فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۴، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۴)، صص ۱۶۵ تا ۱۷۶

احتمال روی گروه و حلقه

محمدعلی اسم‌خانی، سید مجید جعفریان امیری ✉

چکیده. در پنجاه سال اخیر به موضوع احتمال روی گروه‌های متناهی توجه شده است. ازجملهٔ این مسائل محاسبهٔ احتمال جابه‌جا شدن دو عضو یا برابر صفر شدن حاصل‌ضرب دو عضو است. در این مقاله، برخی نتایج مهم مربوط به محاسبهٔ احتمال رخ دادن پدیده‌هایی از این نوع را روی گروه و حلقه‌ها عرضه می‌کنیم.

۱ مقدمه

در پنج دههٔ اخیر، اشتیاق زیادی به استفاده از احتمال در گروه‌های متناهی مشاهده می‌شود. سابقهٔ این موضوع به هفت مقالهٔ [۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹] از اردُش[1] و توران[2] طی سال‌های ۱۹۶۵ تا ۱۹۷۰ دربارهٔ مطالعهٔ بعضی مسائل آماری در حوزهٔ نظریهٔ گروه‌ها برمی‌گردد. به‌ویژه آنها نشان دادند (قضیهٔ IV از [۱۶]) که در یک گروه متناهی مانند G، تعداد عضوهای مجموعهٔ $\{(x,y) \in G \times G : xy = yx\}$ برابر با $k(G)|G|$ است که در آن $k(G)$ تعداد رده‌های مزدوجی G است. گاستافسون [۳۰] در سال ۱۹۷۳ قضیهٔ بالا را با همان روش‌های قبلی دوباره ثابت کرد. سؤال زیر نه‌تنها عنوان مقالهٔ گاستافسون است، بلکه یک مسئلهٔ پیشتاز برای پیشرفت‌های بعدیِ این موضوع نیز قلمداد می‌شود:

- سؤال: احتمال جابه‌جا شدنِ دو عضوِ یک گروه چیست؟

عبارات و کلمات کلیدی: گروه متناهی، حلقهٔ جابه‌جایی متناهی، احتمال جابه‌جا شدن، احتمال پوچی
نوع مقاله: مروری؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۷/۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۲۸

1. Paul Erdös 2. Pál Turán

doi: 10.30504/mct.2025.1499.2051

گاستافسون یک جواب مقدماتی ولی قابل‌توجه به این سؤال داد و ثابت کرد که احتمال جابه‌جا شدنِ دو عضوِ یک گروه ناآبلیِ متناهی، کوچک‌تر یا مساوی با $\frac{۵}{۸}$ است. همچنین در [۳۰] نشان داده شده است که احتمال جابه‌جا شدنِ دو عضو یک گروه ناآبلیِ فشرده، کوچک‌تر یا مساوی با $\frac{۵}{۸}$ است. در ادامه، احتمال مولد بودنِ دو عضو یک گروه، احتمال جابه‌جاگر بودنِ عضوی از یک گروه، احتمال $\mathcal{P}$-گروه بودنِ زیرگروه تولیدشده توسط دو عضوِ یک گروه (که در آن، $\mathcal{P}$ یک ویژگی نظریهٔ گروهی است) و انواعی دیگر از احتمال‌ها روی گروه‌ها توسط برخی از ریاضی‌دانان مطرح شد.

در سال ۱۹۷۶، مک‌هِیل [۳۷] مشابه گروه‌ها، احتمال جابه‌جا شدنِ دو عضو را که به‌تصادف از یک حلقهٔ متناهی مانند R انتخاب می‌شوند، مطرح کرد. در ادامه احتمال صفر شدنِ حاصل‌ضرب دو عضو یک حلقهٔ جابه‌جاییِ متناهی مورد مطالعه قرار گرفت [۲۲، ۲۳]. البته احتمال‌ها روی ساختارهای جبری دیگر نیز بررسی شده‌اند [۴۳، ۴۴].

در این مقاله به مهم‌ترین این نوع نتایج اشاره خواهیم کرد و به برخی از مهم‌ترین منابع اشاره می‌کنیم.

۲ انواع احتمال روی گروه‌ها

در این بخش، به معرفی و مطالعهٔ چند احتمال که روی گروه‌ها تعریف شده‌اند، می‌پردازیم. نخست دربارهٔ احتمال جابه‌جا شدنِ دو عضوِ یک گروه سخن می‌گوییم. با تعریف درجهٔ جابه‌جایی یک گروه شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. احتمال جابه‌جا شدنِ دو عضو که به‌تصادف از G انتخاب شده‌اند، عبارت است از

$$Pr(G) := \frac{|\{(x,y) \in G \times G : xy = yx\}|}{|G|^{۲}}.$$

عدد $Pr(G)$ را درجهٔ جابه‌جایی یا احتمال جابه‌جایی در گروه G می‌نامیم.

