

قضیه گلدی

احمد حقانی و منصور معتمدی

مقدمه

در دانش نامه آزاد اینترنتی ویکی پدیا^۱ و در ذیل «قضیه گلدی» چنین آمده است: «در ریاضیات، قضیه گلدی یک نتیجه ساختاری بنیادی در نظریه حلقه هاست که در دهه ۶۰-۱۹۵۰ میلادی توسط آلفرد گلدی^۲ (۱۹۲۰-۲۰۰۵) به اثبات رسید. قضیه گلدی در مورد حلقه های نوپتری دارای حلقه کسرها که یک حلقه نیم ساده آرتینی و از این رو بنا بر قضیه آرتین - ودربورن ساختار شناخته شده ای دارند، نتیجه ای را به دست می دهد... قضیه گلدی امروزه بدین گونه بیان می شود که حلقه های نیم اول راست گلدی تنها آنهایی اند که دارای حلقه کسرها راست نیم ساده آرتینی هستند». نویسندگان این مقاله که هر دوی آنها در مکتب گلدی در دانشگاه لیدز درس خوانده اند برای ادای دین به مرحوم استاد گلدی نوشتار حاضر را تقدیم خوانندگان فرهنگ و اندیشه ریاضی می نمایند. اهمیت، تأثیر و راه گشایی قضیه گلدی در جبر، به ویژه در نظریه حلقه ها فراوان بوده است و به طور قطع انجام پژوهش های بسیاری در جبر و دستیابی به نتایج مهمی در این زمینه را باید مدیون قضیه گلدی دانست. بیان وابستگی نتایج دیگران به قضیه گلدی و نقش آن در تحولات بعدی که تا به امروز ادامه دارد، خود می تواند مضمون نوشته بلند دیگری باشد. در واقع دانشگاه واریک در فروردین ۱۳۸۵ در بزرگداشت گلدی میزبان کنفرانسی سه روزه بود که در آن شرکت کنندگان و از جمله احمد حقانی غالباً به ارائه آن بخش از دستاوردهای خود پرداختند که به قضیه گلدی وابسته بود. در این مقاله می کوشیم زمینه های پیدایش قضیه گلدی و مفاهیمی را که در اثبات آن به کار رفته است، آشکار سازیم. در این مورد فرض می شود که خواننده با قضیه ساختاری آرتین - ودربورن آشنایی دارد. در آن چه که در پی خواهد آمد مقصود از حلقه کسرها، حلقه کسرها کلاسیک است که لزوماً با حلقه کسرها به معنایی دیگر یکی نیست.

۱. حلقه کسرها

در سال های پایانی سده نوزدهم میلادی گول^۳ از اعضای مکتب امی نوپتر^۴ مفهوم کسر در اعداد

1) Wikipedia 2) A.W. Goldie 3) H. Grell 4) E. Noether

را به دامنه‌های صحیح دلخواه، یعنی حلقه‌های تعویض‌پذیر بدون مقسوم علیه صفر، تعمیم داد. هیأت کسرهاى دامنه صحیح R شامل تمام دسته‌های هم‌ارزی است که با تعریف یک رابطه هم‌ارزی بر حاصل ضرب دکارتی به دست می‌آیند. بدین ترتیب ساختن هیأت کسرها به همان سادگی ساختن \mathbb{Q} از \mathbb{Z} است. مهم‌تر آن که این هیأت همواره وجود دارد و به طور یکتا مشخص می‌شود. در مورد حلقه‌های تعویض‌ناپذیر، اما، چنین نیست و وجود حلقه کسرها وابسته به برقراری شرطی موسوم به شرط اُر^۱ است. پیش از بیان و شرح این شرط، یادآوری چند تعریف ضروری می‌نماید.

تعریف. از این پس فرض می‌کنیم حلقه R واحددار است و لزوماً تعویض‌پذیر نیست. عضو $0 \neq a$ را یک مقسوم علیه راست صفر می‌نامیم، هرگاه $b \in R$ و $b \neq 0$ وجود داشته باشد که $ba = 0$. اگر $c \in R$ و $c \neq 0$ وجود داشته باشد که $ac = 0$ ، گوئیم a یک مقسوم علیه چپ صفر است. عضوی را که مقسوم علیه راست صفر و هم‌چنین مقسوم علیه چپ صفر نباشد، یک عضو منظم می‌نامیم. حلقه R را که لزوماً تعویض‌پذیر نیست یک دامنه می‌نامیم، هرگاه هر عضو ناصفر آن منظم باشد.

وان در واردن^۲، پس از حضور در کلاس‌های درس امی نویتر در گوتینگن، در ۱۹۲۷ میلادی کتاب معروف خود «جبر مدرن» [۲۱] را به رشته تحریر در آورد. وی در بخشی از این کتاب، پس از اثبات این که هر دامنه صحیح تعویض‌پذیر را می‌توان در یک هیأت نشانده، این پرسش را مطرح می‌کند که آیا هر دامنه تعویض‌ناپذیر را می‌توان در یک حلقه تقسیمی نشانده؟ ملسف^۳ که توسط کلموگرف^۴ از این پرسش آگاه شده بود توانست به آن پاسخ دهد. نامبرده نخست مثالی از یک دامنه تعویض‌پذیر ارائه داد که نیم گروه ضربی آن را نمی‌توان در یک گروه نشانده [۱۷] ملسف در مقاله‌ای که دو سال پس از آن منتشر کرد یک شرط لازم و کافی برای نشانده یک نیم گروه در یک گروه را به دست آورد. وان در واردن در ویرایش دوم کتاب خود در یک پانوشت با ارجاع به مقاله ملسف یادآور شده است که دامنه‌ها را لزوماً نمی‌توان در یک حلقه تقسیمی نشانده. چنین دامنه‌هایی را امروزه دامنه‌های ملسف می‌نامند. به هر حال مثال ملسف به ویژه نشان می‌دهد که یک دامنه لزوماً دارای حلقه کسرها نیست.

