فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۳، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۳)، صص ۲۴۷ تا ۲۵۹

قضیهٔ حد دوگانهٔ گروتندیک و نظریهٔ مدل‌ها

کریم خانکی

چکیده. در این مقاله سرگذشت یکی از نخستین دستاوردهای گروتندیک در آنالیز تابعی را مطالعه می‌کنیم که اخیراً ارتباط شگفت‌انگیز آن با نظریهٔ مدل‌ها کشف شده است. نشان خواهیم داد که قضیهٔ بنیادی نظریهٔ پایداری، که توسط شِلاح در دههٔ هفتاد ثابت شد، اساساً نتیجه‌ای از قضیهٔ حد دوگانهٔ گروتندیک است که در رسالهٔ دکترای او در دههٔ پنجاه اثبات شده است. همچنین در مورد تعبیر قضیهٔ گروتندیک در نظریهٔ مدل‌ها بحث خواهیم کرد و این قضیه را برای انواع عموماً پایدار بیان خواهیم کرد. در پایان، در مورد برخی کاربردها و نتایج محتمل این قضیه بحث می‌کنیم.

۱ مقدمه

در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان در مسکو (۱۹۶۶)، آلکساندر گروتندیک[1] برای دستاوردهایش در جبر هومولوژیک و هندسهٔ جبری برندهٔ مدال فیلدز شد؛ درحالی که برخی از بزرگان آنالیز ازجمله دیودونه[2] معتقد بودند که دستاوردهای او در فضاهای برداری توپولوژیک برای کسب این افتخار کافی است؛ آثار او بین سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۵۵ و تأثیر آن را در سال‌های بعد با آثار باناخ[3] مقایسه کرده‌اند [۱۵]. هدف این مقاله مطالعهٔ یکی از دستاوردهای مهم گروتندیک در این دورهٔ زمانی است که به‌طور غیرمنتظره‌ای در مرکزِ نظریهٔ نوین مدل‌ها قرار می‌گیرد. این دستاورد گروتندیک، موسوم به قضیهٔ حد دوگانه[4] است. قبل از بیان آن اجازه دهید چند نماد را تعریف کنیم.

عبارات و کلمات کلیدی: قضیهٔ حد دوگانهٔ گروتندیک، نظریهٔ مدل‌ها، قضیهٔ پایداری شلاح، تعریف‌پذیری انواع، انواع عموماً پایدار
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۱۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱/۶

1. Alexander Grothendieck (1928-2014) 2. Jean Dieudonné (1906-1992) 3. Stefan Banach (1892-1945)
4. double limit theorem

doi: 10.30504/mct.2023.1376.1967

فضای باناخ همهٔ توابع پیوستهٔ حقیقی‌مقدار روی فضای توپولوژیک فشردهٔ X را با $C(X)$ نمایش می‌دهیم که با نُرم یکنواخت مجهز شده است. برای زیرمجموعهٔ A از $\mathbb{R}^X$ توپولوژی همگرایی نقطه‌ای روی A عبارت است از توپولوژی زیرفضایی القایی از فضای حاصل‌ضربی $\prod_{x\in X}\mathbb{R}$. یادآوری این نکته سودمند است که برای زیرمجموعهٔ دلخواه A از $C(X)$ ممکن است بستار A در توپولوژی همگرایی نقطه‌ای شامل توابعی باشد که حتی اندازه‌پذیر بورل نباشند، چه برسد به آنکه پیوسته باشند.[۱]

قضیه ۱.۱ (قضیهٔ حد دوگانهٔ گروتندیک). فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده و $X_\circ$ زیرمجموعهٔ چگالی از آن باشد. آنگاه برای هر زیرمجموعهٔ کران‌دار A از $C(X)$ دو گزارهٔ زیر هم‌ارزند.

(الف) بستار A در توپولوژی همگرایی نقطه‌ای زیرمجموعه‌ای از $C(X)$ است.

(ب) اگر (f_n) و (x_m) به‌ترتیب دنباله‌هایی در A و $X_\circ$ باشند، آنگاه

$$\lim_n \lim_m f_n(x_m) = \lim_m \lim_n f_n(x_m),$$

به شرط وجود هر دو حد.

پیش‌از بیان طرح اثباتی از این قضیه چند نکته را ذکر می‌کنیم.

ملاحظه ۲.۱. (۱) قضیهٔ ۱.۱ حالت خاصی از قضیهٔ ۶ در [۹] است. درواقع، اگر X فضای توپولوژیکِ دلخواه باشد و بستار A در توپولوژیِ ضعیف در نظر گرفته شود، هم‌ارزی بالا همچنان برقرار است. توجه داریم که اگر X فشرده باشد، توپولوژی همگرایی نقطه‌ای و توپولوژی همگرایی ضعیف روی زیرمجموعه‌های کران‌دار از $C(X)$ یکسان هستند [۷].

(۲) قضیه ۱.۱ اساساً جهتِ $(a) \Rightarrow (d)$ در [۹، قضیهٔ ۲] است. همچنین، به گفتهٔ گروتندیک، اثبات او مبتنی‌بر روشی از ابرلاین[۲] است. گرچه او صریحاً این روش را بیان نکرده است، به‌نظر می‌رسد منظور گروتندیک لمِ صفحهٔ ۵۲ در [۶] باشد.

