فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۳، شمارهٔ ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۳)، صص ۲۷۹ تا ۲۹۲

نظریهٔ دووال دربارهٔ درک شکل‌های هندسی

لادن پازوکی، نرگس یافتیان✉

چکیده. از بین نظریه‌های مرتبط با آموزش هندسه نظریهٔ درک شکل‌های هندسی توجه پژوهشگران را به خود جلب نموده است از آن نظر که تمرکز ویژه‌ای بر شکل‌های هندسی دارد. این نظریه متعلق به فیلسوف و روانشناس فرانسوی رِمون دووال است. هدف مقاله حاضر آن است شرح مختصری از این نظریه بیان کند و اهمیت آن را در فرآیند یاددهی–یادگیری هندسه آشکار سازد. در این نظریه برای درک شکل‌های هندسی چهار بُعد به‌نام‌های ادراکی، مرحله‌ای، استدلالی، و عملیاتی در نظر گرفته می‌شود که هریک ویژگی‌های منحصربه‌فردی دارند و تمرکز بر همهٔ آن‌ها ضرورت دارد. بااین‌حال، پژوهشگران اهمیت ویژه‌ای برای درک عملیاتی قائل هستند، زیرا به کمک این درک می‌توان بینشی برای حل مسئله یا ارائه اثبات کسب کرد. همچنین تسلط بر این چهار درک پیش‌نیازی برای حل مسائل هندسی با راه‌حل چندگانه بوده و در ارتقای خلاقیت نیز تأثیرگذار است. این نظریه در پژوهش‌های جدید جهانی با اقبال خوبی مواجه بوده است و می‌تواند در بازبینی فرایند آموزش هندسه و برنامه‌ریزی برای دوره‌های ضمن‌خدمت معلمان ریاضی سودمند باشد.

۱ مقدمه

بخش گسترده‌ای از هندسه، به‌ویژه هندسهٔ مدرسه‌ای، دربارهٔ شکل‌های هندسی و ویژگی‌های آن‌هاست. شکل‌های هندسی را می‌توان نوعی بازنمایی اکتشافی از روابط ریاضی موجود در یک مسئله دانست. منظور از واژهٔ اکتشافی آن است که تمام ویژگی‌های یک شکل هندسی در آن دیده نمی‌شود بلکه بسیاری از آن‌ها را باید براساس ویژگی‌های هر شکل هندسی و قوانین ریاضی کشف کرد [۶، ۷]. به‌طور کلی، مهم‌ترین قدم در فرایند حل مسائل هندسی کشف روابط هندسی نهفته در این بازنمایی‌ها

عبارات و کلمات کلیدی: آموزش هندسه، شکل‌های هندسی، نظریهٔ درک شکل‌های هندسی، دووال
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱/۲۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۶/۵

© ۱۴۰۳(انجمن ریاضی ایران)
doi: 10.30504/mct.2023.1388.1976

است [۲۰]. فیش‌باین شکل‌های هندسی را مفاهیم شکلی[1] می‌نامد، زیرا معتقد است که آن‌ها ماهیتی دوگانه دارند [۱۰]. درواقع، به باور او هر شکل هندسی علاوه‌بر تصویری که دارد می‌تواند توسط یک تعریفِ مشخص توصیف شود. پس به‌طور کلی، ویژگی‌های نهفته در هر شکل هندسی، آن را از سایر بازنمایی‌های هندسی متمایز می‌کند و این موضوع اهمیت شکل‌های هندسی را در فرایند تدریس و یادگیری هندسه آشکار می‌سازد.

دووال[2] معتقد است که به‌منظور آشنا ساختن دانش‌آموزان با شکل‌های هندسی باید ابتدا آن‌ها را درگیر دست‌ورزی با اشیای فیزیکی دوبُعدی یا سه‌بُعدی کرد که دارای ویژگی‌های هندسی هستند [۵]. سپس، باید آن‌ها را به سمت کارکردن با بازنمایی‌های دوبُعدی همان اشیاء روی کاغذ هدایت کرد و دربارهٔ ویژگی‌های هریک از شکل‌ها بحث کرد و در آخر نیز باید با کمک خودِ دانش‌آموزان آنچه را که از مفاهیم شکل‌های هندسی و ویژگی‌های آن‌ها درک کرده‌اند به‌صورت عبارات کلامی درآورد. ازآنجاکه شکل‌های هندسی مستقل از مفاهیم نیستند، دانش‌آموزان باید بتوانند در هنگام حل مسئله یا ارائه یک اثبات، بین شکل‌های هندسی و قوانین ریاضی ارتباط برقرار کنند.

به نظر دووال ارزیابی توانایی دانش‌آموزان در برقراری چنین ارتباطی ازطریق مطالعهٔ فرایندهای شناختی امکان‌پذیر است [۸، ۹]. او به‌طور کلی یادگیری هندسه را مرتبط با سه فرایند شناختی می‌داند که عبارت‌اند از فرایندهای تجسم[3]، ساخت[4]، و استدلال[5]. تجسم به معنای ایجاد بازنمایی ملموس از یک گزارهٔ هندسی و یا تلاش برای کشف راه‌حل در یک موقعیت هندسی است، ساخت به معنای ترسیم شکل‌های هندسی با استفاده از ابزارهای مخصوص است، و استدلال به معنای توضیح و اثبات به‌منظور گسترش دانش در یک زمینه است. دووال معتقد است که این سه فرایند شناختی به یکدیگر مرتبط هستند و هماهنگی میان آن‌ها برای کسب مهارت در هندسه ضروری است. به گفتهٔ او مسئلهٔ اصلی آن است که چطور دانش‌آموزان را متوجه ارتباط بین این سه فرایند کنیم و نه‌تنها تک‌تک این فرایندها بلکه تعامل آن‌ها را نیز در فرایند تدریس مورد توجه قرار دهیم [۸]. دووال برپایهٔ سه فرایند مذکور نظریهٔ درک شکل‌های هندسی را مطرح کرده است که در پژوهش‌های جدید نیز مورد توجه قرارگرفته است [۱۱، ۱۴، ۱۵]. در این نظریه، به کارگیری شکل‌های هندسی در حل مسئله‌های مرتبط به آن‌ها نیازمند چهار نوع فهم[6] است که عبارت‌اند از فهم ادراکی[7]، مرحله‌ای[8]، استدلالی،[9] و عملیاتی[10] که هریک از آن‌ها کارکرد منحصربه‌فردی دارند.