به‌روشنی می‌توان دید که $Pr(G) \in (۰, ۱]$ و $Pr(G) = ۱$ اگر و تنها اگر G آبلی باشد. در واقع، هرچه مقدار $Pr(G)$ بزرگ‌تر باشد، گروه G به آبلی بودن نزدیک‌تر است. این سؤال به‌طور طبیعی مطرح می‌شود که بزرگ‌ترین مقدار $Pr(G)$ در گروه‌های ناآبلی متناهی چیست؟ گاستافسون به این سؤال در قضیهٔ زیر پاسخ می‌دهد که برهان آن را بعد از یادآوری نکاتی مقدماتی از نظریهٔ گروه‌ها می‌آوریم.

قضیه ۲.۲. اگر G یک گروه ناآبلی متناهی باشد، آنگاه $Pr(G) \leq \frac{۵}{۸}$.

مجموعهٔ همهٔ عضوهایی از گروه G را که با همهٔ عضوهای آن جابه‌جا می‌شوند، مرکز گروه G می‌نامیم و با $Z(G)$ نشان می‌دهیم. برای هر $x \in G$ مرکزی‌ساز x در G مجموعهٔ

$$C_G(x) = \{y \in G : xy = yx\}$$

است. روشن است که $x \in Z(G)$ اگر و تنها اگر $C_G(x) = G$. یک مسئلهٔ مقدماتی در نظریهٔ گروه‌ها این است که گروه G آبلی است اگر و تنها اگر گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{Z(G)}$ دوری باشد. چون ۴ـگروه کلاین کوچکترین گروه غیردوری است، پس برای هر گروه ناآبلی G داریم $|\frac{G}{Z(G)}| \geq ۴$. همچنین یادآوری می‌کنیم که اگر $x \notin Z(G)$، آنگاه $|G : C_G(x)| \geq ۲$ که در آن، $|G : C_G(x)|$ شاخص $C_G(x)$ در G است. حال شرایط آماده است که به اثبات قضیهٔ ۲.۲ بپردازیم.

اثبات قضیهٔ ۲.۲. چون $\{(x,y) \in G \times G : xy = yx\} = \bigcup_{x\in G}(\{x\} \times C_G(x))$، داریم

$$\begin{aligned}
Pr(G) &= \frac{\Sigma_{x\in G}|C_G(x)|}{|G|^۲} \\
&= \frac{\Sigma_{x\in Z(G)}|C_G(x)| + \Sigma_{x\notin Z(G)}|C_G(x)|}{|G|^۲} \\
&= \frac{|G||Z(G)| + \Sigma_{x\notin Z(G)}|C_G(x)|}{|G|^۲} \\
&\leq \frac{|Z(G)|}{|G|} + \frac{\Sigma_{x\notin Z(G)}\frac{|G|}{۲}}{|G|^۲} \\
&= \frac{|Z(G)|}{|G|} + \frac{|G - Z(G)|}{۲|G|} \\
&= \frac{|Z(G)|}{۲|G|} + \frac{۱}{۲}.
\end{aligned}$$

بنابر مطالب گفته‌شده پیش از برهان، $|\frac{G}{Z(G)}| \geq ۴$ و در نتیجه $Pr(G) \leq \frac{۵}{۸}$. □

با توجه به این برهان، می‌توان دید که $Pr(G) = \frac{۵}{۸}$ اگر و تنها اگر $|\frac{G}{Z(G)}| = ۴$ اگر و تنها اگر $\frac{G}{Z(G)}$ یکریخت با ۴ـگروه کلاین باشد. برای مثال، $Pr(Q_۴) = Pr(D_۴) = \frac{۵}{۸}$ که در آن، $D_۴$ و $Q_۴$ به‌ترتیب گروه دووجهی از مرتبهٔ ۸ و گروه چهارگان از مرتبهٔ ۸ هستند. همچنین

می‌توان نتیجه گرفت که گروه متناهی G با شرط $1 > Pr(G) > \frac{5}{8}$ وجود ندارد. به عبارت دیگر، اگر $\mathcal{G}$ خانوادهٔ همهٔ گروه‌های متناهی باشد، آنگاه تابع $Pr : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ با ضابطهٔ $G \mapsto Pr(G)$ پوشا نیست. بنابراین مطالعهٔ بُرد تابع Pr نیز می‌تواند موضوعی جالب باشد.

اکنون حدس‌های جوزف را که در سال ۱۹۷۷ در [۳۴، ۳۵] مطرح شدند می‌آوریم.

حدس ۳.۲. فرض کنیم $\mathcal{D} = \{Pr(G) : \text{گروه متناهی است } G\}$. حکم‌های زیر برقرارند:

(الف) هر نقطهٔ حدیِ مجموعهٔ $\mathcal{D}$ گویا است؛

(ب) اگر l یک نقطهٔ حدیِ مجموعهٔ $\mathcal{D}$ باشد، آنگاه یک $\epsilon > 0$ وجود دارد به‌طوری که

$$\mathcal{D} \cap (l - \epsilon, l) = \varnothing;$$

(پ) مجموعهٔ $D \cup \{0\}$ بسته است.

