطف
۲	۴.	$\Diamond Fa$	۲، حذف عاطف
	۵.	$Fa \rightarrow Fa$	معرفی قضیه

۵، معرفی ضرورت	$\Box(Fa \to Fa)$	۶.	
۳ و۶، معرفی $\exists$	$\exists x\Box(Fa \to Fx)$	۷.	۲
۷، بوریدان	$\Box\exists x(Fa \to Fx)$	۸.	۲
۸، ورود سور	$\Box(Fa \to \exists xFx)$	۹.	۲
۴و۹، معرفی عاطف	$\Diamond Fa \wedge \Box(Fa \to \exists xFx)$	۱۰.	۲
۱۰، قاعدهٔ منطق K	$\Diamond(Fa \wedge (Fa \to \exists xFx))$	۱۱.	۲
۱۱، وضع مقدم	$\Diamond\exists x\ Fx$	۱۲.	۲
۱و۲و۱۲، حذف $\exists$	$\Diamond\exists x\ Fx$	۱۳.	۱

در منطق موجهات کلاسیک می‌توانستیم بدون کمک «بوریدان» مستقیماً از سطر ۴ به سطر ۱۲ برسیم، زیرا در منطق کلاسیک محمول‌ها، Fa مستلزم $\exists x\ Fx$ بود اما در منطق آزاد محمول‌ها مستلزم آن نیست و ناگزیر از کمک گرفتن از «بوریدان» و تن دادن به اثبات طولانی بالا هستیم.

اثبات از عکس بارکن به بوریدان

مقدمه	$\exists x\ \Box Fx$	۱.	۱
قضیهٔ منطق آزاد	$\forall x\ (Fx \to \exists yFy)$	۲.	
۲، معرفی ضرورت	$\Box\forall x\ (Fx \to \exists yFy)$	۳.	
۳، عکس بارکن	$\forall x\ \Box(Fx \to \exists yFy)$	۴.	
۱و۴، معرفی عاطف	$\exists x\ \Box Fx \wedge \forall x\ \Box(Fx \to \exists yFy)$	۵.	۱
۵، قاعدهٔ منطق آزاد	$\exists x\ [\Box Fx \wedge \Box(Fx \to \exists yFy)]$	۶.	۱
۶، قاعدهٔ منطق K	$\exists x\ \Box[Fx \wedge (Fx \to \exists yFy)]$	۷.	۱
۷، وضع مقدم	$\exists x\ \Box(Fx \wedge \exists yFy)$	۸.	۱
۸، قاعدهٔ منطق K	$\exists x\ (\Box Fx \wedge \Box\exists yFy)$	۹.	۱
۹، قاعدهٔ منطق آزاد	$\exists x\ \Box Fx \wedge \Box\exists yFy$	۱۰.	۱
۱۰، حذف عاطف	$\Box\exists y\ Fy$	۱۱.	۱
۱۱، تغییر متغیر	$\Box\exists x\ Fx$	۱۲.	۱

در منطق موجهات کلاسیک نیز می‌توانستیم بدون کمک «عکس بارکن» مستقیماً از سطر ۱ به سطر ۸ برسیم زیرا در منطق کلاسیک محمول‌ها، Fx و $Fx \wedge \exists yFy$ هم‌ارزند، زیرا فرمول $Fx \to \exists yFy$ در آن منطق قابل اثبات است. اما در منطق آزاد محمول‌ها به‌دلیل اثبات‌ناپذیری فرمول شرطی اخیر، هم‌ارزی یادشده نیز برقرار نیست و ناگزیر از کمک گرفتن از «عکس بارکن» و تن دادن به اثبات طولانی بالا هستیم. در اینجا ناگزیر شدیم به‌جای شرطی یادشده، از صورت کلی آن $\forall x\ (Fx \to \exists yFy)$ در سطر ۲ استفاده کنیم. اما استفاده از این صورت سوردار در دامنهٔ نماد

□ بدون «عکس بارکن» امکان‌پذیر نبود.

۳.۵ هم‌توانی فرمول عکس بارکن با «وجوب همهٔ موجودات»

سه فرمول زیر را در نظر بگیرید

(فرمول عکس بارکن)	$\exists x\, \Diamond Fx \to \Diamond \exists x\, Fx$
(فرمول عکس بارکن)	$\Box \forall x\, Fx \to \forall x\, \Box Fx$
(هر موجودی واجب الوجود است)	$E!a \to \Box E!a$

برای اثبات از عکس بارکن به وجوب همهٔ موجودات داریم

۱.	$E!a \to E!a$	قضیه
۲.	$\forall x\, E!x$	۱، معرفی $\forall$
۳.	$\Box \forall x\, E!x$	۲، معرفی ضرورت
۴.	$\forall x\, \Box E!x$	۳، عکس بارکن
۵.	$E!a \to \Box E!a$	۴، حذف $\forall$

و برای اثبات از وجوب همهٔ موجودات به عکس بارکن داریم

۱	۱.	$\exists x\, \Diamond Fx$	مقدمه
۲	۲.	$E!a \wedge \Diamond Fa$	فرض
۲	۳.	$\Box E!a \wedge \Diamond Fa$	۲، وجوب همهٔ موجودات
۲	۴.	$\Diamond (E!a \wedge Fa)$	۳، قاعدهٔ منطق K
۲	۵.	$\Diamond \exists x\, Fx$	۴، معرفی $\exists$
۱	۶.	$\Diamond \exists x\, Fx$	۱و۲و۵، حذف $\exists$

از اینجا به‌سادگی هم‌توانی فرمول بوریدان با اصل متافیزیکی «وجوب همهٔ موجودات» نیز به دست می‌آید.

