

مسائل راهبردی در آنالیز همساز و کاربردهای آنها

علیرضا مدقالچی

چکیده

یکی از مسائل عمده در ریاضیات قرن هجدهم پیدا کردن معادله مسأله فیزیکی ارتعاش یک فنر بود که منجر به معادله دیفرانسیل جزئی $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (c ثابت است) شد و حل این معادله منجر به سری‌های فوریه شده است. سیر تاریخی این موضوع تا ۱۸۵۰ میلادی در اثر ماندگار بورکارت جمع‌آوری شده است. از این تاریخ به بعد گسترش وسیع سری‌های فوریه روی گروه دایره (\mathbb{T}) و گروه جمعی اعداد حقیقی (\mathbb{R}) متمرکز شده است. کتاب زیگموند کتاب استاندارد در مورد سری‌های فوریه روی \mathbb{R} و \mathbb{T} یعنی آنالیز همساز روی \mathbb{R} و \mathbb{T} است. بالاخره کتاب بوخنر اثری نفیس در مورد آنالیز فوریه روی \mathbb{R} است. این کتاب حاوی محاسبات بسیار ارزنده‌ای است که هنوز هم بعد از پنجاه سال برای دانشجویان آنالیز با ارزش هستند.

صدای تولید شده از ارتعاش یک تار، ستونی از هوا، ترکیبی از تعدادی از صداهای خالص یا «همساز» است. در مطالعات فیزیک - ریاضی قرن‌های هجدهم و نوزدهم تعیین این مؤلفه‌ها [آنالیز همساز] و بازسازی موسیقی حاصل از مؤلفه‌ها [ترکیب همساز] یکی از مسائل اکوستیک بوده است. چنین مسائلی در اکثر پدیده‌های فیزیکی که یا متناوب و یا دارای تناوب‌های پنهان، هستند وجود دارد. وینر بحث روشن‌گرانه‌ای در مورد کارهای فیزیک‌دانان دارد. او در مقاله خود که در ۱۹۳۰ میلادی منتشر شد توابعی متناوب روی \mathbb{R} و حتی توابعی از $L^2(\mathbb{R})$ را مورد مطالعه قرار داده است. تابع‌های روی \mathbb{T} [توابع متناوب روی \mathbb{R}] و توابع روی \mathbb{R} [تابع‌های با تناوب پنهان] در بعضی حالات روی \mathbb{T}^n و \mathbb{R}^n تحلیل و ترکیب را نشان می‌دهد. سری‌های فوریه روی \mathbb{T} و تبدیل‌های فوریه روی \mathbb{R} از این نوع مسائل هستند.

در آنالیز همساز مدرن، به جای \mathbb{T} و \mathbb{R} یک گروه توپولوژیک فشرده موضعی G می‌نشیند و فضایی از تابع‌ها روی G مورد بحث قرار می‌گیرد.

قبلاً در دو مقاله توصیفی تحت عناوین «آنالیز هارمونیک از کجا شروع شده و به کجا می‌رود» و «پژوهش در ریاضیات» در این مفاهیم سخن گفته‌ایم. در دوازدهمین سمینار آنالیز ریاضی در مقاله‌ای مروری در مورد ابرگروه‌های توپولوژیک بحث کرده‌ایم. در این مقاله آنالیز همساز را از منظر دیگری مورد بحث قرار می‌دهیم. آنالیز همساز نه تنها روی گروه‌های توپولوژیک، بلکه روی نیم‌گروه‌های توپولوژیک و ابرگروه‌های توپولوژیک و گروه‌واره‌ها کاملاً گسترش یافته است. مبحث‌های مطالعه آنالیز همساز به شرح زیر است و ما فقط درباره گروه‌ها، نیم‌گروه‌ها و ابرگروه‌ها بحث می‌کنیم.

الف) گروه‌های توپولوژیک

- ۱- توسعه آنالیز همساز بعد از مسأله پنجم هیلبرت [هر گروه اقلیدسی موضعی یک گروه لی است] و نظریه نمایش
- ۲- وجود اندازه پایای چپ [اندازه‌ها] روی گروه‌های توپولوژیک فشرده موضعی
- ۳- نظریه نمایش و کاربردهای آنها و کارهای ویل، فون نویمان و دیگران
- ۴- میانگین‌های پایا^۱ و توابع تقریباً متناوب
- ۵- جبرهای فون نویمان یا جبر عملگرها
- ۶- جبرهای فوریه و فوریه استیلتیس
- ۷- توابع تقریباً متناوب

ب) نیم‌گروه‌ها

ایده نیم‌گروه‌های جبری به زمان‌های دور و تعریف اعمال روی مجموعه‌ها برمی‌گردد، ولی ریشه آنالیز روی نیم‌گروه‌ها را می‌توان در کارهای هارولد بور در سال‌های ۱۹۲۵ و ۱۹۲۶ یافت، زمانی که او توابع تقریباً متناوب را روی خط حقیقی سرشت‌نمایی کرد. در ۱۹۲۷ بوخنر سرشت‌نمایی تحلیلی از توابع تقریباً متناوب ارائه داد و سرانجام فون نویمان و بوخنر در ۱۹۳۴ نظریه توابع تقریباً متناوب را روی گروه توپولوژیک دلخواه G توسعه دادند. در مبحث گروه‌ها به طور مفصل در این مورد بحث خواهیم کرد. بالاخره گسترش توابع تقریباً متناوب و فشرده‌سازی به نیم‌گروه‌ها باعث توسعه نیم‌گروه‌های توپولوژیک شد، بعدها مفهوم فشرده‌سازی ضعیف مورد توجه قرار گرفت و ابرلین^۲ اولین کسی است که در ۱۹۴۹ این مفهوم را روی نیم‌گروه‌ها توسعه داد. از آن زمان به بعد آنالیز روی نیم‌گروه‌ها به صورت یک رشته کامل با محتوی محض و کاربردی درآمده است.

1) invariant means 2) Eberlin

ج) ابر گروه‌های توپولوژیک

ایدهٔ ابرگروه‌های توپولوژیک به دهه‌های قبل برمی‌گردد ولی آنالیز همساز روی ابرگروه‌ها در واقع با مطالعهٔ فضای اندازه‌های بورل و منظم و تبدیل آن به یک جبر پیچشی روی G/H و $G//H$ با مقالهٔ مفصل جویت در ۱۹۷۵ و مقاله‌های دانکل و اسپکتر شروع شده است. این مقاله‌ها، به ویژه مقالهٔ جویت، آنالیز همساز روی گروه‌ها را تا اندازهٔ زیادی روی ابرگروه‌ها گسترش داده‌اند. از آن زمان به بعد مقاله‌های زیادی در این موضوع چاپ شده است.

د) گروه‌واره‌ها

مفهوم گروه‌واره در ۱۹۲۷ در کارهای براندت معرفی شد. در واقع، گروه‌واره کوچک‌ترین کاتگوری با وارون است. هر گروه یک گروه‌واره است ولی عکس آن درست نیست. اگر R یک نسبت هم‌ارزی روی مجموعهٔ X باشد، در این صورت R یک گروه‌واره با ضرب $(x, z) \rightarrow ((x, y), (y, z))$ و وارون $(x, y)^{-1} = (y, x)$ است. امروزه محقق شده است که بین گروه‌واره‌ها، نیم‌گروه‌های وارون و جبرهای عمل‌گری رابطه‌های مهمی وجود دارد. در این مقاله، در این باره بحث نمی‌کنیم و خواستاران اطلاعات بیشتر در این زمینه را به کتاب آلن - پاترسون ارجاع می‌دهیم.

ه) نتیجه‌های جدید

در آخرین بخش مقاله نتیجه‌های جدید خود را در مورد تعمیم جبرهای فوریه و فوریه استیلتیس روی نیم‌گروه‌ها و ابرگروه‌ها ارائه می‌دهیم و میانگین‌پذیری جبرهایی را روی نیم‌گروه‌ها بررسی می‌کنیم. چند نتیجهٔ دیگر در مورد تانسور نیم‌گروه‌ها را می‌آوریم. سرانجام، مختلط‌سازی $L^1(G)$ را بررسی می‌کنیم. این نتیجه‌ها حاصل کار نگارنده با دانشجویان و همکاران است که در سال‌های ۲۰۰۴ و ۲۰۰۶ چاپ شده‌اند.

رده‌بندی موضوعی مقاله: 43A03, 43A05, 43A20, 43A30, 43A60, 43A65.

کلمات کلیدی: گروه توپولوژیک، نمایش، فشردده‌سازی، نیم‌گروه، ابرگروه، C^* جبر گروهی، جبر فوریه، جبر فوریه استیلتیس، ابرگروه تانسوری.

۱. مقدمه

در مقاله [۵۶] اشاره کردیم که ریشه‌های آنالیز همساز کلاسیک در حل معادلهٔ حرارت و متعلق به فوریه است. سیر تاریخی این موضوع تا ۱۸۵۰ در اثر ماندگار بورکات [10] مورد بررسی قرار گرفته است. کتاب‌های زیگموند [55] و بوخنر (نگاه کنید به [22] صفحه ۲۸۲) را می‌توان آثاری نفیس در مورد آنالیز فوریه روی \mathbb{R} دانست به ویژه کتاب ارزشمند بوخنر حاوی محاسبات بسیار

ارزشمندی است که هنوز هم بعد از پنجاه سال برای دانشجویان آنالیز مفید هستند. تعیین همسازهای و ترکیب آنها یکی از مسائل مهم در آنالیز فوریه است که ریشه در مسایل فیزیکی و اکوستیک دارد. این مبحث منجر به بررسی تابع‌های متناوب و حتی تابع‌هایی در $L^2(\mathbb{R})$ شده است که در سال ۱۹۳۰ در مقاله وینر آمده است [52]. از این رو، می‌توان آنالیز همساز را بررسی جبرهای توابع روی \mathbb{R} و \mathbb{T} [دایره واحد] دانست.

در آنالیز همساز مدرن، به جای \mathbb{R} و \mathbb{T} گروه فشرده موضعی G می‌نشینند و فضاها و جبرهای توابع روی G مورد بحث قرار می‌گیرند. امروزه بحث عمده آنالیز همساز بررسی این فضاها و یا جبرها مثل فضاها و یا جبرهای $L^1(G)$ ، $L^p(G)$ ($1 < p < \infty$)، $L^\infty(G)$ ، $M(G)$ ، $A(G)$ ، $VP(G) \hat{\otimes} L^q(G)$ ($1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)، \dots است. مطالعه فضاها و توابع روی نیم‌گروه‌ها، ابرگروه‌ها و گروه‌ها از دیگر پیشرفت‌های سال‌های اخیر است.

تعریف‌های مقدماتی

گروه G به همراه یک توپولوژی را یک گروه توپولوژیک می‌نامیم اگر اعمال جبری $(x, y) \rightarrow xy$ ، $x \rightarrow x^{-1}$ نسبت به این توپولوژی پیوسته باشند. مثال‌های ساده عبارتند از $(\mathbb{R}, +, |\cdot|)$ [گروه جمعی \mathbb{R} با توپولوژی معمولی]، $(\mathbb{T}, \cdot, |\cdot|)$ [گروه ضربی دایره با توپولوژی معمولی]، گروه گسسته \mathbb{Z} .

به طور مسلم مثال‌های گروه‌های توپولوژیک بسیار غنی‌تر از این مثال‌های ساده است. در واقع، اساس گروه‌های توپولوژیک، گروه‌های لی است که گروه‌هایی توپولوژیک با ساختار تحلیلی هستند. این گروه‌ها توسط سوفس لی و فلیکس کلاین و دیگران تحت عنوان «نظریه گروه‌های پیوسته» مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

از دیدگاه کلاین هر هندسه، فضای همگنی است که می‌توان در آن اشیاء را بدون تغییر شکل حرکت داد. در نتیجه، هر هندسه با یک گروه طولپایی مشخص می‌شود. این گروه‌ها، گروه‌های لی یا گروه تبدیلات هستند [6].

