فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۴، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۴)، صص ۱۵۹ تا ۱۶۴

دربارهٔ توپولوژی فضاهای سوراخ‌دار*

کی. سی. بی. تِیشِیرا

ترجمهٔ منصوره موسی‌پور

چکیده. در این مقاله، برهانی کوتاه و مقدماتی برای این ادعا ارائه می‌کنیم که مجموعه‌های تک‌عضوی در برخی از فضاهای متری، بی‌اهمیت و قابل چشم‌پوشی نیستند. برهان، مایهٔ هندسی دارد و در آن، از مفهوم فشردگیِ موضعی استفاده می‌شود. این روش به‌ویژه به‌عنوان روشی جایگزین برای اثبات برخی از قضیه‌های کلاسیک مشابه، پیشنهاد می‌شود.

۱ مقدمه

فرض کنیم (X,τ) یك فضای توپولوژیک باشد. سئوالی مهم که مطرح می‌شود این است که آیا نسخهٔ سوراخ‌دار[۱] آن، یعنی $X \setminus \{p\}$ با X همسان‌ریخت[۲] است یا خیر؟ چنین پژوهش‌هایی برای مثال، با ویژگی‌های نقطهٔ ثابت برای زیرمجموعه‌های X در پیوند است و سال‌ها مورد توجه فراوان بوده است. اغلب دیده می‌شود که مسائلی از این قبیل، دارای ظرافت‌های بسیاری هستند و اثبات آنها دشوار است. برای مثال، اثبات اینکه فضای اقلیدسی سوراخ‌دار $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ با $\mathbb{R}^n$ همسان‌ریخت نیست، نیاز به ابزاری از توپولوژی جبری دارد؛ مثلاً [۲] را ببینید. از سوی دیگر، قضیه‌ای ژرفی که کِله[۳] در سال ۱۹۵۰ میلادی ثابت کرد، نشان می‌دهد که یک فضای برداری

عبارات و کلمات کلیدی: توپولوژی، همسان‌ریختی، فضاهای سوراخ‌دار، فشردگیِ موضعی

نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۵/۲۳

*Teixeira, K. C. B., On the topology of punctured spaces, *Amer. Math. Monthly*, **130** (2023), no.2, 182-185.

1. punctured version 2. homeomorphic 3. Victor Klee

doi: 10.30504/mct.2023.1413.1992

توپولوژیکی با بُعد نامتناهی، همیشه با نسخهٔ سوراخ‌دارِ خود، همسان‌ریخت است [۳، ۴]. در واقع می‌توان زیرمجموعه‌های فشرده و یا به‌طور کلی‌تر، زیرحوزه‌هایی[1] از یک فضای برداری توپولوژیکی را به‌طور کامل حذف کرد بدون اینکه توپولوژی آن تغییر کند؛ مثلاً [۱، ۵] را ببینید. بنابر قضیهٔ کلاسیک ریس،[2] فشردگیِ موضعی،[3] یعنی این ویژگی که مجموعه‌های بسته و کراندار، فشرده باشند، متناهی بودنِ بُعد فضاهای برداری نُرمدار را مشخص‌سازی می‌کند. بنابراین شگفت‌انگیز است که در نهایت، فشردگیِ موضعی است که مانع می‌شود یک فضا با نسخهٔ سوراخ‌دارِ خود، همسان‌ریخت باشد.

این مطالب، انگیزهٔ اصلیِ نگارش این مقاله هستند. در واقع، به‌دنبال معیاری هستیم که مانع می‌شود یک فضا با نسخهٔ سوراخ‌دارِ خود، همسان‌ریخت باشد. نتایج به‌دست آمده در این مقاله، یک برهان مقدماتی برای اینکه $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ با $\mathbb{R}^n$ همسان‌ریخت نیست، ارائه می‌کند که مبتنی بر فشردگیِ موضعی است. در این مقاله، از نماد استانده‌ٔ گوی باز به مرکز نقطهٔ q و شعاع $R > 0$ در فضای متری (X, d) استفاده می‌کنیم: $B_R(q) := \{v \in X : d(v, q) < R\}$.