---

۱. مراجعه شود به [۴، ص ۸۶۴]. درواقع، اگر A مجموعهٔ همهٔ توابع پیوستهٔ حقیقی‌مقدار روی $\mathbb{R}$ باشد، به‌آسانی می‌توان نشان داد که تعداد توابع موجود در بستارِ این مجموعه $2^{2^{\aleph_0}}$ است، ولی تعداد توابع بورل $2^{\aleph_0}$ است. بنابراین، توابعی در بستارِ A وجود دارند که بورل نیستند. البته، ارائهٔ مثال‌های صریحی از توابع ناپیوسته در بستار A ساده‌تر است: برای هر n تعریف کنید $f_n(x) := 0$ اگر $x \leq 1/n$، $f_n(x) := 1 - nx$ اگر $0 \leq x \leq 1/n$ و $f_n(x) := 1$ در غیر این صورت. توابع f_n پیوسته‌اند ولی حد دنبالهٔ (f_n) تابع مشخصهٔ ناپیوستهٔ $f(x) = \chi_{(-\infty,0]}(x)$ است.

2. William Frederick Eberlein (1917-1986)

(۳) برای اهداف این مقاله، همین صورت خاصِ قضیهٔ گروتندیک (قضیهٔ ۱.۱) کافی است. درواقع، در بخش ۳ خواهیم دید که X به‌صورت فضای انواع[1] و A خانواده‌ای از فرمول‌ها تعبیر خواهند شد.

(۴) بند (۲) در قضیهٔ ۱.۱ «ویژگی حدِ دوگانه»[2] نامیده می‌شود.

اثبات قضیهٔ ۱.۱. اثبات (ب) $\Rightarrow$ (الف) ساده است و به خواننده واگذار می‌شود. برای اثبات حکم (الف) $\Rightarrow$ (ب) از برهان خلف استفاده می‌کنیم. برای به دست آوردن یک تناقض، فرض کنید f تابعی در بستار A باشد که در نقطهٔ $x \in X$ پیوسته نیست. بنابراین، یک همسایگی U از $f(x)$ وجود دارد به‌طوری که در هر همسایگی از x نقطه‌ای مانند y هست که $f(y) \notin U$. تابع $f_۱$ از A را در نظر بگیرید و نقطهٔ $x_۱$ را طوری انتخاب کنید که $|f_۱(x_۱) - f_۱(x)| < ۱$ و $f(x_۱) \notin U$. پس تابع $f_۲$ در A را طوری در نظر بگیرید که $|f_۲(x_۱) - f(x_۱)| < ۱$ و $|f_۲(x) - f(x)| < ۱$. اکنون نقطهٔ $x_۲$ را طوری انتخاب کنید که $|f_i(x_۲) - f_i(x)| < \frac{۱}{۲}$ $(i = ۱,۲)$ و $f(x_۲) \notin U$. تابع $f_۳$ را طوری انتخاب کنید که $|f_۳(x_i) - f(x_i)| < \frac{۱}{۲}$ (به‌ازای هر $i = ۱,۲$) و $|f_۳(x) - f(x)| < \frac{۱}{۲}$. با ادامه این فرایند دنباله‌های (x_m) و (f_n) را می‌یابیم به‌طوری که برای هر n، $|f_i(x_n) - f_i(x)| < \frac{۱}{n}$ $(i = ۱,\ldots,n)$، $|f_{n+۱}(x_j) - f(x_j)| < \frac{۱}{n}$ $(j = ۱,\ldots,n)$، $|f_{n+۱}(x) - f(x)| < \frac{۱}{n}$ و $f(x_n) \notin U$. اکنون، به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که بند (ب) در قضیهٔ ۱.۱ نقض می‌شود.[3] $\square$

ترتیب مطالب این مقاله به شرح زیر است. در بخش بعد، قضیهٔ بنیادی نظریهٔ پایداری (قضیهٔ ۲.۲) بیان می‌شود. در بخش ۲ نشان می‌دهیم که قضیهٔ بنیادی نظریهٔ پایداری نتیجه‌ای از قضیهٔ گروتندیک است. در بخش ۱.۳ معنای قضیهٔ گروتندیک در نظریهٔ مدل را روشن می‌کنیم. در بخش ۴ قضیهٔ گروتندیک را برای انواع عموماً پایدار[4] مطرح می‌کنیم.

۲ قضیهٔ بنیادی نظریهٔ پایداری

حدوداً دو دهه بعداز قضیهٔ گروتندیک، شارون شِلاح[5] قضیهٔ بنیادی نظریهٔ پایداری (قضیهٔ ۲.۲) را اثبات کرد [۲۴]. خواهیم دید که قضیهٔ اخیر نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱.۱ است.

۳. توجه داریم که چون $X_۰$ در X چگال است، می‌توانیم دنبالهٔ (x_n) را در $X_۰$ انتخاب کنیم.

1. space of types 2. dual limit property 4. generically stable types 5. Saharon Shelah (1945-)

فرض ما این است که خواننده با مفاهیم مقدماتی نظریهٔ مدل‌ها آشنایی دارد، ازجمله مفاهیم زبان، فرمول، نظریه، مدل، برآورده/ارضاء کردن[۱]. در ادامه، L یک زبان منطق مرتبهٔ اول، $\varphi(x, y)$ یک Lـفرمول، T یک Lـنظریه، و M یک مدل از T است. لازم است چند تعریف دیگر بیاوریم.

تعریف ۱.۲. (۱) گوییم $\varphi(x, y)$ در M ویژگی ترتیب (OP) دارد، هرگاه دنباله‌های (a_n) و (b_n) در M وجود داشته باشند به‌طوری که $\varphi(a_m, a_n)$ در M صادق است اگر و تنها اگر $m < n$. اگر $\varphi(x, y)$ در M ویژگی ترتیب نداشته باشد، می‌گوییم $\varphi(x, y)$ در M پایدار است.

(۲) گوییم $\varphi(x, y)$ در نظریهٔ T پایدار است هرگاه برای هر مدل M از T، $\varphi(x, y)$ در M پایدار باشد. به چنین فرمولی اصطلاحاً «فرمولِ پایدار»[۲] می‌گویند.