اُر با رهیافتی متفاوت توانست یک شرط لازم و کافی برای وجود حلقه کسرها بیابد [۱۹]. پیش از ادامه لازم است به تعریف حلقه کسرها بپردازیم.

تعریف. حلقه Q یک حلقه کسرهاى (راست) حلقه R نامیده می‌شود هرگاه

$$R \subseteq Q$$

(ب) هر عضو منظم c دارای وارون c^{-1} در Q باشد،

(پ) هر عضو Q را بتوان به شکل ac^{-1} نوشت که در آن a و c عضوهای R هستند و c در R منظم است.

1) Ore 2) B. L. Vander Warden 3) Malsev 4) Kolmogrov

اینک اگر توجه کنیم که $c^{-1}a$ یک عضو Q است، باید a_1 و c_1 (منظم) در R وجود داشته باشند که $c^{-1}a = a_1c_1^{-1}$ ، یا این که $ca_1 = ac_1$. بنابراین یک شرط لازم برای وجود حلقه کسرها برقراری شرطی است بنام شرط a که می‌توان آن را به شکل زیر بیان کرد.

شرط a . اگر S مجموعه عضوهای منظم حلقه R ، $a \in R$ و $d \in S$ ، آن گاه

$$aS \cap dR \neq \emptyset$$

اهمیت شرط a در کافی بودن آن برای وجود حلقه کسرهاست.

قضیه ۱. حلقه R دارای حلقه کلی کسرها (راست) است اگر و تنها اگر در شرط a صدق کند. این قضیه، نخست برای دامنه‌ها اثبات شد و سپس دبریل 1 آن را در حالت کلی اثبات کرد [۸]. خواننده برای اثبات می‌تواند مرجع [۱] را ببیند. اگر R یک دامنه باشد، شرط a هم ارز با این گزاره است که برای عضوهای ناصفر a و c اشتراک دو ایدال راست اصلی aR و cR ناصفر باشد. در این حالت هر عضو ناصفر حلقه R در حلقه کسرها واریس و پذیراست، پس حلقه کسرها یک دامنه، به شرط وجود، یک حلقه تقسیمی است. اینک لازم است دامنه‌ای مثال زده شود که در شرط a صدق نمی‌کند.

مثال. فرض کنیم K یک هیأت و $\langle x, y \rangle$ جبر تعویض ناپذیر و آزاد روی K باشد. می‌توان نشان داد که اشتراک دو ایدال $\langle x, y \rangle$ و $\langle y, x \rangle$ برابر با صفر است و از این رو این حلقه در شرط a صدق نمی‌کند.

از طرف دیگر a مثال‌هایی از دامنه‌های تعویض ناپذیر ارائه داد که در شرط a صدق می‌کنند [۱۹].

این دامنه‌ها را توسیع‌های a می‌نامند. فرض کنیم R یک دامنه و d یک مشتق آن باشد. یک مشتق حلقه R یک هم‌ریختی گروه جمعی R است که تساوی $d(aa') = ad(a') + a'd(a)$ برای هر دو عضو a و a' برقرار باشد. a نشان داد که برای هر مشتق d حلقه R حلقه‌ای به نام حلقه چندجمله‌ای‌های کج $R[y, d]$ ساخته می‌شود که هر عضو آن ترکیب خطی متناهی از توان‌های y و ضرایب در R است. این ضرایب در سمت راست نوشته می‌شوند. هم چنین ry برابر با $yr + d(r)$ تعریف می‌شود. a نشان داد که اگر R یک حلقه تقسیمی باشد، آن گاه $R[y, d]$ در شرط a صدق می‌کند و از این رو دارای حلقه کسرهاست. بدیهی است که $R[y, d]$ یک توسیع R است. نتیجه a بعدها به شکل تعمیم یافته زیر در آمد.

قضیه ۲. هرگاه حلقه R در شرط a صدق کند، آن گاه برای هر مشتق d حلقه R ، $R[y, d]$ نیز در شرط a صدق می‌کند. برای اثبات (رک ۴). یکی از مثال‌های توسیع a و شاید با اهمیت‌ترین آن‌ها جبر کوانتومی یا جبر وایل 2 است.

مثال (جبر کوانتومی یا جبر وایل) فرض کنیم k یک هیأت با مشخصه صفر باشد و $R = k[x]$. اگر d

مشتق‌گیری معمولی نسبت به x باشد، توسیع $R[y, d]$ که می‌توان آن را با $k[x, y, d]$ نشان داد جبر کوانتومی یا جبر وایل نامیده می‌شود. سبب پیدایش و نام‌گذاری این جبر دنباله‌ای از مقاله‌هاست که در آن دیراک^۱ سعی کرده است، با تعبیر خود، مکانیک کوانتومی را توضیح دهد [۷]. هم‌چنین لیتل‌وود^۲ نشان داده است که شرط^۳ در مورد این جبر برقرار است [۱۹].

در پی‌گیری مطالعه حلقه کسرها و اثبات قضیه گلدی توجه به تعریف زیر ضروری است.

تعریف. ایدال راست E در حلقه R را اساسی می‌نامیم و می‌نویسم $E \leq_e R$ ، هرگاه اشتراک E با هر ایدال ناصفر R ، ناصفر باشد.

