فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۴۴، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۴)، صص ۱۱۱ تا ۱۲۶

اصل موضوع و تعریف در ریاضیات

مرتضی منیری

چکیده. در اواخر قرن نوزدهم و نیمهٔ اول قرن بیستم میلادی، بحث‌هایی در زمینهٔ ماهیّت اصول و تعریف‌ها در ریاضیات درگرفت که مفهوم امروزیِ مورد استفادهٔ ریاضی‌دانان از دستگاه اصل‌موضوعی را شکل داد. این مسیر، چندان هموار نبود و حاصل تلاش‌ها و تنازعِ آرایی بود که در خلال تلاش ریاضی‌دانان برای مستحکم کردن مبانی ریاضیات پدید آمد. حاصلِ کار، شکل‌گیریِ رویکرد استاندهٔ امروزی به اصول و نحوهٔ بررسی استقلال و سازگاری آنها و همچنین در نظر گرفتنِ تعریف به‌عنوان خلاصه‌نویسیِ زبانی بود. این مقاله اختصاص به بررسی روند یادشده و همچنین تشریح رویکرد امروزی به اصول و تعریف‌های ریاضی دارد.

۱ مقدمه

تعریف برخی از مفاهیم ریاضی در گذر زمان تغییر کرده است و تغییرات بیشتری هم در آینده انتظار می‌رود. برای مثال، می‌توان به مفهوم تابع اشاره کرد. تا پیش از تثبیت مفهوم جدید تابع به‌کمک مجموعه‌ها، تابع به شکل‌های گوناگون از قبیل نقاط روی یک خم (لایب‌نیتس[1])، فرمول یا عبارتی تحلیلی برحسب چند متغیر یا ثابت (اویلر[2]) و هرگونه عبارتی که برای محاسبه سودمند باشد و در آن، متغیرها به هر روش وارد شوند (لاگرانژ[3])، تعریف می‌شد [۱]. تعریف امروزیِ تابع برحسب مجموعه‌ها، در نیمهٔ اول قرن بیستم توسط بورباکی[4] ارائه شده است. پرسشی که در اینجا به ذهن

عبارات و کلمات کلیدی: تعریف، اصل موضوع، ویژگی‌های ساختاری
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۹/۲۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۸

1. Gottfried Wilhelm Leibniz 2. Leonhard Euler 3. Joseph-Louis Lagrange 4. Nicolas Bourbaki

doi: 10.30504/mct.2024.1440.2012

می‌رسد این است که کدام‌یک از تعریف‌های تاریخیِ تابع درست است. آیا اصلاً این پرسش معتبر است؟

به روش‌های متعدد می‌توان به این موضوع نگریست. برای مثال، می‌توان تابع را مفهومی در نظر گرفت که ریاضی‌دانان ابداع کرده‌اند و در برهه‌های متعدد بسته به نیازهای زمان، تعریف آن را تغییر داده‌اند. از این نظر، این مفهوم را می‌توان با مفهومی مانند قطار مقایسه کرد که در زمانی مشخص به‌وجود آمد و تغییرات زیادی کرد به‌طوری که شاید شباهت چندانی بین قطارهای پیشرفتهٔ امروزی و قطارهای اولیه وجود نداشته باشد. در این تعبیر از تعریف در ریاضی، هرچند که مفهومی ساخته و پرداختهٔ انسان در نظر گرفته می‌شود، درست یا غلط بودن، به‌طور نسبی برای آن معنا دارد. تعریف درستِ فعلی، تعریفی است که همهٔ موارد کاربرد امروزیِ آن را بپوشاند. اما در پرتو پیشرفت ریاضیات، همین تعریف درست ممکن است دیگر درست نباشد. در این دیدگاه، ریاضیات شبیه علوم تجربی در نظر گرفته می‌شود؛ همان‌طور که شواهد تجربیِ بیشتر، ممکن است به تجدید نظر در یک نظریهٔ علمی منجر شود، پیشرفت‌های یک شاخه از ریاضیات، ممکن است نیاز به تغییر در مفاهیم اولیهٔ آن را باعث شود. همان‌طور که نظریه‌های علمی را نمی‌توان نهایی دانست، تعریف‌های ریاضی هم مستعد تغییر دائمی هستند. این جنبه‌ای از تعریف‌های ریاضی است که در دیدگاه لاکاتوش[۱] جایگاه مهمی دارد [۲۲]. او در این زمینه، از دیدگاه مشهور پوپر دربارهٔ ملاک ابطال‌پذیری برای تشخیص نظریه‌های علمی، تأثیر پذیرفته است. تعریف‌های ریاضی و نتایج منطقی آنها را می‌توان همانند نظریه‌های علمی و نتایج مشاهداتیِ آنها دانست. در پرتو نتایج، ممکن است اصلاح تعریف‌ها ضروری به نظر برسد.

اما در اینجا پرسشی دیگر مطرح می‌شود: آیا همهٔ تعریف‌های تاریخیِ تابع، به یک مفهوم واحد اشاره می‌کنند یا به مفاهیمی گوناگون که با نام واحدی ظاهر شده‌اند؟ اگر جواب مثبت باشد، دیگر درست یا غلط خواندنِ تعریف‌های گوناگون، چندان وجهی نخواهد داشت. ممکن است آن چیزی که سابقاً تابع نامیده می‌شده، به کلی با چیزی که امروزه تابع نامیده می‌شود، متفاوت باشد. به نظر نمی‌رسد چنین برداشتی، مقبولِ خود ریاضی‌دانان هم باشد. در این تلقّی، سیر تاریخیِ شکل‌گیریِ مفاهیم ریاضی و تکامل آنها نادیده گرفته می‌شود. باور متداول این است که تعریف کنونیِ تابع، عام‌ترین تعریفی است که ارائه شده است و تعریف‌های قبلی، حالت‌هایی خاص از آن هستند. البته عکس این پدیده هم ممکن است رخ دهد. برای مثال، بر اساس تلقّی کنونی از مجموعه، برخلاف

1. Imre Lakatos

تصوّر پیشین، هر ویژگی یک مجموعه را مشخص نمی‌کند. پس گویی مفهوم مجموعه محدودتر شده است.