تعریفِ φـنوع مشابه تعریف انواع در نظریهٔ مدل‌ها است با این تفاوت که در تعریف آن فقط از فرمول‌هایی به‌صورت $\varphi(x, b)$ یا $\neg\varphi(x, b)$ استفاده می‌شود. درواقع، این مفهوم به‌نوعی صورت موضعی مفهوم نوع است، به این معنی که تعریف آن فقط وابسته به فرمول φ است و نه همهٔ فرمول‌های زبان.

یک φـنوع روی M مجموعه‌ای سازگار از فرمول‌های $\varphi(x, b)$ یا $\neg\varphi(x, b)$ است به‌طوری که $b \in M$.[۳] برای $a \in M$، φـنوعِ a روی M، که با $tp_\varphi(a/M)$ نشان داده می‌شود، مجموعهٔ همهٔ فرمول‌های $\varphi(x, b)$ یا $\neg\varphi(x, b)$ $(b \in M)$ است که در M توسط a برآورده می‌شوند. یک φـنوعِ p را کامل گوییم اگر هیچ φـنوعِ دیگری به‌صورت سره شامل p وجود نداشته باشد. (به‌وضوح، هر نوع $tp_\varphi(a/M)$ کامل است.) مجموعهٔ همهٔ φـنوع‌های کامل روی M را با $S_\varphi(M)$ نشان می‌دهیم. یک نوعِ p در $S_\varphi(M)$ را روی M تعریف‌پذیر[۴] گوییم هرگاه فرمول $\psi(y)$ با پارامترهایی در M وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $b \in M$، $\varphi(x, b) \in p$ اگر و فقط اگر $\psi(b)$ صادق باشد. (تعریف‌پذیریِ انواعْ مفهومی بسیار مهم در نظریهٔ مدل‌ها است که آن را شِلاح و گیفمن[۵] مستقلاً در دههٔ هفتاد تعریف کردند. در بخش ۱.۳ خواهیم دید که این مفهوم متناظر با مفهوم «پیوستگی» در توپولوژی است، بنابراین اهمیت آن کاملاً طبیعی است.)

اکنون آماده‌ایم که قضیهٔ بنیادی را بیان کنیم.

---

۳. به زبانی ساده، یک φـنوع را می‌توان مجموعه‌ای از معادله‌ها (یا دستگاه معادله‌ها) تصور کرد که جوابی مشترک برای همهٔ آن‌ها وجود دارد، البته در یک مدل بزرگ.

1. satisfaction 2. stable formula 4. definable 5. Haim Gaifman (1934-)

قضیه ۲.۲ (قضیهٔ بنیادی نظریهٔ پایداری). فرض کنید $\varphi(x,y)$ یک فرمول و T یک نظریه باشد. آنگاه دو گزارهٔ زیر هم‌ارزند.

(الف) $\varphi(x,y)$ در نظریهٔ T پایدار است.

(ب) برای هر مدل M از T، هر φ-نوع روی M تعریف‌پذیر است.[۱]

اثبات قسمت (الف) $\Rightarrow$ (ب) آسان است و در بیشتر کتاب‌های نظریهٔ مدل‌ها یافت می‌شود (ملاحظهٔ ۳.۲ در [۱۸] را ببینید.) در بخش بعد نشان خواهیم داد که چگونه قسمت اصلی قضیهٔ بنیادی، یعنی (ب) $\Rightarrow$ (الف)، نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱.۱ است. برای این کار نیاز به بیان قضیهٔ گروتندیک به زبان نظریهٔ مدل‌ها داریم.

ملاحظه ۳.۲. (۱) اثبات شِلاح برای (ب) $\Rightarrow$ (الف) با اثباتی که در بخش بعد (با استفاده از قضیهٔ گروتندیک) ارائه می‌شود کاملاً متفاوت است. درواقع، اثبات‌های کلاسیک محتوای «ترکیبیاتی» دارند، درحالی‌که با استفاده از قضیهٔ ۱.۱ توپولوژی نیز وارد صحنه خواهد می‌شود (برای اثباتی کاملاً ترکیبیاتی از این قضیه [۱۸] را ببینید.)

(۲) پس‌از قضیهٔ بسیار مهم مورلی[۲] در سال ۱۹۶۵ موسوم به قضیهٔ جازمیت مورلی[۳]، مفهوم نوع و نظریه‌های پایدار در قلبِ نظریهٔ مدل‌های نوین قرار گرفت. تاکنون، مثال‌های مهمی از نظریه‌های پایدار مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و کاربردهای بسیاری از نظریهٔ پایداری در حوزه‌های دیگر ریاضیات یافت شده‌اند. برای نمونه، هُروشوفسکی[۴] در دههٔ نود اثباتی از حدس هندسی موردل–لانگ[۵] را برای همهٔ مشخصه‌ها ارائه داد.

(۳) تعمیم نتایج به دست آمده در نظریه‌های پایدار به نظریه‌های ناپایدار از اهداف مهم در نظریهٔ مدل‌ها در قرن بیست و یکم است. یکی از این نتایج در بخش ۴ بیان خواهد شد.

۳ قضیهٔ گروتندیک به زبان نظریهٔ مدل‌ها

در ۲۰۱۴ بن‌یاکوف قضیهٔ گروتندیک را به زبان نظریهٔ مدل‌ها در آورد و با استفاده از آن اثباتی از قضیهٔ بنیادی نظریهٔ پایداری در [۲] به دست داد. این نقطهٔ ورود قضیهٔ گروتندیک به نظریه مدل‌ها

۱. علاوه‌بر این، فرمول‌هایی که φ–نوع‌ها را تعریف می‌کنند به‌صورت ترکیبات بولی متناهی از فرمول‌های $\varphi(a,y)$ هستند که در آن $a \in M$.