در سال ۲۰۱۳، در [۲۷] نتیجهٔ زیر دربارهٔ حدس‌های جوزف اثبات شد.

قضیه ۴.۲. اگر $l \in (\frac{2}{9}, 1]$ نقطهٔ حدیِ مجموعهٔ $\mathcal{D}$ باشد، آنگاه l گویا است و یک $\epsilon > 0$ وجود دارد به‌طوری که $\mathcal{D} \cap (l - \epsilon, l) = \varnothing$.

در همین زمینه، این سؤال مطرح می‌شود که آیا تعریف احتمال جابه‌جا شدن دو عضو، قابل‌تعمیم به گروه‌های نامتناهی نیز هست؟ قضیهٔ ۲.۲ برای گروه‌های نامتناهی خاصی برقرار است. برای این حالت، به‌منظور تعریف احتمال، به یک اندازه و طبیعتاً به یک گروه توپولوژیکی اندازه‌پذیر نیاز است و به‌جای $\Sigma_{x \in G}$ از $\int_G$ استفاده می‌شود.

فرض کنیم G یک گروه توپولوژیکیِ هاسدورف فشرده باشد. در این صورت می‌دانیم G یک اندازهٔ هار چپ یکتا دارد. این یک اندازهٔ بورل μ است به‌طوری که برای هر زیرمجموعهٔ باز ناتهی U از G داریم $\mu(U) > 0$ و برای هر زیرمجموعهٔ بورل E از G و هر $x \in G$، $\mu(x \cdot E) = \mu(E)$. به‌علاوه μ وقتی شرط نرمال‌سازی $\mu(G) = 1$ اِعمال شود، اندازهٔ یادشده یکتا است. خواننده‌ای که با اندازهٔ هار آشنا نیست، می‌تواند به کتاب معروف [۲۶] مراجعه کند. روی فضای حاصل‌ضربی $G \times G$، اندازهٔ حاصل‌ضربی $\mu \times \mu$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم

$$C = \{(x, y) \in G \times G : xy = yx\}$$

و تابع $f : G \times G \longrightarrow G$ را با ضابطهٔ $f(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، f یک نگاشت پیوسته است. چون G هاسدورف است، مجموعهٔ $\{1\}$ در G بسته و لذا

$C = f^{-1}(\{1\})$ در $G\times G$ بسته است. بنابراین مجموعهٔ C اندازه‌پذیر است. حال اگر $\mu\times\mu$ را به‌عنوان اندازهٔ احتمال در نظر بگیریم، $Pr(G) = \mu\times\mu(C)$. گاستافسون در [۳۰] مشابه قضیهٔ ۲.۲ را برای گروه‌های ناآبلیِ فشرده بیان کرده است.

قضیه ۵.۲. اگر G یک گروه ناآبلیِ فشرده باشد، آنگاه $Pr(G)\leq \frac{5}{8}$.

اثبات. گیریم $\chi : G\times G\longrightarrow \mathbb{R}$ تابع مشخصهٔ C در $G\times G$ باشد. داریم

$$\mu\times\mu(C) = \int_{G\times G}\chi d(\mu\times\mu).$$

بنابر قضیهٔ فوبینی،

$$\mu\times\mu(C) = \int_G\int_G \chi(x,y)d\mu(y)d\mu(x).$$

همچنین برای هر x،

$$\int_G \chi(x,y)d\mu(y) = \mu(C_G(x)).$$

توجه کنید که مجموعهٔ $Z(G)$ بسته و در نتیجه اندازه‌پذیر است. چون $|G : Z(G)|\geq 4$ و گروه G اجتماعی مجزا از هم‌مجموعه‌های $Z(G)$ است، داریم $\mu(Z(G))\leq\frac{1}{4}$. همچنین اگر $x\in Z(G)$، آنگاه $\mu(C_G(x)) = \mu(G) = 1$. حال فرض کنیم $x\notin Z(G)$. چون تابع $\varphi_x : G\longrightarrow G$ با ضابطهٔ $\varphi_x(y) = x^{-1}y^{-1}xy$ پیوسته است و مجموعهٔ $\{1\}$ در G بسته است، پس مجموعهٔ $\varphi_x^{-1}(\{1\}) = C_G(x)$ در G بسته خواهد بود و بنابراین اندازه‌پذیر است. در نتیجه $|G : C_G(x)|\geq 2$ و بنابراین $\mu(C_G(x))\leq\frac{1}{2}$. اکنون داریم

$$\begin{aligned}
Pr(G) = \mu\times\mu(C) &= \int_G \mu(C_G(x))d\mu(x)\\
&= \int_{Z(G)}\mu(C_G(x))d\mu(x) + \int_{G-Z(G)}\mu(C_G(x))d\mu(x)\\
&\leq \mu(Z(G)) + \frac{1}{2}\mu(G-Z(G))\\
&= \mu(Z(G)) + \frac{\mu(G)}{2} - \frac{\mu(Z(G))}{2}\\
&= \frac{1}{2}\mu(Z(G)) + \frac{1}{2}\leq\frac{5}{8}.
\end{aligned}$$

نامساوی آخری از $\mu(Z(G))\leq\frac{1}{4}$ به‌دست می‌آید. □

خوانندهٔ علاقه‌مند به مطالعه دربارهٔ این احتمال می‌تواند به [۱، ۲، ۳] مراجعه کند.