قضیه^۳. فرض کنیم R یک حلقه و S مجموعه عضوهای منظم آن باشد. اگر R در شرط اِصدق کند و Q حلقه کسرها باشد، آن‌گاه

- (الف) اگر $d_1, d_2, \dots, d_n \in S$ ، آن‌گاه $d_1 R \cap d_2 R \cap \dots \cap d_n R$ ، شامل یک عضو منظم است،
 (ب) برای $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ و $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$ عضو $d \in S$ وجود دارد که برای هر $x_i = c_i d^{-1}$ ، $1 \leq i \leq n$ (وجود مخرج مشترک)،
 (پ) اگر A یک ایدال راست R باشد، آن‌گاه $AQ = \{ad^{-1} : a \in A, d \in S\}$
 (ت) اگر B یک ایدال راست Q باشد، آن‌گاه $B = (B \cap R)Q$
 (ث) اگر A و B ایدال‌های راست R باشند، آن‌گاه $AQ \cap BQ = (A \cap B)Q$ ،
 (ج) اگر E یک ایدال راست R باشد، آن‌گاه $E \leq_e R$ ، اگر و تنها اگر $EQ \leq_e Q$.

اثبات. (الف) کافی است حالت $n = 2$ را بررسی کنیم. فرض کنیم $d = d_1$ و $a = d_2$ در این صورت به موجب برقراری شرط^۳ $c \in S$ و $b \in R$ وجود دارد که $d_1 c = db = d_2 b$ بنابراین $d_1 c \in d_1 R \cap d_2 R$ عضو منظم است.

(ب) نخست توجه می‌کنیم که (الف) نشان می‌دهد اگر $d \in d_1 R \cap d_2 R \cap \dots \cap d_n R$ آن‌گاه $d = d_1 a_1 = d_2 a_2 = \dots = d_n a_n$ و بنابراین $d_i^{-1} = a_i d^{-1}$ ، $1 \leq i \leq n$. اگر قرار دهیم $x_1 = a_1 d^{-1}$ ، $x_2 = a_2 d^{-1}$ ، \dots ، $x_n = a_n d^{-1}$ وجود دارد که $b_i x_n = a_i d^{-1}$ ، $(i = 1, 2, \dots, n)$ از این‌جا نتیجه می‌گیریم که $x_1 = a_1 b_1 d^{-1}$ و $x_2 = a_2 b_2 d^{-1}$ و \dots و $x_n = a_n b_n d^{-1}$.

(پ) فرض کنیم $x \in AQ$ ، پس $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ که در آن $x_i \in Q$ و $a_i \in A$ ($i = 1, 2, \dots, n$). برای هر i ، $b \in R$ و $d \in S$ هست که $x_i = b_i d^{-1}$ پس $x = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) d^{-1}$.

(ت و ث). اثبات را به عهده خواننده می‌گذاریم.

(ج) فرض کنیم $E \leq_e R$ و $B \neq 0$. یک ایدال راست Q باشد. به موجب (ت)، $B = (B \cap R)Q$.

1) P. A. M. Dirac 2) D. E. Littlewood

پس $(B \cap R) \cap E \neq O$ که نتیجه می‌دهد $(B \cap R)Q \cap EQ \neq O$ زیرا که بنا به (ث) $EQ \leq_e Q$ به عکس فرض کنیم $EQ \leq_e Q$ در نتیجه $(B \cap R)Q \cap EQ = (B \cap R \cap E)Q$ در آن E یک ایدآل راست R است. اگر $O \neq A$ یک ایدآل راست R باشد، $AQ \cap EQ \neq O$ اما $AQ \cap EQ = (A \cap E)Q \neq O$ و بنابراین $A \cap E \neq O$.

۲. پژوهش‌های جیکوبسن^۱

در دهه چهارم سده بیستم میلادی، یکی از وجوه پژوهش در نظریه حلقه‌های تعویض ناپذیر مطالعه ساختاری حلقه‌ها بدون گذاشتن هیچ قیدی بر روی آن‌ها بوده است. در این مورد موفق‌ترین رهیافت از آن جیکوبسن بود. گلدی در پژوهش‌های نخستین خود تحت تأثیر آثار جیکوبسن به ویژه کتاب ماندگار وی [۱۴] قرار داشت. یکی از مفاهیم اصلی کارهای جیکوبسن را می‌توان این گونه بیان کرد: فرض کنیم R یک حلقه و M یک ایدآل راست ماکسیمال آن باشد، قرار می‌دهیم.