وضعیتی مشابه در مورد اصول ریاضی وجود دارد. برای نمونه، به مفاهیم اولیه در هندسهٔ مسطّحه از قبیل نقطه و خط توجه کنید. این اعتقاد وجود دارد که یونانیان باستان، وجودی مستقل برای نقطه و خط قائل بوده‌اند. آنها برخی از ویژگی‌های پایه‌ایِ این دو را که بدیهی به نظر می‌رسیدند، به‌عنوان اصل در نظر گرفتند و تلاش کردند بقیهٔ ویژگی‌ها را به‌کمک اصول یادشده و قواعد منطق استنتاج کنند. در این دیدگاه، غلط بودنِ اصول معنایی ندارد. در دیدگاه کانت[۱] نسبت به حساب و هندسه نیز وضعیتی مشابه وجود دارد. اگر مانند کانت معتقد باشیم که هندسهٔ اقلیدسی بازتاب ساختار ذهن ما و غیر قابل‌تردید است، اصول آن نیز لاجرم درست خواهند بود. اما در گذر زمان، برخی از این اصول بیشتر بدیهی به نظر رسیدند و بنابراین در طول تاریخ، تلاش‌های بسیاری صورت گرفت تا بقیه را به‌کمک آنها ثابت کنند. برای مثال، در این مسیر ثابت شد که اصل پنجم اقلیدس دربارهٔ توازی از بقیهٔ اصول چهارگانهٔ هندسه مستقل است؛ یعنی با پذیرشِ سازگاریِ هندسهٔ اقلیدسی شامل هر پنج اصل، نقیض اصل پنجم به‌اضافهٔ چهار اصل دیگر نیز سازگار خواهد بود. برای مثال، در هندسهٔ لوباچفسکی[۲] از هر نقطه خارج یک خط، بی‌نهایت خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. در واقع، سازگاریِ هندسهٔ اقلیدسی و هندسهٔ لوباچفسکی معادل هستند [۳، ۱۴]. این روند باعث شد که بداهت اصول یادشده زیر سؤال برود. به نظر می‌رسد که حتی در مورد اصول ریاضی هم تردید مجاز باشد! در این مقاله به تاریخچهٔ رویکرد امروزی به تعریف‌ها و اصول ریاضی می‌پردازیم و همچنین رویکرد استانده در قبال آنها را توصیف می‌کنیم.

۲ جدال هیلبرت و فرگه بر سر اصول ریاضی

در ابتدای قرن بیستم، هیلبرت[۳] اصول موضوع هندسی خود را به‌عنوان جانشین اصول موضوع اقلیدس مطرح کرد تا خلأهای منطقی آنها را پُر و از هرگونه سهل‌انگاری شهودی عاری کند. او در کتاب مبانی هندسه (۱۸۹۹) به بنیاد هندسه به شیوهٔ اصل‌موضوعی دقیق خود پرداخت [۱۶]. هیلبرت ابتدا مفاهیمی مانند نقطه و خط را ظاهراً تعریف می‌کند؛ هرچند تعریف‌های او شبیه تعریف به‌معنای متداول نیستند و به نظر می‌رسد فقط انتخاب حدود اولیه و نامگذاری آنها باشند. سپس با بیان اصولی، ویژگی‌های آنها را ذکر می‌کند. به باور هیلبرت، هر اصل موضوع در واقع جزئی

1. Immanuel Kant 2. Nikolai Ivanovich Lobachevsky 3. David Hilbert

از تعریف است. با اضافه کردن اصول، مفهوم مورد بحث تغییر می‌کند. در این راستا، هیلبرت از تعریف‌های سیاقی[1] دفاع می‌کند، یعنی اصطلاحات به‌طور صریح تعریف نمی‌شوند، بلکه با ذکرشان در اصول موضوعه، معنی می‌یابند [۹].

هیلبرت هرگونه تلاش برای تعریف مفاهیم هندسی را دوری و ناامیدکننده می‌دانست. از دیدگاه او، اصول هندسی تنها قراردادهایی هستند که روابط بین مفاهیم خط و نقطه را بیان می‌کنند و ماهیّت این مفاهیم را مشخص نمی‌کنند. در واقع، می‌انگاشت که تعریفِ ماهیّت اشیای هندسی مذکور ناممکن است. اما یک مشکل ظاهری آن بود که اصول هیلبرتی، تعبیرهای مختلفی از مفاهیم هندسی را مجاز می‌دانستند. برای مثال، نقطه و خط مادام که روابط موجود بین آنها را به نحو مناسب تعبیر کنیم، هر چیزی می‌توانند باشند. همان‌طور که خود هیلبرت متذکر می‌شود، کافی است با استفاده از یک تناظر یک‌به‌یک، ساختار یک مدل از اصول را به مجموعه‌ای هم‌عدد با آن منتقل کرد. هیلبرت در این باره می‌نویسد [۱۳]:

> «. . . بدیهی است که هر نظریه فقط داربست یا طرح‌واره‌ای از مفاهیم به همراه روابط ضروری آنها با یکدیگر است و عناصر پایه‌ای را می‌توان به هر شکلی که دوست داشت، در نظر گرفت. اگر در صحبت از نکات خود، به برخی از دستگاه‌های اشیاء فکر کنم، مثلاً به دستگاه عشق، قانون، دودکش، ... و سپس همهٔ اصول خود را به‌عنوان روابط بین این چیزها فرض کنم، آنگاه گزاره‌های من مانند قضیهٔ فیثاغورس، برای اینها هم معتبر هستند... هر نظریه‌ای را همیشه می‌توان برای بی‌نهایت دستگاه عناصر پایه‌ای به‌کار برد. فقط باید یک تبدیل یک‌به‌یکِ برگشت‌پذیر را اِعمال کرد و مقرر کرد که اصول متناظر، برای چیزهای تبدیل‌شده برقرار باشند. این شرایط در واقع مکرراً مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ مثلاً در اصل دوگانگی . . .[این] . . . هرگز نمی‌تواند نقص یک نظریه باشد و در هر صورت، اجتناب‌ناپذیر است.»

هیلبرت این موضوع را که اصول می‌توانند تعبیرهای مختلفی داشته باشند، امتیازی برای آنها می‌دانست، زیرا به آنها کلیّت می‌بخشید. به‌طور کلی می‌توان گفت که اصول هیلبرتی، تعریف یک ساختار هستند و نه تعریف اشیائی خاص. از این نظر، او مشابه ددکیند فکر می‌کرد. ددکیند اصول معمول حساب را تعریف ساختار مرتب اعداد طبیعی می‌دانست. این اصول هیچ چیزی دربارهٔ

1. contextual

ماهیّت این اعداد نمی‌گویند و تعبیرهای متعدد برای آنها متصوّر است. برای مثال، می‌توان دنبالهٔ اعداد را از ۲ شروع کرد و عناصر را بازتعریف نمود. نکتهٔ مهم دربارهٔ این اصول آن است که اصطلاحاً جازم[۱] هستند، یعنی هر دو مدل آن با هم یکریخت هستند. این خاصیتی است که اصول هندسهٔ اقلیدسی و هندسهٔ لوباچفسکی هم دارند. البته باید توجه کرد که بخش‌های مقدماتی یا مرتبهٔ اولِ مجموعه‌های یادشده از اصول، این ویژگی را ندارند [۱۴]. به هر حال، جازم بودن یک امتیاز بزرگ برای این دستگاه‌های اصل‌موضوعیِ پایه‌ای است.