اکنون به حالت گروه‌های متناهی برمی‌گردیم. با استفاده از $Pr(G)$ می‌توان آبلی بودن، پوچ‌توان بودن، حل‌پذیر یا اَبَرحل‌پذیر بودنِ گروه G را تعیین کرد. بر پایهٔ قضیهٔ ۲.۲، اگر $Pr(G) > \frac{5}{8}$، آنگاه G آبلی است. در [۴۲] ثابت شده است که اگر $Pr(G) > \frac{1}{2}$، آنگاه G پوچ‌توان است. همچنین در [۳۱] ثابت شده است که اگر $Pr(G) > \frac{5}{16}$، آنگاه G اَبَرحل‌پذیر است. دیکسون در سال ۱۹۷۳ نشان داد که برای همهٔ گروه‌های سادهٔ ناآبلی G داریم $Pr(G) \leq \frac{1}{12}$ و $Pr(A_5) = \frac{1}{12}$ (بر اساس [۲۸] ، ظاهراً برهان این نتیجه در مجله‌ای چاپ نشده است). ولی در سال ۲۰۰۶، قضیهٔ دیکسون در [۲۸] تعمیم داده شده است و گروه‌های G با $Pr(G) > \frac{3}{40}$ را مشخص شده‌اند. افراد دیگری هم با استفاده از درجهٔ جابه‌جایی به شناسایی گروه‌ها پرداخته‌اند که در اینجا مجال پرداختن به آنها نیست. این بخش را با معرفی برخی از مهم‌ترین احتمال‌های تعریف‌شده روی گروه‌های متناهی پایان می‌دهیم.

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. احتمال اینکه برای دو عضوِ به‌تصادف انتخاب‌شده مانند x و y از G، زیرگروه تولیدشده توسط $\{x, y\}$ برابر با G باشد با رابطهٔ

$$P(G) = \frac{|\{(x, y) \in G \times G : \langle x, y \rangle = G\}|}{|G|^2}.$$

تعریف می‌شود. در سال ۱۸۹۲، نتو [۳۹] حدس زد که اگر A_n زیرگروه تناوبیِ S_n باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1$. در واقع، برای nهای به اندازهٔ کافی بزرگ، تقریباً همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضویِ A_n، کل گروه S_n را تولید می‌کنند. در سال ۱۹۶۹، حدس نتو را دیکسون ثابت کرد [۹]. به‌علاوه او ادعا کرد که حدس بالا برای همهٔ گروه‌های ساده معتبر است. این حدس در [۳۲، ۳۶] تأیید شده است.

در سال ۲۰۰۸ در [۴۰] احتمال زیر برای گروه G و عضو $g \in G$ تعریف شده است

$$Pr_g(G) = \frac{|\{(x, y) \in G \times G : [x, y] = g\}|}{|G|^2}.$$

روشن است که اگر $g = 1$، آنگاه $Pr_g(G) = Pr(G)$. بنابراین $Pr_g(G)$ تعمیمی از $Pr(G)$ است. حتی تعمیم‌های دیگری از $Pr_g(G)$ نیز وجود دارند که خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند در [۱۰] آنها را بیابد.

فرض کنیم $\mathcal{P}$ یک ویژگی نظریهٔ گروهی و G یک گروه متناهی باشد. می‌توان احتمال زیر را

روی G تعریف کرد، که تعمیمی از $Pr(G)$ است،

$$Pr_{\mathcal{P}}(G) = \frac{|\{(x,y) \in G \times G : \langle x,y\rangle \in \mathcal{P}\}|}{|G|^{2}}.$$

در واقع، اگر $\mathcal{P}$ ویژگی آبلی بودن باشد، آنگاه $Pr_{\mathcal{P}}(G) = Pr(G)$. اگر $\mathcal{P}$ ویژگی پوچ‌توانی یا حل‌پذیری باشد، آنگاه $Pr_{\mathcal{P}}(G)$ را به‌ترتیب با $Pr_{\mathcal{N}}(G)$ و $Pr_{\mathcal{S}}(G)$ نشان می‌دهیم. در [۲۹] ثابت شده است که اگر $Pr_{\mathcal{N}}(G) > \frac{1}{2}$، آنگاه G پوچ‌توان و اگر $Pr_{\mathcal{S}}(G) > \frac{11}{30}$، آنگاه G حل‌پذیر است.