1. figural concepts 2. Raymond Duvall 3. visualization 4. construction 5. reasoning 6. apprehension 7. perceptual 8. sequential 9. discursive 10. operative

در بخش‌های بعد خواهیم کوشید اساس نظریهٔ دووال دربارهٔ درک شکل‌های هندسی را بیان کنیم و امیدواریم این کار راه را برای انجام پژوهش‌هایی در خصوص فرایند یاددهی–یادگیری هندسه در کشور هموارتر سازد.

۲ نظریهٔ درک شکل‌های هندسی

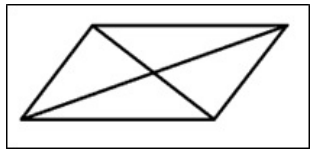
نظریهٔ دووال بر شکل‌های هندسی و روش‌های گوناگون به‌کارگیری آن‌ها متمرکز است [۹]. به‌طور کلی، در حل مسائل هندسی مختلف شکل‌های هندسی به‌صورت‌های گوناگونی مورد استفاده قرار می‌گیرند. گاهی شکل در صورت مسئله داده شده است و باید پس از تشخیص نوع شکل هندسی و شکل‌های مرتبط با آن، براساس داده‌های مسئله و روابطی که از شکل استنتاج می‌شوند استدلال‌های منطقی ساخت. گاهی نمی‌توان در نگاه اول به نتیجه رسید و لازم است با ایجاد تغییراتی در شکل هندسی و با حذف یا اضافه کردن اجزایی به آن به پاسخ درست دست یافت. گاهی نیز شکل در صورت مسئله داده نشده است و ترسیم آن مورد نظر است که باید به کمک ابزارهای ترسیم و همچنین با توجه به ویژگی‌های اساسی شکل انجام شود. در برخی مسائل نیز ممکن است علاوه‌بر ترسیم شکل هندسی، توصیف مراحل رسم آن خواسته شود. بنابراین، در مواجهه با شکل‌های هندسی با طیف گسترده‌ای از مسائل روبه‌رو هستیم و پاسخ آن‌ها نیازمند درک‌های مختلفی است که دووال [۹] آن‌ها را به چهار دسته تقسیم کرده است. در ادامه، توضیح مختصری دربارهٔ هریک از آن‌ها می‌آوریم.

۱.۲ فهم ادراکی

منظور از فهم ادراکی توانایی تشخیص شکل‌های هندسی و آشنایی با ویژگی‌های آن‌هاست. همچنین این درک به معنای توانایی یافتن زیرشکل‌ها[1] در شکل اصلی مسئله است. زیرشکل‌ها بخش‌های مختلف یک شکل هندسی هستند. برای مثال، در شکل ۱ چهار مثلث کوچک درون متوازی‌الاضلاع را می‌توان یک مجموعه از زیرشکل‌های آن در نظر گرفت. البته به‌جز چهار مثلث کوچک، زیرشکل‌های دیگری نیز در آن وجود دارد.

برای رسم شکل ۱ ابتدا یک متوازی‌الاضلاع و سپس دو پاره‌خط به‌عنوان قطرهای آن رسم می‌شوند. اما اگر بخواهیم زیرشکل‌های آن را پیدا کنیم، علاوه‌بر متوازی‌الاضلاع و دو پاره‌خط ذکرشده می‌توان مثلث‌های مختلفی را یافت و در نظر گرفت. به‌همین‌دلیل، دووال معتقد است تعداد زیرشکل‌های یک شکل هندسی معمولاً بیشتر از تعداد شکل‌هایی است که در فرایند رسم آن مورد

1. sub-figure



شکل ۱. نمونه‌ای از زیرشکل‌های یک شکل هندسی

استفاده قرار گرفته‌اند [۹]. درحالت کلی، مسائلی را که نیازمند فهم ادراکی هستند می‌توان به دو دسته تقسیم کرد [۴]:

۱) مسائلی که به کمک توانایی ادراکی حل می‌شوند و درواقع در پاسخ‌دهی به آن‌ها نیاز است که فرد شکل‌های هندسی را تشخیص دهد.

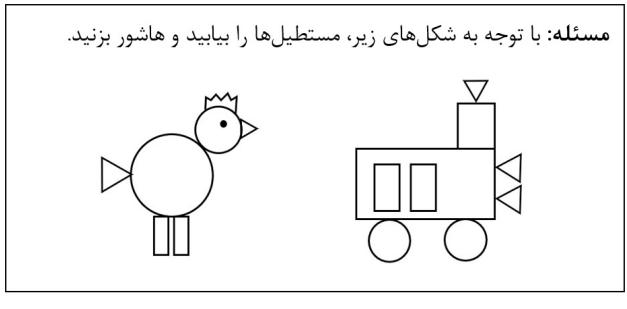
۲) مسائلی که به کمک توانایی بازشناختی حل می‌شوند و درواقع در پاسخ‌دهی به آن‌ها فرد باید زیرشکل‌های یک شکل هندسی را بیابد.

با توجه به مسئلهٔ مورد نظر و هدف آن گاهی لازم است از یکی از این توانایی‌ها یا از هردو استفاده کرد. نمونه‌ای از مسائلی که نیازمند هردو توانایی ادراکی و بازشناختی هستند در شکل ۲ مشاهده می‌شود.