تعریف. اندازه λ را روی یک گروه توپولوژیک، هار^۱ پایای چپ [راست] می‌نامیم اگر $\lambda(xE) = \lambda(E)$ به ازای هر $x \in G$ و هر مجموعه بورل E . مثلاً، اندازه هار روی گروه جمعی \mathbb{R} اندازه لبگ و روی گروه جمعی گسسته \mathbb{Z} ، اندازه شمارشی و روی گروه ضربی $\mathbb{T} \setminus \{0\}$ است. در واقع، اگر λ یک اندازه پایای چپ باشد آنگاه $I(f) = \int_E f d\lambda$ یک انتگرال پایای چپ است یعنی $I(xf) = I(f)$ که در آن $xf(y) = f(xy)$.

محاسبه اندازه پایای چپ روی گروه‌های خاص ریشه‌ای طولانی دارد. فروبنیوس و شوربین ۱۹۰۰ و ۱۹۲۰ روی گروه‌های متناهی میانگین‌های زیادی ساخته‌اند [30]، و شورانتگرال‌های پایا

1) Haar

روی $SO(n)$ [گروه متعامد خاص از ماتریس‌ها] و $O(n)$ [گروه متعامد] را محاسبه کرده است. سرانجام ویل انتگرال‌های پایا روی $U(n)$ [گروه یکانی از ماتریس‌ها] را ساخته است. در ادامه بعضی از این گروه‌ها را بررسی خواهیم کرد.

سرآغاز پیدایش گروه‌های توپولوژیک را می‌توان سال ۱۹۳۰ دانست. برای گروه‌های شمارای دوم وجود اندازه پایای چپ را هار در ۱۹۳۳ ارائه داد. این اندازه از آن پس به اندازه هار معروف شد [30]، برهان یکنایی این اندازه از آن فون نویمان است [41]. ویل شرط شمارشپذیری را از این قضیه وجودی حذف کرد و به طور منظم گروه‌های توپولوژیک و اندازه هار را مورد مطالعه قرار داد [51]. سرانجام ثابت شد که گروه توپولوژیک G اندازه هار یکتا دارد اگر و فقط اگر فشرده موضعی باشد [22]. اینک به ذکر چند مثال می‌پردازیم که جزئیات آنها را می‌توان در [29] و [22] یافت.

(i) روی گروه متناهی G با تعداد اعضای n ، $I(f) = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} f(x)$ یک انتگرال پایای راست و نیز چپ است. و در نتیجه $\lambda(E) = \frac{1}{n} c(E)$ اندازه هار راست و چپ است که در آن $c(E)$ تعداد اعضای E است.

(ii) در مورد گروه جمعی \mathbb{R} ، $I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ روی $C_c(\mathbb{R})$ انتگرال پایای چپ است و اندازه هار متناظر همان اندازه لبگ معمولی است.

(iii) فرض کنید G یک گروه نامتناهی و گسسته و $C_c^+(G)$ مجموعه تمام توابع نامنفی بر G باشد که همه جا صفرند به جز تعداد متناهی نقطه. اگر $f \in C_c^+(G)$ ، آن‌گاه

$$f = \sum_{k=1}^n a_k \delta_{a_k^{-1}} = \sum_{k=1}^n a_k \delta_{a_k^{-1}}$$

که در آن $\delta(e) = 1$ و $\delta(x) = 0$ وقتی که $x \neq e$. زیرا

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \delta_{a_k^{-1}}(x) = \sum_{k=1}^n a_k \delta(a_k^{-1} x) = \begin{cases} a_i & x = a_i, i \text{ هر} \\ 0 & x \neq a_i, i \text{ هر} \end{cases}$$

پس، $I(f) = \sum_{k=1}^n a_k I(\delta_{a_k^{-1}}) = (\sum_{k=1}^n a_k) I(\delta)$ ، در این صورت با فرض $I(\delta) = 1$ ، اندازه هار اندازه شمارشی است.

(iv) فرض کنید G یک گروه توپولوژیک با ویژگی‌های زیر باشد.

الف) G زیرمجموعه باز \mathbb{R}^n است.

ب) اگر $x, y \in G$ تابعی مانند F است که اگر $x = (x_1, \dots, x_n)$ ، $y = (y_1, \dots, y_n)$ ، $F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ تصویر نگاشت F از $G \times G \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ به $G \subseteq \mathbb{R}^n$ است.

ج) فرض کنید F_j تصویر F به مختص زام است، $\frac{\partial F_j}{\partial x_k}$ و $\frac{\partial F_j}{\partial y_k}$ بر $G \times G$ موجود و پیوسته است.

د) فرض کنید $\sigma_a : G \rightarrow G$ و $\delta_a : G \rightarrow G$ انتقال‌های چپ و راست باشد، یعنی

$\delta_a(x) = xa$ و $\sigma_a(x) = ax$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$S(a) = |J(\sigma_a)|, \quad D(a) = |J(\delta_a)|$$

که در آن $J(\tau)$ ژاکوبین τ است. می‌دانیم $J(\sigma_a \circ \sigma_b) = J(\sigma_a) \cdot J(\sigma_b)$ ، و در نتیجه،

$$S(ab) = S(a)S(b) \quad (a, b \in G)$$

به طریق مشابه، $\delta_{ab} = \delta_b \circ \delta_a$ و از این رو

$$D(ab) = D(a)D(b)$$

و بالاخره، اگر e عضو واحد G باشد، $S(e) = D(e) = 1$. پس S و D هم‌ریختی‌های پیوسته از G به گروه ضربی (\circ, ∞) هستند.

ادعا می‌کنیم که انتگرال‌های:

$I_s(f) = \int_G f(x) \frac{1}{S(x)} dx$, $I_d(f) = \int_G f(x) \frac{1}{D(x)} dx$ ($f \in C_c(G)$)
راست و چپ هستند. برای اثبات، فرمول تغییر متغیر در انتگرال چندگانه را به کار می‌بریم، داریم:

$$\int_{\sigma_a(G)} \varphi(x) dx = \int_G (\varphi \circ \sigma_a)(y) |J(\sigma_a)(y)| dy$$

حال اگر قرار دهیم $\varphi = a^{-1} f \frac{1}{S}$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I_s(a^{-1} f) &= \int_G a^{-1} f(x) \frac{1}{S(x)} dx = \int_G \\ ((a^{-1} f) \circ \sigma_a)(y) \frac{1}{S \circ \sigma_a(y)} S(a) dy &= \int_G f(y) \frac{1}{S(y)} dy = I_s(f) \end{aligned}$$

پس با توجه به سایر خاصیت‌ها، $I_s(f)$ انتگرال هار چپ است. به طریق مشابه ثابت می‌شود که $I_d(f)$ انتگرال هار راست است.

فرض کنید λ اندازه هار چپ روی گروه فشرده موضعی G باشد در این صورت به ازای عضو ثابت $x \in G$ و مجموعه بول $E \subseteq G$

$$\lambda_x(E) = \lambda(Ex)$$

یک اندازه هار چپ روی G تعریف می‌کند. پس بنابر قضیه یکتایی، عدد مثبت Δ وجود دارد که

$$\lambda(Ex) = \Delta(x)\lambda(E)$$

به وضوح دیده می‌شود که

$$\Delta(x) = \frac{I(f_{x^{-1}})}{I(f)} \quad (I(f) \neq 0).$$

و $\Delta : G \rightarrow (\circ, \infty)$ یک هم‌ریختی پیوسته است. این تابع را تابع مدولی می‌نامند. اگر G آبله باشد، از تعریف معلوم است که $\Delta \equiv 1$.

اگر G فشرده باشد، $\Delta(G)$ زیرگروه گروه ضربی (\circ, ∞) و در نتیجه مساوی ۱ است. چنین گروه‌ها را گروه‌های تک مدولی می‌نامند. گروه‌های تک مدولی غیرآبله و غیرفشرده وجود دارد [30]. در مثال (iv) دیده می‌شود که $\Delta = \frac{D}{S}$.

اگر مثال (iv) را در مورد گروه ضربی $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ به کار ببریم. تبدیل $x \rightarrow ax$ دارای ژاکوبین a است و در نتیجه انتگرال هار به صورت $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{|x|} dx$ درمی‌آید، که در آن $f \in C_c(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. در مورد گروه ضربی $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ انتگرال هار به صورت $\int \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} dx dy$ است. کاربرد بعدی در مورد گروه ماتریسی زیر است

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0 \right\}.$$

می‌توان G را به صورت $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ و با ضرب

$$(x, y)(u, v) = (xu, xv + y)$$

و به عنوان زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R}^2 و با توپولوژی \mathbb{R}^2 در نظر گرفت. در نتیجه G در شرایط مثال (iv) صدق می‌کند و تبدیل $\sigma_{(a,b)}$ به صورت

$$\sigma_{(a,b)}(x, y) = (ax, ay + b)$$

است. ژاکوبین این تبدیل a^2 و در نتیجه انتگرال هار چپ به صورت ذیل است:

$$I_l(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{x^2} dx dy \quad (f \in C_c(G)).$$

به طریق مشابه تبدیل $\delta_{(a,b)}$ روی G به شکل $\delta_{(a,b)}(x, y) = (ax, by + y)$ و ژاکوبین آن a است و در نتیجه انتگرال هار راست به صورت ذیل است:

$$I_r(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{|x|} dx dy \quad (f \in C_c(G))$$

این مثال یکی از ساده‌ترین مثال‌هایی است که در آن انتگرال‌های هار راست و چپ متفاوت هستند. تابع مدولی برابر است با $\frac{D(x,y)}{S(x,y)} = \frac{1}{|x|}$.

(v) فرض کنید $GL(n, \mathbb{R}) = \{T = (a_{ij})_{n \times n} \mid a_{i,j} \in \mathbb{R}, \det T \neq 0\}$ با ضرب ماتریس‌ها و توپولوژی القایی از \mathbb{R}^{n^2} مجهز شده است. با اتکاء به مثال (iv) می‌توان نشان داد که اندازه هار روی این گروه $|\det T|^{-n} dT$ است که در آن، dT اندازه لیگ روی \mathbb{R}^{n^2} است.

(vii) مثال جالب دیگر $G = (\mathbb{Z}_2)^{\mathcal{N}_0}$ با توپولوژی حاصلضربی است که در آن \mathbb{Z}_2 گروه جمعی اعداد صحیح به هنگ ۲ است، و هر عضو $x \in (\mathbb{Z}_2)^{\mathcal{N}_0}$ به صورت $x = (a_1, a_2, \dots)$ است که در آن a_i مقدارهای صفر یا یک را دارد.

حال نگاشت $\phi : (\mathbb{Z}_2)^{\mathcal{N}_0} \rightarrow [0, 1]$ به صورت

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j}$$

تعریف می‌کنیم. اگر $x \in [0, 1]$ ، آنگاه $\phi^{-1}(\{x\})$ یک تک نقطه است مگر آن که $x = \frac{j}{2^k}$ ($1 \leq j \leq 2^k - 1$)، که در این صورت دو نقطه است. این نگاشت پیوسته و هم‌ریختی نیست ولی تقریباً ۱-۱ است. اندازه هار روی G به صورت ذیل به دست می‌آید که در آن اندازه هار m اندازه هار $[0, 1]$ است.

$$m(B) = \lambda(\phi^{-1}(B)) \quad (B \subseteq [0, 1] \text{ بورل})$$

در واقع، با طی مرحله‌های ذیل، می‌توان این واقعیت را دریافت.