$$(M : R) = \{x \in R : Rx \subseteq M\}$$

ایدآل دو طرفه I را یک ایدآل اولیه راست R می‌نامیم هرگاه مشمول در یک ایدآل (راست) ماکسیمال M باشد به طوری که $(M : R) = I$. حلقه R را یک ایدآل اولیه (راست) می‌نامیم، هرگاه ایدآل صفر یک ایدآل اولیه (راست) آن باشد. به سبب این که $(M : R)$ همواره یک ایدآل دو طرفه R است، دانسته می‌شود که حلقه‌های ساده، یعنی حلقه‌های ناصفری که تنها ایدآل ناصفرشان R است، حلقه‌های اولیه هستند. می‌توان نشان داد که جبر کوانتومی یک حلقه ساده است. یکی از مهم‌ترین ایدآل‌های دو طرفه در هر حلقه اشتراک تمام ایدآل‌های اولیه (راست) آن حلقه است. این ایدآل را رادیکال جیکوبسن R می‌نامند و آن را با $J(R)$ نشان می‌دهند. جیکوبسن حلقه‌هایی را که در آن $J(R) = 0$ ، نیم‌ساده می‌نامد. به سبب این که همواره $R/J(R)$ حلقه‌ای نیم‌ساده است، با هر حلقه می‌توان یک حلقه نیم‌ساده ساخت. جیکوبسن هم‌چنین نشان داد که هر حلقه نیم‌ساده را می‌توان در حاصل ضرب مستقیم حلقه‌های اولیه نشان داد به طوری که تصویر آن بر روی هر یک از عامل‌های ضرب، پوشا باشد (زیر حاصل ضرب مستقیم). از ابداعات دیگر جیکوبسن، تعریف یک توپولوژی بر روی مجموعه تمام ایدآل‌های اولیه حلقه R است. این توپولوژی با توپولوژی زاریسکی که بر مجموعه ایدآل‌های اول یک حلقه تعویض‌پذیر تعریف می‌شود مطابقت دارد. جیکوبسن این توپولوژی را فضای ساختاری R نامیده است. نخستین مقاله گلدی در نظریه حلقه‌ها مطالعه خواص حلقه‌های نیم‌ساده است که در آن بررسی فضاهای ساختاری یک حلقه را به مطالعه فضای ساختاری ایدآل‌های دو طرفه آن (به عنوان حلقه‌های بدون واحد) کاهش می‌دهد. این نتایج در کتاب جیکوبسن با پانوشتی که به کارهای گلدی استناد می‌شود درج شده است. [۱۴]

1) N. Jacobson

۳. دامنه‌های نوپتری

در اوایل دهه پنجم سده بیستم میلادی باز هم علاقه به حلقه کسرها در محافل جبری به وجود آمده بود. تاماری^۱ نشان داد که جبر پوشی^۲ یک جبر لی متناهی - بعد در شرط اُر صدق می‌کند و از این رو حلقه کسرها آن وجود دارد [۲۵]. جبر پوشی نقش اساسی در مطالعه نظریه جبرهای لی دارد و خواص جبری آن شناخته شده است. این جبرها دامنه‌های نوپتری نیز هستند. در همان سال‌ها آمیتسر^۳ نشان داد که هر دامنه اتحاد چند جمله‌ای^۴ (حلقه‌هایی که بسیاری از خواص حلقه‌های تعویض‌پذیر را دارا هستند) در شرط اُر صدق می‌کنند [۳]. در کنگره بین‌المللی ریاضی دانان که در سال ۱۹۵۴ میلادی در آمستردام هلند برگزار شد، جیکوبسن، در ملاقات با گلدی، وی را تشویق کرد که حدسیه معروف خود را به حلقه‌های نوپتری را ثابت کند.

حدسیه جیکوبسن. اگر R یک حلقه نوپتری راست و چپ باشد، آن گاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} (J(R))^n = 0$. این حدسیه در مورد حلقه‌های تعویض‌پذیر R درست است (قضیه اشتراک کرول^۴). هرشتاین^۴ با ارائه یک مثال نشان داد که اگر R نوپتری راست باشد، اما نوپتری چپ نباشد این حدسیه برای آن درست نیست و مسأله اصلی هنوز مفتوح است. در بررسی این حدسیه لازم بود که به مطالعه حلقه‌های اولیه نوپتری پرداخته شود. گلدی در این مسیر ابتدا دامنه‌های ساده نوپتری را در نظر گرفت. وی با کارهای اُر، مقاله لیتلوود، جبر کوانتومی و نتایج تاماری آشنا بود و توانست با استفاده از شرط اُر نشان دهد که هر دامنه نوپتری دارای حلقه کسرهاست. گلدی این نتیجه را در سال ۱۹۵۶ اثبات کرد. در این جا اثباتی ساده از آن آورده می‌شود. هم چنان که پیش‌تر گفته شد، برقراری شرط اُر در دامنه‌ها بدین معنی است که برای هر دو عضو ناصفر a و c ، $aR \cap cR \neq 0$. فرض کنیم $aR \cap cR = 0$. نشان می‌دهیم که در این صورت مجموع $aR + caR + c^2aR + \dots + c^naR$ برای هر $n \geq 1$ یک مجموع مستقیم است. در واقع اگر این گونه نباشد، r_0, r_1, \dots, r_n در R وجود دارند که همگی صفر نیستند و

$$ar_0 + car_1 + c^2ar_2 + \dots + c^nar_n = 0$$

پس

$$car_1 + c^2ar_2 + \dots + c^nar_n = -ar_0$$

اما فرض شده است که $aR \cap cR = 0$ ، پس $r_0 = 0$ و

$$car_0 + car_1 + c^2ar_2 + \dots + c^nar_n = 0$$

از آن جا که $c \neq 0$ و R یک دامنه است، می‌توان c را حذف کرد. پس

1) D. Tamari 2) envelopping algebra 3) S. A. Amitsur 4) polynomial identity domain
3) W. Krull 4) I. N. Herstein

$$ar_0 + ca_1 + \dots + c^{n-1} ar_n = 0$$

و ادعا به استقرا اثبات می‌شود. اما وجود این مجموع‌های مستقیم ایجاب می‌کند که زنجیر افزایشی

$$aR \subset aR \oplus caR \subset aR \oplus caR \oplus c^2 aR \subset \dots$$

اکید و از این رو R نویتری نباشد که چنین نیست.

گلدی در ملاقاتی که با برآور^۵، از پیش‌گامان مطالعه جبرهای متناهی بعد و کاشف نمایش‌های مدولار داشت این نتیجه را به اطلاع وی رساند و توضیح داد که در گام بعد باید ماتریس‌ها بر دامنه‌ها را در نظر گرفت و بدین ترتیب مورد تشویق و تأیید قرار گرفت. آن چنان که گلدی خود بارها به همکاران و دانشجویان خود اظهار می‌داشت، پس از کار مستمر بر روی نمایش حلقه‌ها سرانجام وجود عضوهای منظم در ایدآل‌های راست اساسی مطرح می‌شود. از این پس ادامه کار چندان مشکل نبوده است.

