فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۳، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۳)، صص ۱۷۳ تا ۱۸۴

دوچهرگی ریاضیات*

جان فون نویمان

ترجمهٔ علی عنایت

چکیده. جان فون نویمان یکی از برجسته‌ترین ریاضی‌دانان قرن بیستم است که آثار شگفت‌انگیزش نقش عمده‌ای در شکل‌گیری ریاضیات معاصر ــ هم از نوعِ محض و هم از نوع کاربردی ــ داشته است. متن زیر، که در سال ۱۹۴۷ میلادی منتشر شد، بدون فرض گرفتن آشنایی عمیق مخاطب با ریاضیات، دیدگاه نویسنده را دربارهٔ سرشت ریاضیات با زبان غیرتخصصی و در شکل فشرده‌ای ارائه می‌کند. عنوان اصلی متن «ریاضی‌دان» است که در ترجمهٔ فارسی به عنوان فعلی تغییر یافته است تا بهتر گویای موضوع مقاله باشد. ــ م.

گفت‌وگو در مورد چندوچونِ تأملاتِ عقلانی در هر حیطه‌ای دشوار است، حتی در مواردی که به اندازهٔ ریاضیات از دایرهٔ مرکزیِ تأملاتِ مشترکِ عقلانی ِ ما دور نیستند. ازطرف‌دیگر، بحث در مورد ذاتِ هر کاری به‌مراتب دشوارتر از انجام آن است. همان‌طور که فهمِ نیروهایی که باعث برخاستن و به جلو راندنِ هواپیما می‌شوند از خلبانی سخت‌تر است. بعید است قبل‌از اینکه به‌طور غریزی و ملموس امری را عمیقاً تجربه کرده باشیم بتوانیم به سرشتِ آن امر پی ببریم.

جنبهٔ دیگری که کارم را ناخوشایند و کم‌مایه می‌کند این است که بحث دربارهٔ سرشتِ ریاضیات بدون فرض گرفتن اُخت بودنِ مخاطب با این رشته باعث می‌شود که بحث در سطحِ غیرریاضی انجام شود و ادعاها درست‌وحسابی مستند نشوند. من به همهٔ این نقائص واقفم و پیشاپیش از بابتشان

عبارات و کلمات کلیدی: دقت ریاضی، علم تجربی، دستگاه اصل موضوعی، سرشت ریاضیات

نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۹/۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۱۲

*von Neumann, J., The mathematician, in *Works of the Mind*, R. B. Heywood, ed., University of Chicago Press, Chicago, 1947, 180-196.

تمامی پانویس‌ها از مترجم است.

doi: 10.30504/mct.2025.1507.2053

پوزش می‌خواهم. ضمناً دیدگاه‌هایی که مطرح خواهم کرد احتمالاً موردِ تأییدِ عدّه‌ای از ریاضی‌دانان نخواهند بود. آنچه خواهید خواند محسوسات و تعابیر نه‌چندان سامانمندی هستند و فقط اندکی می‌توانم به شما کمک کنم که تشخیص دهید که تا چه حد مفیدِ معنا هستند.

با همهٔ این موانع باید اذعان کنم که کوشش در بیانِ ماهیّت کارِ فکری در ریاضیات برایم جذاب و چالش‌برانگیز است. فقط امیدوارم در این راه شکستِ فاحشی نخورم.

حیاتی‌ترین شاخصهٔ ریاضیات، از دیدگاهِ من، رابطهٔ عجیب‌وغریب آن با علومِ طبیعی است، و یا کلی‌تر، با علومی که تجربه را در سطحی بالاتر از توصیف تعبیر می‌کنند.

بیشترِ مردم، ریاضی‌دانان و دیگران، قبول دارند که ریاضیات علمی تجربی نیست، و یا دست‌کم اینکه روشِ اجرایِ آن از چندین جهتِ بی‌چون‌وچرا با روش‌هایِ علومِ تجربی تفاوت دارد. درعین‌حال رشدِ ریاضیات رابطهٔ نزدیکی با علومِ تجربی دارد. یکی از اصلی‌ترین شاخه‌هایِ آن، هندسه، به‌عنوانِ علمِ طبیعی و تجربی شروع شد. منبعِ بعضی از والاترین انواعِ الهام در ریاضیاتِ نوین (و به نظرم بهترینشان) به‌روشنی در علومِ تجربی یافت می‌شود. روش‌هایِ ریاضی با چیرگی بر بخش‌هایِ نظریِ علومِ طبیعی سایه افکنده است. یکی از سنجه‌های چشمگیر در علومِ تجربیِ نوین این است که تا چه اندازه می‌توان روش‌هایِ ریاضی را در آن به کار گرفت، و یا مانندِ فیزیکِ نظری روش‌هایش را به ریاضیات نزدیک کرد. در همهٔ بخش‌هایِ علومِ طبیعی زنجیرهٔ پیوسته‌ای از تحوّلات آشکار می‌شود که همگی را به سمتِ ریاضیات سوق می‌دهد و از این بابت تقریباً نمایانگرِ پیشرفتِ علمی بخش‌هایِ مزبور است.

دوچهرگیِ بسیار ویژه‌ای در ذاتِ ریاضیات وجود دارد. باید متوجهِ آن شد، پذیرفتش، و آن را حین تفکّر در موردِ ریاضیات مدِ نظر داشت. این دوچهرگی را نمی‌توان بدونِ مخدوش کردنِ ذاتِ ریاضیات به تک‌چهرگی فرو کاست.

بنابراین تلاش نخواهم کرد که صورتِ واحدی از ریاضیات ارائه کنم، بلکه تلاش خواهم کرد در حدِ توانایی‌ام پدیدهٔ چندگانگیِ ریاضیات را توصیف کنم.

شکی نیست که چندی از بهترین منابعِ الهام در ریاضیات ــ در آن بخش‌هایی که عالی‌ترین نمونه‌هایِ ریاضیات محض هستند ــ ازعلومِ طبیعی نشأت می‌گیرند. اینجا دو نمونهٔ اعظم را ذکر می‌کنم.