(i) اگر $I = [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]$ ($0 \leq j < 2^k$)، آنگاه

$$\Phi^{-1}(I) = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$$

که در آن $E_i = \mathbb{Z}_2$ اگر $i > k$ و $E_i = \{0\}, \{1\}$ اگر $i \leq k$ زیرا $m(I) = \frac{1}{2^k} = \lambda(\phi^{-1}(I))$.
 (ii) نیم بازه‌های $[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]$ تشکیل یک جبر A_{∞} می‌دهند که σ - جبر بورل روی $[0, 1]$ را تولید می‌کند و اجتماع متناهی دوه‌دو جدا از هم از مجموعه‌های E_2 در (i) جبر A_2 را تولید می‌کند که σ - جبر بورل $G = (\mathbb{Z}_2)^{\mathcal{N}_0}$ را می‌سازد. اگر $A \in A_1$ در این صورت $\phi^{-1}(A)$ یک مجموعه متناهی در A_2 است و $m(A) = \lambda(\phi^{-1}(A))$.

به طوری که اشاره شد، برهان هار را آندره ویل و هانری کارتان [12]، [51] به طرز ماهرانه‌ای به کلیه گروه‌های توپولوژیک فشرده موضعی گسترش دادند. ایده اصلی برهان در واقع در این نکته نهفته است که بزرگی مجموعه‌های فشرده A و B با درون‌های چگال را نسبت به هم بسنجیم. فرض کنید $h(A, B)$ کمترین عدد انتقال‌های B باشد که A را می‌پوشاند. هار اندازه خود را به صورت

$$m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(A, B_n)}{h(C, B_n)}$$

تعریف کرد، که در آن C مجموعه‌ای ثابت و دلخواه است و B_n ها یک پایه همسایگی‌های فشرده e را تشکیل می‌دهند [12]. به طوری که در مقاله [58] اشاره کردیم هار و فون نویمن در این زمان و در ارتباط نزدیک با مسأله پنجم هیلبرت بودند. مسأله پنجم هیلبرت بیان می‌کند که هر گروه توپولوژیک

فشرده و اقلیدسی موضعی یک گروه لی است. یک فضای توپولوژیک را اقلیدسی موضعی می‌نامیم اگر عدد طبیعی مانند n وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x یک همسایگی از x با گوی واحد \mathbb{R}^n همسان ریخت باشد. مقاله‌های هار و فون نویمان در مجله آنالس در یک شماره و پشت سر هم چاپ شده‌اند [48]. در نتیجه ثابت شد که:

۱ هر گروه فشرده اقلیدسی موضعی یک گروه لی است یعنی ساختمانی تحلیلی دارد.

۲ هر گروه فشرده حد وارون گروه‌های لی است.

اثبات وجود اندازه هار روی یک گروه فشرده موضعی گامی اساسی در جهت گسترش آنالیز همساز بود (۲). جبر گروهی $L^1(G)$ و جبر اندازه $M(G)$ منبع‌های خوبی برای مطالعه خاصیت‌های گروه G هستند. $M(G) = C_0(G)^*$ یک $*$ -جبر باناخ واحددار است که در آن اندازه دیراک δ_e واحد و μ^* با تعریف $\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})}$ برگشت روی آن و همچنین ضرب آن پیش از آن صورت زیر است:

$$\mu * \nu(\psi) = \int \int \psi(x) d\mu(x) d\nu(y) \quad (\mu, \nu \in M(G), \psi \in C_0(G))$$

همچنین

$$\begin{aligned} L^1(G) &= \{f | f : G \rightarrow \mathbb{C}, \int_G |f| d\lambda < \infty\} \\ &\cong \{\mu | \mu \ll \lambda\} = M_a(G) \end{aligned}$$

نه تنها یک $*$ -زیرجبر بلکه یک ایده آل $M(G)$ است. ضرب این جبر به صورت:

$$f * g(x) = \int_G f(xy^{-1})g(y) d\lambda(y) \quad (f, g \in L^1(G))$$

برگشت آن به صورت $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})$ است.

$L^1(G)$ دارای واحد تقریبی کراندار است.

میانگین پذیری

نکته مهم دیگری که در اینجا قابل بحث می‌باشد، این است که فون نویمان برهان دیگری برای اثبات وجود اندازه هار گروه‌های فشرده ارائه داد. این بحث به همراه بحث دیگری در مورد اندازه لبگ اتفاق افتاد و مبحث جدیدی در آنالیز همساز گشود که امروزه به مبحث میانگین‌پذیری معروف است و پژوهش‌های عمده‌ای را شامل می‌شود.

گروه فشرده موضعی G را میانگین‌پذیر می‌نامیم اگر یک میانگین پایای چپ روی G موجود باشد. m را یک میانگین پایای چپ می‌نامیم در صورتی که m یک تابع خطی روی $L^\infty(G)$ باشد و

$$m \geq 0, \quad m(1) = 1, \quad m({}_x\phi) = m(\phi)$$

که در آن ${}_x\phi(y) = \phi(xy)$.

به طوری که ملاحظه می‌شود این تعریف را می‌توان به نیم‌گروه‌ها نیز توسیع داد. بعداً در این مورد بیشتر بحث خواهیم کرد.

در ۱۹۰۴ لیگ برای توسیع انتگرال ریمان شش خاصیت زیر از انتگرال ریمان را برای تابع‌های کراندار و انتگرال‌پذیر f و g در نظر گرفت [45]:

$$-۱ \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h) dx \quad (\text{پایایی})$$

$$-۲ \quad \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = 0$$

$$-۳ \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$-۴ \quad \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{اگر } b > a \text{ و } f \geq 0$$

$$-۵ \quad \int_a^1 1 dx = 1$$

$$-۶ \quad \text{اگر } f_n \nearrow f \text{ و } f_n \text{ انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه } \int_a^b f_n(x) dx \nearrow \int_a^b f(x) dx$$

سؤال اصلی لیگ این بود که آیا شرط (۶) مستقل از سایر شرایط است. از این رو او تعریف انتگرال برای تابع‌های مشخصه را کافی دانست و به تعریف اندازه رسید: به هر مجموعه کراندار E می‌توان عددی نامنفی مانند $\lambda(E)$ نسبت داد به طوری که:

$$(۱') \quad m(E+x) = m(E)$$

$$(۲') \quad m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \quad (E_n \text{ها دوه‌دو مجزا هستند}).$$

$$(۳') \quad m([0, 1]) = 1$$

ملاحظه می‌شود که (۱) معادل (۱') و (۵) معادل (۳') است. (۳) و (۶) را نتیجه می‌دهد و $m([a, b]) = b - a$ اگر E یک مجموعه کراندار باشد تعریف می‌کنیم

$$m_e(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

$$m_i(E) = m(A) - m_e(A \setminus E)$$

که در آن A یک بازه کراندار شامل E است. E اندازه‌پذیر است اگر $m_e(E) = m_i(E)$ و اکنون می‌دانیم که همه زیرمجموعه‌های کراندار \mathbb{R} اندازه‌پذیر نیستند.

مفهوم اندازه‌پذیری به مجموعه‌های بی‌کران گسترش یافت و ثابت شد که روی \mathbb{R}^n اندازه‌ای وجود دارد که تحت انتقال پایا است، σ -جمعی است و روی کره واحد برابر ۱ است.

در ۱۹۱۴ هاوسدورف سؤال زیر را مطرح کرد [45]. آیا می‌توان به هر مجموعه کراندار، \mathbb{R}^n عددی نامنفی مانند $m(E)$ نسبت داد که

$$-۱ \quad m \text{ پایا باشد.}$$

$$-۲ \quad m \text{ دارای خاصیت جمعی متناهی باشد.}$$

۳- روی مجموعه‌ای مانند E برابر ۱ باشد.

هاسدورف خود به این مسأله در حالت $n \geq 3$ پاسخ منفی داد. در واقع هاسدورف نشان داد که

$$S_4 = A \cup B \cup C \cup D$$

که در آن D شمارا است و با دوران 120° درجه A, B, C و نیز A و $B \cup C$ را می‌توان در حالت خاص قرار می‌داد به طوری که:

$$\begin{aligned} m(A) = m(B) = m(C) &= \frac{1}{4} \\ 2m(B) = m(B \cup C) = m(A) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

اگر $m(S_4) = 1$ یعنی $E = S_4$. در این صورت یک تناقض به دست می‌آید. برای جزئیات بیشتر می‌توانید به [45]، [50]، [43] نگاه کنید.

در ۱۹۲۳ این مسأله مورد توجه باناخ قرار گرفت [45]. باناخ نشان داد که جواب حدسیه هاسدورف به‌ازای $n = 1, 2$ مثبت است. در نتیجه او انتگرال لبگ را به تابع‌های متناهی جمعی روی تابع‌های کراندار یک یا دو متغیره گسترش داد. از این به بعد مسأله هاسدورف به پارادوکس باناخ - تارسکی معروف شد. زیرا جواب‌های حدسیه برای $n \geq 3$ و حالت‌های $n = 1, 2$ متفاوت بود. در واقع، ایده این بود که دو زیرمجموعه فضای \mathbb{R}^n هم‌ارز هستند اگر این دو مجموعه را بتوان به تعداد متناهی [یا شمارا] مجموعه افزاز کرد که دوه‌دو هم‌نهشت [طول‌پا] باشند. اگر $n \geq 1$ ، هر دو مجموعه کراندار A و B با درون ناتهی به طور شمارا هم‌ارزند ولی برای هم‌ارزی به طور متناهی، حدسیه هاسدورف به‌ازای $n \geq 3$ برقرار است ولی به‌ازای $n = 1, 2$ برقرار نیست.

در ۱۹۲۹ فون نویمن برهان هاسدورف را به دقت مورد مطالعه قرار داد و دریافت که این اختلاف ناشی از ساختار فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n به‌ازای n های مختلف نیست بلکه گروه‌های طول‌پایی‌هایی که روی \mathbb{R}^n ها عمل می‌کنند متفاوت هستند، در واقع در حالت $n \geq 3$ ، این گروه شامل یک زیرگروه آزاد با دو مولد است و در حالت‌های $n = 1, 2$ چنین اتفاقی نمی‌افتد.

نکته دیگری که باید توجه داشت این است که قضیه همگرایی یکنوا معادل جمعی - شمارایی است ولی باناخ نشان داد که اندازه لبگ تنها اندازه‌ای نیست که به طور متناهی - جمعی است [43].

در سال‌های ۱۹۴۰ تا ۱۹۵۷ موضوع گروه و نیم‌گروه‌های میانگین‌پذیر به وسیله دی [14] به طور وسیع مورد مطالعه قرار گرفت. در واقع اصطلاح میانگین‌پذیری توسط دی در ۱۹۵۰ مطرح شد^۱ بعد از بحث باناخ و پژوهش‌های فون نویمن دامنه بحث روی سایر زمینه‌های آنالیز گسترش یافت و با توجه به کاربردها، میانگین‌پذیری در سایر زمینه‌ها نیز گسترش یافت، به طوری که امروزه مبحث میانگین‌پذیری هنوز هم یکی از مبحث‌های عمده پژوهشی است.

توجه شود که: روسی = ameHaδeπbHaR، فرانسه = moyenable، آلمانی = mittelbar

منابع زیر در مورد میانگین‌پذیری بسیار با ارزش هستند:

- ۱- کتاب گرین لیف [27] اولین کتاب مجملی است که در ۱۹۶۹ تدوین شده است.
- ۲- فصل ۸ کتاب ریتر [47].
- ۳- مقاله‌های تحلیلی دی در ۱۹۵۷ و ۱۹۵۸ [14]، [43].
- ۴- کتاب ژان - پل پیبر [45].
- ۵- کتاب‌های آلن ال. ئی. پاترسون [43]، [44].
- ۶- مقاله ب. جانسون [33]، [34] و مقاله‌ها بعدی او.
- ۷- مقاله‌های متعدد ا.ت. لائو.
- ۸- مقاله‌های فریدون قهرمانی.
- ۹- کتاب والکر ژنده [50].
- ۱۰- کتاب هیویت وراس [29].