۴.۵ ضعیف‌تر بودن فرمول بارکن از «وجود همهٔ ممکنات»

دو فرمول زیر را در نظر بگیرید

(فرمول بارکن)	$\forall x\, \Box Fx \to \Box \forall x\, Fx$
(هر ممکن الوجودی موجود است)	$\Diamond E!a \to E!a$

نشان می‌دهم که هرچند «وجود همهٔ ممکنات» می‌تواند «فرمول بارکن» را نتیجه دهد اما عکس آن ممکن نیست، مگر اینکه نظام استنتاجی منطق موجهات شامل اصل B باشد یا زبان منطق شامل ادات این‌همانی و یک اصل موضوع مهم برای آن باشد. اثبات «فرمول بارکن» از «وجود همهٔ ممکنات» به صورت زیر انجام می‌شود.

۱	۱.	$\forall x\, \Box Fx$	مقدمه
۱	۲.	$E!a \rightarrow \Box Fa$	۱، حذف $\forall$
۱	۳.	$\Diamond E!a \rightarrow E!a$	وجود همهٔ ممکنات
۱	۴.	$\Diamond E!a \rightarrow \Box Fa$	۲و۳، قیاس شرطی
۱	۵.	$\Box(E!a \rightarrow Fa)$	۴، قاعدهٔ منطق K
۱	۶.	$\Box\forall x\, Fx$	۵، معرفی$\forall$

مدل N

برای نشان دادن اثبات‌ناپذیری «وجود همهٔ ممکنات» از «فرمول بارکن» در زبانِ فاقدِ نمادِ این‌همانی، مدل دوجهانی انعکاسی، متعدی، و غیرمتقارن N را در دلالت‌شناسی کریپکی در نظر بگیرید که شامل جهان‌های w_1 و w_2 باشد به‌طوری که جهان w_1 فقط شامل عضو a و جهان w_2 تنها شامل عضوهای a و b باشد:

$$w_1 \ \boxed{\begin{array}{cc} E!a & E!b \\ 1 & 0 \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{cc} E!a & E!b \\ 1 & 1 \end{array}} \ w_2$$

همهٔ فرمول‌های اتمی دیگر در w_1 را به‌دلخواه ارزش‌دهی می‌کنیم و در w_2 صادق در نظر می‌گیریم.

آشکار است که در این مدل، فرمول «وجوب همهٔ موجودات» صادق اما «وجود همهٔ ممکنات» کاذب است. «فرمول بارکن» در w_2 آشکارا صادق است چون این جهان فقط خودش را می‌بیند. برای نشان دادن اینکه «فرمول بارکن» در w_1 نیز صادق است، توجه کنید که در w_2 هیچ تمایزی میان عضوهای a و b نیست به این معنی که هر فرمول صادق برای یکی برای دیگری هم صادق است. اکنون نشان می‌دهم که فرمول بارکن در w_1 از مدل N صادق است.

$$\forall x\, \Box Fx \rightarrow \Box\forall x\, Fx \qquad \text{(فرمول بارکن)}$$

اگر $\forall x\, \Box Fx \rightarrow \Box\forall x\, Fx$ در w_1 کاذب باشد $\forall x\, \Box Fx$ در آن صادق و $\Box\forall x\, Fx$ کاذب خواهد بود. در این صورت، بنابه صدق $\forall x\, \Box Fx$ در w_1 و به دلیل اینکه در w_1 فقط a وجود دارد $\Box Fa$ در w_1 و خود Fa در هر دو جهان w_1 و w_2 صادق خواهد شد.

ازسوی‌دیگر، بنابه کذب $\Box\forall x\ Fx$ در w_1، در یک جهان فرمول $\forall x\ Fx$ کاذب خواهد شد. این جهان نمی‌تواند w_1 باشد چون در این جهان فقط a وجود دارد و دیدیم که Fa در این جهان صادق است. ناگزیر، فرمول $\forall x\ Fx$ در w_2 کاذب می‌شود. ازآنجاکه در w_2 فرمول Fa صادق است ناگزیر Fb در w_2 کاذب خواهد شد. بنابراین، Fa در w_1 صادق و Fb در w_2 کاذب است. اما این خلاف هم‌ارزی فرمول‌های صادق بر a و b در w_2 است.

۶ احکامی در منطق موجهات آزاد با اصل B

اکنون نشان می‌دهم که اگر اصل B را در منطق‌مان داشته باشیم،

$$A \to \Box\Diamond A, \qquad \Diamond\Box A \to A,$$

آنگاه فرمول‌های بارکن و بوریدان (و عکس بارکن) «وجوب همهٔ موجودات» و «وجود همهٔ ممکنات» همگی هم‌توان می‌شوند و دیگر هیچ تمایزی میان آن‌ها وجود نخواهد داشت! این نشان می‌دهد که در منطق S۵، که مورد علاقهٔ بیشتر فیلسوفان است، میان این فرمول‌ها و اصول متافیزیکی تمایز چشم‌گیری وجود ندارد و مثلا «ضرورت‌گرایی» و «بالفعل‌گرایی» دو روی یک سکه هستند و نمی‌توان یکی را پذیرفت و دیگری را انکار کرد.

۱.۶ هم‌توانی فرمول‌های بارکن و بوریدان

اثبات فرمول بوریدان به کمک فرمول بارکن به شرح زیر است.