اولین نمونه، همان‌طور که باید و شاید، هندسه است. هندسه بخش اعظمِ ریاضیاتِ باستان است و به همراهِ شاخه‌هایِ منشعب از آن یکی از بخش‌هایِ اصلیِ ریاضیاتِ نوین است. بی‌گمان در

مرحلهٔ آغازین در دوران باستان علمِ تجربی بوده است و از این بابت به فیزیکِ نظریِ معاصر شباهت داشته است. سوایِ همهٔ شواهد دیگر، نامِ «هندسه» گویای این نکته است.[۱] روشِ اصلِ موضوعیِ اقلیدس نمایانگرِ گامِ بزرگی از دور شدن از تجربه‌گرایی است، ولی اصلاً نمی‌توان به این سادگی از این موضع دفاع کرد که کارِ اقلیدس نقطهٔ عطفی در جداییِ هندسهٔ تجربی و نظری است. این نکته که از دیدگاه کنونی هندسهٔ اقلیدسی معایبِ جزئی دارد در این بحث اهمیتِ کمتری دارد. آنچه اساسی‌تر است این است: رشته‌هایِ دیگری که بی‌گمان تجربی هستند، مانندِ مکانیک و ترمودینامیک، معمولاً در شکلِ اصلِ موضوعی ارائه می‌شوند، که در بعضی موارد نمی‌توان روشِ آن‌ها را از روشِ اقلیدس تمیز داد. متنِ کلاسیکِ فیزیکِ نظریِ دورانِ ما، یعنی کتابِ *اصول* نوشتهٔ نیوتون، هم در شکلِ نوشتاری و هم در ماهیّتِ بخش‌هایِ اساسیِ آن بسیار شبیه متنِ اقلیدس است. البته در تمامِ این نمونه‌ها بینشِ فیزیکی پشتوانهٔ اصولِ موضوع و سنجشِ تجربی مؤیدِ قضیه‌های منتج از اصولِ موضوع هستند. ولی به‌راحتی می‌توان استدلال کرد که تعبیرِ مشابهی از اقلیدس می‌توان داشت، به‌ویژه از دیدگاهِ دورانِ باستان، پیش‌از اینکه هندسه به ثبات و مرجعیتِ دو هزارسالهٔ کنونیِ خود برسد ــ مرجعیتی که بنایِ نوینِ فیزیک نظری فاقد آن است.

اضافه‌براین، در حینِ اینکه تجربه‌زدایی از هندسه به‌آرامی از زمانِ اقلیدس پیشرفت می‌کرد، هیچگاه به مرحلهٔ کمال نرسید، حتی در دورانِ مدرن. بحثِ هندسهٔ نااقلیدسی این نکته را به‌خوبی روشن می‌کند و درعین‌حال نمایانگرِ دوگانگیِ تفکر ریاضیات است. ازآنجاکه اغلبِ بحث در سطحِ بالایی از تجرید شکل می‌گرفت، با مسئلهٔ خالصِ منطقیِ مربوط به نتیجه‌گیریِ اصل پنجم[۲] از بقیهٔ اصول سروکار داشت، مسئله‌ای که بالاخره توسطِ کلاین[۳] به سرانجام رسید، وقتی که موفق شد نشان دهد چگونه صفحهٔ اقلیدسی را ازطریق تعریفِ مجدد بعضی مفاهیم می‌توان به‌شکل نااقلیدسی در آورد. و درعین‌حال انگیزهٔ تجربی از اول تا آخر در کار بود. دلیلِ اصلی که چرا از میانِ همهٔ اصولِ موضوعِ اقلیدس این اصلِ پنجم بود که مورد پرسش قرار گرفته بود این است که تنها در این اصل است که تمامیِ صفحهٔ نامتناهی درگیر است. این فکر که حداقل در یک مفهومِ مهم، و علی‌رغم تمامِ تحلیل‌های منطقی–ریاضی، تصمیم له یا علیه اصول موضوع اقلیدس شاید نیازمند تجربه باشد، قطعاً

---

۱. در متن اصلی اشارهٔ نویسنده به این نکتهٔ لغوی است که کلمهٔ geometry که از یونانی واردِ لاتین و از آنجا واردِ انگلیسی (و دیگر زبان‌های غربی) شده است، حاصلِ پیوندِ geo (به معنای زمین) و metry (به معنای اندازه‌گیری) است. ضمناً یادآوری می‌کنیم که «هندسه» معرّبِ «اندازه» است. ۲. اصلِ پنجمِ اقلیدس می‌گوید که از هر نقطهٔ P بیرون از یک خطِ L تنها یک خط وجود دارد که ازنقطهٔ P می گذرد و با خطِ L موازی است.

3. Felix Klein

در ذهنِ ریاضی‌دانِ کبیر گاوس وجود داشت. و به دنبالِ آن بولیایی، لُباچِفسکی، ریمان، و کلاین به نتایجِ مجردِ بیشتری رسیدند که واگشاییِ صوریِ مناقشه شناخته می‌شوند، ولی این تجربه‌گرایی و، دقیق‌تر، فیزیک بود که حرفِ آخر را زد. کشفِ نسبیّتِ عام مجبورمان کرد که دیدگاهمان را نسبت به هندسه در بسترِ کاملاً متفاوتی اصلاح کنیم، به همراهِ کلّی تغییرات در تأکیداتِ ریاضیِ محض. برای تکمیلِ تصویرمان از مغایرت میانِ دیدگاهِ ریاضی و دیدگاهِ تجربی به هندسه، به نکتهٔ دیگری می‌پردازیم. تحولاتی که از آن‌ها صحبت شد در همان نسلی رخ داد که شاهدِ تجربه‌زدایی و تجریدِ تمام‌وکمالِ هندسهٔ اصولِ موضوعیِ اقلیدس توسطِ ریاضی‌دانان منطقی‌ـاصولی بودند. این دو دیدگاهِ متعارض کاملاً در ذهنِ یک ریاضی‌دان سازگارند، بدین علت بود که هیلبرت دستاوردهایِ مهمی هم در هندسهٔ اصلِ موضوعی و هم در نسبیتِ عام داشت.