۲ نتایج اصلی

قضیه ۱.۲. فرض کنیم (X, d) یک فضای متری کامل و فشردهٔ موضعی باشد. فرض کنیم $q \in X$ موجود باشد چنان‌که $X \setminus B_R(q)$ برای Rهای مثبت و به‌اندازهٔ کافی بزرگ، همبند مسیری[4] باشد. در این صورت، هیچ همسان‌ریختی بین X و نسخهٔ سوراخ‌دار آن، $X \setminus \{p\}$، وجود ندارد.

اثبات. اثبات به‌روش برهان خلف است. به‌خلافِ حکم، فرض کنیم یک همسان‌ریختی مانند $\varphi : X \setminus \{p\} \to X$ وجود داشته باشد. ادعا می‌کنیم که اگر $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای در $X \setminus \{p\}$ باشد که به p همگرا است، آنگاه تصویر آن بی‌کران است؛ یعنی

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, p) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(\varphi(p_n), p) = +\infty. \qquad (۱)$$

فرض کنیم چنین نباشد و برای یک زیردنباله مانند $(p_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ و عدد حقیقی مثبتی مانند C_0 داشته باشیم $d(\varphi(p_{n_j}), p) \le C_0$. با توجه به شرط فشردگیِ موضعی و در صورت لزوم با در نظر گرفتن زیردنباله‌ای دیگر، $q \in X$ وجود دارد به‌طوری که

$$\lim_{j\to\infty} \varphi(p_{n_j}) = q \in X. \qquad (۲)$$

1. subregions 2. Riesz 3. local compactness 4. path connected

با تأثیر تابع پیوستهٔ φ^{-1} بر طرفین (۲)، به‌دست می‌آوریم

$$p = \lim_{j\to\infty} p_{n_j} = \lim_{j\to\infty} \varphi^{-1} \circ \varphi(p_{n_j}) = \varphi^{-1}(q)$$

که ممتنع است، زیرا $\varphi : X\setminus\{p\} \to X$ دوسویی است و در نتیجه $\varphi^{-1}(q)$ نقطه‌ای از $X\setminus\{p\}$ است و نمی‌تواند p باشد. به‌طور مشابه، ادعا می‌کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, p) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(\varphi(p_n), p) = +\infty. \tag{۳}$$

در واقع، اگر زیردنباله‌ای مانند $d(\varphi(p_{n_j}), p)$ کراندار باقی بماند، در صورت لزوم با در نظر گرفتن زیردنباله‌ای دیگر، $q \in X$ وجود دارد به‌طوری که

$$\lim_{j\to\infty} \varphi(p_{n_j}) = q \in X. \tag{۴}$$

فرض کنیم $z := \varphi^{-1}(q)$. در این صورت، $z \in X \setminus \{p\}$ و

$$\lim_{j\to\infty} d(p_{n_j}, p) = \lim_{j\to\infty} d(\varphi^{-1}(\varphi(p_{n_j})), p) = d(z, p) + o(1) < +\infty$$

که با مقدمِ (۳) تناقض دارد. اکنون برای هر عدد مثبت λ، مجموعهٔ $\mathbb{S}_\lambda^X$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{S}_\lambda^X := \{v \in X \setminus \{p\} : d(v, p) = \lambda\}.$$

به‌روشنی $\mathbb{S}_\lambda^X$ زیرمجموعه‌ای بسته و کراندار از $X \setminus \{p\}$ است. از فشردگیِ موضعیِ (X, d) نتیجه می‌شود که $\mathbb{S}_\lambda^X$ مجموعه‌ای فشرده است. گیریم $K := \varphi(\mathbb{S}_\lambda^X)$. مجموعهٔ K در X فشرده و در نتیجه کراندار است. پس می‌توانیم عددی مثبت و به‌اندازهٔ کافی بزرگ مانند R بیابیم چنان‌که $K \subseteq B_R(q)$. از (۱) نتیجه می‌گیریم $z_1 \in X \setminus \{p\}$ وجود دارد به‌طوری که

$$0 < d(z_1, p) < \frac{\lambda}{4} \quad \text{و} \quad \varphi(z_1) \notin B_R(q) \tag{۵}$$

مشابهاً از (۳) نتیجه می‌گیریم $z_2 \in X \setminus \{p\}$ وجود دارد به‌طوری که

$$d(z_2, p) > 4\lambda \quad \text{و} \quad \varphi(z_2) \notin B_R(q). \tag{۶}$$