۱	۱.	$\Diamond\forall x\ Fx$	مقدمه
۱	۲.	$\Diamond\forall x\ \Box\Diamond Fx$	۱، اصل B
۱	۳.	$\Diamond\Box\forall x\ \Diamond Fx$	۲، فرمول بارکن
۱	۴.	$\forall x\ \Diamond Fx$	۳، اصل B
	۵.	$\Diamond\forall x\ Fx \to \forall x\ \Diamond Fx$	۴، دلیل شرطی

اثبات فرمول بارکن به کمک فرمول بوریدان نیز به صورت زیر انجام می‌شود.

۱	۱.	$\Diamond\exists x\ Fx$	مقدمه
۱	۲.	$\Diamond\exists x\ \Box\Diamond Fx$	۱، اصل B
۱	۳.	$\Diamond\Box\exists x\ \Diamond Fx$	۲، فرمول بوریدان
۱	۴.	$\exists x\ \Diamond Fx$	۳، اصل B
	۵.	$\Diamond\exists x\ Fx \to \exists x\ \Diamond Fx$	۴، دلیل شرطی

۲.۶ هم‌توانی «وجوب همهٔ موجودات» و «وجود همهٔ ممکنات»

در منطق‌های موجهات با اصل B، «وجوب همهٔ موجودات» هم‌توان با «وجود همهٔ ممکنات» است به این معنی که هریک را به‌عنوان اصل موضوع به این منطق‌ها بیفزاییم دیگری را می‌توانیم اثبات کنیم. ابتدا «وجوب همهٔ موجودات» را اصل موضوع می‌گیریم و داریم

۱.	$E!a \to \Box E!a$	اصل موضوع
۲.	$\Box(E!a \to \Box E!a)$	۱، قاعدهٔ ضرورت
۳.	$\Diamond E!a \to \Diamond\Box E!a$	۲، قاعدهٔ منطق K
۴.	$\Diamond\Box E!a \to E!a$	۳، اصل B
۵.	$\Diamond E!a \to E!a$	۳و۴، قیاس شرطی

حالا «وجود همهٔ ممکنات» را اصل موضوع می‌گیریم و داریم

۱.	$\Diamond E!a \to E!a$	اصل موضوع
۲.	$\Box(\Diamond E!a \to E!a)$	۱، قاعدهٔ ضرورت
۳.	$\Box\Diamond E!a \to \Box E!a$	۲، قاعدهٔ منطق K
۴.	$E!a \to \Box\Diamond E!a$	۳، اصل B
۵.	$E!a \to \Box E!a$	۳و۴، قیاس شرطی

۳.۶ هم‌توانی فرمول‌های سه‌گانه و اصل‌های دوگانه

از دو حکم گذشته (به همراه حکم‌هایی که در بخش قبل مطرح شد) به‌سادگی نتیجه می‌شود که در منطق‌های موجهات با اصل B، فرمول‌های بارکن، بوریدان، و عکس بارکن و نیز اصل‌های متافیزیکی ضرورت‌گرایی و بالفعل‌گرایی هم‌توان هستند به این معنی که هریک را به‌عنوان اصل موضوع به این منطق‌ها بیفزاییم دو فرمول دیگر را می‌توانیم اثبات کنیم. کسانی که میان این اصول تمایز قائل می‌شوند و یکی را می‌پذیرند و دیگری را رد می‌کنند ناگزیر یا باید منطقی ضعیف‌تر از منطق آزاد را بپذیرند یا باید اصل B را کنار بگذارند و منطق S۵ را تضعیف کنند.

۷ منطق موجهات آزاد با این‌همانی

بدون اصل B هم می‌توان از فرمول بارکن به «وجود همهٔ ممکنات» رسید. نشان می‌دهم که اگر این‌همانی را به زبان بیفزاییم و اصل موضوع «$\Diamond a = b \to a = b$» (حذف امکان این‌همانی) یا معادل آن «$a \neq b \to \Box a \neq b$» (ضرورت نااین‌همانی) را بپذیریم آنگاه می‌توانیم به کمک «فرمول

بارکن» به «وجود همهٔ ممکنات» برسیم و هم‌توانی این دو اصل متافیزیکی را اثبات کنیم. پیش‌از آن، نشان می‌دهم که با داشتن این‌همانی در منطق آزاد محمول‌ها می‌توانیم وجود را با این‌همانی و سور جزئی تعریف کنیم.

برای هم‌ارزی وجود با این‌همانی و سور جزئی می‌توان نوشت

۱	۱.	$E!a$	مقدمه
	۲.	$a = a$	معرفی این‌همانی
۱	۳.	$E!a \wedge a = a$	۱ و ۲، معرفی عاطف
۱	۴.	$\exists x\ x = a$	۳، معرفی $\exists$

و همچنین

۱	۱.	$\exists x\ x = a$	مقدمه
۲	۲.	$E!b \wedge b = a$	فرض
۲	۳.	$E!a$	۲، حذف این همانی
۱	۴.	$E!a$	۱و۲و۳، حذف $\exists$

اکنون که دیدیم محمول وجود را می‌توان با سور جزئی و این‌همانی در منطق آزاد تعریف کرد، به‌کمک اصل موضوع «حذف امکان این‌همانی» و «فرمول بارکن» به اثبات «وجود همهٔ ممکنات» بپردازیم.