2. Michael Darwin Morley (1930-2020) 3. Morley's categoricity theorem 4. Ehud Hrushovski (1959-)
5. Mordell–Lang conjecture

بود که بعداً گسترش و عمق بیشتری پیدا کرد. ابتدا به نتیجهٔ بن‌یاکوف می‌پردازیم و سپس تصویر عمیق‌تری را که پیلِی[1] از این احکام به دست داد بیان می‌کنیم.

تعریف می‌کنیم $\tilde{\varphi}(y,x) := \varphi(x,y)$ (که در آن نقش x و y عوض شده است). مجموعهٔ همهٔ $\tilde{\varphi}$-نوع‌های کامل روی M را با $S_{\tilde{\varphi}}(M)$ نشان می‌دهیم. حالا برای هر $a \in M$ تابع $f_a : S_{\tilde{\varphi}}(M) \to \{۰,۱\}$ را تعریف می‌کنیم: $f_a(q) = ۱$ اگر برای یک برآورد b از q، $\varphi(a,b)$ صادق باشد، و در غیر این صورت $f_a(q) = ۰$؛ به‌وضوح، اطلاعات نوع $tp_\varphi(a/M)$ توسط این تابع بازنمایی می‌شود. می‌توان $S_{\tilde{\varphi}}(M)$ را به توپولوژی‌ای که تحت آن همهٔ توابع f_a ($a \in M$) پیوسته می‌شوند مجهز کرد. دو نکته اهمیت خاص دارند:

(۱) هر نوع در $S_\varphi(M)$ توسط تابعی در بستار مجموعهٔ $A = \{f_a : a \in M\}$ (در توپولوژی همگرایی نقطه‌ای) بازنمایی می‌شود.

(۲) یک نوع در $S_\varphi(M)$ تعریف‌پذیر است اگر و تنها اگر تابع متناظر آن پیوسته باشد.

برای اثبات (۱)، به‌ازای $p \in S_\varphi(M)$ فرض کنید f_p تابعی باشد که p را بازنمایی می‌کند، یعنی $f_p(q) = ۱$ اگر برای یک برآورد b از q، $\varphi(x,b)$ در p باشد، و در غیر این صورت $f_p(q) = ۰$. توجه کنید که مجموعهٔ $\{tp_\varphi(a/M) : a \in M\}$ در $S_\varphi(M)$ چگال است. بنابراین، f_p در بستار مجموعهٔ متناظر، یعنی بستار A، قرار دارد.

برای اثبات (۲)، می‌دانیم تابع $\{۰,۱\}$-مقداری f روی $S_{\tilde{\varphi}}(M)$ پیوسته است اگر و فقط اگر مجموعهٔ $\{q \in S_{\tilde{\varphi}}(M) : f(q) = ۱\}$ بسته‌باز باشد. چون توپولوژیِ $S_{\tilde{\varphi}}(M)$ کلاً ناهمبند است و توسط مجموعه‌های بسته‌بازِ پایه‌ایِ $[\varphi(a,y)]$ تولید می‌شود، یک زیرمجموعه از آن بسته‌باز است اگر و تنها اگر توسط ترکیبات بولی متناهی از فرمول‌های $\varphi(a,y)$ ($a \in M$) تعریف شود.

توجه کنیم که اگر تعریف کنیم $\varphi(a,b) := ۱$ وقتی $\varphi(a,b)$ صادق باشد، و در غیر این صورت $\varphi(a,b) := ۰$، آنگاه به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که پایداری $\varphi(x,y)$ روی M هم‌ارز است با اینکه برای هر دو دنبالهٔ (a_m) و (b_m) در M داشته باشیم

$$\lim_n \lim_m \varphi(a_m, b_n) = \lim_m \lim_n \varphi(a_m, b_n)$$

به شرط وجود هر دو حد.

با این مقدمات اکنون آماده‌ایم اثبات قضیهٔ بنیادی نظریهٔ پایداری، ۲.۲، را با استفاده از قضیهٔ گروتندیک کامل کنیم.

1. Anand Pillay (1951-)

اثبات قسمت (ب)⇐(الف) از قضیهٔ ۲.۲. فرض کنید X فضای $S_{\tilde{\varphi}}(M)$ و $X_\circ$ مجموعهٔ همهٔ نوع‌های $tp(a/M)$ (به ازای هر $a \in M$) باشد. توجه داریم که X فشرده است و $X_\circ$ در X چگال است. همچنین، مجموعهٔ $A = \{f_a : a \in M\}$ زیرمجموعه‌ای کران‌دار از $C(X)$ است. بنابراین، با توجه به پایداری $\varphi(x,y)$ روی M، از قضیهٔ ۱.۱ نتیجه می‌گیریم که هر تابع در بستار A پیوسته است. بنابر نکته‌های (۱) و (۲)، چون هر نوع در $S_\varphi(M)$ توسط تابعی در بستار مجموعهٔ A بازنمایی می‌شود، و یک نوع در $S_\varphi(M)$ تعریف‌پذیر است اگر و تنها اگر تابع متناظر آن پیوسته باشد، بنابراین اثبات به انجام می‌رسد.[۱] □

۱.۳ قضیهٔ گروتندیک در نظریهٔ مدل‌ها

پیلِی در فاصلهٔ کوتاهی بعداز نتایج بن‌یاکوف تصویر روشن‌تری از قضیهٔ گروتندیک در نظریهٔ مدل‌ها در مقالهٔ [۱۹] ارائه داد. درواقع، او ثابت کرد که قضیهٔ گروتندیک هم‌ارز با تعریف‌پذیری نوع‌های سراسری[۲] است.