بنابر فرض، فضای $X \setminus B_R(q)$ همبند مسیری است. از این‌رو مسیری پیوسته مانند

$$\varrho : [\circ, \text{۱}] \to X \setminus B_R(q)$$

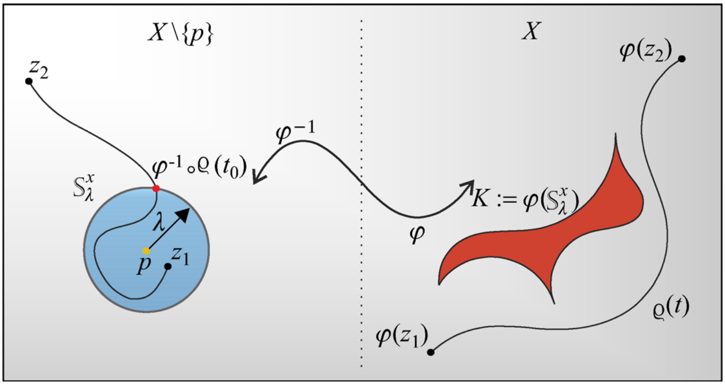
یافت می‌شود که

$$.\varrho(\circ) = \varphi(z_\text{۱}) \quad \text{و} \quad \varrho(\text{۱}) = \varphi(z_\text{۲})$$

بنابراین مسیر $\mu := \varphi^{-\text{۱}} \circ \varrho : [\circ, \text{۱}] \to X \setminus \{p\}$ نیز پیوسته است و به‌آسانی دیده می‌شود که

$$.d(\mu(\circ), p) < \frac{\lambda}{\text{۴}} \quad \text{و} \quad d(\mu(\text{۱}), p) > \text{۴}\lambda$$

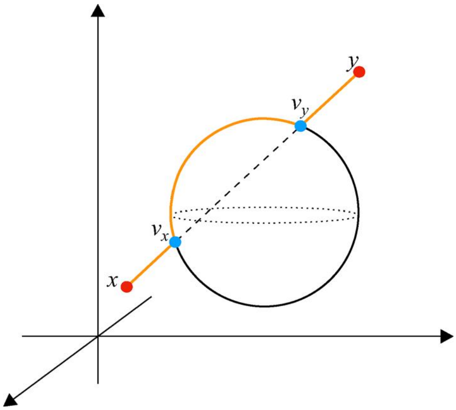
اکنون از قضیهٔ مقدار میانی برای توابع پیوسته نتیجه می‌شود که $t_\circ \in (\circ, \text{۱})$ وجود دارد به‌طوری که $d(\mu(t_\circ), p) = \lambda$. اما $\varrho(t_\circ) = \varphi(\mu(t_\circ)) \in K$ و $K \subseteq B_R(q)$ که با توجه به بُرد ϱ منجر به تناقض می‌شود. $\square$



شکل ۱. روش هندسی اثبات

بحث را با بیان چند توضیح به پایان می‌بریم. ابتدا دیدگاه هندسی را که در برهان وجود داشت و در شکل ۱ نشان داده شده است، توضیح می‌دهیم. برهان متّکی بر این است که آیا امکان پیدا کردن یک نقطه مانند $z_\text{۱}$ نزدیک به p و یک نقطه مانند $z_\text{۲}$ دور از p وجود دارد به‌طوری که تصویر آنها، یعنی $\varphi(z_\text{۱})$ و $\varphi(z_\text{۲})$ بتوانند با یک مسیر ϱ به هم وصل شوند و این مسیر، تصویر مجموعهٔ فشردهٔ $\mathbb{S}^X_\lambda$ را قطع نکند؟ هرچند این یک تناقض است چون مسیر برگشت $\varphi^{-\text{۱}} \circ \varrho$ باید $\mathbb{S}^X_\lambda$ را قطع کند.