در ضمن ریاضی‌دانان معروف دیگر چون دیلز، هلمسکی، گرونیک، لوی، ... در این زمینه پژوهش‌های ارزنده‌ای انجام داده‌اند.

تعدادی از فارغ‌التحصیلان دوره دکتری در دانشگاه تربیت معلم و تربیت مدرس رساله‌های خود را به میانگین‌پذیری اختصاص داده‌اند: به منابع [46]، [24]، [39] و [18] مراجعه شود. این منابع رساله‌های دکتری ریاضی هستند که زیر نظر اینجانب فارغ‌التحصیل شده‌اند. هر یک از این فارغ‌التحصیلان نیز مقاله‌هایی در این زمینه چاپ کرده‌اند.^۱

فرض کنید $M(G)$ مجموعه تمام مجموعه‌های اندازه‌پذیر (نسبت به λ) روی G است. فرض کنید μ یک اندازه متناهی جمعی روی $M(G)$ است که روی مجموعه‌های پوچ، صفر موضعی است و $\mu(G) = 1$. فرض کنید $A = \langle \chi_E | E \in M(G) \rangle$ و قرار دهید:

$$m \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i} \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i) \quad (\alpha_i \in \mathbb{C}, E_i \in M(G))$$

در این صورت m روی A پیوسته است و چون A در $L^\infty(G)$ چگال است می‌توان m را روی $L^\infty(G)$ گسترش داد. m روی $L^\infty(G)$ یک میانگین است یعنی $\|m\| = 1 = m(1)$. بنابراین [16, 0.2] بین مجموعه میانگین‌های پایای چپ و مجموعه اندازه‌های مثبت، پایای چپ و جمعی متناهی روی $M(G)$ با نرم یک، و صفر در خارج یک مجموعه λ - موضعاً صفر یک تناظر یک به یک برقرار است. از این رو، میانگین m عضو $L^1(G)^{**}$ است که یک فضای بسیار بزرگ و فوق‌العاده پیچیده است. فرض کنید $\mathcal{M}(G)$ فضای میانگین‌ها روی G است. می‌دانیم که $L^1(G)$ را

(۱) فارغ‌التحصیلان سایر دانشگاه‌های ایران هم مقاله‌های متعددی در این زمینه منتشر نموده‌اند ولی فهرست‌بندی آنها مستلزم بررسی بیشتری است.

می‌توان در $L^1(G)^{**}$ نشانده به طوری که هر $f \in L^1(G)$ به \hat{f} می‌رود که $\hat{f}(\phi) = \phi(f)$. ساده‌ترین قضیه‌ای که در مورد میانگین‌ها می‌توان گفت این است که:

قضیه. (i) $m \in L^1(G)^{**}$ یک میانگین است اگر و فقط اگر $m(1) = 1$ و $m \geq 0$

$$\text{ess inf}_{x \in G} \phi(x) \leq m(\phi) \leq \text{ess sup}_{x \in G} \phi(x)$$

به‌ازای هر $\phi : L^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$ حقیقی مقدار در $L^\infty(G)$.

(ii) $m(G)$ یک زیرفضا، w^* -فشرده و محدب از $L^1(G)^{**}$ است.

(iii) اگر $P^1(G) = \{f \in L^1(G), f \geq 0, \int f d\lambda = 1\}$ آن‌گاه $\widehat{P^1(G)}$ در $m(G)$ با توپولوژی w^* چگال است.

چند مثال.

۱- تمام گروه‌های فشرده میانگین‌پذیرند.

در واقع اگر λ اندازه‌های چپ G باشد که $\lambda(G) = 1$ ، آن‌گاه $m(f) = \int_G f d\lambda$ یک میانگین پایای چپ روی G است.

۲- آیا میانگین پایای روی گروه \mathbb{Z} وجود دارد؟

تعریف می‌کنیم:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{r=-n}^n \delta_r$$

واضح است که $f_n \in P^1(G)$ و اگر $\phi \in l^\infty(\mathbb{Z})$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned} |\hat{f}_n(\phi s) - \hat{f}_n(\phi)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\sum_{r=-n}^n \phi(r+s) - \phi(r) \right) \right| \quad (s > 0) \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\sum_{r=-n+s}^{n+s} \phi(r) - \sum_{r=-n}^n \phi(r) \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(- \sum_{r=-n+s}^{-n+s-1} \phi(r) + \sum_{r=n+1}^{n+s} \phi(r) \right) \right| \\ &\leq \frac{\sqrt{s} \|\phi\|}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

اگر $s < 0$ ، باز هم نتیجه فوق برقرار است. حال اگر m یک نقطه w^* -انباشتگی $\{f_n\}$ باشد، آن‌گاه بنابه بحث فوق

$$m(\phi s) = m(\phi)$$

یعنی m یک میانگین پایا است و $(\mathbb{Z}, +)$ میانگین‌پذیر است.

۳- فرض کنید $G = \mathbb{R}$. در این حالت فرض کنید $f_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \chi_{[-n, n]}$. حال اگر $x \geq 0$ و $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ ، آن گاه

$$\begin{aligned} |\hat{f}_n(\phi x) - \hat{f}_n(\phi)| &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \int_{-n}^n (\phi(x+t) - \phi(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \int_{-n}^n \phi(x+t) dt - \int_{-n}^n \phi(t) dt \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \int_{-n+x}^{n+x} \phi(t) dt - \int_{-n}^n \phi(t) dt \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \int_{-n}^{-n+x} \phi(t) dt + \int_n^{n+x} \phi(t) dt \right| \\ &\leq \frac{\sqrt{n} \|\phi\|}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

این رابطه به طریق مشابه در مورد $x < 0$ نیز برقرار است. پس هر w^* نقطه انباشتگی \hat{f}_n یک میانگین پایا برای \mathbb{R} است.

۴- گروه « $ax + b$ »

این گروه در واقع، گروه آفینی S_ψ از \mathbb{R} است. یعنی گروه $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ با ضرب زیر است:

$$(a, b)(a', b') = (a + a'b, bb')$$

ساختن f_n در اینجا چندان روشن نیست ولی می دانیم که اندازه هار λ روی S_ψ به شکل $\frac{dx dy}{y^2}$ است. فرض کنید $A_n \subseteq S_\psi$. اگر $f_n = \frac{\chi_{A_n}}{\lambda(A_n)}$ ، آن گاه هر w^* نقطه انباشتگی \hat{f}_n یک میانگین پایا است پس S_ψ میانگین پذیر است.

۵- گروه آزاد با دو مولد یعنی \mathbb{F}_2 میانگین پذیر نیست.

اعضای \mathbb{F}_2 کلمات کاهش یافته ای هستند که با اعضای مجموعه $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ تولید شده اند. اگر $x \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ و E_x مجموعه همه کلماتی باشد که با شروع شده است و m یک میانگین پایای چپ روی F_2 باشد که می توان به عنوان یک اندازه در نظر گرفت، در این صورت

$$1 = m(\mathbb{F}_2) = m(\{e\}) + m(E_a) + m(E_{a^{-1}}) + m(E_b) + m(E_{b^{-1}})$$

ولی کلمات در $aE_{a^{-1}}$ کلماتی هستند که با b, b^{-1}, a^{-1}, e شروع شده اند پس

$$1 = m(\mathbb{F}_2) = m(E_a) + m(aE_{a^{-1}})$$

به طریق مشابه

$$1 = m(\mathbb{F}_2) = m(E_b) + m(bE_{b^{-1}})$$

ولی چون m پایای چپ است پس

$$m(E_a) + m(E_{a-1}) = 1$$

$$m(E_b) + m(E_{b-1}) = 1$$

که یک تناقض است.

۶- گروه $G = SL(2, \mathbb{R})$ یک گروه فشرده موضعی است. این گروه شامل زیرگروه گسسته H است که با \mathbb{F}_2 یک ریخت است پس به عنوان گروه گسسته میانگین پذیر نیست. این مثال‌ها از کتاب پاترسون [43] برداشته شده است.

در مثال‌های قبلی دیدیم که گروه‌های آبلی \mathbb{R} و \mathbb{Z} میانگین پذیرند و S_2 گروه حل پذیر است که با گروه‌های آبلی در ارتباط است. سؤال این است که آیا هر گروه آبلی میانگین پذیر است، جواب مثبت است. قضیه مارکوف - کاکوتانی [45] بیان می‌کند که:

اگر X یک فضای محدب موضعی و $K \subseteq X$ فشرده باشد و S نیم گروه تبدیلات پیوسته $T: K \rightarrow K$ باشد که آفینی هستند $T(\alpha k_1 + (1-\alpha)k_2) = \alpha T k_1 + (1-\alpha)T k_2$ که در آن $[k_1, k_2] \in K, 0 \leq \alpha \leq 1$ دارای نقطه ثابت مشترک هستند.

حال اگر G یک گروه فشرده موضعی و آبلی، $X = L^\infty(G)^*$ ، $K = \mathcal{M}(G)$ (مجموعه میانگین‌های روی G) و $S = \{m \rightarrow xm(x \in G)\}$ گروه تبدیلات روی $\mathcal{M}(G)$ باشد آنگاه شرط‌های قضیه بالا برقرارند پس $x \cdot m = m$ وجود دارد که $x \cdot m = m$ یعنی m پایای چپ است.

ویژگی‌های میانگین پذیری به زیرگروه‌ها و گروه‌های خارج قسمتی نیز سرایت می‌کند.

اشاره کردیم که هر گروه که دارای زیرگروهی یک ریخت با \mathbb{F}_2 باشد میانگین پذیر نیست. سؤالی که برای مدت‌ها باز بود این بود که آیا عکس این مسئله برقرار است. الشانسکی مثالی از یک گروه میانگین ناپذیر ساخته است که شامل \mathbb{F}_2 نیست. مثال او بسیار پیچیده و در عین حال کاربردی از نظریه ترکیبیاتی گروه‌ها است [13].

در دو جهت دیگر هم نظریه میانگین پذیری رشد کرده است.

الف) جبرهای باناخ میانگین پذیر اساساً بر مقاله جانسون استوارند [33]. در این مقاله ابتدا تعریف همانستگی آمده است. به اختصار فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک A -مدول باناخ دو طرفه است. نگاشت خطی و کراندار $D: A \rightarrow X$ یک اشتقاق نامیده می‌شود اگر $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ و اشتقاق D درونی نامیده می‌شود اگر به صورت $ad_x a = ax - xa$ باشد. گوئیم A میانگین پذیر است اگر هر اشتقاق $D: A \rightarrow X^*$ درونی باشد. یکی از قضیه‌های اساسی جانسون در مقاله‌ای مفصل این است که:

G میانگین پذیر است اگر و فقط اگر $L^1(G)$ میانگین پذیر باشد [33]. این قضیه به جبرهای فوریه $A(G)$ نیز تعمیم یافته است که در جای خود اشاره خواهیم کرد. در واقع $A(G)$ حالت ناجابجایی $L^1(G)$ است.

بعد از این مقاله اساسی جانسون، میانگین‌پذیری به جبرهای باناخ گسترش یافت و مسایل و پروژه‌های زیادی را ایجاد کرد.