۱.۷ هم‌توانی فرمول بارکن و «وجود همهٔ ممکنات»

برای اثبات این هم‌توانی کافی است به‌کمک دو اصل

(فرمول بارکن) $$\forall x\ \Box Fx \to \Box \forall x\ Fx$$

(حذف امکان این‌همانی) $$\Diamond a = b \to a = b$$

اصل «$\Diamond E!a \to E!a$» (هر ممکن الوجودی موجود است) را اثبات کنیم. برای این کار چنین استدلال می‌کنیم

۱.	$E!a$	مقدمه
۲.	$\Diamond \exists x\ x = a$	۱، تعریف وجود
۳.	$\exists x\ \Diamond x = a$	۲، فرمول بارکن
۴.	$\exists x\ x = a$	۳، حذف امکان این‌همانی
۵.	$E!a$	۴، تعریف وجود

البته اثبات «وجود همهٔ ممکنات» به کمک اصل «حذف امکان این‌همانی» به دلیل شباهت نحوی بسیار بالای آنها شائبهٔ «مصادره به مطلوب» را دامن می‌زند که نگارنده پاسخی به آن ندارد.

۸ منطق زمان

منطق زمان را می‌توان شاخه‌ای از منطق موجهات دانست که جهت‌های «ضرورت» و «امکان» را به‌صورت زمانی تفسیر می‌کند یعنی آن دو را به معنای «دوام» و «فعلیت» می‌گیرد، یعنی «همیشه»[1] و «گاهی»[2]. در این منطق می‌توان نمادهای A و S را به معنای «همیشه» و «گاهی» به کار برد: اگر گزارهٔ «باران می‌بارد» را با q نشان دهیم گزاره‌های «همیشه باران می‌بارد» و «گاهی باران می‌بارد» را، به‌جای $\Box q$ و $\Diamond q$ با عبارات Aq و Sq نشان می‌دهند:

$$\text{همیشه باران می‌بارد} = Aq، \qquad \text{گاهی باران می‌بارد} = Sq.$$

اصولی که برای نمادهای A و S برقرار است شبیه اصول منطق S5 است و از این جهت تفاوت چندانی با منطق موجهات S5 ندارد.

۱.۸ منطق زمان $\mathrm{K_t}$

کاربرد نمادهای A و S در منطق زمان بسیار نادر است. در عوض، در شناخته‌ترین منطق زمان، که $\mathrm{K_t}$ نام دارد، نمادهای F و P به معنای «آینده» و «گذشته»، یا دقیق‌تر، به معنای «گاهی در آینده» و «گاهی در گذشته» به کار می‌روند. اگر گزارهٔ «باران می‌بارد» را با q نشان دهیم، گزاره‌های «باران بارید» و «باران خواهد بارید» را با Pq و Fq نشان می‌دهند:

$$\text{باران بارید} = Pq ، \qquad \text{باران خواهد بارید} = Fq.$$

همچنین، نمادهای G و H را به ترتیب به معنای «همیشه در آینده» و «همیشه در گذشته» به کار می‌برند. با قرارداد یادشده اگر گزارهٔ «باران می‌بارد» را با q نشان دهیم، گزاره‌های «همیشه باران می‌بارید» و «همیشه باران خواهد بارید» را با Hq و Gq نشان می‌دهند:

$$\text{همیشه باران می‌بارید} = Hq، \qquad \text{همیشه باران خواهد بارید} = Gq.$$

برای ادات‌های G و H در منطق $\mathrm{K_t}$ همان اصول و قواعد منطق موجهات K را داریم:

1. sometimes 2. always

$$\vdash q \to\ \vdash Gq, \qquad \vdash q \to\ \vdash Hq$$

$$G(q \to r) \to (Gq \to Gr), \qquad H(q \to r) \to (Hq \to Hr)$$

به همراه دو اصل ترکیبی

$$q \to GPq, \qquad q \to HFq$$

که معادل اصل‌های

$$PGq \to q, \qquad FHq \to q$$

هستند. برای بررسی بیشتر منطق زمان $\mathrm{K_t}$ و منطق‌های مرتبط، فصل اول از [۱۴]، فصل هفتم از [۷]، و [۲۷] را ببینید.

۲.۸ منطق زمان آزاد

اگر منطق زمان $\mathrm{K_t}$ را به منطق آزاد محمول‌ها بیفزاییم به «منطق زمان آزاد»[۱] می‌رسیم. در این منطق، هیچ‌یک از نظیرهای فرمول‌های بارکن، بوریدان، و عکس بارکن قابل اثبات نیستند. برای ادات زمان آینده، G، این فرمول‌ها به‌صورت زیر در می‌آیند

(فرمول بارکن) $\forall x\ GAx \to G\forall x\ Ax$

(فرمول عکس بارکن) $G\forall x\ Ax \to \forall x\ GAx$

(فرمول بوریدان) $\exists x\ GAx \to G\exists x\ Ax$

و برای ادات زمان گذشته، H، به‌صورت زیرند

(فرمول بارکن) $\forall x\ HAx \to H\forall x\ Ax$

(فرمول عکس بارکن) $H\forall x\ Ax \to \forall x\ HAx$

(فرمول بوریدان) $\exists x\ HAx \to H\exists x\ Ax$

همچنین، اصل‌های متافیزیکی «وجوب همهٔ موجودات» و «وجود همهٔ ممکنات» به‌صورت زیر تبدیل می‌شوند

(۱) (ابدگرایی) هر موجودی ابدی است: $E!a \to GE!a$ (هر موجودی در حال، دائم الوجود در آینده خواهد بود)؛

1. temporal free logic

(۲) (ازل‌گرایی) هر موجودی ازلی است: $E!a \to HE!a$ (هر موجودی در حال، دائم الوجود در گذشته بوده است)؛

(۳) (حال‌گرایی دربارهٔ آیندگان): $FE!a \to E!a$ (هر موجودی در آینده موجود در حال است)؛

(۴) (حال‌گرایی دربارهٔ گذشتگان): $PE!a \to E!a$ (هر موجودی در گذشته موجود در حال است).