به‌گمان برخی فیلسوفان علم، وضعیتی مشابه در مورد علومی مانند فیزیک نیز برقرار است. قوانین، نظریه‌ها و روش‌های اندازه‌گیریِ متفاوت فیزیکی دربارهٔ مفهومی مانند جاذبه، همزمان هم احکامی را دربارهٔ آن بیان می‌کنند و هم سهمی در تعریف آن دارند. این‌طور نیست که ابتدا مفهومی را تعریف کنیم و بعد، به‌دنبال کشف ویژگی‌های آن برویم. همهٔ این موارد در تکوین یک مفهوم نقش دارند. به همین ترتیب، به نظر می‌رسد که تغییر یا افزودن یک اصل، منجر به تغییر مفهومیِ اصول می‌شود [۹].

فرگه[۲] با این دیدگاه در مورد ریاضیات مخالف بود و باور داشت که اگر اشیای مورد اشاره در اصول از قبل فاقد معنی باشند، آن اصول نمی‌توانند هیچ اندیشه‌ای را بیان کنند (اندیشه از نظر فرگه، حقیقتی ریاضی مستقل از ذهنیت ریاضی‌دانان است). در یک دنباله از مکاتبات با هیلبرت، او این دیدگاه را که اصول هندسی جنبهٔ قراردادی دارند، زیر سؤال برد [۱۳]. به نظر او، اصول هندسی می‌بایست ویژگی‌های مفاهیم نقطه و خط را بیان کنند. نقطه و خط، اشیاء یا مفاهیمی هستند که مستقل از ریاضیات نیز مطرح می‌شوند و ریاضی‌دانان به‌کمک اصول، آنها را مشخص می‌کنند. آنها قرارداد نیستند، بلکه حاصل شهود هندسی مفاهیم مرتبط هستند. در واقع، اصول هندسهٔ اقلیدسی، در مورد جهان قابل‌مشاهده با چشم غیرمسلح، صادق هستند. بنابراین به باور فرگه، اثبات مرسوم برای نشان دادنِ استقلال یک اصل هندسی A از بقیهٔ اصول، اعتبار نداشت. این اثبات متّکی است بر ساختن دو تعبیر مختلف از آن اصول و سپس نشان دادنِ اینکه A در یکی از آن تعبیرها درست و در دیگری نادرست است. اما تعبیرهای گوناگون برای یک اصل واحد، منجر به احکامی متفاوت می‌شوند که بی‌ربط به‌هم هستند. پس از نظر فرگه، درست بودنِ تعبیری از یک اصل و نادرست بودنِ تعبیری دیگر از آن، چیزی را ثابت نمی‌کند [۶، ۷، ۸، ۲۴، ۲۷].

در واقع فرگه اصول هیلبرت را شبه‌اصل می‌دانست که هیچ اندیشه‌ای را بیان نمی‌کنند. به

1. categorical 2. Gottlob Frege

اعتقاد فرگه، اندیشه‌ها آن چیزهایی هستند که در ریاضیات اهمیت اساسی دارند. این اندیشه‌ها هستند که مابین ریاضی‌دانان مشترک هستند وگرنه بیان‌های صوریِ قضیه‌های ریاضی، می‌توانند متفاوت باشند. بنابر نظر فرگه، ممکن است اصول غلط باشند، یعنی آن مفهومی را که باید معرفی کنند، به‌درستی مشخص نکنند. تحلیل دوبارهٔ مفاهیم در گذرِ زمان می‌تواند منجر به تغییر اصول شود. اما چنین چیزی را در خصوص اصول هیلبرتی نمی‌توان گفت. آنها قراردادهایی هستند که با قراردادهای دیگر جایگزین می‌شوند؛ درستی و نادرستی در مورد آنها معنایی ندارد. در رویکرد هیلبرت، مسائل فلسفی مرتبط با مفاهیم ریاضی، مانند منشأ اصول و دلیل پذیرش آنها، ناپدید می‌شوند. این به‌خصوص در مورد حساب حساس‌تر بود، زیرا فرگه برای مفهوم‌های هندسی، منشأ شهودی و حسی را می‌پذیرفت، اما در مورد اعداد و ویژگی‌های آنها، نه. فرگه حساب را کاملاً مستقل از حواس و یا تصوّرات انسان می‌شمرد و کلی بودنِ ویژگی‌های حسابی را پایه‌ای‌ترین قواعد تفکر می‌دانست.

البته هیلبرت هم نمی‌خواست از ادعای درست بودنِ اصول دست بکشد، اما به‌خلافِ فرگه، سازگاری اصول را نشانه‌ای از درست بودنِ اصول می‌دانست و نه به‌عکس. تفاوت دیدگاه‌های فرگه و هیلبرت در موضوع سازگاریِ دستگاه‌های اصل‌موضوعی نیز قابل‌توجه است. با توجه به قراردادی بودنِ اصول در تلقّی هیلبرت، نیاز بود که سازگاریِ آنها بررسی شود. موضوع سازگاری اصول هندسی چیزی بود که ذهن پوانکاره[1] را نیز به خود مشغول کرده بود [۲۳]. مدل هندسهٔ نااقلیدسی پوانکاره، با فرض سازگاری هندسهٔ اقلیدسی ارائه شده بود. از نظر پوانکاره، بررسی سازگاریِ اصول هندسهٔ اقلیدسی، مسئله‌ای مهم بود. هیلبرت در تلاش برای اثبات سازگاری اصول هندسی خود، توانست سازگاریِ نسبی آنها را نشان دهد. او نشان داد که با فرض سازگاریِ اصول اعداد حقیقی، اصول هندسی او نیز سازگار خواهند بود. برای این منظور، او تعبیری از اصول هندسی خود را برحسب اعداد حقیقی ارائه کرد. سازگاری دستگاه اعداد حقیقی را به‌نوبه خود، می‌توان به سازگاریِ دستگاه‌های اصل‌موضوعیِ حساب تحویل کرد. فرگه چنین برهانی را معتبر نمی‌دانست. اندیشهٔ مرتبط با اعداد حقیقی به‌تمامی با اندیشهٔ مرتبط با نقطه و خط متفاوت است. اگر آن‌طور که فرگه می‌خواست، اصول هندسه ماحصلِ تجزیه و تحلیل مفاهیم هندسی بوده باشد و بنابراین درست باشند، آنگاه لزوماً سازگار نیز هستند. درستیِ اصول، سازگاری آنها را نتیجه می‌دهد نه به‌عکس.