تابع‌های تقریباً متناوب

به طوری که اشاره شد برهان متفاوت فون نویمن برای اثبات وجود اندازه‌هار روی گروه‌های فشرده منجر به این ایده شد که می‌توان این برهان را برای گروه‌های فشرده موضعی گسترش داد ولی در این حالت به جای اندازه‌هار به میانگین می‌رسیم که مقدار آن در ۱ برابر ۱ است. این ایده فون نویمن مطالعه تابع‌های تقریباً متناوب را در برداشت. مقاله وی در ۱۹۳۴ [40] چاپ شد. برای درک این موضوع به مقاله هارولد بور برمی‌گردیم [9]. فرض کنید

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k x} \quad \text{همگرا}$$

سری فوریه تابع پیوسته یکنواخت و کراندار باشد که در آن λ_k ها مضرب‌های گویا از یکدیگر نیستند. از این رو f متناوب نیست. به طور مسلم این سری به طور یکنواخت همگرا نیست ولی بور دریافت که همگرایی طبیعی به شکل زیر میسر است:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \int_{-T}^T |f(x) - \sum c_k e^{i\lambda_k x}|^2 dx = 0,$$

و برای تابع‌ها تقریباً متناوب حد زیر موجود است:

$$m(f) = \bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T}^T f(x) dx.$$

فون نویمن دریافت که اگر f تقریباً متناوب باشد $\overline{\text{con}}\{f_x | x \in \mathbb{R}\}$ (بستار غلاف محدب) شامل میانگین منحصر به فرد بور است.

تابع f روی G تقریباً متناوب نامیده می‌شود اگر به ازای هر $0 < \epsilon < \delta$ عددی مانند δ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر بازه I اگر $l(I) < \delta$ ، آن‌گاه $\|R_t f - f\| < \epsilon$ و یا $\overline{\text{con}}\{f_x | x \in \mathbb{R}\}$ فشرده باشد.

این ایده به گروه‌های گسسته و سپس به سایر گروه‌ها نیز توسیع یافت، به طوری که ایده فون نویمن با دو مقاله [42] و [48] بوخنر و ویگنر ادامه یافت. [ویگنر بیشتر یک فیزیک‌دان بود]. در نتیجه دو دسته از گروه‌ها به دست آمدند.

I) گروه‌های تقریباً متناوب مینیمال: یعنی گروه‌هایی که تابع‌های تقریباً متناوب غیر ثابت نمی‌پذیرند.

(II) گروه‌های تقریباً متناوب ماکسیمال: یعنی گروه‌هایی که به اندازه کافی تابع‌های تقریباً متناوب غیرثابت می‌پذیرند به طوری که نقاط را جدا می‌کنند.

بالاخره، آندره ویل [51] ثابت کرد که:

گروه G تقریباً متناوب ماکسیمال است اگر و فقط اگر بتوان آن را به طور پیوسته در یک گروه فشرده نشانند.

در واقع میانگین بور روی تابع‌های تقریباً متناوب از ساختن اندازه‌ها روی گروه‌های فشرده به دست می‌آید. یعنی نظریه تابع‌های تقریباً متناوب روی گروه‌های گسسته به نظریه تابع‌های پیوسته روی گروه‌های فشرده می‌انجامد. در نتیجه ایده جدیدی وارد حوزه آنالیز همساز تحت عنوان فشرده‌سازی گروه‌ها و نیم‌گروه‌ها شد. توسیع مفهوم تابع‌های تقریباً متناوب به حوزه‌های دیگر نیز گسترش یافت. مثلاً در تعریف بوختر از مفهوم وارون استفاده نشده است و از این رو تابع‌های تقریباً متناوب به نیم‌گروه‌های توپولوژیک و یا حتی نیم‌گروه‌های نیم توپولوژیک که در نیم‌گروه‌های عمل‌گرهای روی فضاهای باناخ ظاهر می‌شود توسیع یافت [38]، [7].

در راستای دیگر ابرلین [7] توسیع دیگری تحت عنوان تابع‌های تقریباً متناوب ارائه نمود.

تابع پیوسته و کراندار f روی نیم‌گروه توپولوژیک S تقریباً متناوب ضعیف نامیده می‌شود اگر $\overline{\text{con}}\{f_x | x \in S\}$ به طور ضعیف پیوسته باشد.

جبرهای فوریه و فوریه استیلتیس

یکی دیگر از پیشرفت‌های اساسی در آنالیز همساز محض و کاربردی تعریف جبرهای فوریه و فوریه استیلتیس است. به طوری که قبلاً اشاره کردیم نظریه سری‌های فوریه ریشه بسیاری از شاخه‌های آنالیز جدید است و اشاره شد که اگر f تابعی بر حوزه D و دارای نمایشی به شکل

$$f(t) = \sum f(\lambda_n) S_n(t)$$

باشد که در آن $\{\lambda_n\}$ دنباله‌ای از اعضای D و $\{S_n\}$ دنباله‌ای از تابع‌ها است، تعمیمی از سری‌های فوریه به دست می‌آید. چنین سری را یک سری نمونه‌گیری می‌نامند. از دیدگاه نظری روش‌های نمونه‌گیری رابطه نزدیکی با درونیابی، تقریب، تابع‌های ویژه، توسیع به وسیله تابع‌ها ویژه، توسیع به وسیله مقادیر ویژه، نظریه پله - وینر، آنالیز عددی و آنالیز همساز دارد [31].

از نظر کاربردی، نظریه نمونه‌گیری در نظریه پیشگویی، نظریه آگاهی، فرآیندهای تصادفی، اپتیک، اسپکتروسکوپی و فرآیند تصویری دوبعدی و سرانجام آنالیز چندریزگی و موجک‌ها کاربرد دارد [31].

بحث در این مورد از حوصله این مقاله خارج است و در حیطه تخصص نگارنده نیست. هدف از اشاره به این نکات صرفاً بیان این واقعیت است که نظریه‌های ریاضی محض ریشه در کاربرد دارند

و شاخه‌های آنها هم به کاربرد می‌رسند. هیچ تفکیکی بین ریاضیات محض و کاربردی نمی‌توان یافت مگر آن که این تفکیک صرفاً جهت سهولت در تحقیق و مطالعه انجام پذیرد، و بالاخره بعضی از شاخه‌های ریاضیات از منظر زیباشناختی و یا کاربرد در سایر شاخه‌های ریاضی توسعه پیدا کرده‌اند. یکی از حالت‌های بحث کلی فوق تبدیل تابع f روی \mathbb{R} به سری فوریه

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx}$$

و یا به تبدیل

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

است. قضیه‌ی اشتناک بیان می‌کند که $f \rightarrow \hat{f}$ فضای $L^1(\mathbb{R})$ را به $C_0(\mathbb{R})$ می‌نگارد و قضیه‌ی پلانشرل بیان می‌کند که $f \rightarrow \hat{f}$ از $L^2(\mathbb{R})$ به $L^2(\mathbb{R})$ یک تبدیل خطی کراندار است که $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. این قضیه به حالت $1 < p < 2$ نیز تعمیم یافته و تبدیل وارون آن محاسبه شده است [31] و [49]. در حالت $p > 2$ تبدیل فوریه تابع $f \in L^p(\mathbb{R})$ به معنی توزیع توصیف می‌شود. می‌دانیم که $L^1(\mathbb{R})$ با ضرب پیچشی

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt$$

یک جبر باناخ است و مجموعه‌ی

$$A(\mathbb{R}) = \{\hat{f} | f \in L^1(\mathbb{R})\}$$

با توجه به

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$$

با ضرب نقطه‌وار یک جبر باناخ است. به طریق مشابه $M(\mathbb{R})$ یک جبر باناخ واحددار است و در نتیجه،

$$B(\mathbb{R}) = \{\hat{\mu} | \mu \in M(\mathbb{R})\}$$

یک جبر باناخ است.

ایمار [20] در ۱۹۶۴ بحث فوق را به گروه‌های غیرآبلی گسترش داد. در واقع در حالت آبلی همانند \mathbb{R} جبرهای بالا قابل تعریف‌اند و

$$A(G) \cong L^1(\hat{G}), \quad B(G) \cong M(\hat{G})$$

که در آن \hat{G} گروه کاراکترهای G است یعنی

$$\hat{G} = \{\chi | \chi : G \rightarrow T, \chi(xy) = \chi(x)\chi(y)\}$$

به ویژه آن که $L^1(\hat{G}) \cong L^1(G) * L^1(G)$ [20].

ایده ایماز گسترش بحث‌های فوق به گروه‌های غیرآبلی بود. مقاله ایماز نقش عمده‌ای در این گسترش دارد و مباحثی را وارد آنالیز همساز کرده است که هنوز هم بعد از سال‌های طولانی حاوی مسایل پژوهشی فراوان است.

به طور خلاصه، فرض کنید \mathcal{H} فضای هیلبرت و $U(\mathcal{H})$ مجموعه عمل‌گرهای یکانی روی \mathcal{H} باشد یعنی

$$U(\mathcal{H}) = \{T | T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad TT^* = T^*T = I\}$$

فرض کنید G یک گروه فشرده موضعی است. $\pi : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ را یک نمایش یکانی می‌نامیم اگر $\pi(e) = I$ ، $\pi(x^{-1}) = \pi(x)^*$ ، $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ ، به‌ازای هر $\xi \in \mathcal{H}$ ، $x \rightarrow \pi(x)\xi$ پیوسته باشد. اگر A یک $*$ -جبر باناخ باشد، $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ را یک $*$ -نمایش ناتباهیده می‌نامیم، مشروط بر این که π یک هم‌ریختی باشد، $\pi(a^*) = \pi(a)^*$ ، به‌ازای هر $a \in A$ ، $\xi \in \mathcal{H}$ وجود داشته باشد که $\pi(a)\xi \neq 0$ و به‌ازای هر $\xi \in \mathcal{H}$ ، $a \rightarrow \pi(a)\xi$ پیوسته باشد. با توجه به این که $M(G)$ یک $*$ -جبر باناخ است هر نمایش یکانی π از G به صورت زیر به یک نمایش ناتباهیده

$$\pi(\mu) = \int_G \pi(x) d\mu(x)$$

توسیع می‌یابد و برعکس، اگر π یک نمایش ناتباهیده از $M(G)$ باشد آن‌گاه $\tilde{\pi}(x) = \pi(\delta_x)$ یک نمایش یکانی روی G است. تحدید $*$ -نمایش‌های ناتباهیده روی $M(G)$ نمایش‌های ناتباهیده روی $L^1(G)$ به دست می‌دهد. از این رو:

قضیه. یک تناظر ۱-۱ بین نمایش‌های یکانی G ، $*$ -نمایش‌های ناتباهیده $M(G)$ و نیز $*$ -نمایش‌های ناتباهیده $L^1(G)$ وجود دارد.

فرض کنید Σ مجموعه (رده هم‌ارزی) نمایش‌های یکانی پیوسته روی G باشد و $S \subseteq \Sigma$ ، به‌ازای هر $\mu \in M(G)$ تعریف می‌کنیم:

$$\|\mu\|_S = \sup_{\pi \in S} \|\pi(\mu)\|$$

$\|\mu\|_S$ یک C^* -نیم نرم تعریف می‌کند. فرض کنید $f \in L^1(G)$ و

$$N_S = \{f | \pi(f) = 0, (\pi \in S)\}$$

فرض کنید \dot{f} تصویر f در $\frac{L^1(G)}{N_S}$ است و

$$\|\dot{f}\|_S = \|f\|_S$$

در این صورت $\|f\|_S$ یک نرم تعریف می‌کند. $C_S^*(G)$ تکمیل شده $\frac{L^1(G)}{N_S}$ نسبت به این نرم را در نظر می‌گیریم. در حالتی که $S = \Sigma$ ، $C_S^*(G)$ را با $C^*(G)$ نمایش می‌دهیم که در واقع تکمیل شده $L^1(G)$ نسبت به نرم $\|f\|_\Sigma$ است و آن را C^* - جبر گروهی می‌نامیم و در حالتی که $S = \{L\}$ نمایش منظم چپ باشد یعنی

$$L : x \rightarrow L_x : G \rightarrow U(L^1(G))$$

$$L_x f(y) = f(x^{-1}y)$$

$C_r^*(G)$ با $C_r^*(G)$ نمایش می‌دهیم و C^* - جبر گروهی کاهش یافته می‌نامیم. قضیه. گروه فشرده موضعی G میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $C^*(G) \cong C_r^*(G)$. فرض کنید $P(G)$ مجموعه تابع‌های مثبت معین پیوسته روی G باشد، یعنی

$$P(G) = \{u | u : G \rightarrow \mathbb{C}, \sum c_n \bar{c}_m u(x_m^{-1}x_n) \geq 0 (c_n \in \mathbb{C}, x_n \in G)\}$$

خاصیت $P(G)$ در رساله گودمان در ۱۹۴۸ مورد بحث قرار گرفته است [20]، [28].
تعریف می‌کنیم:

$$B(G) = \langle P(G) \rangle$$

در واقع، $B(G)$ مجموعه همه تابع‌های به شکل $\langle \pi(x)\xi, \eta \rangle$ است که در آن π یک نمایش یکانی است. در این صورت،

$$B(G) = \{u | \|u\| = \sup_{f \in L^1(G), \|f\|_\Sigma \leq 1} \left| \int f(x)u(x)d\lambda(x) \right| < \infty\}$$

و $B(G)$ با نرم فوق و ضرب نقطه‌وار یک جبر باناخ جابجایی است. قضیه. $B(G) = C^*(G)^*$ [20].