در سال ۲۰۰۷، در [۲۰] احتمال (درجهٔ) جابه‌جایی به‌صورت زیر تعمیم داده شده است: برای هر زیرگروه H از G، درجهٔ جابه‌جایی نسبیِ G نسبت به H عبارت است از

$$d(H,G) = \frac{|\{(h,g) \in H \times G : hg = gh\}|}{|G||H|}.$$

روشن است که $d(G,G) = Pr(G)$ و $d(H,G) = 1$ اگر و تنها اگر $H \leq Z(G)$. بنابر قضیهٔ ۳.۳ در [۲۰] داریم $Pr(G) \leq d(H,G) \leq Pr(H)$. خوانندهٔ علاقه‌مند به مطالعه دربارهٔ این احتمال، می‌تواند [۵، ۲۱، ۲۴، ۲۵] و یک تعمیم از آن را در [۲۰] بخواند.

فرض کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی و A_G گروه خودریختی‌های G باشد. در [۴۶] احتمال زیر روی G تعریف شده است:

$$P_{A_G}(G) = \frac{|\{(\alpha,g) \in A_G \times G : \alpha(g) = g\}|}{|G||A_G|}.$$

نشان داده شده است که $P_{A_G}(G) = \frac{k}{|G|}$ که در آن، k تعداد مدارهای عمل طبیعی A_G روی G است؛ همچنین $P_{A_G}(G) = 1$ اگر و تنها اگر $G \cong \mathbb{Z}_2$. به‌علاوه، اگر $|G| > 2$، آنگاه $P_{A_G}(G) \leq \frac{3}{4}$ و $P_{A_G}(\mathbb{Z}_4) = \frac{3}{4}$. تعمیمی از این احتمال در [۳۸] آمده است.

چنان‌که می‌بینید، در همهٔ تعریف‌های احتمال روی یک گروه متناهی، صورت کسْرْ عدد اصلی یک مجموعه از زوج‌های مرتب است که در یک ویژگی معیّن صدق می‌کنند و لذا این سؤال پیش می‌آید که آیا می‌توان احتمالی روی یک گروه متناهی تعریف کرد که صورت آن، عدد اصلی یک مجموعه از nتایی‌های مرتب باشد که در یک ویژگی معیّن صدق می‌کنند. جواب این سؤال مثبت است و علاقه‌مندان می‌توانند مراجع [۴، ۴۱] را مطالعه کنند. توجه کنید که در سال‌های اخیر استفاده از احتمال در ساختارهای جبری گوناگون مورد توجه قرار گرفته است.

۳ انواع احتمال روی حلقه‌های متناهی

در این بخش، به معرفی دوتا از مهم‌ترین احتمال‌هایی که روی حلقه‌ها تعریف شده است می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم R یک حلقهٔ متناهی باشد. احتمال جابه‌جا شدنِ دو عضو که به‌تصادف از R انتخاب شده باشند، عبارت است از

$$Pr(R) := \frac{|\{(r,s) \in R \times R : rs = sr\}|}{|R|^{۲}}.$$

عدد $Pr(R)$ را درجهٔ جابه‌جاییِ R یا احتمال جابه‌جایی در حلقهٔ R می‌خوانیم.

در [۶، ۷] درجهٔ جابه‌جایی برای یک حلقهٔ متناهی که توسط مک‌هِیل در [۳۷] معرفی شده بود، مطالعه و در سال ۲۰۱۸، تعمیمی از آن در [۱۲] بررسی شده است.

به منظور تعریف احتمال روی ساختارهای جبری گروه و حلقه، در [۲۲] درجهٔ پوچی برای حلقه‌های جابه‌جاییِ متناهی تعریف و در [۲۳] مطالعهٔ آن ادامه یافته است. این کمیّت برای یک حلقهٔ جابه‌جاییِ متناهی مانند R با

$$zp(R) = \frac{|\{\ (x,y) \in R \times R : xy = ۰\}|}{|R|^{۲}}.$$

تعریف می‌شود. درجهٔ پوچیْ احتمال صفر شدنِ حاصل‌ضرب دو عضو از R را اندازه‌گیری می‌کند. برای مثال، اگر $R = \mathbb{Z}_{۲}$، آنگاه

$$zp(\mathbb{Z}_{۲}) = \frac{|\{\ (x,y) \in \mathbb{Z}_{۲} \times \mathbb{Z}_{۲} : xy = ۰\}|}{|\mathbb{Z}_{۲}|^{۲}} = \frac{۳}{۴}.$$

در ادامه نتایجی دربارهٔ درجهٔ پوچی بیان می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که حلقهٔ بدیهی حلقه‌ای است که در آن حاصل‌ضرب هر دو عضو برابر صفر است. همچنین اگر R حلقهٔ جابه‌جایی باشد منظور از $\mathrm{Ann}_R(x)$ مجموعهٔ همهٔ $y \in R$هایی است که $xy = ۰$.