۴. حلقه‌های اول

حلقه اول حلقه‌ای است که حاصل ضرب هر دو ایدآل ناصفر آن، ناصفر باشد. آشکار است که دامنه‌ها، حلقه‌های اولند، لیکن مثال حلقه ماتریس‌های $n \times n$ ($n > 1$) با درآیه‌ها در یک حلقه تقسیمی، نشان می‌دهد که، حلقه‌های اول لزوماً دامنه نیستند. می‌دانیم حلقه ماتریس‌ها با انتخاب درآیه‌ها از یک دامنه، حلقه‌های اول هستند. اما آیا هر حلقه اول به این شکل است. پاسخ منفی است. گلدی نشان داد که حلقه کسرهای یک حلقه اول نویتری وجود دارد و افزون بر آن حلقه‌ای ساده و آریتی است. برای مثال $M_n(\mathbb{Q})$ حلقه کسرهای $M_n(\mathbb{Z})$ است. در ادامه، فرض می‌کنیم که R یک حلقه اول نویتری راست است. اگر R دارای حلقه کلاسیک کسرها باشد باید در شرط اول صدق کند. بنابراین اگر $a, c \in R$ و c منظم باشد، a_1 و $c_1 \in R$ وجود دارند که $ca_1 = ac_1$ و c_1 منظم است، به ویژه اگر $a \neq 0$ ، $ca_1 = ac_1$ یک عضو ناصفر $aR \cap cR$ است. بنابراین در ابتدا، اگر بتوان، باید ثابت کرد که: اگر c یک عضو منظم حلقه R و اگر $a \in R$ ، آن گاه

$$cR \cap aR \neq 0 \quad (*)$$

درستی این بیان، پیش‌تر در مورد دامنه‌ها به اثبات رسیده است. آیا نباید با رهیافت مشابهی به اثبات آن پرداخت؟ پاسخ مثبت است. نخست یکی از مفاهیم اصلی را که در اثبات قضیه گلدی به کار می‌رود و علاوه بر آن به تنهایی در گسترش و تعمیق نظریه حلقه‌ها و مدول‌ها مؤثر بوده مورد توجه قرار می‌دهیم [۹].

تعریف. ایدآل U در حلقه R یکنواخت نامیده می‌شود هرگاه اشتراک هر دو ایدآل ناصفر R ، مشمول در U ناصفر باشد.

1) R. Brauer

از استدلال بیان شده در بخش ۳ چنین نتیجه می‌شود که هر ایدال ناصفر یک دامنه نوبتری، یکنواخت است، اما در مورد حلقه‌های اول نوبتری نتیجه ضعیف‌تری وجود دارد.

لم ۱. هر ایدال راست و ناصفر یک حلقه اول نوبتری شامل یک ایدال راست یکنواخت است. اثبات. فرض کنیم چنین نیست و I یک ایدال ناصفر راست حلقه R است که شامل هیچ ایدال راست یکنواختی نیست. پس I شامل دو ایدال ناصفر I_1 و I'_1 است که $I_1 \cap I'_1 = \circ$. اینک I_1 شامل ایدال راست یکنواختی نیست، زیرا در غیر این صورت I شامل چنین ایدال راستی خواهد بود که تناقض است. پس باید دو ایدال راست I_2 و I'_2 مشمول در I_1 وجود داشته که $I_2 \cap I'_2 = \circ$ به علاوه چون $I_1 \cap I'_1 = \circ$ و $I'_2 \subset I_1$ ، نتیجه می‌گیریم که $I'_2 + I'_1$ یک مجموع مستقیم است. با ادامه این روند ایدال‌های راست I'_1, I'_2, I'_3, \dots ساخته می‌شوند به طوری که

$$I'_1 \oplus I'_2 \oplus I'_3 \oplus \dots$$

یک مجموع مستقیم نامتناهی از ایدال‌های راست ناصفر است که با شرط نوبتری بودن R تناقض دارد.

اینک فرض کنیم I یک ایدال راست ناصفر R و Ω مجموعه تمام مجموع‌های مستقیم ایدال‌های راست یکنواخت در I باشد. بنا به لم قبل Ω تهی نیست و از این رو باید دارای یک عضو ماکسیمال باشد. بنابراین I شامل یک مجموع مستقیم متناهی ماکسیمال است. در این جا ماکسیمال بدین معنی است که نمی‌توان جمع‌وند دیگری به آن افزود تا مجموع جدید هم‌چنان مستقیم باشد. از آن جا که هر مجموع مستقیم ماکسیمال از ایدال‌های راست یکنواخت R باید در R اساسی باشد، روشی برای ساختن ایدال‌های راست اساسی به دست می‌آید.

گلدی نشان داد که در حلقه R تعداد جمع‌وندها در هر مجموع مستقیم ماکسیمال ایدال‌های راست یکنواخت، مشمول در I یک ناوردای I است. اثبات این ادعا شبیه اثبات ناوردایی عدد اصلی یک پایه برای فضاهای برداری متناهی - بعد است. این ناوردا، اینک در متون به بعد یکنواخت، بعد گلدی یا رتبه گلدی موسوم شده است [۲] - ادعای (*) اینک با توجه لم زیر به اثبات می‌رسد.

لم ۲. اگر c یک عضو منظم حلقه R باشد، آن گاه cR یک ایدال راست اساسی R است.