برای پاسخ به این مسئله در درجهٔ اول دانش‌آموز باید با شکل مستطیل و ویژگی‌های آن آشنا باشد. درواقع، باید بتواند این شکل هندسی را تشخیص دهد و در درجهٔ دوم باید با تجزیهٔ شکل اصلی به زیرشکل‌هایش، مستطیل‌ها را بیابد. بنابراین پاسخ‌دهی به این مسئله به کمک هر دو توانایی ادراکی و بازشناختی صورت می‌گیرد.

۲.۲ درک مرحله‌ای

این درک به معنای توانایی رسم درست شکل‌های هندسی به کمک ابزارهای ترسیم مانند خطکش،



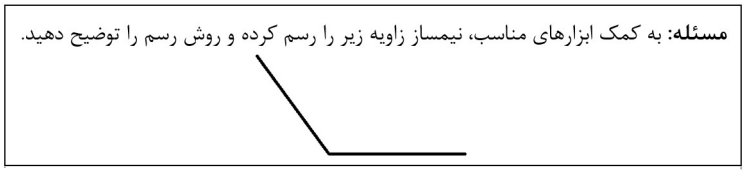
شکل ۲. نمونه‌ای از مسائل نیازمند فهم ادراکی [۲۱، ص ۹]

پرگار و مانند آن و یا توصیف مراحل آن است. به‌نظر می‌رسد که علّتِ نام‌گذاری این درک آن است که هنگام رسم شکل‌های هندسی در پیدایش اجزای آن‌ها ترتیب و اولویت خاصی وجود دارد. از یک سو، ویژگی‌های هر شکل هندسی در فرایند ترسیم آن محدودیت‌هایی ایجاد می‌کند. از سوی دیگر، کارکردن با هریک از ابزارهای ترسیم اصولی دارد. پس به منظور رسم دقیق یک شکل هندسی، لازم است تا بین ویژگی‌های آن و ابزارهای مورد نیاز، هماهنگی ایجاد شود [۹]. برای مثال، یکی از روش‌های رسم مثلث با دانستن اندازهٔ سه ضلع، آن است که بزرگ‌ترین ضلع آن به کمک خط‌کش و به‌صورت افقی رسم می‌شود، سپس از دو سر این پاره‌خط به‌اندازهٔ دو ضلع دیگر به کمک پرگار، کمان زده می‌شود و تلاقی دو کمان محل رأس سوم مثلث را مشخص می‌کند. در این فرایند باید اصلی‌ترین ویژگی هر مثلث را که داشتن سه ضلع و سه رأس است با نحوهٔ کارکرد ابزارهایی مانند خط‌کش و پرگار هماهنگ ساخت تا موفق به ترسیم درست این شکل هندسی شد. در شکل ۳ نمونه‌ای از مسائلی که نیازمند درک مرحله‌ای هستند مشاهده می‌شود.

۳.۲ درک استدلالی

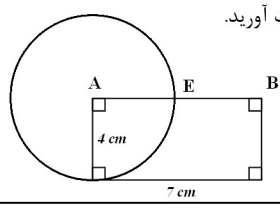
تمام ویژگی‌های هندسی مورد نیاز برای حل یک مسئله به‌طور روشن در شکل آن مشاهده نمی‌شود. برخی از این ویژگی‌ها را باید با بررسی داده‌های مسئله، نام‌گذاری‌ها، و فرضیه‌ها استنتاج کرد. فرض کنید دو مثلث که کاملاً یکسان به نظر می‌رسند روی تختهٔ کلاس رسم شوند. احتمالاً بعضی از دانش‌آموزان ادعا خواهند کرد که این دو مثلث هم‌نهشت هستند. این استدلال برپایهٔ اولین مشاهدات آن‌ها از دو شکل هندسی است و قابل اطمینان نیست. درواقع، در هیچ مسئله‌ای نمی‌توان گفت که یک ویژگی در یک شکل هندسی دیده می‌شود، بلکه، به آن چیزی که در یک شکل هندسی دیده می‌شود باید از طریق نام‌گذاری‌ها، تعریف‌ها، و قضیه‌ها اعتبار بخشید تا ارزش داشته باشد. در غیر این صورت، آن شکل یک بازنمایی مبهم است که از آن برداشت‌های متفاوتی صورت می‌گیرد [۶، ۹]. مسائلی که درک استدلالی را می‌سنجند به‌طور کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند [۴]:

۱) مسائلی که به کمک تعریف‌ها اثبات می‌شوند.



شکل ۳. نمونه‌ای از مسائل نیازمند درک مرحله‌ای

مسئله: در شکل زیر مستطیلی به نام ABCD و دایره‌ای به مرکز A مشاهده می‌شود. اندازه EB را به دست آورید.



شکل ۴. نمونه‌ای از مسائل نیازمند درک استدلالی [۴، ص ۷۰۵]

۲) مسائلی که به کمک رویه‌ها[1] اثبات می‌شوند.

برای مثال، مسئلهٔ شکل ۴ نیازمند درک استدلالی است و به کمک تعریف‌ها اثبات می‌شود.

برای حل این مسئله باید ضمن آگاهی از تعریف و ویژگی‌های شکل‌های مستطیل و دایره، اندازهٔ ضلع مورد نظر را محاسبه کرد. در شکل ۵ مسئله‌ای مشاهده می‌شود که نیازمند درک استدلالی است و به کمک رویه‌ها اثبات می‌شود.

مسئله: توضیحات یک دانش‌آموز درباره مجموع زوایای داخلی مثلث در ادامه مشاهده می‌شود. آیا با او موافق هستید؟ دلایل خود را توضیح دهید.