در این قضیه دوگانگی بالا به صورت زیر است:

$$\langle f, u \rangle = \int_G f(x)u(x)d\lambda(x)$$

تعریف. $A(G) = \overline{B(G)} \cap C_c(G)$. $A(G)$ با ضرب نقطه‌وار و نرم $B(G)$ یک جبر باناخ جابجایی است.

قضیه. $A(G) = L^1(G) * L^1(G)$ که در آن $\bar{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$ تعریف می‌شود [20].

قضیه. G میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $A(G)$ دارای یک واحد تقریبی باشد [20].

جبر A_π به عنوان یک زیرجبر $B(G)$ که فقط به وسیله یک نمایش تولید می‌شود توسط ارزاک در ۱۹۷۶ مورد بررسی قرار گرفته است [21]. توجه می‌کنیم که $A(G)$ و $B(G)$ کپی‌های ناجابجایی

$M(G)$ و $L^1(G)$ هستند. می‌دانیم که جبر مضروب‌های چپ $L^1(G)$ ، $M(G)$ است. اگر

$$T : L^1(G) \longrightarrow L^1(G) \quad T(f * g) = T(f) * g = f * T(g)$$

آن‌گاه T را یک مضروب می‌نامند. اگر این مجموعه را با $\mathcal{M}(L^1(G))$ نشان دهیم، آن‌گاه

$$\mathcal{M}(L^1(G)) \cong M(G),$$

به طوری که به‌ازای هر $\mu \in M(G)$ ، $T \in \mathcal{M}(L^1(G))$ هر μ به طور منحصریبه‌فرد وجود دارد که $\|T\| = \|\mu\|$ و $Tf = f * \mu$. سؤال این است که در حالت ناجابجایی چه اتفاق می‌افتد. فرض کنید $\mathcal{M}(A(G))$ جبر مضروب‌های $A(G)$ است که یک جبر جابجایی است، یعنی

$$\mathcal{M}(A(G)) = \{u : G \longrightarrow \mathbb{C}, uv \in A(G) (v \in A(G))\}$$

$$\|u\|_{\mathcal{M}(A(G))} = \sup\{\|uv\| \mid v \in A(G), \|v\| \leq 1\} < \infty$$

واضح است که $B(G) \subseteq \mathcal{M}(A(G))$ و $\|u\|_{\mathcal{M}(A(G))} \leq \|u\|$ ($u \in B(G)$).

قضیه [V., Losert, 1984]. G میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $\mathcal{M}(A(G)) = B(G)$ [21].

در حالتی که G میانگین‌پذیر نباشد، $\mathcal{M}(A(G))$ بسیار بزرگ است. می‌دانیم که $A(G)^* = VN(G)$ که در آن $VN(G)$ جبر فون نویمان گروه G و برابر است با $\langle L_f \mid f \in L^1(G) \rangle^{-\omega}$.

در حالتی که G آبدلی باشد، $VN(G) = L^\infty(\hat{G})$.

به جای $\mathcal{M}(A(G))$ ، هرس [21] ترجیح داد که جبر $\mathcal{M}_r(A(G))$ از مضروب‌های کاملاً کراندار را مورد بررسی قرار دهد که به مضروب‌های هرس - شور معروفند. $u \in \mathcal{M}_r(A(G))$ اگر دارای یکی از شرایط هم‌ارز زیر باشد:

(i) فضای هیلبرتی مانند \mathcal{H} و نگاشت‌های کراندار ξ و η از G به \mathcal{H} موجود باشند که

$$u(y^{-1}x) = \langle \xi(x), \eta(y) \rangle \quad (x, y \in G)$$

(ii) به‌ازای هر گروه فشرده موضعی H ، $u \otimes 1 \in \mathcal{M}(A(G \times H))$.

(iii) به‌ازای $H = SU(2)$ ، $u \otimes 1 \in \mathcal{M}(A(G \times H))$.

نرم u چنین تعریف می‌شود:

$$\|u\|_{\mathcal{M}_r(A(G))} = \inf \sup_{x,y} \|\xi(x)\| \|\eta(y)\|$$

داریم $B(G) \subseteq \mathcal{M}_r(A(G)) \subset \mathcal{M}(A(G))$.

قضیه [Bozejko, M., 1985]. اگر G گسسته و غیرمیانگین پذیر باشد $B(G) \neq \mathcal{M}_*(A(G))$ و $\mathcal{M}_*(A(G)) \neq \mathcal{M}(A(G))$ وقتی که G یک گروه آزاد با دو مولد است [11].

بالاخره، نتیجه‌های زیر را در مورد $A(G)$ داریم

قضیه [Eymard, P., 1964]. $\Delta(A(G)) = G$. [فضای ایده آل ماکسیمال] [21].

قضیه [Forrest, B., Runde, V., 2004]. $A(G)$ میانگین پذیر است اگر و فقط اگر G تقریباً آبلی باشد یعنی دارای زیرگروهی آبلی مانند H باشد که G/H متناهی است [23]، [50].

قضیه اخیر در واقع، حالت غیرجایابی قضیه جانسون است. همچنین جانسون در دهه ۹۰ طی مقاله‌هایی ثابت کرد $L^1(G)$ میانگین پذیر ضعیف است [34]. برهان او بعدها توسط قهرمانی و دیسپک به طور ساده‌تری ارائه گردید.

جانسون همچنین نشان داده بود که گروهی فشرده مانند G وجود دارد که $A(G)$ میانگین پذیر نیست. بحث‌های دیگر در مورد میانگین پذیری و میانگین پذیری ضعیف $L^1(G)^{**}$ ، $M(G)^{**}$ ، $A(G)^{**}$ وجود دارد که هنوز هم بعضی از مسائل آن‌ها باز است.

اخیراً مفهوم دیگری به نام میانگین پذیری تقریبی توسط قهرمانی و لوی^۱ Loy^۱ تعریف شده است که مورد توجه ریاضی دانان قرار گرفته است [25].

نیم گروه‌ها و ابرگروه‌های توپولوژیک

در این بخش به اجمال به پیشرفت‌های حاصل در مورد نیم گروه‌ها و ابرگروه‌ها اشاره می‌کنیم.

از نظر من بهترین کتاب درباره نیم گروه‌های جبری کتاب ارزشمند هوئی Howie [32] است. S را یک نیم گروه می‌نامیم در صورتی که نسبت به یک عمل شرکت پذیر بسته باشد مانند $(\mathbb{R}^+, +)$ ، $(\mathbb{N}, +)$ ، $([0, 1], \max)$.

به طوری که اشاره شد با القای یک توپولوژی روی نیم گروه S و برحسب پیوستگی این عمل از راست، چپ، دو طرف و یا به طور توأم، S به ترتیب نیم گروه راست توپولوژیک، چپ توپولوژیک، نیم توپولوژیک و توپولوژیک است. [7]

از یک سو نظریه نیم گروه‌ها روی فضاهاى توابع، فشرده سازی، $AP(S)$ ، $WAP(S)$ ، ... توسیع یافت که بهترین مرجع در این مورد کتاب [7] است.

از سوی دیگر روی نیم گروه S جبر $l^1(S)$ تعریف شده است که:

$$l^1(S) = \{f | f : S \rightarrow \mathbb{C}, \sum_{s \in S} |f(s)| < \infty\}$$

$l^1(S)$ با نرم و ضرب پیشی زیر یک جبر باناخ است:

$$\|f\| = \sum_{s \in S} |f(s)|, \quad f * g(s) = \sum_{uv=s} f(u)g(v)$$

$l^1(S)$ در جاهای مختلف مورد بررسی قرار گرفته است و کتاب دانکل ورمیرز [16]، بهترین مرجع برای $l^1(S)$ است. یک دسته از نیم گروه‌ها نیم گروه‌های وارون است که ریشه در فضاهای هیلبرت دارد. نیم گروه S را وارون می‌نامیم اگر به ازای هر $s, t \in S$ منحصر به فردی موجود باشد که

$$sts = s, \quad tst = t$$

بنا به تعریف عملگر $T \in B(H)$ را یک طولپای جزئی روی فضای هیلبرت H می‌نامیم اگر TT^* یک تصویر باشد. در این صورت T^*T نیز یک تصویر است. از نظر هندسی T یک طولپای جزئی روی H است اگر فقط اگر روی $\ker(T)^\perp$ یک طولپای باشد. حال اگر T یک طولپای جزئی باشد آنگاه

$$TT^*T = T, \quad T^*TT^* = T^*$$

که دقیقاً همان شرط نیم گروه وارون است [16]، [44].

میانگین پذیری نیم گروه‌ها و ارتباط بین نیم گروه‌های وارون و گروه‌واره‌ها در دو کتاب ارزشمند پاترسون [43]، [44] آمده است.

تعریف. فرض کنید S یک نیم گروه وارون است. اگر به ازای هر $s, t \in S$ خود توانی مانند $e \in E(S)$ وجود داشته باشد که

$$es = et$$

گوییم $s\sigma st$. در این صورت σs یک هم نهشتی روی S [رابطه هم‌ارزی R روی S یک هم نهشتی نامیده می‌شود اگر $(s, t) \in R$ و $u \in S$ نتیجه دهد $(su, tu) \in R$ و $(us, ut) \in R$] و $\frac{S}{\sigma S}$ یک گروه است. این گروه را با $G(S)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه [Duncan, J., Namioka, I., 1978]. نیم گروه وارون S میانگین پذیر است اگر و فقط اگر $G(S)$ میانگین پذیر باشد [44].

قضیه [Duncan, Namioka, 1978]. فرض کنید S یک نیم گروه وارون است. $l^1(S)$ میانگین پذیر است اگر و فقط اگر $E(S)$ متناهی و هر زیر گروه ماکسیمال S میانگین پذیر باشد.

در حالتی که S یک نیم گروه توپولوژیک باشد، جبر باناخ $L(S)$ به صورت زیر توسط بیکر و بیکر در [6] تعریف شده است:

$$L(S) = \{ \mu \in M(S) \mid x \xrightarrow{\text{نرم پیوسته}} |\mu| * \delta_x, x \xrightarrow{\text{نرم پیوسته}} \delta_x * |\mu| \}$$

$L(S)$ تعمیم $L^1(G)$ به نیم گروه‌های توپولوژیک است. در این مورد نتیجه‌های زیادی توسط لشکری زاده بمی به دست آمده و مقاله‌های ارزشمندی توسط ایشان چاپ شده است.

نتیجه‌های جدید

در مورد ابرگروه‌های توپولوژیک وارد بحث طولانی نمی‌شویم و خواستاران اطلاعات در این زمینه را به مقاله خود در گزارش دوازدهمین سمینار آنالیز در گیلان ارجاع می‌دهیم [۵۷]. اما به چند نتیجه جدید اشاره می‌کنیم. در مقاله [1]، $C^*(K)$ ، $A(K)$ و $B(K)$ را تعریف کرده‌ایم که در آن K یک ابرگروه است. کتاب ارزشمند بلوم و هیبر [8] مرجع اصلی پیشرفت‌های آنالیز همساز روی ابرگروه‌ها است.