مجموع «ابدگرایی» و «ازل‌گرایی» را «سرمدگرایی»[1] می‌نامند. برای سابقهٔ این مباحث در فلسفهٔ اسلامی بنگرید به [۱، ۲، ۳، ۴، ۵].

در منطق زمان آزاد، فرمول بارکن آینده، بوریدان گذشته، عکس بارکن گذشته، و ازل‌گرایی همگی هم‌ارز هستند با شرط دلالت‌شناختی «دامنه‌های انقباضی» و فرمول بارکن گذشته، بوریدان آینده، عکس بارکن آینده، و ابدگرایی همگی هم‌ارز هستند با شرط دلالت‌شناختی «دامنه‌های گسترشی» یا «دامنه‌های تودرتو»:

(دامنه‌های انقباضی) $$\forall t_۱ \forall t_۲ (t_۱ < t_۲ \to D_{t_۲} \subseteq D_{t_۱})$$

(دامنه‌های گسترشی) $$\forall t_۱ \forall t_۲ (t_۱ < t_۲ \to D_{t_۱} \subseteq D_{t_۲})$$

با این توضیح، آشکار می‌شود که ابدگرایی بسیار نزدیک است به اصل متافیزیکی مطرح در «نظریهٔ بلوک افزایشی»[2] در فلسفهٔ زمان که می‌گوید گذشته و حال واقعی هستند ولی آینده غیرواقعی است و گذشتِ زمان همواره اشیای جدیدی را پدید می‌آورد اما هیچ شیء پدیدآمده بر اثر گذشتِ زمان از میان نمی‌رود. به‌همین‌دلیل، در این نظریه مجموعهٔ موجوداتْ در حال رشد و افزایش است و هرگز کاستی نمی‌پذیرد.[۳] در ابدگرایی خود یک شیء (مثلاً نفس انسانی) تا ابد موجود است ولی در حال‌گرایی خودِ امر گذشته در حال و آینده موجود نیست بلکه مثلاً آثار آن در زمان حال و آینده موجود است. پس این دو دیدگاه لزوماً معادل هم نیستند. چون اگر معادل هم بودند خودِ امر گذشته می‌باید در زمان حال و نیز در زمان آینده موجود می‌بود. خلاصه اینکه اگر در منطقی هم‌ارزی بین

---

۳. باید توجه داشت که ابدگرایی دقیقاً همان نظریهٔ بلوک افزایشی نیست. بلوک افزایشی زمان صرفاً می‌گوید گذشته در ظرف گذشته موجود است و از بین نرفته است ولی آینده معدوم است. با این توضیح مثلاً دایناسورها در ظرف گذشته موجودند ولی در زمان حال و زمان آینده موجود نیستند. پس روشن است که دایناسورها به این معنا ابدی نیستند. بنابراین ابدگرایی غیر از بلوک افزایشی زمان است. ابدگرایی با حال‌گرایی نیز قابل جمع است. مثلاً ممکن است یک حال‌گرا معتقد به جاودانگی نفس انسانی باشد. پس او ابدگرایی در مورد نفس انسانی را می‌پذیرد ولی با این همه اعتقادی به بلوک افزایشی زمان ندارد.

1. eternalism 2. growing block theory

ابدگرایی و بلوک افزایشی زمان یا بین ابدگرایی و حال‌گرایی دربارهٔ گذشتگان اثبات شود این نشانگر عیب و نقص آن منطق است و ازاین‌رو نمی‌توان به‌سادگی از چنین منطقی دفاع کرد.

در ادامه، نشان می‌دهم که در منطق زمان آزاد حکم‌های مهم و نابدیهی زیر را می‌توان اثبات کرد.

(۱) هم‌توانی فرمول‌های بارکن گذشته و بوریدان آینده؛
(۲) هم‌توانی فرمول‌های بارکن آینده و بوریدان گذشته؛
(۳) هم‌توانی فرمول بارکن با اصل‌های متافیزیکی ازل‌گرایی و حال‌گرایی دربارهٔ گذشتگان (یا «فناناپذیری موجودات کنونی» و «حضور گذشتگان در زمان حال»)؛
(۴) هم‌توانی فرمول بوریدان با اصل‌های متافیزیکی ابدگرایی و حال‌گرایی دربارهٔ آیندگان (یا «قدیم بودن موجودات کنونی» و «حضور آیندگان در زمان حال»).

۳.۸ هم‌توانی ابدگرایی با حال‌گرایی (دربارهٔ گذشتگان)

در منطق $\mathrm{K_t}$ ابدگرایی هم‌توان با حال‌گرایی (دربارهٔ گذشتگان) است چنان‌که ازل‌گرایی هم‌توان با حال‌گرایی (دربارهٔ آیندگان)، به این معنی که هریک را به‌عنوان اصل موضوع به منطق $\mathrm{K_t}$ بیفزاییم دیگری را می‌توانیم اثبات کنیم. برای نمونه، هم‌توانی ابدگرایی با حال‌گرایی (برای گذشتگان) را اثبات می‌کنم.