" سه زاویه از مثلثی را اندازه گرفتم و آن‌ها را با هم جمع کردم و حاصل ۱۸۰ درجه شد. پس مجموع زوایای هر مثلث ۱۸۰ درجه است."

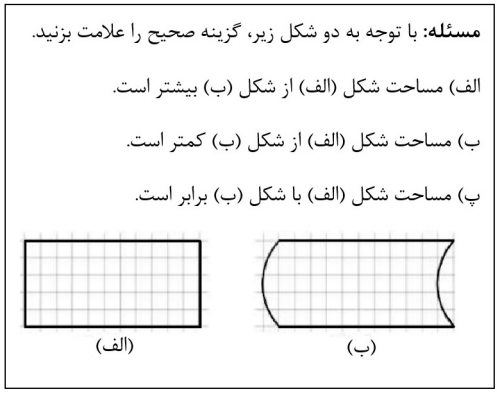
شکل ۵. نمونه‌ای از مسائل نیازمند درک استدلالی [۱۳، ص ۴۴]

به منظور پاسخ‌دهی به این مسئله باید توجه داشت که براساس اولین مشاهدات از درستی یک ادعا نمی‌توان آن را پذیرفت و اثبات مسائل هندسی نیازمند ارائه استدلال منطقی است.

۴.۲ درک عملیاتی

این درک به معنای توانایی تغییر یک شکل هندسی و یا تمرکز بر بخش‌های خاصی از آن است. درواقع، گاهی به‌منظور حل یک مسئله هندسی لازم است تا در شکل، تغییراتی ایجاد شود که این کار به روش‌های مختلفی صورت می‌گیرد. برای مثال، گاهی در شکل هندسی یک پاره‌خط اضافه یا حذف می‌شود. گاهی لازم است تا شکل را در ذهن، بزرگ یا کوچک کرد یا از زوایای مختلف به آن نگریست. در بعضی از مسائل نیاز است تا شکل هندسی را به زیرشکل‌هایش تجزیه کرد و

1. procedures



شکل ۶. نمونه‌ای از مسائل نیازمند درک عملیاتی [۱۸، ص ۵۱]

سپس به کمک این اجزا شکل دیگری ساخت. این روش پیکربندی مجدد[1] نام دارد. برای مثال، با جابه‌جایی بخشی از یک متوازی‌الاضلاع می‌توان آن را به یک مستطیل تبدیل کرد [۷، ۹].

نمونه‌ای از مسائلی که به کمک این روش حل می‌شوند در شکل ۶ مشاهده می‌شود.

برای حل این مسئله، درصورتی‌که قسمت برآمده از سمت چپ شکل ۶(ب) را جدا کرده و در سمت راست آن قرار دهیم شکلی مشابه شکل (الف) ایجاد خواهد شد. بنابراین، می‌توان حدس زد که احتمالاً مساحت دو شکل برابر است و سپس باید استدلال منطقی ارائه کرد. در مسائلی که نیازمند درک عملیاتی هستند، تغییراتی که در شکل‌های هندسی ایجاد می‌شوند می‌توانند به‌صورت ذهنی یا فیزیکی و از طریق عملیات مختلفی صورت گیرند. این اقدام‌ها فرایندی را در پی خواهند داشت که به شکل‌های هندسی ماهیتی اکتشافی و رهیافتی می‌دهند. در حل یک مسئلهٔ هندسی یک یا چند مورد از این عملیات می‌توانند یا راه‌حل مسئله را آشکار سازند و یا در یافتن قدم‌های اصلی حل یا اثبات سودمند باشند. به‌همین‌دلیل است که گفته می‌شود از طریق درک عملیاتی، می‌توان به بینشی برای حل یک مسئلهٔ هندسی دست یافت [۹].

دووال معتقد است که چهار درک نام‌برده‌شده با وجود تفاوت‌های بسیاری که دارند به یکدیگر وابسته هستند و در آموزش هندسه نمی‌توان هیچ‌یک از آن‌ها را نادیده گرفت [۹]. برای تقویت هریک از این نوع درک‌ها لازم است تا آموزش جداگانه و مخصوصی طراحی شود. برای مثال، کارکردن با نرم‌افزارهای هندسی پویا در تقویت درک‌های عملیاتی و مرحله‌ای نقش به‌سزایی دارد [۹]. از نظر او یک نگاه ریاضی‌وار به شکل‌های هندسی تنها ازطریق ایجاد هماهنگی و ارتباط بین

1. reconfiguration

چهاربُعد از درک مورد نظر، طی یک مدت زمان طولانی حاصل می‌شود. درحالت‌کلی، حل هر مسئله هندسی که نیازمند به‌کارگیری شکل‌های هندسی است حداقل به فهم ادراکی نیاز دارد و ممکن است نیازمند یک یا چند درک دیگر نیز باشد. درواقع، قدم اول در حل یک مسئلهٔ هندسی که نیازمند به کارگیری شکل‌های هندسی است، شناسایی شکل‌ها و آشنایی با ویژگی‌های آن‌هاست و علاوه‌بر آن ممکن است نیازمند ترسیم، استدلال، و یا ایجاد تغییرات مناسب در شکل هندسی نیز باشد. بنابراین بین درک‌های مورد نظر ارتباط تنگاتنگی وجود دارد [۹].