اثبات فرض کنیم c یک عضو منظم R باشد. از آن جا که R نوبتری فرض شده است، بعد گلدی آن متناهی و برابر با عدد n است. پس ایدال‌های راست یکنواخت U_1, U_2, \dots, U_n وجود دارند به طوری که $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$ یک مجموع مستقیم ماکسیمال است. اما c یک عضو منظم و هر U_i یکنواخت می‌باشد پس $cU_i \neq \circ$ ، $i = 1, \dots, n$ و از طرفی هر ایدال ناصفر راست مشمول در cU_i باید به شکل cI باشد که $I \subset U$ یک ایدال راست R است. چنان‌چه cJ ایدال ناصفر راست دیگری مشمول در U_i باشد، $I \cap J \neq \circ$ ، زیرا که U_i یکنواخت است. به سبب منظم بودن c داریم

$$cI \cap cJ = c(I \cap J) \neq \circ$$

بنابراین cU_1, cU_2, \dots ایدال‌های راست یکنواخت R هستند. از آن جا که بعد گلدی R برابر با n

فرض شده است، نتیجه می‌گیریم که $cU_1 \oplus cU_2 \oplus \dots \oplus cU_n$ یک مجموع مستقیم ماکسیمال دیگر در R است. حال فرض کنیم L یک ایدآل راست R باشد، در این صورت L شامل یک ایدآل راست یکنواخت مانند V بوده و از آن جا که $V \neq 0$ و $cU_1 \oplus cU_2 \oplus \dots \oplus cU_n$ ماکسیمال است داریم

$$0 \neq (cU_1 \oplus cU_2 \oplus \dots \oplus cU_n) \cap cv \subseteq cR \cap L$$

که لم را اثبات می‌کند.

لم فوق ایجاب می‌کند که اگر c یک عضو منظم باشد $cR \cap aR \neq 0$ و در نتیجه عضوهای ناصفر $b_1 \in R$ و $b_2 \in R$ وجود دارند به طوری که $cb_1 = ab_2$. اما برای اثبات برقراری شرط، باید بتوان b_1 و b_2 را چنان انتخاب کرد که b_2 در R منظم باشد، به عبارت دیگر باید نشان دهیم که

$$E = \{x \in R : ax \in R\}$$

شامل یک عضو منظم است. اما E یک ایدآل راست R است. از طرفی به سبب منظم بودن c ، با توجه به لم قبل به سادگی می‌توان نشان داد که E نیز در R اساسی است. برای نیل به هدف نهایی اثبات حدسیه زیر کافی به نظر می‌رسد.

حدسیه: هر ایدآل راست اساسی شامل یک عضو منظم است.

باید توجه کرد که انتظار داریم Q حلقه کسرها R ، یک حلقه ساده و آرئینی باشد. فرض کنیم E یک ایدآل راست اساسی R باشد، در این صورت بنا به قضیه ۱ (ج) EQ یک ایدآل راست اساسی Q است. به سبب این که Q یک حلقه ساده و آرئینی است، هر ایدآل راست آن یک جمع‌وند آن است، از این رو اساسی بودن QE نتیجه می‌دهد که $EQ = Q$ ، به ویژه به ازای یک $a \in E$ ، $1 = ac^{-1}$ و در نتیجه $c = a \in E$. اینک قضیه زیر اثبات شده است.

قضیه ۴. اگر حلقه R دارای حلقه کسرها باشد که ساده و آرئینی است آن گاه هر ایدآل راست اساسی R شامل یک عضو منظم است.

۵. نتیجه اساسی

هدف اصلی این بخش اثبات حدسیه بخش قبل است. یادآوری چند تعریف ضروری به نظر می‌رسد. فرض کنیم a یک عضو حلقه R باشد. پوچ‌ساز راست a ایدآل راست $r(a) = \{x \in R : ax = 0\}$ است. پوچ‌ساز چپ a به طریق مشابه تعریف می‌شود. آشکار است که a منظم است اگر و تنها اگر $r(a) = l(a) = 0$. عضو a را پوچ‌توان می‌نامیم هرگاه به ازای یک عدد طبیعی مانند n ، $a^n = 0$. ایدآل I را پوچ می‌نامیم، هرگاه هر عضو آن پوچ‌توان باشد. از اثبات لم بعد صرف‌نظر می‌کنیم.

لم ۳. اگر R یک حلقه اول نویتری باشد، شامل ایدآل پوچ ناصفر نیست.

لم ۴. فرض کنیم R یک حلقه اول نویتری باشد. اگر a یک عضو R باشد، عدد طبیعی n وجود دارد که $a^n R \oplus r(a^n)$ در R اساسی است.

اثبات. به علت نوبتری بودن R ، عدد طبیعی N وجود دارد که برای هر $n > N$ ، $r(a^n) = r(a^{n+1})$ نشان می‌دهیم که برای چنین n ی، مجموع $a^n R \oplus r(a^n)$ یک مجموع مستقیم است. عضو $x \in R$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $a^n x \in r(a^n)$ ، پس $a^{2n} x = 0$ و به موجب ماکسیمال بودن $r(a^n)$ ، داریم $r(a^{2n}) = r(a^n)$. از این جا لازم می‌آید که $a^n = 0$ پس برای هر $n \leq N$ ، $a^n R \cap r(a^n) = 0$. اینک باید نشان دهیم که $a^n R \oplus r(a^n)$ در R اساسی است. اگر چنین نباشد، ایدآل راست ناصفر I وجود دارد که $I \cap (a^n R \oplus r(a^n)) = 0$. در این صورت مجموع

$$a^n I + a^{2n} I + \dots + a^{kn} I$$

برای هر $k \geq 0$ یک مجموع مستقیم است. برای اثبات این ادعا، به استقرا فرض می‌کنیم برای $k-1$ مجموع داده شده مستقیم باشد و $(a^{2n} I + \dots + a^{kn} I) \cap a^n I = 0$ ، آن گاه $x = a^n y = a^{2n} z$ که در آن $y \in I$ و $z \in R$ ، بنابراین $a^n(y - a^n z) = 0$ و $y - a^n z \in r(a^n)$ ، از این قرار

$$y \in I \cap (a^n R + r(a^n)) = 0$$

به ویژه $x = a^n y = 0$. از آن جا که حلقه نوبتری نمی‌تواند شامل یک مجموع مستقیم نامتناهی باشد، اثبات کامل است.