قضیه [Amini, M., and Medghalchi, A. R., 2004]. $B(K) \cong C^*(K)^*$.

مشکلی که در مورد ابرگروه‌ها وجود دارد این است که برخلاف گروه‌ها حاصل ضرب دو تابع مثبت معین ممکن است مثبت معین نباشد. در نتیجه در مقاله اخیر مفهومی به نام ابرگروه‌های تانسوری را تعریف کرده‌ایم.

تعریف. (i) گوئیم K دارای خاصیت P است اگر $P(K)$ [مجموعه تابع‌ها مثبت معین] نسبت به ضرب بسته باشد.

(ii) گوئیم K یک C – تانسور ابرگروه است اگر به ازای هر دو نمایش (π_i, H_i) و بردارهای $\xi_i, \eta_i \in H_i$ ($i = 1, 2$) نمایشی مانند $(\pi_{1,2}, H_{1,2})$ از K و بردارهای $\xi_{1,2}, \eta_{1,2} \in H_{1,2}$ وجود داشته باشد که

$$\langle \pi_{1,2}(x)\xi_{1,2}, \eta_{1,2} \rangle = \langle \pi_1(x)\xi_1, \eta_1 \rangle \langle \pi_2(x)\xi_2, \eta_2 \rangle$$

و

$$\max(\|\xi_{1,2}\|, \|\eta_{1,2}\|) \leq C \max(\|\xi_1\|, \|\eta_1\|) \max(\|\xi_2\|, \|\eta_2\|)$$

اگر $C = 1$ ، آن‌گاه K را یک ابرگروه تانسوری می‌نامیم.

در این حالت $B(K)$ و $A(K)$ جبرهای باناخ جابجایی هستند. در [1] چند مثال مورد بررسی قرار گرفته است.

قضیه [Amini, M., and Medghalchi, A.R., 2004]. [تعمیم قضیه گودمان] به ازای هر $u \in P(K)$ با محمل فشرده، $\xi \in L^2(K)$ وجود دارد که $u = \xi * \bar{\xi}$ که در آن $\bar{\xi}(x) = \overline{\xi(\bar{x})}$ و $\bar{x} \rightarrow x$ برگشت ابرگروه است [1].

در مورد نیم‌گروه‌ها به چند نتیجه جدید خود اشاره می‌کنیم.

C^* – جبر نیم‌گروهی، جبرهای فوریه و فوریه استیلیتیس را روی نیم‌گروه‌های توپولوژیک تعریف کرده و چند نتیجه نظیر گروه‌های توپولوژیک به دست آورده‌ایم [2]. فرض کنید (π_u, H_u) نمایش جهانی از S باشد. در اینجا $W^*(S) = \pi_u(C^*(S))''$ [جابجاکننده دوم] را تعریف کرده‌ایم.

قضیه [Amini, M., and Medghalchi, A.R., 2004].

فرض کنید S یک $*$ – نیم‌گروه اساسی با عضو واحد باشد که \sum ، رده هم‌ارزی نمایش‌های

تحویل ناپذیر نقاط S را جدا می‌کند در این صورت $L(S)$ و $M(S)$ و $C^*(S)$ به طور طولیا در $W^*(S)$ می‌نشینند [2].

قضیه [Amini, M., and Medghalchi, A.R., 2004]. با شرطهای قضیه قبل $B(S) \cong C^*(S)^*$ [2]. در این مقاله نظیر جبر نیم‌گروهی فون نویمن را تعریف کرده‌ایم و آن را $VN(S)$ نامیده‌ایم و نشان داده‌ایم که:

$$W^*(S) = A(S)^\perp \oplus VN(S)$$

متأسفانه بحث درباره نیم‌گروه‌ها بسیار مشکل است. مثلاً هنوز ثابت نکرده‌ایم که $\sigma(A(S)) = S$. در یک مقاله دیگر با امینی میانگین‌پذیری دو جبر دیگر یعنی $\mathcal{F}(S)$ و $\mathcal{R}(S)$ را مورد مطالعه قرار داده‌ایم که به اجمال اشاره می‌شود.

تعریف [Lau, A.T. 1978, [35]]. فرض کنید M یک W^* -جبر و M_1 گوی واحد آن و (w, M) یک $*$ -نمایش از S به M_1 باشد. فرض کنید $\sigma = \sigma(M, M_*)$ و $\Omega(S)$ مجموعه همه $*$ -نمایش‌های پیوسته S باشد که $\overline{w(S)}^\sigma = M$. $\mathcal{F}(S)$ را به صورت:

$$\mathcal{F}(S) = \{f | f = \hat{\psi} \text{ (وجود دارد } \psi \in M_* \text{)}\}.$$

که در آن $\hat{\psi} = \psi \circ w$ ، و نرم $f \in \mathcal{F}(S)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\omega = \inf\{\|\psi\| \mid \psi \in M_*, \hat{\psi} = f \text{ وجود دارد } (w, M) \in \Omega(S)\}.$$

قضیه [Lau, A.T., 1978]. $\mathcal{F}(S)$ با نرم بالا یک $*$ -جبر نرم‌دار جابجایی است و $\mathcal{F}(S) \subseteq WAP(S)$ ، که در آن بنا به تعریف $f^*(s) = \overline{f(s^*)}$. $\mathcal{F}(S)$ تحت انتقال و مزدوج‌گیری بسته است. ثابت کرده‌ایم که اگر S دارای واحد باشد $B(S) = \mathcal{F}(S)$ [2], [35].

فرض کنید $Y = \sigma(\mathcal{F}(S))$ طیف $\mathcal{F}(S)$ است. Y یک نیم‌گروه است. فرض کنید $K(Y)$ ایده آل مینیمال $\mathcal{F}(S)$ است.

قضیه [Amini, M. and Medghalchi, A.R., 2004]. جبر $\mathcal{F}(S)$ میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $K(Y)$ یک گروه توپولوژیک باشد [3].

تعریف [Dunkl, C.F. and Ramirez, C.F., 1975]. فرض کنید μ یک اندازه احتمال روی فضای اندازه‌پذیر X است. یک L^∞ -نمایش، (T, X, μ) از S عبارت است از هم‌ریختی w^* -پیوسته T از S به گوی واحد $L^\infty(X, \mu)$. در این صورت $R(S)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(S) = \{f | f(x) = \int_X T_x(g) d\mu, \quad (g \in L^1(X, \mu))\}$$

که در آن (T, X, μ) یک L^∞ -نمایش S است [16].

ثابت شده که $R(S)$ علاوه بر این که یک زیرجبر نرم‌دار $WAP(S)$ با ضرب نقطه‌ای است، تحت انتقال پایا و نسبت به مزدوج‌گیری بسته است. به علاوه این جبر شامل توابع ثابت و با نرم $\|f\| = \inf_g \|g\|$ کامل است.

توجه شود که $\mathcal{F}(S)$ بر اساس $R(S)$ تعریف شده است. اگر S آبلی باشد $\mathcal{F}(S) \subseteq R(S)$ ، و اگر G یک گروه توپولوژیک آبلی باشد آنگاه

$$\mathcal{F}(G) = R(G) = \widehat{M(\hat{G})}$$

قضیه [Amini, M., Medghalchi, A.R., 2004]. احکام زیر هم‌ارزند [3]:

(a) $R(S)$ میانگین‌پذیر است.

(b) $\mathcal{F}(S)$ میانگین‌پذیر است.

(c) $\overline{R(S)}$ میانگین‌پذیر است.

(d) $\overline{\mathcal{F}(S)}$ میانگین‌پذیر است.

در مورد $l^1(S)$ با یک پیچش دیگر با همکاری امینی کارهای متعددی انجام شده که جبرهای باناخ تحدید شده نامیده‌ایم و به تدریج به صورت مقاله چاپ می‌شوند [4].

در پایان به دو مبحث دیگر اشاره می‌کنیم. نتیجه‌های این مبحث یکی بر روی نیم‌گروه‌ها و دیگری بر روی گروه‌ها است. ولی با توجه به ارتباط آن‌ها با $AP(S)$ و $WAP(S)$ این نتیجه‌ها را به اجمال بررسی می‌کنیم.

فرض کنیم S یک نیم‌گروه توپولوژیک است. (ψ, X) را یک فشردسازی نیم‌گروهی S می‌نامیم اگر X یک نیم‌گروه راست توپولوژیک فشرد و هاسدورف و $\psi: S \rightarrow X$ یک هم‌ریختی پیوسته باشد، $\psi(S)^- = X$ و $\psi(S) \subseteq \Lambda(X)$ که در آن

$$\Lambda(X) = \{t \in X \mid s \rightarrow ts : X \rightarrow X\}.$$

فرض کنید X یک مجموعه و l یک رابطه روی X است. تعریف می‌کنیم:

$$l^\infty = \{l^n \mid n \geq 1\}$$

که در آن $l^n = l \circ l \circ \dots \circ l$ و $l^e = (l \cup l^{-1} \cup \lambda_X)^\infty$. بنا بر [41]، l^∞ یک رابطه هم‌ارزی تولید شده توسط l است یعنی $(x, y) \in l^\infty$ اگر و فقط اگر $x = y$ و $(Z_i, Z_{i+1}) \in l$ و $(Z_i, Z_{i+1}) \in l$ یا $(Z_{i+1}, Z_i) \in l$ و $(Z_i, Z_{i+1}) \in l$ وجود دارد که $Z_1 = x, Z_n = y$. فرض کنید S و T دو نیم‌گروه توپولوژیک و X یک فضای توپولوژیک ناتهی است. Y را یک S -سیستم چپ توپولوژیک می‌نامیم اگر $S \times X \rightarrow X$ ، $(s, x) \rightarrow sx$ به طور توأم پیوسته باشد. به طریق مشابه S -سیستم راست توپولوژیک را تعریف می‌کنیم. به همین ترتیب، (S, T) یک دو سیستم توپولوژیک است اگر S -سیستم چپ توپولوژیک و T -سیستم راست توپولوژیک باشد و $(s \in S, t \in T, x \in X)(sx) = s(xt)$. فرض کنید X و Y دو S -سیستم چپ است. می‌گوییم نگاشت پیوسته $\phi: X \rightarrow Y$ یک S -نگاشت چپ است اگر $\phi(sx) = s\phi(x)$ ، $(s \in S, x \in X)$. X, Y و Z به ترتیب یک (S, U) ، (U, T) و (S, T) دو سیستم توپولوژیک باشند. فرض کنید فضای

$X \times Y$ با توپولوژی حاصل ضربی مجهز شده است. فرض کنید $\beta : X \times Y \rightarrow Z$ یک (S, T) نگاشت است یعنی β یک S نگاشت چپ توپولوژیک و یک T نگاشت راست توپولوژیک است. گوئیم β یک دو نگاشت دو توپولوژیک است اگر

$$\beta(xu, y) = \beta(x, uy)$$

فرض کنید (ψ, X) فشرده سازی S با یک خاصیت فشرده سازی است. در این صورت X را می توان یک S -سیستم چپ [راست] توپولوژیک نامید که در آن $sx = \psi(s)x$ ، $(x \in X, s \in S)[xs = x\psi s]$

فرض کنید $\{S_i\}_{1 \leq i \leq n}$ خانواده ای از نیم گروه های توپولوژیک است و $\sigma_i : S_i \rightarrow S_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ هم ریختی های پیوسته اند. در این صورت S_i با عمل ضرب نیم گروه، یک (S_{i-1}, S_i) دو سیستم و با عمل $\sigma_i(s_{i-1})s_i$ $(s_{i-1}, s_i) \rightarrow \sigma_i(s_{i-1})s_i$ $(1 \leq i \leq n, s_i \in S_i, s_{i-1} \in S_{i-1})$ یک (s_{i-1}, s_i) دو سیستم است. در این صورت، نگاشت

$$\xi : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow D$$

یک n -نگاشت توپولوژیک نامیده می شود اگر داشته باشیم:

$$\xi(s_1, \dots, x_{i-1}, s_i s'_{i+1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \rightarrow \xi(s_1, \dots, s_i), \sigma_i(s'_i) s_{i+1}, \dots, s_n)$$

که در آن D یک (s_1, s_n) -دو سیستم توپولوژیک است.