مدلی را که همهٔ نوع‌ها (روی مدل‌هایی به‌اندازهٔکافی بزرگ) در آن برآورده می‌شوند مدل بزرگ [۳] نامیده می‌شود و آن را با $\mathbb{M}$ نشان می‌دهند. اگر در تعریف φ–نوعِ کامل در بخش قبل مدل M را با مدل بزرگ $\mathbb{M}$ جایگزین کنیم، آنگاه یک φ–نوع سراسری خواهیم داشت. یک φ–نوع سراسری $p(x)$ را تعریف‌پذیر روی M گوییم هرگاه یک فرمول $\psi(y)$ (با پارامترهایی در M) وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $b \in \mathbb{M}$ داشته باشیم $\varphi(x,b) \in p$ اگر و فقط اگر $\psi(b)$ صادق باشد. یک φ–نوع سراسری p را متناهی‌برآورده‌شده در M گوییم هرگاه هر فرمول $\phi(x)$ متعلق به p در M برآورده شود.

با نمادگذاری بخش قبل، فرض کنید $X = S_{\tilde{\varphi}}(M)$ و $A = \{f_a : a \in M\}$. پیلِی در [۱۹] ثابت می‌کند که تناظری یک‌به‌یک بین همهٔ توابع در بستار مجموعهٔ A (در توپولوژی همگرایی نقطه‌ای) و مجموعهٔ همهٔ φ–نوع‌های سراسری که در M متناهی‌برآورده می‌شوند وجود دارد. این ملاحظه به پیلِی امکان داد تا تصویر کاملی از قضیهٔ گروتندیک در نظریهٔ مدل‌ها ترسیم کند.

قضیه ۱.۳ (بیان قضیهٔ گروتندیک در نظریهٔ مدل‌ها). فرض کنید $\varphi(x,y)$ یک فرمول و M مدلی از نظریهٔ T باشد. آنگاه دو گزارهٔ زیر هم‌ارزند.

---

۱. همچنین، تابع پیوسته‌ای که هر نوع را تعریف می‌کند متناظر با یک فرمول به‌صورت ترکیب بولی متناهی از فرمول‌های $\varphi(a,y)$ است که در آن $a \in M$. ۳. تعریف دقیق مدل‌های بزرگ کاملاً فنّی و خارج از بحث این مقاله است. خواننده می‌تواند به مبحث model monster در کتاب‌های نظریهٔ مدل‌ها مراجعه کند.

2. global types

(الف) $\varphi(x,y)$ در مدل M پایدار است.

(ب) هر نوع در $S_\varphi(M)$ توسیعی دارد به یک φ-نوع سراسری که متناهیاً در M برآورده می‌شود و نیز روی M تعریف‌پذیر است.

ملاحظه ۲.۳. (۱) اثبات ارائه شده در [۱۹] کاملاً شبیه اثبات اصلی گروتندیک است، البته به زبان نظریهٔ مدل‌ها.

(۲) قضیهٔ ۱.۳ قوی‌تر از قضیهٔ ۲.۲ است، زیرا مفهوم «پایداری درون یک مدل» (و نه لزوماً برای یک نظریه) را لحاظ می‌کند. این حکم در [۲۶] «قضیهٔ بنیادی قویِ نظریهٔ پایداری» نامیده شده است.

(۳) پیلِی متذکر می‌شود که در مقالهٔ [۱۷] در دههٔ هشتاد حکمی مشابه قضیهٔ گروتندیک را ثابت کرده است (البته به زبان نظریهٔ مدل‌ها) و اساساً اثباتی مشابه با قضیهٔ گروتندیک دارد. همچنین، یووینو [۱۲] قضیهٔ گروتندیک را برای منطق‌های توسیع‌یافته، موسوم به منطق‌های پیوسته، اثبات کرده است.

(۴) کریوین و موری به‌عنوان کاربردی از مفهوم پایداری درون یک مدل در مقالهٔ [۱۴] نتیجهٔ بسیار مهمی در مورد وجود فضاهای ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) درون فضاهای باناخِ پایدار ثابت کردند. برای مشاهدهٔ کاربردهایی از قضیهٔ گروتندیک در آنالیز تابعی خواننده را به [۲۷] ارجاع می‌دهیم.

(۵) در قضیهٔ ۱.۳، هر نوع سراسری را که توسیع یک نوعِ $p \in S_\varphi(M)$ باشد و در M متناهی‌برآورده شود یک هم‌میراثِ[1] p می‌گویند. این مفهوم اهمیت و کاربردهای بسیاری در نظریهٔ مدل‌ها دارد که برای مشاهدهٔ آن‌ها خواننده را به کتاب‌های نظریهٔ مدل‌ها، ازجمله [۱۶]، ارجاع می‌دهیم.

اما این پایان قضیهٔ گروتندیک در نظریهٔ مدل‌ها نیست. پیلِی در [۱۹] مفهوم یک نوعِ «عموماً پایدار» را تعریف کرد که اساساً مناسب برای نظریه‌های «پایدار» است و به‌اندازهٔکافی برای مطالعه در نظریه‌های ناپایدار قوی نیست. او در آنجا یک φ-نوع را عموماً پایدار روی M می‌نامد اگر متناهیاً در M برآورده شود و همچنین روی M تعریف‌پذیر باشد. سؤال پیلِی این است: «برای چه مفهوم مناسبی روی M (مشابه ویژگیِ نداشتنِ ترتیب) می‌توان حکمی مشابه قضیهٔ گروتندیک

1. coheir

برای مفهوم «قوی‌تری» از عموماً پایداری بیان کرد؟» (درواقع، مفهوم قوی‌ترِ «عموماً پایدار» قبلاً در نظریهٔ مدل‌ها به‌طور دقیق تعریف شده بود.) در بخش بعد به این سؤال می‌پردازیم.

۴ انواع عموماً پایدار

در این بخش قضیهٔ گروتندیک را برای انواع عموماً پایدار بیان می‌کنیم. نتایج این بخش کاملاً فنی است و خواننده را برای مطالعهٔ دقیق‌تر و مشاهدهٔ اثبات‌ها به مقاله‌های اصلی، به‌ویژه [۱۳]، ارجاع می‌دهیم.