۳ برخی از پژوهش‌های انجام شده در زمینهٔ نظریهٔ دووال

پژوهش‌های متعددی در زمینهٔ نظریهٔ درک شکل‌های هندسی به منظور ارزیابی درک دانش‌آموزان و دانشجومعلمان از شکل‌های هندسی انجام شده است؛ برای مثال، [۱، ۲، ۴، ۱۳، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۲، ۲۳] را ببینید. در ادامه به چند مورد از پژوهش‌های جدید که براساس نظریهٔ دووال به بررسی درک دانش‌آموزان پرداخته‌اند اشاره می‌کنیم. در [۱۶] درک دانش‌آموزان پایهٔ نهم از شکل‌های هندسی بررسی شده است. نتایج پژوهش آن‌ها نشان می‌دهد که سطح فهم‌های ادراکی، استدلالی، و عملیاتی بیش‌از نیمی از دانش‌آموزان در سطح مورد انتظار نیست. در [۲۳] نیز درک دانش‌آموزان پایه‌های هشتم و دهم براساس نظریهٔ دووال ارزیابی شده است. نتایج پژوهش آن‌ها حاکی از آن است که به‌طور کلی، درک عملیاتی دانش‌آموزان هر دو پایه نسبت به سایر درک‌های آن‌ها پایین‌تر است. همچنین، دانش‌آموزان پایهٔ هشتم در حل مسائلی که نیازمند درک مرحله‌ای است عملکرد بسیار پایینی داشتند. در پژوهش‌های داخلی نیز دو مطالعهٔ مرتبط با نظریهٔ دووال وجود دارد. در [۲] فهم‌های ادراکی و عملیاتی دانش‌آموزان پایه‌های نهم تا یازدهم بررسی شده است. نتایج پژوهش آن‌ها نشان می‌دهد که عملکرد دانش‌آموزان هر سه پایه در پاسخ‌دهی به مسائلی که نیازمند درک عملیاتی هستند نسبت به مسائلی که تنها به کمک درک ادراکی حل می‌شوند، پایین‌تر است. در [۱] نیز درک دانش‌آموزان پایهٔ دهم از شکل‌های هندسی در چهاربُعد بررسی شده است. نتایج پژوهش نشان می‌دهد که عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائلی که نیازمند درک‌های استدلالی و عملیاتی هستند نسبت به دو درک دیگر پایین‌تر است.

علاوه‌بر مشخص کردن میزان درک دانش‌آموزان در چهاربُعد مورد نظر، برخی از پژوهش‌ها به موضوع‌های دیگری نیز در این زمینه پرداخته‌اند. برای مثال، در [۱۹] بررسی ارتباط بین ابعاد درک شکل‌های هندسی آمده است. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که بین هر دو بُعد از این ابعاد، ارتباط

محکمی برقرار است و درواقع تقویت یک درک موجب بهبود سایر درک‌ها می‌شود. این ارتباط در حل مسائل هندسی مختلف و در ارتباط با شکل‌های هندسی نمود پیدا می‌کند. برای مثال، نقش تجسم در ارائهٔ استدلال‌های هندسی، ارتباط بین دو درک عملیاتی و استدلالی را نمایان می‌سازد. همچنین، بین درک‌های استدلالی و مرحله‌ای نیز ارتباط محکمی برقرار است. درواقع، هر ترسیم هندسی بر پایهٔ یک یا چند استدلال هندسی صورت می‌گیرد. علاوه‌براین، نقش فهم ادراکی به‌عنوان پیش‌نیازی در فراخوانی درک‌های استدلالی و عملیاتی پررنگ است. درک عملیاتی نیز مستقل از سایر درک‌ها نیست و در بسیاری از مواقع، فقدان درک‌های استدلالی و ادراکی می‌تواند چگونگی به کارگیری درک عملیاتی را با مشکل مواجه سازد. برای مثال، هنگام حل یک مسئلهٔ هندسی نمی‌توان بر پایهٔ استدلالی نادرست تغییر مناسبی در شکل هندسی ایجاد کرد. ارتباط سایر درک‌ها نیز به همین منوال قابل‌توجیه است. بنابراین، در فرایند تدریس هندسه باید به تک‌تکِ آن‌ها توجه کرد. نتایج پژوهش‌های مختلف در زمینهٔ نظریهٔ درک شکل‌های هندسی نیز اهمیت این درک‌ها را آشکار می‌سازند. برای مثال، پژوهش‌هایی حاکی از آن است که تقویت درک‌ها به‌ویژه درک‌های مرحله‌ای، استدلالی، و عملیاتی در مؤلفه‌های خلاقیت تأثیر گذاشته و خلاقیت دانش‌آموزان را بالا می‌برد [۱۱، ۱۴، ۱۵].

برخی از پژوهش‌های انجام شده در زمینهٔ نظریهٔ دووال نشان می‌دهند که تسلط بر همهٔ ابعاد درک شکل‌های هندسی توانایی دانش‌آموزان را در ارائهٔ پاسخ‌های مختلف برای مسائل هندسی بالا می‌برد. درواقع، آشنایی و تسلط بر چهار درک مورد نظر توانایی حل مسائل با راه‌حل چندگانه را در دانش‌آموزان تقویت خواهد کرد [۱۴، ۱۵]. بنابراین، به‌طورکلی، بین این درک‌ها رابطهٔ سلسه‌مراتبی برقرار نیست و برای تقویت مهارت در حل مسائل هندسی لازم است که همهٔ آن‌ها مورد توجه قرار گیرند. باوجوداین، پژوهش‌ها نشان می‌دهد در آموزش هندسه باید بر درک عملیاتی، به‌ویژه مسائلی که با استفاده از روش پیکربندی مجدد حل می‌شوند، تأکید ویژه‌ای کرد [۱۵، ۲۱]. دووال نیز اهمیت ویژه‌ای برای درک عملیاتی قائل است، زیرا این درکْ با تجسم ارتباطی مستقیم دارد و یادگیری هندسهٔ مدرسه‌ای بدون تقویتِ تجسم امکان‌پذیر نیست [۹]. درواقع، به کمک این درک می‌توان توانایی لازم را برای ایجاد تغییرات مناسب در شکل‌های هندسی به منظور یافتن پاسخ درست مسائل کسب کرد. از این طریق قدرت تجسم دانش‌آموزان نیز بهبود خواهد یافت [۴، ۱۲].