اینک تمام ابزارهای لازم برای اثبات حدسیه را در اختیار داریم.

قضیه ۵. ایدآل راست و ناصفر I در حلقه اول و نوبتری R اساسی است اگر و تنها اگر شامل یک عضو منظم باشد.

اثبات. بنا به لم ۲ شرط کافی است. فرض کنیم E یک ایدآل راست ناصفر R باشد. از لم ۳ نتیجه می‌شود که E شامل یک عضو غیرپوچ توان x است. به علاوه $n \geq 0$ وجود دارد که $x^n R \cap r(x^n) = 0$. فرض کنیم $a_1 = x^n$ در این صورت $r(a_1) \cap E = 0$ یا $r(a_1) \cap E \neq 0$. در حالت دوم استدلال را با $r(a_1) \cap E = 0$ تکرار و $a_2 \in r(a_1) \cap E$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $a_2 \cap r(a_2) = 0$. شرایط انتخاب a_1 و a_2 ایجاب می‌کند که مجموع

$$a_1 R + a_2 R + (r(a_1) \cap r(a_2) \cap E)$$

یک مجموع مستقیم باشد. اگر $r(a_1) \cap r(a_2) \cap E \neq 0$ ، روند فوق را ادامه می‌دهیم. در مرحله k ام مجموع مستقیم

$$a_1 R \oplus \dots \oplus a_k R \oplus (r(a_1) \cap \dots \cap r(a_k) \cap E)$$

که در آن $a_k \in r(a_1) \cap \dots \cap r(a_{k-1}) \cap E \neq 0$ به دست می‌آید. به سبب نوبتری بودن R این روند باید در مرحله‌ای مثلاً در مرحله k ام متوقف شود، یعنی

$$r(a_1) \cap \dots \cap r(a_k) \cap E \neq 0$$

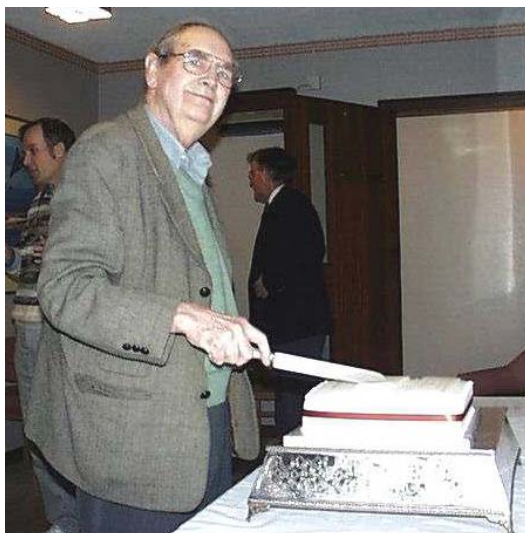
اگر فرض کنیم که E اساسی است، خواهیم داشت

$$r(a_1) \cap \dots \cap r(a_k) = \circ$$

قرار می‌دهیم $c_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_k$. از مستقیم بودن $a_1R \oplus \dots \oplus a_kR$ نتیجه می‌شود که

$$r(c_1) = r(a_1) \cap \dots \cap r(a_k) = \circ$$

به موجب لم ۴ به ازای m ، $c_1^n R \oplus r(c_1^n)$ یک ایدآل راست اساسی است. فرض کنیم $c = c_1^n$. به علت این که $r(c_1^n) = \circ$ داریم $r(c) = r(c_1) = \circ$. نشان می‌دهیم که هم‌چنین $l(c) = \circ$. اگر $z \in l(c)$ $z \neq \circ$ آن‌گاه $r(z)$ شامل ایدآل راست اساسی $cR \oplus r(c)$ است و از این رو خود یک ایدآل راست اساسی است. مجدداً لم را این بار برای z به کار می‌بریم و نتیجه می‌گیریم که برای عدد طبیعی m ، $z^m R \cap r(z^m) = \circ$. به سبب این که $r(z) \subseteq r(z^m)$ و $r(z)$ اساسی است، نتیجه می‌گیریم که $z^m = \circ$. بنابراین تمام عضوهای $l(c)$ پوچ‌توان هستند. بنا به لم ۳، $l(c) = \circ$ و c یک عضو منظم E می‌باشد.



آلفرد گلدی در مراسم بزرگداشت ۸۰ سالگی

۶. حلقه‌های گلدی

از آن چه که تاکنون بیان و ثابت شد نتیجه می‌شود که حلقه کسرهای یک حلقه اول نوبتری وجود دارد. گلدی علاوه بر این نشان داد که این حلقه، ساده و آرئینی است. اثبات این قسمت به مطالب دیگری نیاز دارد که از پرداختن به آن صرف نظر می‌کنیم. در مورد عکس این نتیجه چه

می توان گفت؟ یعنی اگر حلقه کسره‌های حلقه‌ای موجود، ساده و نیم‌آرتینی هم باشد، آیا حلقه اول و نویتری است؟ پاسخ منفی است. گلدی نشان داد که می‌توان توصیف کاملی از حلقه‌هایی که حلقه کسره‌های آن وجود دارد، ساده و آرتینی است به دست داد. اگر به اثبات مطالب توجه کنیم، دانسته می‌شود که از ویژگی نویتری بودن برای اطمینان از برقراری دو شرط استفاده شده و از آن دو شرط بقیه نتایج به دست می‌آیند. این دو شرط عبارتند از

(۱) هر مجموع مستقیم ایدال‌های راست ناصفر حلقه، متناهی است.