البته تفاوتی بین دستگاه‌های اصل‌موضوعی گوناگون وجود دارد. اصول نظریه‌هایی مانند

1. Henri Poincaré

مجموعه‌ها را می‌توان اصول بنیادی نامید، اصول نظریهٔ گروه‌ها، حلقه‌ها و دیگر ساختارهای ریاضیِ امروزی را می‌توان اصول ساختاری دانست که انواع ساختارها را تعریف می‌کنند [۲۷]. در دیدگاه بنیادی، اصول ZF ویژگی‌های جهان V را که همان سلسله‌مراتب تجمعی مجموعه‌ها[1] است، توصیف می‌کنند که شامل (نسخه‌ای) از همهٔ مفاهیم (اشیای) ریاضی است. این سلسله‌مراتبِ مجموعه‌ها از $\varnothing$ آغاز می‌شود و هر مرحلهٔ تالی، متشکل از مجموعهٔ توانی مرحلهٔ قبلی و هر مرحلهٔ حدی، متشکل از اجتماع همهٔ مجموعه‌ها در مراتب قبلی است [۱۷]. در دیدگاه ساختاری، اصول مجموعه‌ها مانند بقیهٔ اصول ریاضی، مدل‌های بی‌شماری دارند. البته گرایشی جدید در فلسفهٔ ریاضی وجود دارد که مابین این دو جنبهٔ اصول مجموعه‌ها، آشتی برقرار می‌کند. بنابر دیدگاه چندجهانی به ریاضیات، مدل‌های گوناگون مجموعه‌ها، ریاضیات‌های ممکنِ گوناگونی را نمایندگی می‌کنند. در این روایت، بحث استقلال اصلی مانند CH مطرح نیست. جهانی وجود دارد که در آن، CH درست است و جهانی دیگر که در آن، CH غلط است [۱۵].

امروزه دیدگاه هیلبرت مبتنی بر در نظر گرفتنِ اصول ریاضی به‌عنوان قرارداد، به دیدگاه مسلط در ریاضیات تبدیل شده است. وفور دستگاه‌های اصل‌موضوعی در ریاضیات، گواهی بر این توافق است. البته مقاومت‌هایی نیز در این زمینه وجود دارد. برخی از ریاضی‌دانان، افراط در این روش را باعث جدایی ریاضیات از علوم دیگر در مسیر شناخت جهان و جدا افتادنِ آن از هدف و ریشه‌های عمیق خود می‌دانند. اما باید توجه کرد که خطر اصلی برای یک علم، از جانب عالمانِ همان علم است. همان‌طور که افراط در صورتگرایی خطری برای ریاضیات است، توجه صرف به موضوعات کاربردی و قطع توجه از جنبه‌های وسیع‌تر ریاضیات نیز می‌تواند به ابتذال منجر شود. در هر حال، باید در نظر داشت که ارائهٔ یک دستگاه اصل‌موضوعی، پیش از معرفی مدل‌های متنوع و قابل‌توجه برای آن، توجیهی ندارد.

۳ تعریف ریاضی

در نگاه اول به نظر می‌رسد که حداقل دو گونه تعریف در ریاضیات وجود داشته باشد. گاهی ریاضی‌دانی حرفه‌ای می‌خواهد یک مفهوم یا نماد کاملاً جدید را در حوزهٔ تخصصی خود معرفی و مطالعه کند که البته این مفهوم نمی‌تواند از هیچ به‌وجود آمده باشد و مبتنی بر مفاهیم قبلی است. برای این منظور، او اصطلاح یا نمادی جدید را انتخاب می‌کند و تعریف آن را برحسب مفاهیم و

1. commulative hierarchy of sets

اصطلاحاتِ از قبل آشنا، بیان می‌کند. برای مثال، می‌توان از تعریف عدد π یاد کرد. ریاضی‌دانان در مرحله‌ای به ثابت بودنِ نسبت محیط هر دایره به قطر آن، پی بردند و نماد π را برای نشان دادنِ این نسبت وضع و آن را وارد پژوهش‌های خود کردند. از طرف دیگر، ریاضی‌دان ممکن است بخواهد مفهومی را تعریف کند که تاریخچه‌ای دارد. برای مثال، مفهوم عدم پارگی در نمودار یک تابع را در نظر بگیرید که از آن تصوّری شهودی وجود داشته است. ریاضی‌دانان احتمالاً به شیوهٔ زیر عمل کرده‌اند. ابتدا اصطلاحی جدید مانند «پیوستگی» وضع کرده‌اند و با فرض برخی شرایط روی تابع مورد بحث، آن را دقیقاً تعریف کرده‌اند. هدفشان این بوده است که مفهوم تعریف‌شده همهٔ ویژگی‌های مورد نظر را تا حد امکان داشته باشد. ممکن است در یک مرحله، تعریف ارائه‌شده همهٔ ویژگی‌های اصلیِ مورد نظر را نداشته باشد یا اینکه ویژگی‌های ناخواسته‌ای هم داشته باشد. اما پس از چند مرحله اصلاح، تعریف مورد قبول واقع و به‌طور رسمی وارد ریاضیات شده است. در چنین حالت‌هایی می‌توان مفهوم قدیمیِ شهودی را فراموش و با مفهوم جدید کار کرد. البته به‌مرور زمان و با توسعهٔ مفهوم تابع و یا فضای مورد بحث، این نیاز به‌وجود آمد که تعریف باز هم گسترش یابد. برای مثال، تعریف پیوستگی در یک فضای توپولوژیک دلخواه، چندان ربطی با مفهوم شهودی پیوستگیِ تابع تعریف‌شده بر خط حقیقی ندارد. حتی خود توابع حقیقیِ پیوسته، ویژگی‌هایی دارند که عجیب و غیرشهودی به‌نظر می‌رسند [۱۸]. در این مرحله، به نظر می‌رسد که مفهوم تعریف‌شده بیشتر جنبهٔ قراردادی دارد. به این معنی، نوع دومِ تعریف ریاضی چندان تفاوتی با نوع اول ندارد. هر دو حاصل یک‌جور قرارداد هستند. این گونه تعریف‌ها را تعریف تصریحی[۱] می‌نامند.

یک تعریف تصریحی می‌گوید نماد یا عبارتی جدید، دقیقاً همان معنی را دارد که نماد یا عبارت بامعنی پیچیده‌ترِ از قبل معلوم دارد و بنابراین هر دو عبارت، مصداق‌های یکسانی دارند. تعریف‌های مرحله‌به‌مرحله در نظریهٔ مجموعه‌ها، مثال‌های خوبی در این زمینه فراهم می‌کنند. برای مثال، می‌توان تعریف «مجموعهٔ تهی» به‌کمک تساوی و تعلق (دو نسبت اصلی در نظریهٔ مجموعه‌ها) را در نظر گرفت. این نماد گرچه بسیار تسهیل‌گر است، بدون آنکه هیچ نتیجه‌ای از دست برود، قابل‌حذف است. البته توجه کنید که صِرف تعریف چیزی در ریاضیات، وجود آن را ثابت نمی‌کند. برای مثال، وجود مجموعهٔ تهی جزو اصول نظریهٔ مجموعه‌ها است. نکتهٔ دیگر اینکه برخی مفاهیم ریاضی، تعریف‌های معادل متعدد دارند؛ برای مثال، می‌توانید دو تعریف مشبکه و اثبات هم‌ارزی آنها را در صفحات آغازینِ کتاب [۱۱] ببینید.