نمونهٔ دوم حسابان است ــ یا بهتر بگوییم تمام مبحثِ آنالیز که از آن رویید. حسابان اولین دستاوردِ ریاضیاتِ نوین است و به‌سختی می‌توان اهمیتِ آن را دست‌کم گرفت. گمانم از هر چیزِ دیگری بدونِ بروبرگرد بیشتر معرفِ زایشِ ریاضیاتِ نوین است، و دستگاهِ آنالیزِ ریاضی که نتیجهٔ گسترشِ منطقیِ آن است هنوز بزرگ‌ترین پیشرفتِ فنی در تفکرِ دقیق شمرده می‌شود. ریشه‌های حِسابان به‌روشنی تجربی هستند. تلاش‌های نخستینِ کپلر در انتگرال‌گیری بر مبنایِ فنونِ اندازه‌گیریِ حجمِ بشکه‌ها بود، یعنی اندازه‌گیریِ حجمِ اجسامی که سطوحِ خمیده دارند. این بخشی از هندسه است که بعداز اقلیدس به وجود آمد و در دورانِ کپلر تجربی بود و بر مبنایِ اصولِ موضوع پایه‌گذاری نشده بود، و این نکته را کپلر به‌خوبی می‌دانست. کارِ برجسته و کشفیاتِ اصلی، توسط نیوتون و لایب‌نیتس، به‌روشنی ریشه در اجسامِ فیزیکی دارند. نیوتون حسابانِ «فلوکسیون»ها را اساساً برایِ مقاصدِ مکانیک ابداع کرد و درواقع مباحثِ مکانیک و حسابان کمابیش به‌طور هم‌زمان توسط او پایه‌گذاری شدند.[۱] نخستین پی‌ریزی‌های حسابان حتی ازلحاظ ریاضی دقیق نبودند و به مدت صد و پنجاه سال پس‌از نیوتون تنها پی‌ریزی‌هایِ نادقیق و نیمه‌فیزیکی موجود بودند. و درعینِ‌حال این دوران شاهدِ عده‌ای از مهم‌ترین پیشرفت‌هایِ آنالیز بود، در این بسترِ نادقیق و ناکافیِ ریاضی! بعضی از الهام‌بخش‌ترین اندیشورانِ این دوره به‌روشنی از شیوه‌هایِ استدلالیِ دقیق استفاده نمی‌کنند، مانندِ اویلر، ولی استدلال‌هایِ کسانِ دیگری مانندِ گاوس و ژاکوبی مستحکم بود. رشدونموِ آنالیز در این

۱. دکتر سیاوش شهشهانی به مترجم گوشزد کرده است که دیدگاهِ متفاوتی دربارهٔ این موضوع وجود دارد که با مستنداتِ تاریخی نشان می‌دهد که نیوتون پیش‌از شروع کارِ در مبحثِ مکانیک، بخشِ مهمی از حسابان را در رابطه با حلِ مسائلِ هندسی ابداع کرده بود. مطالعهٔ کتاب «Arnol'd, V. I., *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, 1990» به علاقه‌مندان این موضوع توصیه می‌شود.

دوران تا حدِ امکان گیج‌ومبهم بود و رابطهٔ آن با تجربه‌گرایی، منطبق با آرمان‌هایِ کنونیِ (و حتی اقلیدسی) تجرید و دقت نبود. ولی هیچ ریاضی‌دانی مایل نیست این دوره را نادیده بگیرد زیراکه ریاضیاتی که در این دوران به وجود آمد از زمرهٔ انواعِ درجه یکی است که تاکنون ساخته‌وپرداخته شده است. حتی پس‌از اینکه سلطهٔ دقت توسطِ کوشی برقرار شد، بازگشتِ عجیب‌وغریبِ روش‌های نیمه‌فیزیکی در دورانِ پس‌از ریمان دیده می‌شود. روحیهٔ علمیِ ریمان به‌تنهایی درخشان‌ترین نمونهٔ ذاتِ دوگانهٔ ریاضیات است، و همچنین مقایسهٔ[1] میانِ وایرشتراس و ریمان، ولی توضیحِ بیشتر در این مورد ما را به جزئیاتِ فنی می‌کشاند و از آن می‌گذریم. از زمانِ وایرشتراس به نظر می‌آید که آنالیز کاملاً مجرد، دقیق و استوار، و غیرتجربی شده است. ولی حتی این نکته را نمی‌توان بدون استثناء تلقی کرد. مناقشه در موردِ مبانیِ ریاضیات و منطق که دو نسل اخیر[2] شاهد آن بودند، هرگونه توهمی در این مورد را از میان برد.