(۲) شرط فزاینده روی ایدال‌های راست پوچ‌ساز وجود دارد.

گلدی در مقاله‌ها و در کلاس‌های درس خود، حتی پس از سالیان طولانی با تواضع کامل چنین حلقه‌هایی را حلقه‌های دارای شرط (۱) و (۲) می‌نامید. دیگر ریاضی‌دانان آن‌ها را حلقه‌های گلدی نامیدند. اکنون می‌توان قضیه را در حالت کلی آن چنین بیان کرد.

قضیه ۶. حلقه R دارای حلقه کسره‌های ساده و آرتینی است اگر و تنها اگر R اول و گلدی باشد. قضیه فوق محتوای کامل قضیه‌ای نیست که در [۹] به اثبات رسیده است. زیرا گلدی فرض کرده بود که R دارای حلقه کسره‌های راست و چپ است. بنابراین مشابه شرط‌های (۱) و (۲) نیز باید برقرار باشد. لازم به ذکر است که لزور^۱ و کروا^۲ قضیه فوق را در ۱۹۵۹ اثبات کرده‌اند. چنان چه به اثبات‌های بیان شده توجه کنیم درمی‌یابیم که از شرط اول بودن تنها از نداشتن ایدال پوچ‌توان ناصفر استفاده شده است. ایدال I در حلقه R را پوچ‌توان می‌نامیم هرگاه به ازای عدد طبیعی مانند m ، $I^m = 0$. حلقه R نیم اول نامیده می‌شود هرگاه ایدال صفر تنها ایدال پوچ‌توان آن باشد. گلدی در ۱۹۶۰ قضیه فوق را به شکل زیر تعمیم داد.

قضیه ۷ (قضیه گلدی). حلقه R دارای حلقه کسره‌های نیم ساده و آرتینی است اگر و تنها اگر نیم اول و گلدی باشد.

مراجع

[۱] جان بیچی، دروس مقدماتی حلقه‌ها و مدول‌ها، ترجمه احمد حقانی، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۸۲.

[۲] م. معتمدی، بعد فضای برداری و بعد گلدی، نشر ریاضی ۱۳۷۱، ۲۲-۱۸.

[3] A. S. A. Amitsur, Prime rings having polynomial identities with arbitrary coefficients, Proc, London Mathematical. Soc. (3)(17) (1967), 470-486.

[4] P. M. Cohn, Algebra Vol 2. John Wiley & Sons, 1977.

- [5] S. C. Coutinho and J. C. McConnell. The quest for the quotient rings (of non-commutative rings), *Amer. Math. Monthly* 110 (2003), 298-313.
- [6] S. C. Coutinho, Quotient rings of non-commutative rings in the first half of the 20th century, *Archive for history of exact sciences*, vol. 58 number 3, March 2004, 225-281.
- [7] P. A. M. Dirac, On Quantum Algebra, *Roy. Soc. Proc. A*, 110 (1926) 412-418.
- [8] P. Dubreil, Sur les problem d'immersion et theorie des modules, *C. R. Acad. Sci, Paris* 216 (1943) 625-627.
- [9] A. W. Goldie, The structure of prime rings with ascending chain conditions, *Proc. London Math. Soc.*, 8(1958) 581-608.
- [10] A. W. Goldie, Semiprime rings with maximal conditions, *Proc. London Math. Soc.*, 10 (1960) 201-209.
- [11] H. Grell. Beziehungen Zwischen Idealen Verchiedover Ringen, *Math. Ann.*, 97 (1927).
- [12] N. Jacobson. A topology for the set of primitive ideals in arbitrary rings, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 31 (1945), 333-338.
- [13] N. Jacobson, The radical and semisimplicity for arbitrary rings, *Amer. J. Math.* 67 (1945) 300-320.
- [14] N. Jacobson. The structure of rings, *Amer. Math Soc. Providence* (1956).
- [15] C. Lesieur and r. Croisot. Sur les anneaux premiers noetheries a gauche. *Ann. Ecole. Norm. Sup* 76 (1959) 161-183.
- [16] D. F. Littelwood, On the classification of algebras. *Proc. London Math. Society* (2) 35 (1953), 200-240.
- [17] A. Malcev. On the immersion of an algebraic ring into a field. *Math. Ann.* 113 (1937), 686-691.
- [18] Malcev. Über die Einbettung Von assoziation in Gruppen. *rec. Math Moscou* 6 (1939) 331-336.
- [19] O. Ore, Theory of non-commutative polynomials. *Ann. Math.* 34 (1933), 480-508.

- [20] D. Tomari, On the embedding of Brikhoff-Witt rings in quotient fields. Proc. Amer. Math. Soc., 4(1953), 197-202.
- [21] B. L. Vander-Warden, Modern Algebra I, II (Berlin 1930,31).
- [22] B. L. Vander-Warden, On the source of my book Modern Algebra, Historica Mathematica 2(1975) 31-40.

منصور معتمدی
دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم ریاضی
motamedi_m@scu.ac.ir

احمد حقانی
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی
aghagh@cc.iut.ac.ir