یك نمونه از فضاهای متری واجد شرایط قضیهٔ ۱.۲، فضای $\mathbb{R}^n$، $n > ۱$، به‌همراه یك نُرم تعریف‌شده روی آن است. به‌آسانی قابل بررسی است که وقتی $n > ۱$، مجموعهٔ $\mathbb{R}^n \setminus B_R(q)$ برای هر $q \in \mathbb{R}^n$ و هر $R > ۰$ همبند مسیری است. یکی از روش‌ها برای بررسی این موضوع، توجه به این واقعیت است که کُره $\mathbb{S}_R^{n-۱}(q) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - q\| = R\}$ همبند مسیری است. این نتیجه خیلی قدیمی است؛ مثلاً [۶] را ببینید. در اینجا یک راه آسان برای بررسی موضوع ارائه می‌کنیم. بدون کاستن از کلیّت، گیریم $q = ۰$. فرض کنیم $u, w \in \mathbb{S}_R^{n-۱}(۰)$. اگر u و w مستقل خطی باشند، آنگاه مسیر $\gamma(t) = R\frac{(۱-t)u+tw}{\|(۱-t)u+tw\|} \in \mathbb{S}_R^{n-۱}(۰)$ بردارهای u و w را به‌هم وصل می‌کند. اگر u و w وابسته باشند، آنگاه بردار $v \in \mathbb{S}_R^{n-۱}(۰)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که مجموعه‌های $\{u, v\}$ و $\{v, w\}$ مستقل خطی باشند. این کار امکان‌پذیر است چون $n > ۱$. اکنون با الحاق مسیری که u را به v وصل می‌کند به مسیری که v را به w وصل می‌کند، مسیری پیوسته به‌دست می‌آید که u را به w وصل می‌کند.



شکل ۲. برای $n > ۱$، $\mathbb{R}^n \setminus B_R(q)$ همبند مسیری است.

به‌طور مشابه، اگر $x, y \in B_R(q)$ خط مستقیمی را l که x و y را به‌هم وصل می‌کند، در نظر می‌گیریم:

$$l = \{x + t(y - x) : ۰ \leq t \leq ۱\}.$$

اگر l از $B_R(q)$ نگذرد، این خط را همان مسیری می‌گیریم که x و y را به‌هم وصل می‌کند. اما اگر l از $B_R(q)$ بگذرد، دو نقطهٔ v_x و v_y در $\mathbb{S}_R^{n-۱}(q)$ را در نظر می‌گیریم طوری که $l(t_x) = v_x$ و $l(t_y) = v_y$ که در آن، $۰ < t_x < t_y$. فرض کنیم γ یک مسیر در $\mathbb{S}_R^{n-۱}(q)$ باشد که v_x و v_y

را به‌هم وصل می‌کند. با الحاق مسیرهای $l|_{[0,t_x]}$، γ و $l|_{[t_y,1]}$، مسیری به‌دست می‌آید که x و y را به‌هم وصل می‌کند و با $B_R(q)$ اشتراک ندارد؛ شکل ۲ را ببینید.

در پایان، به این نکته اشاره می‌کنیم که خط حقیقی $\mathbb{R}$ در شرایط قضیهٔ ۱.۲ صدق نمی‌کند؛ هرچند این موضوع که $\mathbb{R}$ با $\mathbb{R}\setminus\{p\}$ همسان‌ریخت نیست، با توجه به ملاحظات همبندی نیز نتیجه می‌شود.

مراجع

[1] Anderson, R. D., On a theorem of Klee, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), no. 6, 1401-1404.

[2] Bredon, G., *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **139**, Springer-Verlag, New York, 1993.

[3] Klee, V. L., Convex bodies and periodic homeomorphism in Hilbert spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), no. 1, 10-43.

[4] Klee, V. L., A note on topological properties of normed linear spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), no. 4, 673-674.

[5] Lin, B., Two topological problems concerning infinite-dimensional normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114** (1965), no. 1, 156-175.

[6] Munkres, J. R., *Topology: A First Course*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1975.

منصوره موسی‌پور: دانشگاه فرهنگیان، گروه آموزش ریاضی

رایانامه: `m.mosapour@cfu.ac.ir`

Mathematical Culture and Thought
Volume 44, Number 1, Spring/Summer 2025, Pages 159–164
doi: 10.30504/mct.2023.1413.1992

On the Topology of Punctured Spaces*

K. C. B. Teixeira
Translated by M. Moosapoor[1]

Department of Mathematics Education, Farhangian University, Iran

Abstract. We give a short, elementary proof of the fact that singletons are not topologically negligible for a relevant family of metric spaces. The idea is geometric and, in particular, it offers alternative solutions to some classical theorems of that nature.

Keywords: topology, homeomorphism, punctured spaces, local compactness
Article history: Received 30 July 2023; Accepted 14 August 2023
Article type: translation

---

* Teixeira, K. C. B., On the topology of punctured spaces, *Amer. Math. Monthly*, **130** (2023), no.2, 182-185.

1. m.mosapour@cfu.ac.ir