در نظریهٔ مدل‌ها مفهومی به نام «انواع عموماً پایدار» وجود دارد که ریشه‌های آن به «نقطهٔ عام» در آثار وِی[1] در هندسهٔ جبری باز می‌گردد. به زبانی ساده، یک نقطه از یک چندگونای[2] V (روی یک میدان K) عام نامیده می‌شود اگر در هیچ زیرچندگونای سِرهِ (روی K) قرار نداشته باشد. پوئازا مفهوم «انواع عموماً پایدار» را در نظریهٔ مدل‌ها اساساً در نظریه‌های پایدار تعریف کرد؛ رک. [۲۲، ۲۱، ۲۳]. پیلِی و تانوویک [۲۰] این مفهوم را برای نظریه‌های دلخواه تعریف کردند. در ادامه، این مفهوم معرفی و ارتباط آن با دستاوردهای قبل مطالعه می‌گردد.

تعریف یک «نوعِ کامل روی M» و «نوعِ سراسری» به‌ترتیب مشابه تعریف «φ–نوعِ کامل روی M» و «φ–نوعِ سراسری» است، با این تفاوت که فقط شامل فرمول φ نیستند بلکه شامل همهٔ فرمول‌های زبان L هستند. به‌طور مشابه، مفاهیم «تعریف‌پذیری روی M» و «متناهی‌برآورده‌شده در M» برای نوع‌های کامل روی M و نوع‌های سراسری قابل تعریف‌اند.

فرض کنید $p(x)$ یک نوع سراسری باشد که در مدل M متناهی‌برآورده شود. برای p دنباله‌ای روی M به‌صورت زیر می‌سازیم. عنصر a_1 را به‌صورتی انتخاب می‌کنیم که همهٔ فرمول‌های نوعِ p را که فقط شامل پارامترهایی در M هستند برآورده کند. با استقراء، فرض کنید عناصر $\{a_i : i \leq \alpha\}$ را انتخاب کرده‌ایم. عنصر $a_{\alpha+1}$ را به‌صورتی انتخاب می‌کنیم که همهٔ فرمول‌های نوعِ p که فقط شامل پارامترهایی در $M \cup \{a_i : i \leq \alpha\}$ هستند را برآورده کند.[3] دنبالهٔ $\{a_i : i < \alpha\}$ را که به این صورت تعریف شده باشد یک دنبالهٔ مورلی از p روی M می‌نامیم.[4]

تعریف ۱.۴. فرض کنید $p(x)$ یک نوع سراسری باشد که در مدل M متناهی برآورده شود. گوییم

۳. توجه داریم که همهٔ این عناصر در مدلِ بزرگ یافت می‌شوند. ۴. در اینجا α یک عدد ترتیبی دلخواه است و می‌تواند بزرگ‌تر از ω باشد.

1. André Weil (1906-1998) 2. variety

p روی M عموماً پایدار است، اگر برای هر دنبالهٔ مورلی $\{a_i : i < \omega + \omega\}$ از p روی M و هر فرمول $\phi(x)$ (با پارامترهایی در $\mathbb{M}$) مجموعهٔ $\{i : \phi(a_i)$ صادق است$\}$ متناهی یا متمم‌متناهی باشد.

لازم است توجه کنیم که

(۱) هر نوعِ عموماً پایدار (روی M) تعریف‌پذیر (روی M) است؛ عکس این مطلب درست نیست. یعنی نوع‌هایی وجود دارند که هم‌زمان تعریف‌پذیر (روی M) و (در M) متناهی برآورده می‌شوند، اما روی هیچ مدلی عموماً پایدار نیستند؛ رک. [۵].

(۲) در نظریه‌های NIP[1] هر نوعی که هم‌زمان تعریف‌پذیر (روی M) و (در M) متناهی برآورده شود، عموماً پایدار (روی M) است؛ رک. [۱۱].

گَنون [۸] با استفاده از نتایج سیمون [۲۵] در قضیهٔ بسیار زیبای زیر جنبه‌ای آنالیزی از انواع عموماً پایدار را روشن کرد.

قضیه ۲.۴. فرض کنید T یک نظریه در زبانی شمارا، M مدلی از T، و $p(x)$ یک نوعِ سراسری باشد. اگر p روی M عموماً پایدار باشد، آنگاه دنباله‌ای مانند $(a_i : i < \omega)$ در M وجود دارد به‌طوری که

$$\lim_i tp(a_i/\mathbb{M}) = p.$$

حد بالا در توپولوژی اِستون در نظر گرفته شده است. این حد به این معنا است که برای هر فرمول $\phi(x)$ با پارامترهایی در مدل کلی، $\phi(x) \in p$ اگر و تنها اگر سرانجام $\phi(a_i)$ها صادق باشند، یعنی، برای یک عدد طبیعی n فرمول $\phi(a_i)$ صادق است اگر $n \leq i$.

ملاحظه ۳.۴. در قضیهٔ ۲.۴ وجودِ دنباله‌ای همگرا به p نکتهٔ اساسی نیست (زیرا هر دنبالهٔ مورلی همگرا به p است)، بلکه وجودِ چنین دنباله‌ای در «درون M» اهمیت دارد. هرچند اثباتِ گَنون کاملاً در ذیل نظریه مدل‌ها است، این قضیه ریشه در نتیجه‌ای بسیار مهم در آنالیز تابعی متعلق به بورگَن، فرِملین، و تالاگراند [۴] دارد.

پرسشی که به‌طور طبیعی مطرح می‌شود این است که آیا عکس قضیهٔ فوق درست است و آیا ارتباطی با قضیهٔ گروتندیک و همچنین پرسش پیلِی (در بخش قبل) وجود دارد؟ در ادامه به این پرسش‌ها پاسخ می‌دهیم.