لم ۲.۳ ([۲۲]، لم ۲.۱). اگر R یک حلقهٔ جابه‌جایی متناهی باشد، آنگاه

$$zp(R) = \frac{\Sigma_{x \in R}|\mathrm{Ann}_R(x)|}{|R|^{۲}} = \frac{۲|R| - |Z(R)| + \Sigma_{x \notin Z(R)}|\mathrm{Ann}_R(x)|}{|R|^{۲}}.$$

قضیه ۳.۳. گیریم R یک حلقهٔ جابه‌جایی متناهی باشد. در این صورت، $zp(R) > \frac{۳}{۴}$ اگر و تنها اگر R بدیهی باشد. پس در این حالت $zp(R) = ۱$.

قضیه ۴.۳ ([۲۲]، قضیهٔ ۵.۳). اگر R یک حلقهٔ جابه‌جایی متناهیِ یکدار با دست‌کم دو عضو باشد، آنگاه $zp(R) \leq \frac{۳}{۴}$ و نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود اگر و تنها اگر $R \cong \mathbb{Z}_۲$.

با توجه به قضیهٔ زیر، اغلب محاسبهٔ درجهٔ پوچی یک حلقهٔ جابه‌جایی متناهی، به محاسبهٔ درجهٔ پوچی حلقه‌های موضعی، یعنی حلقه‌هایی که فقط یک ایده‌آل ماکسیمال دارند، منتهی می‌شود.

قضیه ۵.۳ ([۲۲]، لم ۲.۴). اگر $R_۱$ و $R_۲$ حلقه‌های جابه‌جاییِ متناهی باشند، آنگاه

$$zp(R_۱ \times R_۲) = zp(R_۱)zp(R_۲).$$

فرض کنیم Rیک حلقهٔ جابه‌جاییِ یکدار با دست‌کم دو عضو و M یک Rـ مدول یکانی باشند. جمع مستقیم Rـ مدول‌های R و M یعنی $R \oplus M$ را با $R * M$ نشان می‌دهیم. عمل ضربی روی $R * M$ به‌صورت

$$(a, x)(b, y) = (ab, ay + bx)$$

به‌ازای هر (a, x) و (b, y) متعلق به $R * M$ تعریف می‌شود. با این تعریف، $R * M$ یک حلقهٔ جابه‌جایی یکدار می‌شود که توسیعی طبیعی از حلقهٔ R است و لذا آن را توسیع بدیهی از R به‌وسیله M می‌گویند.

یادآوری می‌کنیم که به‌ازای هر عدد اول p و هر عدد طبیعی n، منظور از $\mathbb{F}_{p^n}$ میدانی از مرتبهٔ p^n است. به‌علاوه برای $n \geq ۲$، $\mathbb{Z}_n$ حلقهٔ باقیمانده‌های به‌پیمانهٔ n و $(M)^n$ عبارت است از nبار حاصل‌ضرب دکارتی M در خودش.

قضیه ۶.۳ ([۲۲]، قضیهٔ ۴.۵). فرض کنیم R یک حلقهٔ جابه‌جایی متناهیِ یکدار با دست‌کم دو عضو باشد به‌طوری که $zp(R) \geq \frac{۳}{۸}$. در این صورت، R با یکی از حلقه‌های زیر یکریخت است:

$$\mathbb{Z}_۲, \quad \mathbb{Z}_۳, \quad \mathbb{F}_۴, \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲, \quad \mathbb{Z}_۴, \quad \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۳,$$
$$\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲, \quad \mathbb{Z}_۲ * \mathbb{Z}_۲, \quad \mathbb{Z}_۲ * (\mathbb{Z}_۲)^۲, \quad \mathbb{Z}_۲ \times (\mathbb{Z}_۲ * \mathbb{Z}_۲).$$

نتیجه ۷.۳ (۱) ([۲۲]، نتیجهٔ ۴.۶) فرض کنیم R یک حلقهٔ جابه‌جایی متناهیِ یکدار با دست‌کم دو عضو باشد به‌طوری که $zp(R) \geq \frac{۱}{۲}$. در این صورت، R با یکی از حلقه‌های زیر یکریخت است:

$$\mathbb{Z}_۲, \quad \mathbb{Z}_۳, \quad \mathbb{Z}_۴, \quad \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲, \quad \mathbb{Z}_۲ * \mathbb{Z}_۲.$$

(۲) ([۲۲]، نتیجهٔ ۴.۷) فرض کنیم R یک حلقهٔ جابه‌جایی متناهیِ یکدار با دست‌کم دو عضو باشد به‌طوری که $zp(R) \geq \frac{۹}{۱۶}$. در این صورت، R موضعی است.

قضیه ۸.۳ ([۲۲]، قضیهٔ ۵.۳). فرض کنیم R یک حلقهٔ جابه‌جایی متناهیِ یکدار با دست‌کم دو عضو باشد به‌طوری که $\mathfrak{m}$، تنها ایده‌آل ماکسیمال R، اصلی است. اگر به‌ازای یک عدد صحیح نامنفی k داشته باشیم $\mathfrak{m}^k \neq ۰$ و $\mathfrak{m}^{k+۱} = ۰$، آنگاه

$$zp(R) = \frac{k+۲}{(|\frac{R}{\mathfrak{m}}|)^{k+۱}} - \frac{k+۱}{(|\frac{R}{\mathfrak{m}}|)^{k+۲}}.$$

مقاله را با ذکر نتیجهٔ زیر به پایان می‌بریم.