۱.	$E!a \to GE!a$	اصل موضوع
۲.	$H(E!a \to GE!a)$	۱، قاعدهٔ ضرورت گذشته
۳.	$PE!a \to PGE!a$	۲، قاعدهٔ منطق $\mathrm{K_t}$
۴.	$PGE!a \to E!a$	۳، اصل منطق $\mathrm{K_t}$
۵.	$PE!a \to E!a$	۳و۴، قیاس شرطی

و برای طرف دیگر این هم‌توانی داریم

۱.	$PE!a \to E!a$	اصل موضوع
۲.	$G(PE!a \to E!a)$	۱، قاعدهٔ ضرورت گذشته
۳.	$GPE!a \to GE!a$	۲، قاعدهٔ منطق $\mathrm{K_t}$
۴.	$E!a \to GPE!a$	۳، اصل منطق $\mathrm{K_t}$
۵.	$E!a \to GE!a$	۳و۴، قیاس شرطی

اثبات هم‌توانی ازل‌گرایی با حال‌گرایی (برای آیندگان) به همین صورت است و به خواننده واگذار می‌شود.

۴.۸ هم‌توانی فرمول‌های بارکن گذشته و بوریدان آینده

در منطق $\mathrm{K_t}$ می‌توانیم به کمک «فرمول بارکن گذشته» به «فرمول بوریدان آینده» و برعکس برسیم و هم‌توانی این دو اصل متافیزیکی را اثبات کنیم.

ابتدا اثبات فرمول بوریدان آینده به کمک فرمول بارکن گذشته را می‌آوریم.

۱	۱.	$F\forall x\ \phi(x)$	مقدمه
۱	۲.	$F\forall x\ HF\phi(x)$	۱، قاعدهٔ منطق $\mathrm{K_t}$
۱	۳.	$FH\forall x\ F\phi(x)$	۲، بارکن گذشته
۱	۴.	$\forall x\ F\phi(x)$	۳، قاعدهٔ منطق $\mathrm{K_t}$
	۵.	$F\forall x\ \phi(x) \to \forall x\ F\phi(x)$	۱و۴، دلیل شرطی

برای اثبات فرمول بارکن گذشته به کمک فرمول بوریدان آینده داریم

۱	۱.	$P\exists x\ \phi(x)$	مقدمه
۱	۲.	$P\exists x\ GP\phi(x)$	۱، قاعدهٔ منطق $\mathrm{K_t}$
۱	۳.	$PG\exists x\ P\phi(x)$	۲، بوریدان آینده
۱	۴.	$\exists x\ P\phi(x)$	۳، قاعدهٔ منطق $\mathrm{K_t}$
	۵.	$P\exists x\ \phi(x) \to \exists x\ P\phi(x)$	۱و۴، دلیل شرطی

۵.۸ هم‌توانی فرمول‌های بارکن آینده و بوریدان گذشته

به‌همین‌صورت، می‌توانیم هم‌توانی «فرمول بارکن آینده» و «فرمول بوریدان گذشته» را اثبات کنیم.

۱	۱.	$F\forall x\ \phi(x)$	مقدمه
۱	۲.	$F\forall x\ HF\phi(x)$	۱، قاعدهٔ منطق $\mathrm{K_t}$
۱	۳.	$FH\forall x\ F\phi(x)$	۲، بارکن گذشته
۱	۴.	$\forall x\ F\phi(x)$	۳، قاعدهٔ منطق $\mathrm{K_t}$
	۵.	$F\forall x\ \phi(x) \to \forall x\ F\phi(x)$	۱و۴، دلیل شرطی

اثبات فرمول بارکن آینده به کمک فرمول بوریدان گذشته نیز به‌صورت زیر است.

۱	۱.	$F\exists x\ \phi(x)$	مقدمه
۱	۲.	$F\exists x\ HF\phi(x)$	۱، قاعدهٔ منطق $\mathrm{K_t}$
۱	۳.	$FH\exists x\ F\phi(x)$	۲، بوریدان گذشته
۱	۴.	$\exists x\ F\phi(x)$	۳، قاعدهٔ منطق $\mathrm{K_t}$
	۵.	$F\exists x\ \phi(x) \to \exists x\ F\phi(x)$	۱و۴، دلیل شرطی

به کمک این هم‌توانی‌ها به‌سادگی می‌توان هم‌توانی فرمول بارکن و اصل متافیزیکی «وجود همهٔ ممکنات» را در منطق زمان آزاد حتی بدون اصل B و بدون استفاده از ادات این‌همانی اثبات کرد.

۶.۸ اهمیت اصل‌های ترکیبی در منطق زمان

اثبات‌پذیری هم‌توانی‌های یادشده بدون اصل B در منطق زمان آزاد که در بخش‌های اخیر نشان داده شد شاید مهم‌ترین تمایز منطق زمان آزاد با منطق موجهات آزاد باشد. با وجود این، نباید شباهت اصل B با اصل‌های ترکیبی منطق زمان K_t را نادیده گرفت:

- اصل‌های B:

$$A \to \Box\Diamond A, \qquad \Diamond\Box A \to A$$

- اصل‌های ترکیبی منطق زمان K_t:

$$q \to GPq, \qquad q \to HFq$$
$$PGq \to q, \qquad FHq \to q$$

همین شباهت‌ها است که سبب شده است فرمول بارکن در این منطق‌ها هم‌توان فرمول‌های بوریدان و عکس بارکن و اصل‌های متافیزیکی نسبتاً قوی شود.

۹ جمع‌بندی

در این مقاله نشان دادم که اصول متافیزیکی پنج‌گانه (دو اصل ضرورت‌گرایی و بالفعل‌گرایی و فرمول‌های سه‌گانهٔ بارکن، بوریدان، و عکس بوریدان) که در منطق کلاسیک قابل اثبات و ازاین‌رو، معادل و هم‌ارز بودند در منطق موجهات آزاد اثبات‌ناپذیر می‌شوند و میان آن‌ها روابط زیر برقرار است.