و حالا می‌رسیم به نمونهٔ سوم در روندِ شناختِ دوچهرگیِ ریاضیات. برخلافِ دو نمونهٔ پیشین این یکی با رابطهٔ ریاضیات و علومِ طبیعی سروکار ندارد و درعوض مربوط است به ارتباطش با فلسفه یا معرفت‌شناسی و به‌طرزِ چشمگیری نشان می‌دهد که مفهومِ دقتِ «مطلق» در ریاضیات ثابت نیست. این عدمِ ثبات نشان می‌دهد که چیزی ورایِ تجرید شالودهٔ ریاضیات را می‌سازد. در تحلیلم از مناقشه در مبانیِ ریاضیات نتوانسته‌ام خودم را قانع کنم که این مؤلفه بی‌بروبرگرد دالّ بر تجربی بودن ریاضیات است. ولی دو نکته را می‌توان به‌روشنی دید. اول، همهٔ اینکه با امری غیرِریاضی سروکار داریم که به‌نحوی به علومِ تجربی یا به فلسفه و یا هر دو مربوط است ــ و ماهیّت غیرِتجربیِ آن را به شرطی می‌توانیم بپذیریم که فرض را بر آن بگذاریم که فلسفه (و به‌ویژه معرفت‌شناسی) می‌تواند مستقل از تجربه وجود داشته باشد. (این شرط لازم است ولی کافی نیست). درتحلیلِ تغییرپذیریِ مفهومِ دقت در ریاضیات، همان‌طور که قبلاً اشاره کردم، می‌خواهم تأکیدم را بر مناقشه در موردِ مبانیِ ریاضیات بگذارم. ولی اول می‌خواهم به یک جنبهٔ ثانوی اشاره کنم. با اینکه جنبه‌ای که می‌خواهم پیش بکشم لهِ ادعایِ من است آن را از این بابت ثانوی به حساب می‌آورم که احتمالاً کمتر از مناقشه در موردِ مبانیِ ریاضیات محکمه‌پسند است. جنبه‌ای که در نظر دارم تغییر در «روشِ» ریاضی است. روشن است که روشِ نوشتنِ براهینِ ریاضی دچار نوسان بوده است، و اینجا صحبت از نوسان می‌کنیم چون‌که از بعضی لحاظ تفاوت میانِ روشِ کنونی و روشِ بعضی ریاضی‌دانانِ قرونِ

---

۱. علاقه‌مندان به آشنایی با تنشِ میان روش‌هایِ ریمان و وایرشتراس می‌توانند به مقالهٔ فنی موجود در پیوندِ زیر رجوع کنند: https://arxiv.org/abs/math/0305022

۲. به یاد داشته باشید که اصلِ مقاله در سال ۱۹۴۷ منتشر شده است.

هجدهم و نوزدهم بیشتر از تفاوت میانِ روشِ کنونی و روشِ اقلیدس است. ازدیگرسو، از بعضی جهات ثباتِ خیره‌کننده‌ای در روش‌ها دیده می‌شود. در رشته‌هایی از ریاضیات که تغییر دیده می‌شود، بیشتر تفاوت در روشِ ارائه است که می‌تواند بدونِ توسّل به ایده‌های جدید رفع شود. ولی در بعضی موارد این تفاوت‌ها به حدی است که آدم شک می‌کند که تنها تفاوتِ نویسندگانی که در چنین انواعِ دور از هم استدلال‌هایشان را بیان می‌کنند در روش، ذوق، و تحصیلاتِ متفاوت است، و اینکه چگونه ممکن است این چنین ریاضی‌دانانی دیدگاهِ مشترکی از دقتِ ریاضیات داشته باشند. بالاخره اینکه، در بعضی موارد (مثلِ بخشِ بزرگی از آنالیزِ قرنِ هجدهم که قبلاً به آن اشاره کردیم) تفاوت‌ها تا حدی است که می‌توان آن‌ها را ماهوی دانست و فقط با کمکِ نظریه‌های نوین و عمیقی که صدها سال طول می‌کشد که ساخته و پرداخته شوند می‌توان تفاوت‌هایشان را برطرف کرد. بعضی از ریاضی‌دانانی که از دیدگاهِ کنونی روش‌های نادقیق داشتند (و بعضی از معاصران آن‌ها که از کارهای آن‌ها استفاده می‌کردند) کاملاً در موردِ کمبودِ دقتِ کار خود آگاه بودند، و یا در زبان عینی‌تر، آرمان‌هایشان از دقتِ ریاضی به دیدگاهِ کنونی نزدیک‌تر بود تا کردارشان. ولی بعضی دیگر، مانندِ برترین استاد اعصار، اویلر، به نظر می‌آید مشکلی با سنجه‌هایِ دقتِ خود نداشته است و از این بابت می‌توان از زمرهٔ یکدلانِ یکرنگ شمرده شود.

به‌هرحال نمی‌خواهم در این مورد پافشاری کنم و در عوض می‌پردازم به موردِ کاملاً روشنِ مناقشه در موردِ مبانیِ ریاضیات. در اواخرِقرنِ نوزدهم و اوائلِ قرنِ بیستم رشتهٔ جدیدی از ریاضیات، یعنی نظریهٔ مجموعه‌هایِ کانتور، به مشکلاتی برخورد به این معنی که بعضی از استدلال‌های آن منجر به تناقض می‌شدند. استدلال‌های مذکور در بخشِ مرکزی و «کاربردیِ» نظریهٔ مجموعه‌ها نبودند و معمولاً می‌شد با روش‌هایِ صوری ویژه‌ای تشخیصشان داد، ولی درعینِ‌حال روشن نبود که چرا باید آن‌ها را کمتر از بخش‌هایِ موفقِ نظریهٔ مجموعه‌ها جدی گرفت. سوایِ این نکته که این استدلال‌ها به نتایجِ نامطلوب منتهی می‌شوند روشن نبود که چه انگیزهٔ اصولی و یا کدام دیدگاه معقول به ما اجازه می‌دهد که آن‌ها را از بخش‌هایِ بی‌دردسر جدا کنیم. نگاهِ دقیق‌تر به موضوع، که توسطِ راسل و وایل آغاز شد، و توسط براوئر[1] تکمیل شد، نشان می‌دهد که مفهومِ «وجود» و «اعتبارِ عام» نه‌تنها در نظریهٔ مجموعه‌ها بلکه در تمامیِ ریاضیاتِ نوین از دیدگاهِ فلسفی جایِ ایراد دارد. دستگاهی از ریاضیات توسطِ براوئر برپا شد که از جنبه‌های ایراددار مذکور حذر می‌کرد ولی تقریباً پنجاه درصدِ ریاضیاتِ نوین، در بخش‌هایِ بسیار حیاتی و تا به آن موقع مطمئن، به‌ویژه در آنالیز، مشمول این

1. L. E. J. Brouwer

«پاک‌سازی» می‌شدند. یا اینکه باید نامعتبر شناخته و تنها به کمکِ ملاحظاتِ پیچیدهٔ مکمل توجیه می‌شدند، که این خود به کاهشِ عمومیت و ظرافت و زیباییِ براهینشان می‌انجامید. بااین‌همه، براوئر و وایل تأکید داشتند که لازم است که مفهومِ دقت در ریاضیات بر طبقِ این ایده‌ها موردِ تجدیدِ نظر قرار گیرد.