1. stipulative

مشهور است که فرگه تنها یک نوع تعریف در ریاضیات را مجاز می‌دانست: تعریف تصریحی:

> «من می‌خواهم کل گزاره‌های ریاضی را به دو دسته تقسیم کنم: تعریف‌ها و همهٔ گزاره‌های باقیمانده (اصول موضوعه، قوانین بنیادی، قضیه‌ها). هر تعریفی حاوی یک نشانه (یک عبارت، یک کلمه) است که قبلاً معنایی نداشته و با تعریف، به آن معنا داده می‌شود. پس از انجام این کار، می‌توان تعریف را به یک گزارهٔ بدیهی تبدیل کرد؛ گزاره‌ای که می‌تواند مانند اصل موضوع استفاده شود. اما نباید این حقیقت را از نظر دور داریم که تعریف، چیزی را ادعا نمی‌کند، بلکه چیزی را بیان می‌کند. بنابراین هرگز نباید چیزی را که برای تأیید، نیاز به اثبات یا چیزی دیگر دارد، تعریف در نظر بگیریم.» [۱۳]

بر این اساس، ویژگی‌های مهم تعریف ریاضی در دیدگاه رسمیِ امروزی به قرار زیر است [۹، ۱۴]:

- تعریف ریاضی، بیان یک خواست است و بنابراین صدق‌پذیر نیست؛
- تعریف ریاضی قابل‌حذف است، زیرا صرفاً نوعی خلاصه‌نویسی است؛
- تعریف ریاضی ناآفریننده است، یعنی هیچ قضیه‌ای جدید را به‌کمک آن نمی‌توان ثابت کرد که بدون آن نتوان؛
- تعریف یک شیء ریاضی، وجود آن را نتیجه نمی‌دهد.

از دید فرگه، اصول ریاضی تنها می‌توانند شامل عبارت‌هایی باشند که معنای آنها از قبل مشخص شده باشد. پس شبه‌اصول هندسی هیلبرت، نمی‌توانند اصل موضوع باشند. در اینجا این ابهام مطرح می‌شود که تعریف مشهور فرگه از اعداد طبیعی، تصریحی به نظر نمی‌رسد. یک دستگاه اصل‌موضوعی برای حساب در همان زمان توسط ددکیند و پئانو مطرح شده بود، اما اینکه این اصول بتوانند ماهیّت اعداد طبیعی را مشخص کنند، سؤال‌برانگیز است [۲۱]. تعریف فرگه ماحصل تحلیل مفهوم عدد بوده است و قراردادی نیست. در ضمن، فرگه از این تعریف برای اثبات ویژگی‌های اعداد استفاده کرده است و قابل‌حذف نیستند. برای مثال، تعریف فرگه از عدد ۲ را ذکر می‌کنیم. فرض کنید $A(x)$ محمولی باشد که دامنهٔ (حوزهٔ مصداق‌های) آن دو عضو دارد. اینکه حوزهٔ مصداق‌های A دو عضوی است، توسط یک فرمول منطقیِ ساده و بدون استفاده از عدد ۲ قابل بیان است. فرگه عدد ۲ را دامنهٔ محمولِ «هم‌عدد با $A(x)$» تعریف کرد. این یک محمول مرتبهٔ دوم است و دامنهٔ آن متشکل از محمول‌هایی مرتبهٔ اول است که دامنهٔ آنها دو عضوی است

[۲]. البته این تعریف با اشکال‌هایی از قبیل پارادُکس راسل مواجه است، اما با تلاش‌های بعدیِ منطق‌دانان، مشخص شد که این اِشکال‌ها برطرف‌شدنی هستند [۶].

اِشکال بالا ممکن است در مورد تعریف مفاهیمی مانند پیوستگی تابع نیز مطرح شود. مفهوم شهودیِ پیوستگی تابع قبل از طرح تعریف رسمیِ امروزی، مورد توجه بوده است. البته عدد، مفهومی است بنیادی که بر اساس مفاهیم منطقی و نه لزوماً ریاضی، تعریف شده است، اما این مطلب در مورد تعریف پیوستگی تابع صادق نیست. این تعریف، بر اساس مفاهیم ریاضیِ قبلاً تثبیت‌شده، شکل گرفته است و ریاضی‌دانان آن را به‌عنوان تعریف قراردادیِ جدید به‌کار می‌برند. هیچ‌کس نمی‌تواند مدعی شود که این مفهومِ تعریف‌شده از هر نظر با نیای پیشاریاضیاتی خود، هماهنگ است. حتی کارناپ[1] پرسش‌هایی از این دست را که آیا این مطابقت وجود دارد یا نه، پرسشی باطل یا پرسش‌نما می‌دانست [۲۵]. در ادامه بر تعریف عدد متمرکز می‌شویم.

دربارهٔ چگونگیِ تعریف فرگه از مفهوم عدد، اختلاف‌نظر وجود دارد. آیا این تعریف، تصریحی است یا تحلیلی؟ به این معنی که آیا مفهوم عدد، محصول تحلیل است و به‌ویژه با اندیشه‌های مربوط به اعداد پیوند دارد و ماهیّت آنها را مشخص می‌کند و راه دیگری برای تعریف آنها وجود ندارد؟ در این خصوص، در میان مفسّران اختلاف‌نظر وجود دارد [۱۰، ۲۵]. در هر حال، برای پاسخ باید توجه کرد که فرگه به‌طور خاص از این تعریف در اثبات یا توجیه اصول ددکیند–پئانو[2] برای اعداد طبیعی استفاده کرده است. از دیدِ فرگه، اصول هندسه بر مبنای شهود تجربی توجیه‌پذیر هستند، اما اصول حساب دارای چنین مبنای شهودی نیستند. او به‌تفصیل به این موضوع پرداخته و امکان هرگونه توسّل به شهود فیزیکی یا ذهنی را در توجیه اصول اعداد رد کرده است [۱]. به این معنی، کار فرگه روی اعداد طبیعی را می‌توان تحلیل مفهوم عدد دانست که در پیشاریاضیات و به‌عنوان توجیه اصول اعداد مطرح شده است. اعداد طبیعی در این رویکرد، مفاهیم ریاضی بنیادی هستند و نمی‌توان آنها را برحسب مفاهیم ریاضی دیگر تعریف کرد. پس از تحلیل مفهوم عدد در حوزهٔ ریاضی، می‌توان تنها به نتایج صوری–منطقی اصول توجه کرد و بر این اساس، اصول یادشده، ویژگی‌های اعداد طبیعی را به‌درستی بیان می‌کنند. بقیهٔ ساختارهای عددی از قبیل ساختار اعداد حقیقی را می‌توان برحسب ساختار اعداد طبیعی به روش‌های متعدد به نحوی قابل‌قبول تعریف کرد. ملاک قابل‌قبول بودنِ این تعریف‌ها نیز این است که آنها می‌بایست ویژگی‌های مورد نظر ریاضی‌دانان را تا حد ممکن برآورده کنند و نتایج ناخواستهٔ کمتری را تحمیل کنند.