1. non-independence property

در [۱۳] برای یک مدل M مفهوم «نهایتاً وابسته»[۱] تعریف شده است که متناظر مفهوم «وابستگی» در نظریهٔ مدل‌ها است؛ این مفهوم پیچیده است و خوانندهٔ علاقه‌مند را به [۱۳] ارجاع می‌دهیم. یک مدل M را «نهایتاً پایدار» گوییم هرگاه (الف) هر فرمول در M پایدار باشد (تعریف ۱.۲ را ببینید)، (ب) M نهایتاً وابسته باشد.

اکنون آماده‌ایم که حکمی مشابه قضیهٔ گروتندیک را که مناسب انواع عموماً پایدار است بیان کنیم. این قضیه پاسخی به پرسش پیلِی نیز است. این قضیه در [۱۳] و با استفاده از نتایج [۸، ۲۵] ثابت شده است.

قضیه ۴.۴ (صورت قوی قضیهٔ حدِ دوگانهٔ گروتندیک). فرض کنید T یک نظریه در زبانی شمارا و M مدلی از T باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

(الف) M نهایتاً پایدار است.

(ب) هر نوعِ کامل روی M توسیعی به یک نوعِ سراسری دارد که روی M عموماً پایدار است.

ملاحظه ۵.۴. (۱) قضیهٔ ۴.۴ از دو منظر قوی‌تر از قضیهٔ ۱.۳ است. نخست، این قضیه دربارهٔ نوع‌های کامل است و نه فقط φ-نوع‌ها. توجه داریم که اساساً مفهوم دنبالهٔ مورلی برای φ-نوع‌ها قابل‌تعریف نیست. دوم اینکه همان‌طور که قبلاً بیان شد، مفهوم نوعِ عموماً پایدار قوی‌تر از نوع‌های تعریف‌پذیر و متناهیاً برآورده شده است.

(۲) اثباتِ این قضیه با ابزارهای نظریهٔ مدل‌ها کاملاً امکان‌پذیر است و حتی نیازی به استفاده از قضیهٔ ۱.۱ ندارد؛ رک. [۱۳]. همچنین، برای اثبات این قضیه توصیفِ کاملاً جدیدی از انواع عموماً پایدار ارائه شده است (رک. [۱۳، قضیهٔ ۴.۴]) که در جای خود مهم و دارای کاربرد است. درواقع، قضیهٔ اخیر کامل‌کنندهٔ قضیهٔ گنون (قضیهٔ ۲.۴) است. برای اثبات آن از مفهومی از همگرایی استفاده می‌شود که قوی‌تر از همگرایی در قضیهٔ گنون است؛ خواننده را به [۱۳، تعریف ۴.۳] ارجاع می‌دهیم.

(۳) قضیهٔ ۴.۴ را می‌توان به زبانِ آنالیز تابعی بیان کرد و دستاوردی مشابه قضیهٔ ۱.۱ به‌دست آورد. شاید چنین دستاوردی کاربردهایی در آینده داشته باشد.

(۴) برای سهولت کار در این مقاله همهٔ نتایج در قالب منطق مرتبهٔ اول کلاسیک بیان شدند، درحالی‌که به‌آسانی می‌توان بررسی کرد و دید که همهٔ این نتایج برای منطق پیوسته نیز درست است [۳].

1. eventually dependence

(۵) گرچه قضیهٔ گروتندیک در نظریهٔ مدل‌ها مسیر نسبتاً طولانی‌ای طی کرده است، این مسیر می‌تواند همچنان ادامه داشته باشد. پرسش‌های بسیاری دربارهٔ آن می‌توان مطرح کرد که یکی از آن‌ها تعمیم قضیهٔ ۴.۴ برای اندازه‌های کای‌سلِر[1] است. اندازه‌های کای‌سلِر تعمیم طبیعی مفهوم نوع‌ها است که کاربردهای بسیار مهمی در نظریهٔ مدل‌ها دارند؛ رک. [۱۰، ۱۱]. طبعاً ارائهٔ مفهومی مناسب برای اندازه‌های کای‌سلِر عموماً پایدار اهمیت ویژه‌ای دارد. همچنین، اثبات یک هم‌ارزی مشابه با قضیهٔ ۴.۴ می‌تواند گسترش دیگری برای قضیهٔ گروتندیک باشد.

اجازه دهید که به انتهای این مقاله نکته‌ای فلسفی بیفزاییم. مایکل اتیا در مقالهٔ بسیار زیبای [۱] تأکید می‌کند که یکی از مهم‌ترین اهداف ریاضیات می‌باید «یکپارچه کردن ریاضیات» باشد. او استدلال می‌کند که چرا عمیق‌ترین، زیباترین، و کاربردی‌ترین بخش‌های ریاضیات آن‌هایی هستند که ارتباطی بین حوزه‌های مختلف علم برقرار می‌کنند. درواقع، اتیا عمر خود را صرفِ یکپارچه کردن شاخه‌هایِ مختلف ریاضیات، و حتی در کارهای متأخر خود، یکپارچه کردن «فیزیک» و «ریاضیات» کرد. قطعاً، داستان قضیهٔ حد دوگانهٔ گروتندیک یکی از مصادیق اندیشهٔ اتیا در «یکپارچه کردن ریاضیات» است.