دستِ کم گرفتنِ این وقایع کار دشواری است. در دههٔ سوّمِ قرنِ بیستم، دو ریاضی‌دان، هر دو درجه یک، و عمیقاً آگاه از چیستی و موضوعِ ریاضیات، پیشنهاد کردند که مفهومِ دقت ریاضیات و آنچه دقتِ اثباتِ ریاضی شناخته می‌شود باید دگرگون شوند. اتفاقات و تحولاتِ بعدی حائز اهمیت هستند:

(۱) تنها اندکی از ریاضی‌دانان حاضر بودند که سنجه‌هایِ نوین و سخت‌گیرانهٔ شهودگراییِ براوئر و وایل را بپذیرند. ولی تعدادِ زیادی پذیرفتند که حق با شهودگرایان است ولی این عده شیوهٔ پیشین و «آسان» را کنار نگذاشتند به این امید که روزی‌روزگاری کسانِ دیگری موفق به ارائهٔ پاسخ به نقدِ شهودگرایان خواهند شد و عاقبت روش‌هایِ کلاسیک توجیه خواهند شد.

(۲) هیلبرت با این ایدهٔ بدیع قدم پیش نهاد که چگونه می‌توان ریاضیاتِ کلاسیک (یعنی ماقبلِ شهودگرایی) را توجیه کرد: حتی در یک دستگاهِ استدلالیِ شهودی می‌توان کارکردِ ریاضیاتِ کلاسیک را توضیح داد، با اینکه نمی‌توان معیارهایِ کاری‌اش را پذیرفت. پس شاید بشود با استفاده از روش‌هایِ شهودگرایانه بتوان ثابت کرد که روش‌هایِ کلاسیک به تناقض منتهی نمی‌شوند و با یکدیگر سازگارند. روشن بود که چنین برهانی دشوار خواهد بود ولی بعضی نشانه‌ها برایِ برپاکردنِ چنین برهانی موجود بود. اگر این ترفند کارگر می‌بود توجیهِ خارق‌العاده‌ای برای ریاضیاتِ کلاسیک توسط ریاضیاتِ مخالفش یعنی ریاضیاتِ شهودی ارائه می‌کرد! حداقل چنین تعبیری در دستگاهِ فلسفهٔ ریاضی که بیشترِ ریاضی‌دانان حاضر به پذیرشش بودند مشروع شناخته می‌شد.

(۳) بعداز حدودِ یک دهه تلاش برای جامهٔ عمل پوشاندن به این برنامه، گودل به نتیجهٔ چشمگیری رسید. این نتیجه را نمی‌توان بدونِ بیانِ کلّیِ ملاحظاتِ فنی که جایشان اینجا نیست بیان کرد. ولی نتیجهٔ اساسی این بود: اگر دستگاهی از ریاضیات به تناقض منجر نمی‌شود، آنگاه دستگاهِ مزبور قادر به اثباتِ سازگاریِ خویش نیست. برهانِ گودل ازمعیارهایِ اشدّ دقتِ ریاضیات، یعنی معیارهایِ شهودگرایی، تبعیت می‌کرد. تأثیر قضیهٔ گودل بر برنامهٔ هیلبرت بحث پرمناقشه‌ای است که به دلایلِ فنی بودن جایشان اینجا نیست. نظرِ شخصیِ من، که نظرِ بسیاری دیگر هم هست، این است که

گودل نشان داد که نمی‌توان به برنامهٔ هیلبرت جامهٔ عمل پوشاند.[۱]

(۴) با بر باد رفتنِ این امید اساسی که می‌توان با استفاده از دیدگاهِ هیلبرت یا براوئر و وایل به ریاضیاتِ کلاسیک مشروعیت داد بیشترِ ریاضی‌دانان تصمیم گرفتند که همانند قبل از دستگاهِ کلاسیک ریاضیات پیروی کنند. هرچه باشد ریاضیاتِ کلاسیک ثمراتِ زیبا و سودمندی دارد، و با وجودِ اینکه دیگر نمی‌شد از قابلِ اعتماد بودنش اطمینانِ مطلق داشت، پایه‌هایش حداقل به اندازهٔ پایه‌های مفهومِ الکترون مستحکم است. بنابراین اگر کسی حاضر به پذیرشِ علوم بود، باید می‌توانست دستگاهِ کلاسیک ریاضیات را نیز بپذیرد. چنین دیدگاهی حتی توسطِ بعضی از مبدعین و طرفدارانِ شهودگرایی مقبول بود. در حالِ حاضر پروندهٔ مناقشه در مبانیِ ریاضیات بسته نشده است، ولی به نظر بعید می‌آید که سوایِ عدّهٔ اندکی، ریاضی‌دانان دستگاهِ کلاسیکِشان را کنار بگذارند.

من ماجرایِ مناقشه در مبانیِ ریاضیات را به این علت با جزئیات نقل کردم چون باور دارم که بهترین هشدار علیه باور به نامتغیر بودن مفهومِ دقتِ ریاضیات است. این ماجرا در زمانهٔ ما رخ داد و هنوز به یاد دارم که با چه شرمندگی نظرِ خودم در موردِ حقایقِ مطلقِ ریاضی در طول این مناقشه سه بار پشتِ سرِ هم عوض شد!