1. Rudolf Carnap 2. Dedekind-Peano axioms

البته نظیر تعریف فرگه‌ایِ اعداد را می‌توان در نظریهٔ مجموعه‌ها نیز مطرح کرد: ۲ ردهٔ همهٔ مجموعه‌های دو عضوی است. هرچند می‌دانیم این تعریف، یک مجموعه را در نظریهٔ ZF مشخص نمی‌کند، اما با استفاده از ترفند اسکات،[1] می‌توان این تعریف را جوری اصلاح کرد که ردهٔ یادشده، مجموعه باشد. برای این منظور، می‌توان در این رده فقط مجموعه‌های با رتبهٔ کمینه در بین مجموعه‌های دو عضوی را در نظر گرفت. منظور از رتبهٔ یک مجموعه، کوچکترین α است به‌طوری که آن مجموعه به V_α متعلق باشد [۱۷]. این تعریف عدد را می‌توان تعریفی تصریحی برحسب مفهوم بنیادی مجموعه دانست. پس نوع نگاه ما به جایگاه تعریف فرگه‌ایِ عدد، در تشخیص نوع آن تأثیر دارد. البته همان‌طور که مشهور است، اعداد را به شکل‌های دیگری هم می‌توان تعریف کرد به‌گونه‌ای که اصول مذکور همچنان برقرار باشند. برای مثال، تعریف فون‌نویمان[2] تعریفی خوب در این زمینه است. این تعریف را می‌توان به سبک فرگه و برحسب مفاهیم منطقی بیان کرد. در این باره می‌توان گفت که تعریف فرگه از تعریف فون‌نویمان طبیعی‌تر است؛ به این معنی که مثلاً در تعریف عدد ۲، همهٔ محمول‌هایی را که حوزهٔ مصداق‌هایشان دو عضوی است، گرد هم می‌آوَرَد. این به ایدهٔ اصلی فرگه نزدیک‌تر است.

فرگه این امکان را که در گذر زمان، تعریف‌های یادشده اصلاح شوند و تکامل پیدا کنند، رد نمی‌کند. خود او در کارهای اخیرتر، اصلاحی کوچک در این مورد انجام می‌دهد [۱۲]، اما این تکامل نمی‌تواند در حدی باشد که درستیِ ویژگی‌های اصلی اعداد طبیعی که مثلاً توسط اصول ددکیند–پئانو بیان می‌شوند را خدشه‌دار کند. در مقابل، لاکاتوش این امکان را که در گذر زمان و در پرتو نیازهای جدید، حتی اصول حساب و به‌تبعِ آن، مفهوم عدد دستخوش تغییر شود، رد نمی‌کند. از نظر او هیچ تعریفی، نهایی نیست. اما فرگه چنین چیزی را نمی‌پسندد [۲]:

> «نگرش تاریخی که به شدنِ چیزها گوش می‌سپارد و از نحوهٔ شدنِ آنها در جستجوی ماهیّت آنها است، به‌یقین مزیّت‌های زیادی دارد، اما محدودیت‌هایی نیز دارد. اگر همه‌چیز پیوسته در تغییر می‌بود و هیچ‌چیزی نبود که برای همیشه ثابت باشد، آنگاه شناخت جهان ناممکن می‌بود و همه‌چیز در ابهام فرو می‌رفت. آنچه را تاریخِ مفاهیم می‌خوانیم، یا تاریخ دانش ما از مفاهیم است یا تاریخ دانش ما از دلالت واژه‌ها.»

1. Scott's trick 2. John von Neumann

در پایان این بخش، تذکر یک نکته سودمند است. به نظر می‌رسد که با بحث‌های اخیر، نه‌تنها به پرسش‌های بنیادیِ موجود، پاسخی قاطع داده نشد، بلکه پرسش‌هایی جدید سر برآوردند. باید گفت که این، خاصیّت معمول بحث‌های بنیادی و فلسفی است. دستاورد اصلی بحث‌های این‌چنینی، یافتن پاسخی نیست که همه را قانع کند، بلکه طرح پرسش‌های جدید در جایی است که در نگاه نخست، پرسش‌ناپذیر و یقینی هستند!

۴ ویژگی‌های ساختاری

چنان‌که دیدیم، اصول دستگاه‌های ریاضی که امروزه در جای‌جای ریاضیات حضور دارند، مانند اصول نظریهٔ گروه‌ها، اصول نظریهٔ حلقه‌ها و دیگر ساختارهای ریاضی، به یک معنا اصول ساختاری هستند. آنها جمله‌هایی هستند که ساختاری را تعریف می‌کنند و نه اشیائی که در اصول، به نام‌های آنها اشاره می‌شود. به همین دلیل، هر دستگاه اصل‌موضوعی از نوع هیلبرتی، مستعد تعبیرهای گوناگون است. مثلاً به‌سادگی می‌توان با استفاده از تناظر یک‌به‌یک، ساختار بناشده بر یک مجموعه را به هر مجموعهٔ هم‌عدد با آن منتقل کرد. به همین دلیل، گفته می‌شود که اصول، به‌طور جزئی تعیین‌کننده هستند. حتی وجود تعریف‌های مختلف برای اعداد طبیعی که اصول ددکیند–پئانو را برآورده می‌کنند، برخی را به این نتیجه رسانده است که ساختار اعداد طبیعی را نیز تنها می‌توان در حد یکریختی مشخص کرد [۵]. در این بخش، می‌خواهیم مفهوم ساختار و ویژگی‌های آن را از دید منطق ریاضی بررسی کنیم. منظور ما از یک ساختار ریاضی، یک ساختار مرتبهٔ اول یا مرتبهٔ دوم و یا حتی از مراتب بالاتر در منطق ریاضی است. یک ساختار مرتبهٔ اول به زبان ساده عبارت است از یک مجموعه به‌عنوان مجموعهٔ زمینه، همراه با دسته‌ای از روابط بین اعضای آن مجموعه. البته در حالت کلی می‌توان عضوهای مشخصی از آن مجموعه و همچنین توابعی روی آن مجموعه را هم در نظر گرفت. در ساختارهای مرتبهٔ دوم می‌توان از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ زمینه و رابطه‌های بین آنها هم سخن گفت. ساختارهای مراتب بالاتر به شیوه‌ای مشابه تعریف می‌شوند. برای مثال، یک گروه یک ساختار مرتبهٔ اول و یک فضای توپولوژیک، ساختاری مرتبهٔ سوم است. در ساختار مرتبهٔ دومِ اعداد طبیعی، به‌راحتی می‌توان اصل استقرا را برای هر زیرمجموعه از اعداد بیان کرد.