(۱) ضرورت‌گرایی $\Leftrightarrow$ عکس بارکن $\Leftrightarrow$ بوریدان؛

(۲) بالفعل‌گرایی $\Rightarrow$ بارکن (توجه کنید که رابطهٔ بالفعل‌گرایی و فرمول بارکن یک‌طرفه است).

همچنین، نشان دادم که افزودن اصل B سبب می‌شود اصل‌های پنج‌گانه هم‌توان شوند:

(۳) بالفعل‌گرایی $\Leftrightarrow$ ضرورت‌گرایی $\Leftrightarrow$ عکس بارکن $\Leftrightarrow$ بوریدان $\Leftrightarrow$ بارکن.

گفتم که این هم‌توانی کاملاً خلاف انتظار است و فیلسوفانی که منطق آزاد S۵ را می‌پذیرند، درست مانند آن‌هایی که منطق کلاسیک موجهات را می‌پذیرند، ناگزیر از انکار همهٔ این اصل‌های پنج‌گانه یا پذیرش همهٔ آن‌ها با هم هستند و نمی‌توانند یکی از این اصول را بپذیرند و دیگری را انکار

کنند. شرط‌های دلالت‌شناختی این سه دسته فرمول نیز به ترتیب به‌صورت زیر است.

(۴) ضرورت‌گرایی $\Leftrightarrow$ شرط «دامنه‌های انقباضی» (در صورت فقدان اصل B)؛

(۵) بالفعل‌گرایی $\Leftrightarrow$ شرط «دامنه‌های گسترشی» (در صورت فقدان اصل B)؛

(۶) بالفعل‌گرایی $\Leftrightarrow$ ضرورت‌گرایی $\Leftrightarrow$ شرط «دامنه‌ثابت» (در صورت افزودن اصل B).[۱]

همچنین، نشان دادم که در منطق زمان آزاد نسبت‌های کم‌وبیش مشابهی برقرار است با این تفاوت مهم که رابطهٔ بالفعل‌گرایی و فرمول بارکن که در منطق موجهات آزاد یک‌طرفه بود در منطق زمان آزاد دوطرفه می‌شود. در این منطق، رابطه‌های زیر را داریم.

(۱) ابدگرایی $\Leftrightarrow$ بارکن گذشته $\Leftrightarrow$ بوریدان آینده $\Leftrightarrow$ عکس بارکن آینده؛

(۲) ازل‌گرایی $\Leftrightarrow$ بارکن آینده $\Leftrightarrow$ بوریدان گذشته $\Leftrightarrow$ عکس بارکن گذشته.

شرط‌های دلالت‌شناختی این دو دسته فرمول نیز به ترتیب به‌صورت زیر است.

(۳) ابدگرایی $\Leftrightarrow$ شرط «دامنه‌های افزایشی»؛

(۴) ازل‌گرایی $\Leftrightarrow$ شرط «دامنه‌های کاهشی».

چنان‌که دیده می‌شود وضعیت این اصول در منطق زمان آزاد بسیار شسته‌رفته‌تر و منقح‌تر از منطق موجهات آزاد است.

مراجع

[۱] اسدی، مهدی، بررسی تاریخی اشکال‌های بعد چهارم در جهان اسلام، جستارهایی در فلسفه و کلام، **۵۳** (۱۴۰۰)، شماره ،۲ ۱۱–۲۸.

[۲] اسدی، مهدی، ریشه‌یابی بعد چهارم نزد متکلمان مسلمان (ابواسحاق نظّام، ابن‌راوندی، ابوسهل عبّاد و محقّق طوسی)،جستارهایی در فلسفه و کلام، **۵۳** (۱۴۰۱)، شماره ۲، ۱۱–۲۸.

[۳] اسدی، مهدی، آیا ملاصدرا از بعد چهارم عدول کرده است؟، متافیزیک، **۱۴** (۱۴۰۱)، شماره ۳۴، ۲۳–۳۷.

[۴] اسدی، مهدی، نقد قطب الدین رازی بر بعد چهارم و تأثیر آن بر اندیشمندان مسلمان، اندیشهٔ دینی، **۲۲** (۱۴۰۱)، شماره ۵۸، ۳–۳۲.

[۵] اسدی، مهدی، سابقهٔ نظریهٔ بعد چهارم در سنت فلسفهٔ اسلامی، در /https://iqna.ir/fa/news/4104725

[۶] سلیمانی امیری، عسکری، وجوب سابق [نقدی بر ادلهٔ استاد فیاضی در نفی قاعدهٔ الشی ما لم‌یجب لم‌یوجد]، آیین حکمت، **۵** (۱۳۹۲)، شماره ۱، ۳۹–۶۶.

[۷] فلاحی، اسدالله، منطق وجود،منطق تطبیقی ، انتشارات سمت، تهران، ۱۳۹۵.

۱. توجه کنید که شرط دلالت‌شناختی «فرمول بارکن» در منطق موجهات آزاد بدون افزودن اصل B برای نگارنده ناشناخته است.

[۸] فلاحی، اسدالله، منطق قضایای خارجیه،حکمت سینوی، **۲۷** (۱۴۰۲)، شماره ۶۹، ۵-۳۵.

[۹] فلاحی، اسدالله، منطق واحد برای قضایای حقیقیه و خارجیه، حکمت و فلسفه، ۲۰ (۱۴۰۳)، شماره ۲، ۱۲۹-۱۵۸.