امیدوارم سه نمونهٔ یادشده نیمی از مدعایم را به تصویر کشیده باشد مبنی‌بر اینکه بسیاری از والاترین الهاماتِ ریاضی از تجربه سرچشمه می‌گیرد و اینکه به سختی بتوان پذیرفت که دقتِ ریاضی مفهومی مطلق است که از همهٔ تجاربِ انسانی مستقل است. سعی من در اینجا این است که برخوردم با این موضوع ملموس و نسبتاً سرراست باشد. هر آنچه سلیقهٔ فلسفی یا معرفت‌شناسیِ کسی باشد، تجربهٔ واقعیِ اصنافِ ریاضی‌دانان با کارشان به اندازهٔ کمی مؤیدِ این فرض است که مفهومِ دقتِ ریاضی از مفاهیمِ پیشینی[۲] است. ولی مدعای من در مورد دوچهرگیِ ریاضیات نیمهٔ دیگری نیز دارد که اکنون به آن خواهم پرداخت.

برایِ یک ریاضی‌دان بسیار دشوار است که باور کند ریاضیات علمِ تجربیِ ناب است، و یا اینکه همهٔ آرایِ ریاضی از موضوعاتِ تجربی سرچشمه می‌گیرند. اجازه بدهید به نکتهٔ اول بپردازیم. بخش‌هایِ متعددی از ریاضیاتِ نوین وجود دارد که ردِ پایی از تجربه در آن‌ها دیده نمی‌شود، و یا اگر ردِ پایی هست آن قدر دور است که روشن می‌کند که موضوع از موقعی که از تجربه جدا شده است

۱. برای آشنایی با یکی از دیدگاهایِ شاخصِ و تأثیرگذار معاصر دربارهٔ برنامهٔ هیلبرت و رابطهٔ آن با رشتهٔ معاصرِ «ریاضیاتِ معکوس»، مقالهٔ Foundations of mathematics: An optimistic message پیشنهاد می‌شود که نسخهٔ پیش از انتشار آن در این نشانی https://sgslogic.net/t20/papers/fomopt.pdf موجود است.

۲. اشاره به دوگانهٔ کانتیِ پیشینی- پسینی است.

دچارِ دگرگونی تمام‌عیاری شده است. نمادگذاریِ جبر برایِ کاربردهایِ روزمرهٔ ریاضی اختراع شد ولی می‌توان این ادعا را معقول شمرد که ریشه‌های جبر تجربی است، ولی جبرِ مجردِ نوین بیشتر در جهاتی گسترش یافته است که ارتباطاتِ تجربی کمتری دارند. همین حرف در موردِ توپولوژی هم مصداق دارد؛ و در تمامیِ این رشته‌ها سنجهٔ ذهنیِ موفقیتِ ریاضی‌دان و اینکه زحمتی که کشیده است به نتایجی که کسب کرده است بیارزد، تا حد زیادی خودکفایی و هنرمندانه بودن است و آزادی و یا تقریباً آزادی (در این مورد به‌زودی توضیحِ بیشتری خواهم داد). در نظریهٔ مجموعه‌ها این موضوع روشن‌تر است. مفهومِ «عددِ اصلی» و «ترتیب» یک مجموعهٔ نامتناهی ممکن است تعمیمی از مفاهیم عددیِ متناهی باشد، ولیِ شکلِ بی‌نهایتِ آن‌ها (به‌ویژه «عددِ اصلی») کمتر رابطه‌ای با جهان خارجی دارد. اگر قصد نداشتم که از نکاتِ فنی حذر کنم ادعایم را با ارائهٔ تعدادی نمونه از نظریهٔ مجموعه‌ها مستند می‌کردم. به‌طورِ نمونه مسئلهٔ «اصلِ انتخاب»، «مقایسه‌پذیری»، «اعدادِ نامتناهی»، «مسئلهٔ پیوستار»، و غیره. همین حرف‌ها را می‌توان دربارهٔ نظریهٔ توابعِ حقیقی و نظریهٔ مجموعه‌هایِ حقیقی[1] نیز گفت. دو نمونهٔ عجیب‌وغریبْ هندسهٔ دیفرانسیل و نظریهٔ گروه‌ها هستند که قطعاً به عنوانِ مباحثِ مجرد و غیرِکاربردی معرفی شدند و با این دیدگاه گسترش یافتند. بعداز گذشتِ یک دهه در موردِ اولی و یک قرن در مورد دومی در فیزیک بسیار به‌دردبخور شناخته شدند ولی هنوز بیشتر در شیوهٔ مجرد و غیرِکاربردی مطالعه می‌شوند. نمونه‌هایِ بسیار بیشتری از این شرایط و ترکیباتشان می‌توان ارائه داد ولی من ترجیح می‌دهم که به نکتهٔ اول بگردم: آیا ریاضیات تجربی است؟ یا دقیق‌تر: آیا کنشِ ریاضیات با کنشِ علومِ تجربی یکی است؟ و یا باز هم کلّی‌تر: رابطهٔ عادی ریاضی‌دان با موضوع کارش چیست؟ سنجه‌هایِ او برای کامیابی و آرمانی‌بودن کدام‌اند؟ چه تأثیرات و ملاحظاتی تلاش او را جهت می‌دهند و مهار می‌کنند؟

پس بگذارید ببینیم از چه لحاظی کارِ یک ریاضی‌دان با کسی که در علومِ طبیعی کار می‌کند فرق دارد. هر چقدر از علومِ نظری به علومِ تجربی، و از علومِ تجربی به علومِ توصیفی حرکت کنیم، تفاوتِ میانِ این دو بیشتر به چشم می‌آید. بنابراین بیایید ریاضیات را با دسته‌ای از علوم نظری که به آن نزدیک‌ترند مقایسه کنیم، و در دستهٔ مزبور رشته‌ای را که به ریاضیات نزدیک‌تر است انتخاب کنیم. امیدوارم مرا سرزنش نکنید که نتوانم غرورِ ریاضیم را مهار کنم و بگویم که در میانِ علومِ نظری، فیزیکِ نظری از همه توسعه‌یافته‌تر است. ریاضیات و فیزیکِ نظری مشترکاتِ فراوانی دارند. همان‌طور که قبلاً اشاره کردم دستگاهِ اقلیدسیِ هندسه سرمشقِ ارائهٔ اصلِ موضوعیِ مکانیکِ

۱. اینجا منظور از حقیقی همان اعدادِ حقیقی است.