۴ بحث و نتیجه‌گیری

به‌دلیلِ ماهیتی که شکل‌های هندسی دارند، دانش‌آموزان در رویارویی با آن‌ها با موانعی مواجه می‌شوند. در بسیاری از مواقع، دانش‌آموزان به آنچه در نگاه اول به یک شکل برداشت کرده‌اند استناد می‌کنند و ویژگی‌های نهان آن‌ها را کشف نمی‌کنند و این نشان می‌دهد که شهود مانع تجسم آن‌ها می‌شود [۱۷]. بنابراین چگونگی به کارگیری شکل‌های هندسی توسط افرادْ نیازمند مطالعه و بررسی است. به منظور شناسایی علل اشتباهات دانش‌آموزان در حل مسائل هندسی مختلف و همچنین هموارسازی مسیر پر پیچ‌وخم تدریس و یادگیری هندسه مطالعهٔ چارچوب‌های تدریس و یادگیری سودمند خواهد بود. اکثر پژوهش‌های داخلی در زمینهٔ هندسه بر پایهٔ مدل وان هیله، منسوب به یک زوج هلندی به‌نام‌های دینا وان هیله–خِلدُف[1] و پی‌یر وان هیله[2]، انجام شده‌اند و سایر نظریه‌های هندسی به‌ندرت به کار گرفته شده‌اند. اما یکی از نظریه‌های قابل‌توجه در این زمینه که به‌طور ویژه‌ای شکل‌های هندسی را مورد توجه قرار می‌دهد نظریهٔ درک شکل‌های هندسی نام دارد که آن را دووال ابداع کرده است.

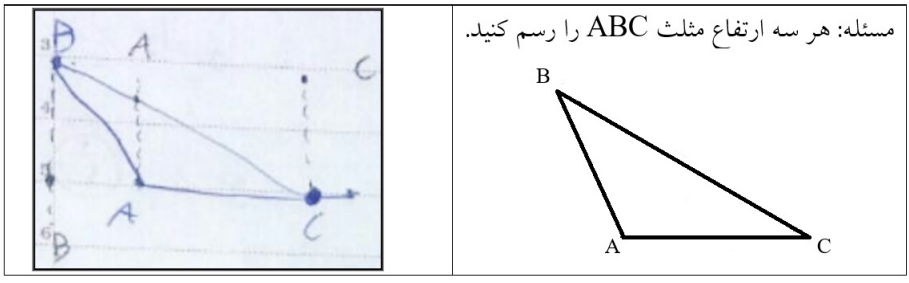
دووال معتقد است که یک نگاه ریاضی‌وار به شکل‌های هندسی زمانی حاصل می‌شود که اقدامات خاصی صورت گیرد [۵]. در نگاه اول به شکل هندسی ارائه شده در یک مسئله باید تمامی اجزا و زیرشکل‌های آن شناسایی شود. برای مثال، یک شکل سه‌بُعدی می‌تواند به اجزای یک یا دوبُعدی تجزیه شود. سپس می‌توان بین این اجزا و اشیای دنیای واقعی ارتباط برقرار کرد. سرانجام باید از شهود صِرفْ و ویژگی‌های دیداری شکل فراتر رفت تا روابط پنهان آن را به کمک مفاهیم و روابط هندسی کشف کرد. طبق گفتهٔ دووال به کارگیری شکل‌های هندسی نیازمند چهار نوع درک است [۹]. کارکرد هریک از این درک‌ها وابسته به هدف مسئله و داده‌های آن است. فهم ادراکی مرتبط با شناسایی شکل‌های هندسی و آشنایی با ویژگی‌های آن‌هاست. درک مرحله‌ای به توانایی ترسیم و توصیف مراحل رسم یک شکل هندسیاشاره دارد. درک استدلالی به معنای توانایی ارائهٔ استدلال‌های منطقی براساس داده‌های مسئله، ویژگی‌ها، و اجزای شکل است. در نهایت درک عملیاتی یعنی توانایی اعمال تغییرات مناسب در شکل هندسی برای یافتن پاسخ مسئله. طبق پژوهش‌های انجام شده تسلط بر این چهار نوع درک مطرح در نظریهٔ دووال پیش‌نیازی برای پاسخ‌دهی به مسائل هندسی و به‌ویژه مسائل با راه‌حل چندگانه است و می‌تواند خلاقیت هندسی دانش‌آموزان را ارتقا دهد [۱۱، ۱۴، ۱۵].

1. Dina van Hiele-Geldof 2. Pierre van Hiele

دووال معتقد است که در فرایند تدریس هندسه باید این چهار نوع درک را مورد توجه قرار داد، زیرا یادگیری هندسهٔ مدرسه‌ای تنها از هماهنگی این چهار درک و به کارگیری درست شکل‌های هندسی حاصل می‌شود. طبق گفتهٔ دووال فرایند تدریس هندسه باید به‌صورتی باشد که ابتدا دانش‌آموزان بر تک‌تک درک‌ها به‌طور جداگانه تسلط یابند و سپس باید بین آن‌ها هماهنگی ایجاد کرد. درواقع در ابتدای مسیر یادگیری هندسه باید مهارت‌های ترسیم، استدلال، و تجسم فضایی را به‌طور جداگانه در دانش‌آموزان تقویت کرد و حتی توصیه شده است که در ابتدا بیشتر تمرکز بر ترسیم و تجسم باشد. سپس در پایه‌های بالاتر از طریق ارائهٔ مسائلی که نیازمند چندین درک مختلف هستند مهارت حل مسئله دانش‌آموزان را بالا برد [۸، ۲۱]. دراین‌خصوص، دووال توصیه می‌کند تکالیفی به دانش‌آموزان داده شود که بیشتر نیازمند تجزیه‌وتحلیل شکل هندسی باشند و تکالیفی که مستقیماً به کمک فرمول‌های هندسی حل می‌شوند کمتر ارائه شود [۵].