قضیه ۹.۳ ([۲۳]، قضیهٔ ۱.۲). فرض کنیم R یک حلقهٔ جابه‌جایی متناهیِ یکدار با دست‌کم دو عضو باشد به‌طوری که $zp(R) \geq \frac{۱}{۴}$. در این صورت، R بایکی از حلقه‌های زیر یکریخت است:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Z}_۲ * (\mathbb{Z}_۲)^{\alpha-۱} \quad (\alpha \geq ۱), \quad \mathbb{Z}_۴ * (\mathbb{Z}_۲)^{\alpha-۲} \quad (\alpha \geq ۲),\\
&\mathbb{Z}_۸, \frac{\mathbb{Z}_۴[x]}{(x^۲, ۲x)}, \frac{\mathbb{Z}_۲[x]}{(x^۳)}, \mathbb{F}_۴, \frac{\mathbb{Z}_۴[x,y]}{(x^۳, xy, y^۲)}, \frac{\mathbb{Z}_۸[x]}{(x^۲, ۲x)},\\
&\frac{\mathbb{Z}_۴[x,y]}{(x^۳, ۲x^۲, ۲x)}, \frac{\mathbb{Z}_۴[x,y]}{(x^۲-۲, xy, y^۲, ۲x, ۲y)}, \mathbb{Z}_۳, \mathbb{Z}_۵, \mathbb{Z}_۷, \ \mathbb{Z}_۵ \times \mathbb{Z}_۲,\\
&\mathbb{F}_۴ \times \mathbb{Z}_۲, \ \mathbb{Z}_۳ \times \mathbb{Z}_۳, \ \mathbb{Z}_۳ \times \mathbb{Z}_۲, \ \mathbb{Z}_۳ \times (\mathbb{Z}_۲ * \mathbb{Z}_۲), \ \mathbb{Z}_۳ \times \mathbb{Z}_۴, \ \mathbb{Z}_۳ \times (\mathbb{Z}_۲)^۳,\\
&\mathbb{Z}_۲ \times (\mathbb{Z}_۲ * (\mathbb{Z}_۲)^۲), \ \mathbb{Z}_۲ \times (\mathbb{Z}_۴ * \mathbb{Z}_۲), \ (\mathbb{Z}_۲ * \mathbb{Z}_۲) \times (\mathbb{Z}_۲ * \mathbb{Z}_۲), \ \mathbb{Z}_۴ \times \mathbb{Z}_۴,\\
&(\mathbb{Z}_۲ * \mathbb{Z}_۲) \times \mathbb{Z}_۴, (\mathbb{Z}_۲ * \mathbb{Z}_۲) \times \mathbb{Z}_۲, \mathbb{Z}_۴ \times \mathbb{Z}_۲, \ (\mathbb{Z}_۲ * \mathbb{Z}_۲) \times (\mathbb{Z}_۲)^۲, \mathbb{Z}_۴ \times (\mathbb{Z}_۲)^۲,\\
&(\mathbb{Z}_۲)^۲, (\mathbb{Z}_۲)^۳, \ (\mathbb{Z}_۲)^۴.
\end{aligned}$$

در پایان، بد نیست اشاره کنیم که در سال ۲۰۲۲ درجهٔ پوچی (احتمال صفر شدنِ حاصل‌ضرب دو عضو) در حلقه‌های ناجابه‌جایی در [۱۱] و [۴۷] بررسی شده است. همچنین در سال ۲۰۲۵ احتمال صفر شدنِ حاصل‌ضرب سه عضو از حلقه‌های جابه‌جایی در [۴۵] مورد مطالعه قرار گرفته است.

مراجع

[۱] ذاکری، سعید، احتمال جابه‌جاشدن دو عنصر یک گروه چقدر است؟، جنگ ریاضی دانشجو، ۷ (۱۳۷۰)، ۱۲۹-۱۳۶.

[2] Abdollahi, A., Soleimani Malekan, M., Commuting probability of compact groups, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **105** (2022), no. 1, 87-91.

[3] Abdollahi, A., Soleimani Malekan, M., Compact groups with a set of positive Haar measure satisfying a nilpotent law, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **173** (2022), no. 2, 329-332.

[4] Alghamdi, A. M. A., Russo, F. G., A generalization of the probability that the commutator of two group elements is equal to a given element, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **38** (2012), no. 4, 973-986.

[5] Barzegar, R., Erfanian, A., Farrokhim M., Finite groups with three relative commutativity degrees, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **39** (2013), no. 2, 271-280.

[6] Buckley, S. M., Machale, D., Contrasting the commuting probabilities of groups and rings (preprint).