کلاسیک شد، و همین رویه در بعضی دوران در موردِ بخش‌هایِ به‌خصوصی از ترمودینامیکِ ماکسولی و نسبیّتِ خاص چیرگی داشت. به‌علاوه، این دیدگاه که فیزیکِ نظری پدیده‌ها را توضیح نمی‌دهد بلکه آن‌ها را دسته‌بندی و با یکدیگر همبسته می‌کند توسط بیشترِ فیزیک‌دانان پذیرفته شده است. این به این معنی است که محکِ موفقیتِ یک نظریه این است که بتواند با استفاده از طرحِ خاصی تعدادِ زیادی از پدیده‌هایی را دسته‌بندی و همبستگیِ آن‌ها را با یکدیگر روشن کند که قبل از معرفیِ نظریهٔ مزبور پدیده‌های پیچیده و ناهمگنی می‌نمودند، و یا حتی قابلِ رصد نبودند (این دو جنبهٔ آخری معرفِ قدرتِ یکپارچه‌سازی و پیش‌بینیِ یک نظریه هستند). این معیار همان‌طور که قبلاً اشاره کردم به‌روشنی تا اندازهٔ زیادی ذاتِ زیباشناسانه دارد. به این دلیل شباهتِ زیادی به معیارِ موفقیت ریاضیات دارد، که همان‌طور که خواهیم دید، تقریباً بر مبنایِ ملاحظاتِ هنرمندانه است. بنابراین ریاضیات را با یکی از علومِ تجربی مقایسه می‌کنیم که از بقیه به آن نزدیک‌تر است، یعنی فیزیکِ نظری، و امیدوارم توانسته باشم نشان دهم که مشترکاتِ زیادی بینِ این دو وجود دارد. اهدافِ فیزیکِ نظری عموماً از «بیرون» داده می‌شوند و از نیازهایِ فیزیکِ آزمایشگاهی بر می‌خیزند، تقریباً همیشه ریشهٔ آن‌ها در حلِ معضلِ خاصی است. متعاقباً پیشرفت‌هایِ پیش‌بینی و یکپارچه‌سازی سر می‌رسند. اگر اجازه بدهید از تشبیهی سود خواهم جست: پیشرفت‌ها (پیش‌بینی و یکپارچه‌سازی) پس‌از نبردی با قوایِ متخاصمِ یک معضلِ قبلی (معمولاً تناقضی در دستگاهِ موجود)، درزمانِ تعقیبِ قوایِ متخاصمِ مزبور رخ می‌دهد. بخشی از کارِ یک فیزیک‌دانِ نظری جستجو برایِ یافتنِ چنین موانعی در برابرِ تناقض است که چه بسا راهگشا می‌شوند. همان‌طور که قبلاً گفتم این موانع از آزمایش‌ها سرچشمه می‌گیرد، ولی گاهی اوقات تناقضات میانِ بخش‌هایِ پذیرفته‌شدهٔ خود نظریه موجود است. از این نمونه‌ها فراوان یافت می‌شود.

آزمایشِ مایکلسون که به نسبیّت عام انجامید و ظهورِ مکانیکِ کوانتوم از معضلاتی در مورد پتانسیل‌هایِ یونش و بعضی ساختارهایِ طیف سنجی مصداقِ موردِ اول هستند، و ناسازگاری نسبیّتِ خاص و نظریهٔ گرانشِ نیوتونی که منتهی به نسبیّتِ عام شد مصداقِ موردِ دوم است که به‌مراتب از موردِ اول کمیاب‌تر است. به‌هرحال مسائلِ فیزیکِ نظری عینی هستند و بااین‌همه سنجه‌هایِ کامیابی در حلشان، همان‌طور که قبلاً اشاره کردم، زیباشناسانه است، ولی خودِ مسئله و آنچه پیشرفت نامیدم حقایقِ ملموس‌اند. ازاین‌رو مبحثِ فیزیکِ نظری تقریباً همیشه شدیداً متمرکز بوده است. به‌طورِ مثال بیشترِ اوقات تلاشِ فیزیک‌دانانِ نظری در دهه‌های ۱۹۲۰ و ۱۹۳۰ محدود بوده است بر یکی دو نظریه مربوط به میدان‌هایِ کوانتومی، و از دهۀ ۱۹۳۰ تاکنون بر یکی دو نظریه

در موردِ ذراتِ بنیادی و ساختار هستهٔ اتم تمرکز داشته است.

وضعیتِ ریاضیات کاملاً متفاوت است زیراکه ریاضیات به شاخه‌های بسیار زیادی تقسیم می‌شود که هریک سرشت و شیوه و اهداف و تأثیراتِ خودشان را دارند. ازاین‌لحاظ درست برعکسِ تمرکزِ شدید رشته‌های فیزیکِ نظری است. یک فیزیک‌دان نظریِ خوب این روزها هنوز بر بیش‌از نیمی از موضوع خود اشراف دارد. بعید می‌دانم که ریاضی‌دانی در این روزگار باشد که با بیش از یک‌چهارم ریاضیات رابطه‌ای داشته باشد. مسائل «عینی» و «مهم» می‌تواند پس‌از دوره‌ای طولانی از انشعاب و در پیِ تکاملِ موضوع ظهور کند به‌شرطی که به مشکلی برنخورده باشد که باعثِ رکودش شده باشد. حتی در این حالت هم یک ریاضی‌دان مختار است که آن را انتخاب کند یا رهایش کند و سراغ چیز دیگری برود، ولی در فیزیک نظری یک «مسئلهٔ مهم» یک تناقض و تضاد است که «باید» حل‌وفصل شود. یک ریاضی‌دان رشته‌هایِ مختلفی برای انتخاب دارد و آزادیِ این را دارد که چگونه با انتخابش رفتار کند. حالا می‌رسیم به نکتهٔ اساسی: تصور می‌کنم که می‌توانیم بگوییم که معیارِ انتخابِ ریاضی‌دان، و موفقیتش، در اصل زیباشناسانه هستند. متوجهِ هستم که حرفم بحث‌برانگیز است و قادر به «اثباتش» نیستم و مستند کردنش دشوار است، زیراکه لازمه‌اش بحثی بسیار فنی است که اینجا جایش نیست. همین قدر بگویم که شاخصهٔ زیباشناسانه حتی از آنچه دربارهٔ فیزیکِ نظری گفتم مشهودتر است. انتظاری که از یک قضیه یا نظریهٔ ریاضی داریم فقط این نیست که تعدادِ فراوان و به‌ظاهر گوناگون مواردی را توصیف کند، بلکه باید برخوردار از «معماری» و ساختارِ برازنده باشد.