به‌طور کلی، درصورتی‌که معلمان از میزان درک دانش‌آموزان در هریک از چهاربُعد معرفی‌شده آگاهی پیدا کنند می‌توانند با ارائهٔ مثال‌های مناسب و تأکید بیشتر بر مسائلی که دانش‌آموزان عملکرد پایین‌تری در آن‌ها دارند تدریس خود را بهبود بخشند و دانش‌آموزان را به سمت میزان درک مطلوب سوق دهند. با وجود اهمیت بالای ابعاد نظریهٔ درک شکل‌های هندسی نتایج پژوهش‌های انجام شده نشانگر آن است که درک بسیاری از دانش‌آموزان در چهاربُعد گفته‌شده در سطح مورد انتظار پایه تحصیلی آن‌ها نیست [۱، ۲، ۱۶، ۱۸، ۱۹، ۲۳]. از طرفی نتایج پژوهش‌های متعددی (برای مثال، [۳، ۱۶، ۱۹]) نیز نشان می‌دهند که عملکرد دانش‌آموزان در پاسخ به مسائلی که نیازمند استدلال و اثبات هستند پایین است و درواقع، بسیاری از دانش‌آموزان توانایی ارائهٔ استدلال‌های منطقی برای درستی یک ادعا را ندارند. بنابراین، شیوهٔ آموزش ارائهٔ استدلال‌های منطقی نیازمند بازنگری است و احتمال دارد که بخش‌هایی از کتاب درسی هندسه نیز نیازمند اصلاح باشد. ازاین‌طریق، نظریهٔ درک شکل‌های هندسی در تعیین خط‌مشی‌های آموزشی برای معلمان و نویسندگان کتاب‌های درسی اهمیت پیدا می‌کند. علاوه‌بر این، معلمان می‌توانند با ارائهٔ مسائل هندسی مختلف که نیازمند این چهار نوع درک هستند بسیاری از اشتباهات و بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان را شناسایی کنند. برای مثال، در [۱] با ارائهٔ چند مسئلهٔ هندسی به دانش‌آموزان پایه دهم، نتایج جالب توجهی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان به دست آمده است. یکی از مسائل داده شده در این پژوهش و پاسخ یکی از دانش‌آموزان در شکل ۷ مشاهده می‌شود.

ازآنجاکه پاسخ‌دهی به این مسئله ازطریق ترسیم انجام می‌شود، نیازمند درک مرحله‌ای است.



شکل ۷. نمونه‌ای از مسائلِ نیازمند درک مرحله‌ای و پاسخ یک دانش‌آموز [۱، ص ۷۳]

پاسخ این دانش‌آموز نشان می‌دهد که او از مفهوم ارتفاع تنها به ویژگی عمود بودن آن توجه داشته است. اما اینکه ارتفاع باید از کدام رأس و بر کدام ضلع یا امتداد آن عمود شود را نادیده گرفته و درواقع مفهوم ارتفاع به‌طور کامل و دقیق در ذهن او شکل نگرفته است. به کمک این مثال و مثال‌های متعدد دیگری می‌توان نه‌تنها به میزان درک دانش‌آموزان از شکل‌های هندسی پی برد بلکه بدفهمی‌ها و اشتباهات متداول آن‌ها را نیز شناسایی کرد.

به‌طور کلی، نظریهٔ درک شکل‌های هندسی از آن نظر که به کارگیری شکل‌ها را در حل مسائل هندسی به‌صورت ویژه‌ای مورد تمرکز می‌دهد، توجه پژوهشگران متعددی را به خود جلب کرده است. پیش‌از معرفی این نظریه، تمرکز بسیاری از پژوهش‌ها بر نظریهٔ وان هیله بوده است. نظریهٔ وان هیله کلی‌تر است و با سطوح تفکر هندسی به معنای عام آن ارتباط پیدا می‌کند اما نظریهٔ دووال به درک و ارتباط با شکل‌های هندسی می‌پردازد و در حل مسائلی که با به‌کارگیری شکل‌های هندسی حل می‌شوند مفید است. ازطرفی، برخی از مفاهیم تعریف‌شده در این نظریه مانند درک عملیاتی در دیگر پژوهش‌های هندسی موجود مشاهده نشده است. علاوه‌بر این، ازآنجاکه پژوهش‌های داخلی انگشت‌شماری به این نظریه پرداخته‌اند، این نوشته می تواند برای معلمان و دست‌اندرکاران آموزش ریاضی مفید واقع شود. درصورتی‌که معلمان و استادان با این نظریه آشنایی پیدا کنند می‌توانند از علل بسیاری از اشتباهات رایج در حل مسائل هندسی آگاهی یابند و ازطریق چارچوب گفته‌شده تدریس خود را سازماندهی کنند.

سپاسگزاری از داوران محترم برای ارائهٔ پیشنهادهای سودمند جهت بهتر شدن مقاله سپاسگزاریم. همچنین، این مطالعه با حمایت مالی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی طبق ابلاغ گرنت شمارهٔ ۱۴۹/۵۹۷۳ انجام شده است، بدین‌وسیله از این دانشگاه تشکر و قدردانی می‌کنیم.

مراجع

[۱] پازوکی، لادن، بررسی درک دانش‌آموزان پایه دهم از اشکال هندسی براساس مدل دووال، پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ۱۴۰۰.

[۲] ربی، سیما؛ اصغری، نسیم، بررسی انواع درک‌های دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه در مواجهه با شکل هندسی، مطالعات آموزشی و آموزشگاهی، ۱۱ (۱۴۰۱)، ۳۵۳-۳۸۷.