اما ویژگی‌های ساختاری چه هستند؟ برای مثال، اگر ساختار اعداد طبیعی را تنها ساختار در حد یکریختی برای اصول موضوعهٔ مرتبهٔ دوم حساب برمبنای تعریف فون‌نویمان از اعداد در نظر بگیریم، فرد بودنِ یک عدد، خاصیت ساختاریِ آن به‌نظر می‌رسد. در مقابل، ویژگی‌هایی که مرتبط با

تعریف فون‌نویمان برحسب مجموعه‌های خاص هستند، چنین نیستند. در مورد ویژگی‌های ساختاریِ اشیای ریاضی، دو دیدگاه وجود دارد. شاپیرو[۱] در این زمینه می‌گوید [۲۷، ص ۲۸۶]:

> «یک ویژگی را ''ساختاری'' می‌نامیم اگر بتوان آن را بر اساس روابط یک ساختار معین تعریف کرد.»

از طرف دیگر، لینبو[۲] در همین مورد می‌گوید [۲۰، ص ۶۴]:

> «اکنون می‌توان یک ویژگی ساختاری را خاصیتی توصیف کرد که می‌توان از طریق فرآیند انتزاع به آن دست یافت؛ یا به‌طور معادل، خاصیتی که در همهٔ دستگاه‌هایی که ساختار مورد نظر را عینیت می‌بخشند، مشترک است.»

پس به‌طور غیررسمی، ویژگی‌های ساختاریِ اشیاء در یک ساختار ریاضی را به یکی از دو روش می‌توان توصیف کرد: (الف) به‌عنوان ویژگی‌هایی که به‌کمک روابط اولیهٔ آن ساختار تعریف‌پذیر هستند؛ (ب) به‌عنوان ویژگی‌هایی که اشیای نظیر در ساختارهای مشابه در آن مشترک هستند. در ادامهٔ این بخش می‌کوشیم تا با استفاده از مفاهیم نظریهٔ مدل که بخشی از منطق ریاضی است، پاسخی ریاضی‌وار برای این پرسش‌ها بیابیم و به‌ویژه دو توصیف یادشده را دقیق کنیم [۱۹].

فرض کنید L زبانی باشد که ساختاری مانند T برحسب آن تعریف می‌شود. برای مثال، می‌توان T را ساختار گروه‌ها و L را شامل دو پارامتر e و $\circ$ دانست که در آن، e یک نماد ثابت و $\circ$ یک نماد تابعیِ ۲ـموضعی است. یک گروه چیزی نیست جز ساختاری در زبان گروه‌ها که اصول موضوعهٔ گروه در آن صادق هستند. عضوی مانند a از یک گروه خاص G را در نظر بگیرید. ویژگی‌های ساختاریِ a را به دو روش می‌توان تعریف کرد. اول اینکه خاصیتی مانند P از a را ساختاری گوییم هرگاه بتوان P را برحسب نمادهای زبان نوشت. برای مثال، می‌توان این خاصیت را که a با هر عنصر دیگر گروه جابه‌جا می‌شود، در نظر گرفت. به‌سادگی به‌کمک نمادهای زبان و علائم منطقی، می‌توان ویژگی یادشده را بیان کرد. از طرف دیگر، می‌توان خاصیتی از a را ساختاری گرفت اگر تحت همهٔ خودریختی‌های گروه G حفظ شود. خاصیت مذکور در بالا با هر دو تعریف، ساختاری است. این دو تعریف، هم‌ارز نیستند. برای مثال، این ویژگی که مرتبهٔ عنصری در یک گروه، متناهی است در زبان گروه‌ها تعریف‌پذیر نیست، اما مطمئناً تحت هر خودریختی حفظ می‌شود.

1. Stewart Shapiro 2. Øystein Linnebo

البته قضیه‌ای در نظریهٔ مدل‌ها بیان می‌کند که اگر زبانِ ساختار مورد نظر را نامتناهی بگیریم، یعنی ترکیب‌های فصلی و عطفی با طول بی‌نهایت مجاز باشند، آنگاه دو تعریف مذکور معادل خواهند بود [۱۹]. اما اگر نخواهیم بهای گذر به زبان نامتناهی را بپردازیم، باید در مورد اینکه کدام تعریف را برگزینیم، بیشتر تأمل کنیم.

تعریف مبتنی بر تعریف‌پذیری این ایراد را دارد که برخی ویژگی‌های ممکنِ اعضای یک گروه مانند آنچه در بالا آمد را کنار می‌گذارد. تعریف مبتنی بر خودریختی این مشکل را دارد که برخی ویژگی‌هایی را که ساختاری به نظر نمی‌رسند، شامل می‌شود. ساختار اعداد طبیعی به‌عنوان مدلی برای اصول مرتبهٔ دوم حساب، جازم است، یعنی تنها یک خودریختی بدیهی دارد. به عبارت دیگر، با تعریف مبتنی بر خودریختی، هر ویژگیِ اعداد طبیعی، ساختاری خواهد بود! بنابراین هر دو تعریف مشکلاتی دارند. یک راه‌حل میانه این است که ویژگی‌هایی از یک عنصر درون یک ساختار را ساختاری بدانیم اگر تحت یکریختی‌های آن ساختار، پایا بمانند. به عبارت دیگر، ویژگی‌هایی از عناصر یک ساختار، ساختاری هستند اگر بین همهٔ تصاویر آنها تحت یکریختی، مشترک باشند. البته با این تعریف هم مواردی هستند که ممکن است با شهود ما از ویژگی‌های ساختاری هماهنگ نباشند. برای پی بردن به این نکته، توجه کنید که در مورد یکریختی‌ها نیز قضیه‌ای از نوع یادشده در بالا وجود دارد؛ یعنی ویژگی‌هایی که تحت یکریختی پایا هستند، دقیقاً ویژگی‌هایی هستند که در یک زبان نامتناهیِ خاص، تعریف‌پذیرند [۱۹]. اما آیا این‌گونه ویژگی‌ها از دیدگاه شهودی، ساختاری هستند؟ به نظر نمی‌رسد که چنین باشد.