در اینجا معیار ما بیانِ روانِ مسئله و درعینِ‌حال دشواریِ عظیم در درکِ آن علی‌رغمِ تلاش‌های متعدد برای رهیافت است، و اینکه پس‌از یک چرخشِ پیش‌بینی‌ناپذیر، راه یا حداقل بخشی از آن هموار شود. ضمناً اگر استدلال‌ها طولانی یا بغرنج هستند، باید بتوان اصلِ سادهٔ کلّی‌ای یافت که دست‌اندازها و بیراهه‌ها را توضیح دهد و آنچه را به نظر دلبخواهی می‌آید به انگیزه‌های راهگشا تبدیل کند. روشن است که این معیارها از آنِ هنرهای خلاقه هستند، و به وجودِ بسترِ تجربیِ دنیوی اشاره می‌کنند ــ معمولاً در دوردست‌ها ــ که انبوهی از آراستگی آن‌ها را پوشانده و در هزارتویِ اقسامِ مختلف پرورانده شده‌اند. تمامِ این‌ها حال‌وهوایِ هنرِ ناب و خالص را تداعی می‌کند تا علومِ تجربی.

ولی نکتهٔ دیگری هم هست که می‌خواهم به آن اشاره کنم. وقتی یک رشته از ریاضیات از سرچشمهٔ طبیعی‌اش دور می‌شود، و به‌ویژه اگر از نسلِ دوم یا سومی باشد که تنها به‌طورِ غیرِمستقیم

از ایده‌هایی از «واقعیت» الهام می‌پذیرد، با خطراتِ مهلکی مواجه می‌شود. چنین رشته‌ای بیشتر و بیشتر به جنبه‌های زیباشناسانه و «هنر برای هنر» می‌پردازد، که به‌تنهایی نقطه‌ضعفی نیست به‌شرطی که رشتهٔ مزبور با موضوعاتِ دیگری همبستگی داشته باشد که ارتباطاتِ تجربیِ بیشتری دارند، و یا اگر آدم‌هایی با ذوقِ فرهیخته در آن تأثیرگذار باشند. خطرِ مهلک این است که رشتهٔ مزبور در مسیر «کمترین مقاومت» حرکت کند و جریان، به دور از منبعش، به جویبارهای حقیر تقسیم شود و انبوهی از جزییاتِ بی‌ربط بسازند. به زبانِ دیگر، به‌دور از منبعِ تجربی، و یا پس‌از کلّی زاد و ولدِ درونی، یک موضوعِ ریاضی در خطرِ انحطاط قرار می‌گیرد. وقتی یک رشتهٔ ریاضی زاده می‌شود در آغاز معمولاً شیوهٔ کلاسیک دارد، ولی وقتی آثار و علائم باروک از خود بروز می‌دهد علائمِ خطر ظاهر می‌شوند. به‌راحتی می‌توان نمونه‌هایی از این روند را عرضه کرد، و تکامل از باروک به باروکِ عالی و بسیار عالی را مستند کرد، که این هم زیادی فنی می‌شود.[۱]

به‌هرجهت، وقتی این مرحله فرا می‌رسد، تنها راهِ درمان بازگشت به منبعِ طراوت‌بخش است: تزریقِ دوبارهٔ ایده‌های کمابیش تجربی. به باورِ من این شرطِ لازم برای حفظِ تازگی و سرزندگیِ مبحث بوده است و خواهد بود.

علی عنایت: سوئد، دانشگاه گوتنبرگ، گروه فلسفه، زبان شناسی، و نظریهٔ علوم
رایانامه: ali.enayat@gu.se

۱. اینجا اشارهٔ نویسنده به سبک‌شناسی در هنرهایِ اروپایی است. در این تقسیم‌بندی هنرهای تجسمی و معماری یونان و روم باستان به دورهٔ کلاسیک تعلق دارند، درحالی‌که دورهٔ باروک و انواعِ بعدیِ آن با تقلید و الهام از دورهٔ کلاسیک، و با افزودنِ تصنّعات و تجملّات هنری و فنی از قرنِ هفدهم میلادی به بعد در ایتالیا و سپس کشورهای آلمانی‌زبان شکل گرفت.

Mathematical Culture and Thought
Volume 43, Number 2, Fall/Winter 2024, Pages 173–184
doi: 10.30504/mct.2025.1507.2053

The Janus-facedness of Mathematics*

J. von Neumann
Translated by A. Enayat[1]

Department of Philosophy, Linguistics, and Theory of Science, Gothenburg, Sweden

Abstract. This is a translation of an article written by John von Neumann, one of the most outstanding mathematicians of the twentieth century, whose works have played a major role in shaping contemporary mathematics– both pure and applied. Without assuming the audience's deep familiarity with mathematics, the author elaborates his point of view about the dual nature of mathematics (dependence on experimental sciences, and independence from them). In the interest of better reflecting the content of the article, the original title "The Mathematician" has been changed to the current one.

Keywords: mathematical rigor, empirical science, axiomatic method, nature of mathematics
Article history: Recieved 26 November 2024; Accepted 1 January 2025
Article type: translation

* von Neumann, J., The mathematician, in *Works of the Mind*, R. B. Heywood, ed., University of Chicago Press, Chicago, 1947, 180-196.

1. ali.enayat@gu.se