سپاسگزاری از دکتر محسن خانی برای مطالعهٔ نسخهٔ اولیهٔ این مقاله و پیشنهادهای ارزشمند تشکر و قدردانی می‌کنم. از پروفسور برونو پوآزا، پروفسور پیلِی، و دکتر گابریل کانِنت[2] برای شرحِ سودمند و کامل ایشان دربارهٔ مفهوم «عمومیت» در نظریهٔ مدل‌ها، که البته تقریر همهٔ آن‌ها فراتر از مجال این مقاله بود، سپاسگزاری می‌کنم. از پژوهشگاه دانش‌های بنیادی (IPM) تشکر می‌کنم. این اثر تحت حمایت مالی IPM با شماره طرح «۱۴۰۱۰۳۰۱۱۷» نوشته شده است.

مراجع

[1] Atiyah, M., The unity of mathematics, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **10** (1978), 69-76.

[2] Ben-Yaacov, I., Model theoretic stability and definability of types, after A. Grothendiek, *Bull. Symbolic Logic*, **20** (2014), 491-496.

[3] Ben-Yaacov, I., Berenstein, A., Henson, C. W., Usvyatsov, A., Model theory for metric structures, in *Model theory with Applications to Algebra and Analysis*, vol. 2, Z. Chatzidakis, D. Macpherson, A. Pillay, A. Wilkie, eds., Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[4] Bourgain, J., Fremlin, D. H., Talagrand, M., Pointwise compact sets of Baire-measurable functions, *Amer. J. Math.*, **100** (1978), no. 4, 845-886.

[5] Conant, G., Gannon, K., Hanson, J., Keisler measures in the wild, *J. Model Theory*, **2** (2023), no. 1, 1-67.

1. Keisler measures 2. Gabriel Conant

[6] Eberlein, W. F., Weak compactness in Banach spaces I, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **33** (1947), no. 3, 51-53.

[7] Fremlin, D., *Measure Theory*, vol. 4, Topological Measure Spaces, Torres Fremlin, Colchester, 2006.

[8] Gannon, K., Sequential approximations for types and Keisler measures, *Fund. Math.*, **257** (2022), 305-336.

[9] Grothendieck, A., Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 168-186.

[10] Hrushovski, E., Peterzil, Y., Pillay, A., Groups, measures, and the NIP, *J. Amer. Math. Soc.*, **21** (2008), no. 2, 563-596.

[11] Hrushovski, E., Pillay, A., On NIP and invariant measures, *J. Eur. Math. Soc.*, **13** (2011), 1005-1061.

[12] Iovino, J., Stable models and reflexive Banach spaces, *J. Symbolic Logic*, **64** (1999), 1595-1600.

[13] Khanaki, K., Remarks on convergence of Morley sequences, *J. Symbolic Logic*, **89** (2024), no. 3, 1339-1357

[14] Krivine, J.-L., Maurey, B., Espaces de Banach stables, *Israel J. Math.*, **39** (1981), no. 4, 273-295.

[15] Pietsch, P., *History of Banach Spaces and Linear Operators*, Birkhäuser, Boston, 2008.

[16] Pillay, A., *An Introduction to Stability Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1983.

[17] Pillay, A., Dimension and homogeneity for elementary extensions of a model, *J. Symbolic Logic*, **47** (1982), no. 1, 147-160.

[18] Pillay, A., *Geometric Stability Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1996.

[19] Pillay, A., Generic Stability and Grothendieck, *South American J. Logic*, **2** (2016), no. 2, 437-442.

[20] Pillay, A., Tanović, P., Generic stability, regularity, and quasiminimality, models, logics, and higher-dimensional categories, in *CRM Proc. Lecture Notes*, vol. 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, 189-211.

[21] Poizat, B., Sous-groupes définissables d'un groupe stable, *J. Symbolic Logic*, **46** (1981), no. 1, 137-146.

[22] Poizat, B., Groupes stables avec types génériques réguliers, *J. Symbolic Logic*, **48** (1983), no. 2, 339-355.

[23] Poizat, B., *Stable Groups* (trans. from the 1987 French original), Mathematical Surveys and Monographs , American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[24] Shelah, S., Stability, the f.c.p., and superstability; Model theoretic properties of formulas in first order theory, *Ann. Math. Log.*, **3** (1971), no. 3, 271-362.

[25] Simon, P., Invariant types in NIP theories, *J. Math. Log.*, **15** (2015), no. 2, 1550006.

[26] Starchenko, S., On Grothendieck's approach to stability, 2017 (unpublished note), available at `https://www3.nd.edu/ sstarche/papers/groth-stab.pdf`.

[27] Young, N.J., On Pták's double-limit theorems, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, **17** (1971), no. 3, 193-200.

کریم خانکی: دانشگاه صنعتی اراک، دانشکده علوم پایه؛ و پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، پژوهشکده ریاضیات
رایانامه: `khanaki@arakut.ac.ir`

Mathematical Culture and Thought
Volume 43, Number 2, Fall/Winter 2024, Pages 247–259
doi: 10.30504/mct.2023.1376.1967

Grothendieck's Double Limit Theorem and Model Theory

K. Khanaki[1]

Department of Science, Arak University of Technology, Iran; and School of Mathematics, IPM, Iran

Abstract. Alexander Grothendieck is undoubtedly one of the most influential mathematicians of the 20th century who revolutionized modern algebraic geometry. This article intends to study the story of one of Grothendieck's first results in another field of mathematics, namely functional analysis, which has recently been discovered to have a surprising connection with model theory. We will show that the fundamental theorem of stability theory, which was proved by Shelah in the 1970s, is in fact a consequence of Grotendieck's double limit theorem, which was proved in his doctoral thesis in the 1950s. We will also discuss the model-theoretic meaning of Grothendieck's theorem and reinforce this theorem for generically stable types. Finally, we will discuss some possible applications and results in future work.

Keywords: Grothendieck's double limit theorem, model theory, definability of types, Shelah's stability theorem, generically stable types
Article history: Recieved 1 March 2023; Accepted 26 March 2023
Article type: survey

1. khanaki@arakut.ac.ir

ISSN 1022-6443/