[۱۰] فیاضی، غلامرضا، جبر فلسفی از نگاه ضرورت سابق، نقد و بررسی قاعده الشیء ما لم یجب لم یوجد، آیین حکمت، **۱** (۱۳۸۸)، شماره ۲، ۳۵-۶۸.

[۱۱] کاوند، علیرضا؛ اسماعیلی، محمدعلی؛ رضائی هفتادر، حسن، جبر فلسفی در اندیشه محقق اصفهانی، معرفت فلسفی، **۱۷** (۱۳۹۸)، شماره ۱، ۵۳-۶۴.

[۱۲] موحد، ضیاء،منطق موجهات ، انتشارات هرمس، تهران، ۱۳۸۱.

[۱۳] نبوی، لطف‌الله،مبانی منطق موجهات ، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ۱۳۸۳.

[۱۴] نبوی، لطف‌الله،مبانی منطق فلسفی ، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ۱۳۸۹.

[15] Bencivenga, E., Free logic, in *Handbook of Philosophical logic*, vol. 3, D. Gabbay, F. Günthner, eds., D. Reidel, Dordrecht, 1986, 374-426.

[16] Bridges, D. S., Ishihara, H., Rathjen, M. J., Schwichtenberg, H., eds., *Handbook of Constructive Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2023.

[17] Craig, W. L., *God and Abstract Objects: The Coherence of Theism*, Springer, Verlag, 2017.

[18] Field, H., *Science Without Numbers*, Basil Blackwell, Oxford, 1980.

[19] Field, H., Realism and anti-realism about mathematics, *Philosophical Topics*, **13** (1982), 45-69.

[20] Field, H., *Realism: Mathematics and Modality*, Basil Blackwell, Oxford, 1989.

[21] Field, H., The conceptual contingency of mathematical objects, *Mind*, **102** (1993), 285-99.

[22] Garson, J., Quantification in modal logic, in *Handbook of Philosophical logic*, vol. 3, D. Gabbay, F. Günthner, eds., D. Reidel, Dordrecht, 1986, 267-323.

[23] Garson, J., Unifying quantified modal logic, *Journal of Philosophical Logic*, **34** (2005), 621-649.

[24] Garson, J., *Modal Logic for Philosophers*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[25] Goranko, V., Rumberg, A., Temporal logic, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*,E. N. Zalta, ed., 2021, available at, `https://plato.stanford.edu/archives/fall2023/entries/logic-temporal`.

[26] Menzel, Ch., The possibilism-actualism debate, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta, U. Nodelman, eds., 2022, available at `https://plato.stanford.edu/archives/fall2023/entries/possibilism-actualism`.

[27] Nolt, J., Free logic, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta, ed., 2021, available at `https://plato.stanford.edu/archives/fall2021/entries/logic-free`.

[28] Quine, W. V. O., *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, Cambridge, 1961.

[29] Rathjen, M., An introduction to intuitionistic logic, in *Handbook of Constructive Mathematics*, D. Bridges, H., Ishihara, M. Rathjen, H. Schwichtenberg, eds. Cambridge University Press, 2023, 3-19.

[30] Tennent, N., On the necessary existence of numbers, *Noûs*, **31** (1997), 307-336.

[31] Troelstra, A. S., van Dalen, D., *Constructivism in Mathematics: An Introduction* (two volumes), North Holland, Amsterdam, 1988.

[32] van Dalen, D., Intuitioninstic logic, in *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 3, D. Gabbay, F. Günthner, eds., D. Reidel, Dordrecht, 1986, 225-339.

[33] Wright, C., Hale, B., Nominalism and the contingency of abstract objects, *The Journal of Philosophy*, **89** (1992), 111-135.

[34] Wright, C., Hale, B., A reductio ad surdum? Field on the contingency of mathematical objects, *Mind, New Series*, **103** (1994), 169-184.

اسدالله فلاحی: مؤسسه پژوهشی حکمت و فلسفه ایران، گروه منطق
رایانامه: falahiy@yahoo.com

Mathematical Culture and Thought
Volume 43, Number 2, Fall/Winter 2024, Pages 147–171
doi: 10.30504/mct.2024.1432.2006

Metaphysical Principles in Modal Free Logic

A. Fallahi[1]

Department of Logic, Iranian Institute of Philosophy, Iran

Abstract. Free logic is a non-classical logical system that rejects some of the rules of standard logic. While the importance of free logic has been discussed a lot, its significance in modal logics has been largely overlooked. In this paper, I aim to highlight the importance of free logic in modal logics (and also in temporal logic). In classical modal logic, many metaphysical principles are proven which are philosophically controversial, such as Barcan formulas, Buridan formula, converse Barcan formula. These formulas in modal free logic are equivalent to two strong metaphysical principles: Necessitism (i.e. "all beings are necessary") and Actualism (meaning "all possibilities are existent"). These two principles appear in temporal free logic as new metaphysical principles: eternalism (i.e. "all material beings are permanent") and presentism (meaning "all past and future things are present"). Since these principles as well as Barcan and Buridan formulas are provable in modal and temporal "classical" logics, they are equivalent in thesee classical logics. I show (i) that these principles are unprovable in "free" logics, (ii) that their relationships and proportions can be obtained, and (iii) that adding each of them as metaphysical principles to modal and temporal free logics has what consequences.

Keywords: free logic, modal logic, temporal logic, Barcan formula, Buridan formula, converse Barcan formula
Article history: Recieved 16 October 2023; Accepted 20 June 2024
Article type: original

1. falahiy@yahoo.com

ISSN 1022-6443/