[۳] ریحانی، ابراهیم؛ حمیدی، فریده؛ کلاهدوز، فهیمه، بررسی درک و فهم دانش‌آموزان سال دوم متوسطه از استدلال و اثبات ریاضی، فصلنامه مطالعات برنامه درسی ایران، ۲۴ (۱۳۹۱)، ۱۵۷-۱۸۲.

[4] Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A., Panaoura, A., A theoretical model of students'geometrical figure understanding, in *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2010, 696-705.

[5] Duval, R., *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*, Springer, London, 2017.

[6] Duval, R., A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **61** (2006), 103-131.

[7] Duval, R., Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning (plenary address), in *Proc. 21st PME-NA Conference*, F. Hitt, M. Santos, eds., Cuernavaca, Morelos, 1999, 3-26,

[8] Duval, R., Geometry from a cognitive point of view, in *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer, Dordrecht, 1998, 37-52,

[9] Duval, R., Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings, in *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, R. Suttherland, J. Mason, eds., Springer, Berlin, 1995, 142-157.

[10] Fischbein, E., The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, **24** (1993), no. 2, 139-162.

[11] Gagatsis, A., Elia, I., Geitona, Z., Deliyianni, E., Gridos, P., How could the presentation of a geometrical task influence student creativity?, *Journal of Research in Science Mathematics and Technology Education*, **5** (2022), no. 1, 93-116.

[12] Gagatsis, A., Michael-Chrysanthou, P., Deliyianni, E., Panaoura, A., Papagiannis, C., An insight to students' geometrical figure apprehension through the context of the fundamental educational thought, *Communication & Cognition*, **48** (2015), 89-128.

[13] Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., Elia, I., Michael, P., Kalogirou, P., Panaoura, A., Andreas, P., One way of assessing the understanding of geometrical figure, *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics*, **10** (2010), 35-50.

[14] Gridos, P., Avgerinos, E., Mamona-Downs, J., Vlachou, R., Geometrical figure apprehension, construction of auxiliary lines, and multiple solutions in problem solving: Aspects of mathematical creativity in school geometry, *International Journal of Science and Mathematics Education*, **19** (2021), no. 4, 1-18.

[15] Gridos, P., Gagatsis, A., Elia, I., Deliyianni, E., Mathematical creativity and geometry: The influence of geometrical figure apprehension on the production of multiple solutions, in *Proceedings of the 11th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Freudenthal Group & Freudenthal Institute, 789-796.

[16] Karpuz, Y., Atasoy, E., Investigation of 9th grade students' geometrical figure apprehension, *European Journal of Educational Research*, **8** (2019), no. 1, 285-300.

[17] Michael, P., Gagatsis, A., The influence of the nature of geometrical figures on geometric proofs and the role of geometrical figure apprehension, in *Proceedings of the 8th International Conference Implicative Statistic Analysis*, 2015, 356-368.

[18] Michael, P., Gagatsis, A., Avgerinos, E., Kuzniak, A., Middle and high school students' operative apprehension of geometrical figures, *Acta Didactica Universitatis Comenianae–Mathematics*, **11** (2011), 47-57.

[19] Michael, P., Geometrical figure apprehension: Cognitive processes and structure, Ph.D. thesis, The University of Cyprus, 2013.

[20] Parzysz, B., Representation of space and students' conceptions at high school level, *Educational Studies in Mathematics*, **22** (1991), no. 6, 575-593.

[21] Petridou, A., Elia, I., Gagatsis, A., Exploring kindergartners' figural genesis in geometry, *In Actas Quinto Simposio International ETM*, (2016), 131-144.

[22] Ramatlapana, K., Berger, M., Prospective mathematics teachers' perceptual and discursive apprehensions when making geometric connections, *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, **22** (2018), no. 2, 162-173.

[23] Tzefriou, E., Santorinaiou, P., Deliyianni, E., Elia, I., Exploring geometrical figure apprehension: the impact of didactic contra, *Mediterranean Journal of Research in Mathematics Education*, **18** (2020), 58-75.

لادن پازوکی: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، گروه ریاضی؛ و ادارهٔ کل آموزش و پرورش تهران
رایانامه: pazokiladan@yahoo.com
نرگس یافتیان: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، گروه ریاضی
رایانامه: yaftian@sru.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 43, Number 2, Fall/Winter 2024, Pages 279–292
doi: 10.30504/mct.2023.1388.1976

Duval's Theory of Geometrical Figure Apprehension

L. Pazoki[1], N. Yaftian[2]✉

[1]Department of Mathematics, Shahid Rajaee Teacher Training University, Iran; and Central Department of Education of the City of Tehran
[2]Department of Mathematics, Shahid Rajaee Teacher Training University, Iran

Abstract. Among the theories related to geometry education, the theory of figural apprehension has attracted the attention of researchers because it has a special focus on geometrical figures. This theory was presented by a theorist named Raymond Duval. The purpose of this article is to give a brief description of this theory and to reveal its importance in the process of teaching and learning geometry. In this theory, the use of geometrical figures is related to four apprehensions named perceptual, sequential, discursive and operative, each of which has special characteristics and it is necessary to focus on all of them. However, researchers put special importance on operative apprehension. Because with the help of this apprehension, you can get an insight to solve a problem or to provide a proof. Also, mastering these four apprehensions is a prerequisite for solving geometrical problems with multiple solutions and is also effective in promoting creativity. Although this theory has met with good luck in new global research studies, internal research sources have rarely dealt with it and most of them have dealt with Van Hielie's theory. Therefore, the discussing such theories can be useful in reviewing the process of teaching geometry and planning for in-service courses for mathematics teachers.

Keywords: geometry education, geometrical figures, theory of figural apprehension, Duval
Article history: Recieved 18 April 2023; Accepted 27 August 2023
Article type: review

1. pazokiladan@yahoo.com
2. yaftian@sru.ac.ir

ISSN 1022-6443/© Iranian Mathematical Society under the CC BY-NC-SA 4.0 license