سرانجام زوج (P, ψ) حاصل ضرب تانسوری تعمیم یافته توپولوژیک از S_1, \dots, S_n نامیده می شود اگر P یک (S_1, S_n) دو سیستم، $\psi : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow P$ یک n -نگاشت توپولوژیک باشد به طوری که به ازای هر (S_1, S_n) دو سیستم D و هر n -نگاشت توپولوژیک $\gamma : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow D$ نگاشت منحصر به فرد مانند

$$\bar{\gamma} : P \rightarrow D$$

باشد به طوری که دیاگرام زیر تعویض پذیر باشد

$$\begin{array}{ccc} S_1 \times \dots \times S_n & \xrightarrow{\psi} & P \\ \downarrow \gamma & \nearrow \bar{\gamma} & \\ D & & \end{array}$$

قضیه [Medghalchi, A.R., Rahimi, H.R., 2005]. حاصل ضرب تانسوری S_1, \dots, S_n وجود دارد.

حالت های $n=2, n=3$ در مقاله ۲۰۰۴ چاپ شده است [36].

قضیه. اگر (ψ_i, X_i) فشرده سازی نیم گروهی توپولوژیک واحد دار S_i باشد، آنگاه $X_1 \otimes_{\eta_1} \dots \otimes_{\eta_n} X_n$ فشرده سازی نیم گروهی توپولوژیک $S_1 \otimes_{\sigma_1} \dots \otimes_{\sigma_{n-1}} S_n$ است که در آن

[36] $\psi_{j+1} \circ \sigma_j = \eta_j \circ \psi_j$ و $\eta_j : X_j \rightarrow Y_{j+1}$, $\sigma_j : S_j \rightarrow S_{j+1}$
 [37].

نتیجه.

$$(S_1 \otimes_{\sigma_1} S_2 \otimes_{\sigma_2} \dots \otimes_{\sigma_{n-1}} S_n)^{ap} \simeq S_1^{ap} \otimes_{\sigma_1} \dots \otimes_{\sigma_{n-1}} S_n^{ap}$$

در این مقاله‌ها نتیجه‌های دیگری نیز در مورد ایده‌آل‌ها حاصل ضرب تانسوری و رابطه آنها با ایده‌آل‌های نیم‌گروه‌ها مورد بحث قرار گرفته است.

آخرین مطلبی که در مورد $L^1(G)$ بیان می‌شود به مقاله مشترک با عبادیان اشاره دارد. ایده اصلی از جبرهای باناخ حقیقی گرفته شده و $L^1(G, \tau)$ تعریف شده است که در آن $\tau : G \rightarrow G$ یک هم‌ریختی گروهی است و $\tau^2 = 1$. در این صورت

$$L^1(G) = L^1(G, \tau) \oplus iL^1(G, \tau)$$

اندازه هارروی $L^1(G, \tau)$ و میانگین‌پذیری $L^1(G, \tau)$ مورد مطالعه قرار گرفته است. ثابت شده است که $L^1(G)$ میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر $L^1(G, \tau)$ میانگین‌پذیر باشد [17]، [18].

تشکر و قدردانی. از داوران محترم و نیز ویراستار مجله آقای دکتر محمد جلوداری ممقانی به علت ارائه پیشنهادات ارزنده تشکر و قدردانی می‌نمایم.

مراجع

- [1] Amini, M. and Medghalchi, A. R., Fourier algebras on tensor hypergroups, Contemporary Mathematics, Volume 363(2004) A. M. S.
- [2] ———, ———, Fourier algebras on topological foundation *-semigroups, Semigroup Forum, Vol. 68(2004) 322-334.
- [3] ———, ———, Amenability of algebras $R(S), \mathcal{F}(S)$ of a topological semigroup, Scientiae Mathematicae Japonicae, 60, No. 3(2004) 469-473.
- [4] ———, ———, Restricted algebras on inverse semigroups I, representation theory, Math. Nachr. 279, No.16, 1-10 (2006).
- [5] Atiyah, Sir Michael, Mathematics in the 20th century, Bull. London Math. Soc. 34(2002) 1-15.
- [6] Baker, A. C., and Baker, J. W., Algebras of measures on a locally compact semigroup III, J. London Math. Soc. (2) 4(1972) 685-695.
- [7] Berglund, John F., Junghen, Hugo D., and Milnes Paul, Analysis on semigroups, Wiley, 1989.

- [8] Bloom W. R., Heyer H., Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroup, Walter de Gruyter Berlin, New York, 1995.
- [9] Bohr, H., Zur Theorie der Fastperiodischen Funktionen I-III, Acta Math. 45(1925) 29-127, ibid 46(1925) 101-214, 47(1926) 237-281.
- [10] Burkardt, H., Trigonometrische Reihen und Integrale bisetwa 1850, Encyclopädie der Math. Wiss, Bd. II, Teil I, pp. 819-1354, Leipzig: Teubner 1899-1915.
- [11] Bozejko, M., Positive definite bounded matrices and a characterization of amenable groups, Proc. Amer. Math. Soc. 95(1985) 357-360.
- [12] Cartan, H., Sur la mesure de Haar, C. R. Acad. Sci. Paris 211(1940) 759-762.
- [13] Dales, H. G., Banach algebras and automatic continuity, Clarendon Press. Oxford 2000.
- [14] Day, M. M., Amenable semigroups, Illinois J. Math. 1(1957) 509-544.
- [15] Duncan, J. and Namioka, Amenability of inverse semigroups and their semigroup algebras, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A., 80, 309-21.
- [16] Dunkl, Charles, F. and Ramirez, Donald, E., Representation of commutative semitopological semigroups, Lecture Notes in Mathematics, 435 (1975) Springer-Verlag.
- [17] Ebadian, A. and Medghalchi, A. R. Real group algebras, Iranian Journal of Science and Technology, Transaction A, Vol. 28(2004) No. A2, 289-298.
- [18] Ebadian A., Real Lipschitz algebras and real group algebras, Ph.D. thesis 2000.
- [19] Eberlin, W. F., Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 67 (1949) 217-240.
- [20] Eymard, P. L'algebra de Fourier d'un groupe localement compact, Bull. Soc. Math. France 92(1964) 181-236. Translated by Pourabdollah, M. A. into the English (2003).
- [21] ———, A survey of Fourier algebras, Contemporary Mathematics, Volume 183, 1995 A.M.S.
- [22] Folland, G. B., A course in abstract harmonic analysis CRC Press, Inc., 1995.

- [23] Forrest, B., and Runde, V., Amenability and weak amenability of the Fourier algebra. *Math. Z.*, 250(2005) 731-744..
- [24] Gaffari, A., Multiplier and operators on semigroup and hypergroups and their second duals, Ph.D Thesis (Farsi) 2002.
- [25] Ghahramani, F., Loy, R. J., Generalized notions of amenability, *J. Functional Analysis*, 208(2004) 229-260.
- [26] Ghahramani, F., Loy, R. J., and Willis J., Amenability and weak amenability of second conjugate Banach algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* 124 (1996) 1489-1497.
- [27] Greenleaf, F. P., Invariant means on topological groups, Van Nostrand, New York, 1969.
- [28] Godement, R., Les fonctions de type positif et la théorie des groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 63 (1948) 1-84.
- [29] Hewitt, E., and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis I,II, Springer-Verlag 1987.
- [30] Hewitt, E., and Stromberg, Real and abstract analysis, Graduate Texts in Mathematics, Springer 1969.
- [31] Higgins, J. R., Sampling theory in Fourier and singal analysis foundations, Clarendon Press. Oxford, 1996.
- [32] Howie John M., Fundamentals of semigroup theory, Clarendon Press. Oxford 1995.
- [33] Johnson, B. E., Cohomology in Banach algebras, *Mem. Amer. Math. Soc.* 127 (1972) 1-101.
- [34] ———, Weak amenability of group algebras, *Bull., London Math. Soc.* 23 (1991) 281-284.
- [35] Lau, A. T., The Fourier Stieltjes algebra of a topological semigroup with involution, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 77, No. 1(1978) 165-181.
- [36] Medghalchi, A. R., and Rahimi, H. R., Topological tensor products of topological semigroups and their compactifications, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 62, No. 1(2005) 57-64.

- [37] ———, ———, The space of functions and the ideal structures on the generalized topological tensor products of topological semigroups (Preprint 2005).
- [38] Milnes, P., Pym J. S., Function spaces on semitopological semigroups, *Semigroup Forum* 19(1980) 347-354.
- [39] Modarres Mosaddeg, S. M. S., Topological center and amenability of hypergroup algebras, measure algebras and related topics, Ph.D Thesis 1999.
- [40] Neumann John, von, Almost periodic functions in a group I, *Transactions of the Amer. Math. Soc.* 36(1934) 445-492.
- [41] ———, The uniqueness of Haar's measure, *Math. Sb* 1, 43(1936) 721-734.
- [42] ———, *Collected works*, 6 Vols, Pergamon Press. Oxford 1961-1963.
- [43] Paterson, Allan L. T., *Amenability*, *Mathematical Surveys and Monographs* 29, 1988.
- [44] ———, *Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras*, Birkhäuser, 1998.
- [45] Pier, J. P. *Amenable locally compact groups*, Academic Press, 1984.
- [46] Pourbarat, *Left amenability of groups and hypergroups (Farsi)*, Ph.D Thesis, 1996.
- [47] Reiter, H., and Stegman, J. D., *Classical hamonic analysis and locally compact groups*, Oxford University Press, 2000.
- [48] Rosenberg, Jonathan, *A Panorama of Hungarian Mathematics in the Twentieth Century, Non-Commutative Hamonic Analysis (Preprint 2001)*.
- [49] Rudin, W., *Fourier analysis on groups (Second Edition)*, McGraw-Hill, 1991.
- [50] Runde, V., *Lectures on Amenability*, Springer-Verlag, 2002.
- [51] Weil, H., L, *Intégration dans les Groupes Topologiques et ses Applications*, Hermann, Paris 1940.
- [52] Wiener, Norbert, *Generalized harmonic analysis*, *Acta Math.* 55(1930) 117-258.
- [53] Wigner, E. P. *Collected Works*, ed. by Wightman, Part A, Volume 1, Springer-Verlag, Berlin, New York 1993.

[54] Zabandan, G. Amenability, Weak and 2-Weak Amenability of Weighted Convolution Algebras, Ph.D. Thesis, 2004.

[55] Zygmund, A., Trigonometric series, 2nd Edition, 2 vols, Cambridge University Press.

[۵۶] علیرضا مدقالچی، آنالیز هارمونیک از کجا شروع شده است و به کجا می‌رود، همایش ماهانه انجمن ریاضی ایران، ۱۳۷۸.

[۵۷] علیرضا مدقالچی، آنالیز هارمونیک روی ابرگروه‌های توپولوژیک، مجموعه مقاله‌های دوازدهمین سمینار آنالیز ریاضی و کاربردهای آن، ۱۳ و ۱۴ بهمن ماه ۸۰، دانشگاه گیلان.

[۵۸] علیرضا مدقالچی، پژوهش در ریاضیات، مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی شماره ۳۴، بهار ۱۳۸۴.

علیرضا مدقالچی
دانشگاه تربیت معلم تهران، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
a_medghalchi@saba.tmu.ac.ir