از طرف دیگر، برخی ویژگی‌ها هستند که به نظر می‌رسد به یک ساختار خاص وابسته‌اند و به‌طور موضعی ساختاری هستند. مثلاً فرض کنید ویژگی $A(x)$ برای عدد طبیعی x این باشد که x کد یک جملهٔ معتبر در منطق مرتبهٔ دوم است. این فرمول، در ساختار حسابیِ مرتبهٔ دوم تعریف‌پذیر نیست. آیا $A(x)$ واقعاً خاصیتی ساختاری از اعداد است؟ به نظر چنین می‌رسد. یک عدد طبیعی برای آنکه کد یک جملهٔ معتبر باشد باید در پیوندی خاص با بقیهٔ اعداد قرار داشته باشد. آیا این ویژگی تحت یکریختیِ ساختارهای مرتبهٔ دوم، پایا است؟ لزوماً چنین نیست؛ این به انتخاب ما از نحوهٔ کد کردن جمله‌ها بستگی دارد. ممکن است در دو ساختار حسابی، دو روش مختلف برای کد کردن جمله‌ها در نظر بگیریم. بنابراین به نظر می‌رسد که به تعریفی دقیق و یکتا از ویژگی‌های ساختاری که کاملاً با احساس شهودی ریاضی‌دانان مطابقت داشته باشد، نرسیده‌ایم. در هر حال، بسته به ساختار مورد بحث، می‌توان یکی از تعریف‌های یادشده را برگزید. از طرف

دیگر، ابهام فوق باعث شده است که برخی فیلسوفان ریاضی مانند شاپیرو از این عقیده دفاع کنند که ساختارهای ریاضی، ساختار به‌معنای واقعی کلمه نیستند، بلکه تجسّمی از آنها هستند. به اعتقاد آنها که به نوعی خاص از ساختارگرایی در ریاضیات موسوم به ante rem یا اصالت کلی باور دارند، ساختارهای ریاضی، مجرّد هستند. در این ساختارهای مجرّد، اشیای خاص تنها به‌شکل جایگاه‌هایی در ساختارها حضور دارند و هیچ هویّتی مستقل از آن ساختار ندارند [۴]. به این ترتیب، از نظر فلسفی، مشکل تداخلِ ویژگی‌های ساختاری و ویژگی‌های ذاتی شیء، مطرح نمی‌شود، زیرا این جایگاه‌ها هیچ ذات و بنابراین صفت ذاتی ندارند! این دیدگاه، پاسخی برای پرسش اساسی دربارهٔ ماهیّت وجودیِ اشیای ریاضی فراهم می‌کند، اما به این پرسش نیز دامن می‌زند که ساختارهای مجرّد یادشده، چگونه وجودی دارند.

مراجع

[۱] دری، فاطمه؛ رفیع‌پور، ابوالفضل، تکوین تاریخی متغیرِ مؤثر ولی مغفولِ نگرش ریاضی، ریاضی و جامعه، **۵** (۱۳۹۹)، شمارهٔ ۴، ۵۳–۶۸.

[۲] فرگه، گوتلوب، مبانی علم حساب، ترجمهٔ طالب جباری، ققنوس، تهران، ۱۳۹۵.

[۳] گرینبرگ، ماروین جی.، هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۱.

[۴] منیری، مرتضی، ساختارگرایی در فلسفهٔ ریاضی معاصر، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، **۳۷** (۱۳۹۷)، شمارهٔ ۲، ۳۷–۵۰.

[5] Benacerraf, P., What numbers could not be, *The Philosophical Review*, **74** (1965), no. 1, 47-73.

[6] Blanchette, P., Frege's critique of 'modern' axioms, in *Frege: Freund(e) und Feind(e), Proceedings of the International Conference*, D. Schott, ed., Logos-Verlag, Berlin, 2015, 105-120.

[7] Blanchette, P., Frege on mathematical progress, in *Early Analytic Philosophy: New Perspectives on the Tradition*, S. Costreie, ed., Springer-Verlag, Berlin, 2016, 3-19.

[8] Blanchette, P., Models in geometry and logic: 1870-1920, in *Logic, Methodology and Philosophy of Science – Proceedings of the 15th International Congress*, Ilkka Niiniluoto, Päivi Seppälä, Elliott Sober, eds., College Publications, 2017, 41-61.

[9] Brown, J. R., *Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledge, New York, 2008.

[10] Boddy, R., Frege on the fruitfulness of definitions, *Journal for the History of Analytical Philosophy*, **9** (2021), no. 11, 100-114.

[11] Burris, Stanley N., Sankappanavar, H. P., *A Course in Universal Algebra*, available at `https://www.math.uwaterloo.ca/ snburris/htdocs/ualg.html`.

[12] Frege, G., *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*, University of California Press, 1964.

[13] Frege, G., *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Blackwell, Brasil, 1980.

[14] Greenberg, M. J., Old and new results in the foundations of elementary plane Euclidean and non-Euclidean geometries, *Amer. Math. Monthly*, **117** (2010), 198-219.

[15] Hamkins, J. D., *Lectures on the Philosophy of Mathematics*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2020.

[16] Hilbert, D., *The Foundations of Geometry*, Open Court Pub. Co., La Salle, Illinois, 1950.

[17] Jech, T., *Set Theory: The Third Millennium Edition*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[18] Klymchuk, S., *Counterexamples in Calculus*, Mathematical Association of America, Washington, D.C., 2010.

[19] Korbmacher, J., Schiemer, G., What are structural properties?, *Philos. Math. (3)*, **26** (2018), no. 3, 295-323.

[20] Linnebo, O., Structuralism and the notion of dependence, *Philoshopical Quarterly*, **58** (2008), 59-79.

[21] Maddy, P., Väänänen, J., *Philosophical Uses of Categoricity Arguments*, Cambridge University Press, Cambridge, 2023.

[22] Musgrave, A., Pigden, Ch., Imre Lakatos, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta, Uri Nodelman, eds., 2023, available at `https://plato.stanford.edu/archives/spr2023/entries/lakatos/`.

[23] Poincaré, H., Non-Euclidean Geometries, available at `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Poincare_non-Euclidean/`.

[24] Rohr, T., The Frege–Hilbert controversy in context, *Synthese*, **202** (2023), article no.: 12.

[25] Reck, E. H., Frege-Russell numbers: Analysis or explication?, in *The Analytic Turn*, Michael Beaney, ed., Routledge, London, 2007, 33-50.

[26] Rivello, E., Frege and Peano on definitions, in *Frege: Freund(e) und Feind(e), Proceedings of the International Conference*, D. Schott, ed., Logos-Verlag, Berlin, 2015, 176-186.

[27] Shapiro, S., Categories, structures, and the Frege-Hilbert controversy: The status of metamathematics, *Philos. Math. (3)*, **13** (2005), no. 1, 61-77.

مرتضی منیری: دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: m-moniri@sbu.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 44, Number 1, Spring/Summer 2025, Pages 111–126
doi: 10.30504/mct.2024.1440.2012

Axiom and Definition in Mathematics

M. Moniri [1]

Faculty of Mathematical Sciences, Shahid Beheshti University, Iran

Abstract. By the late 19th century and the first half of the 20th century, there were discussions about the nature of axioms and definitions in mathematics, which formed the modern concept used by mathematicians. This path was not very smooth, and it was the result of efforts and conflict of opinions that emerged during the efforts of mathematicians to strengthen the foundations of mathematics. The result was the formation of today's standard approach to the axioms and how to check their independence and consistency, as well as considering the definition as a linguistic abbreviation. This article is devoted to the review of the aforementioned process and also to the description of today's approach to mathematical axioms and definitions.

Keywords: definition, axiom, structural properties
Article history: Received 14 December 2023; Accepted 28 January 2024
Article type: survey

1. m-moniri@sbu.ac.ir