[7] Buckley, S. M., Machale, D., Shé, Á. N., Finite rings with many commuting pairs of elements (preprint).

[8] Buckley, S. M., Machale, D., Commuting probability for subrings and quotient rings, *J. Algebra Comb. Discrete Struct. Appl.*, **4** (2017), no.2, 189-196.

[9] Dixon, J. D., The probability of generating the symmetric group, *Math. Z.*, **110** (1969), 199-205.

[10] Das, A. K., Nath, R. K., A generalization of commutative degree of finite groups, *Comm. Algebra*, **40** (2012), 1974-1981.

[11] Dolzan, D., The probability of zero multiplication in finite rings, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **106** (2022), 83-88.

[12] Dutta P., Nath, R. K., A generalization of commuting probability of finite rings, *Asian-Eur. J. Math.*, **11**(1) (2018), 1850023.

[13] Erdös, P., Turán, P., On some problems of a statistical group-theory I, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, **4** (1965), 175-186.

[14] Erdös, P., Turán, P., On some problems of a statistical group-theory II, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **18** (1967) 151-163.

[15] Erdös, P., Turán, P., On some problems of a statistical group-theory III, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **18** (1967), 309-320.

[16] Erdös, P., Turán, P., On some problems of a statistical group-theory IV, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **19** (1968), 413-435.

[17] Erdös, P., Turán, P., On some problems of a statistical group-theory V, *Period. Math. Hungar.*, **1** (1971), no. 1, 5-13.

[18] Erdös, P., Turán, P., On some problems of a statistical group-theory VI, *J. Indian Math. Soc.*, 34 (1970), no. 3-4, 175-192.

[19] Erdös, P., Turán, P., On some problems of a statistical group-theory VII, *Period. Math. Hungar.*, **2** (1972), 149-163.

[20] Erfanian, A., Rezaei, R., Lescot, P., On the relative commutativity degree of a subgroup of a finite group, *Comm. Algebra*, **35** (2007), no. 12, 4183-4197.

[21] Erfanian, A., M. Farrokhi, M., Finite groups with four relative commutativity degrees, *Algebra Colloq.*, **22** (2015), no. 3, 449-458.

[22] Esmkhani, M. A., Jafarian Amiri, S. M., The probability that the multiplication of two ring elements is zero, *J. Algebra Appl.*, **17** (2018), no. 3, 1850054.

[23] Esmkhani, M. A., Jafarian Amiri, S. M., Characterization of rings with nullity degree at least $\frac{1}{4}$, *J. Algebra Appl.*, **18** (2019), no. 4, 1950076.

[24] Farrokhi, M., Safa, H., Subgroups with large relative commutativity degree, *Quaest. Math.*, **40** (2017), no. 7, 973-979.

[25] Farrokhi M., Finite groups with five relative commutativity degrees, *Results Math.*, **77** (2022), article no. 56.

[26] Halmos, P., *Measure Theory*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1950.

[27] Hegarty, P. V., Limit points in the range of the commuting probability function on finite groups, *J. Group Theory*, **16** (2013), no. 2, 235-247.
[28] Guralnick, R. M., Robinson, G. R., On the commuting probability in finite groups, *J. Algebra*, **300** (2006), 509-528.
[29] Guralnick, R. M., Wilson, J. S., The probability of generating a finite soluble group, *Proc. London Math. Soc.*, **81** (1999), no. 2, 405-427.
[30] Gustafson, W. H., What is the probability that two group elements commute?, *Amer. Math. Monthly*, **80** (1973), 1031–1034.
[31] Lescot, P., Nguyen, H. N., Yang, Y., On the commuting probability and supersolvability of finite groups, *Monatsh. Math.*, **174** (2014), 567-576.
[32] Liebeck, W. M., Shalev, A., The probability of generating a finite simple group, *Geom. Dedicata*, **56** (1995), 103-–113.
[33] Jafarian Amiri, S. M., Madadi, H., Rostami, H., On the probability of generating nilpotent subgroups in a finite group, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **93** (2016), no. 3, 447-453.
[34] Joseph, K. S., Commutativity in non-Abelian groups, Ph.D. thesis, UCLA, 1969.
[35] Joseph, K. S., Several conjectures on commutativity in algebraic structures, *Amer. Math. Monthly*, **84** (1977), 550-551.
[36] Kantor W. M., Lubotzky, A., The probability of generating a finite classical group, *Geom. Dedicata*, **36** (1990), 67-87.
[37] MacHale, D., Commutativity in finite rings, *Amer. Math. Monthly*, **83**, (1976) 30-32.
[38] Moghaddam, M. R. R., Saeedi, F., Khamseh, E., The probability of an automorphism fixing a subgroup element of a finite group, *Asian-Eur. J. Math.*, **4** (2011), no. 2, 301-308
[39] Netto, E., *The Theory of Substitutions and Its Applications to Algebra*, 2nd ed., Chelsea Publishing Co., New York, 1964.
[40] Pournaki, M. R., Sobhani, R., Probability that the commutator of two group elements is equal to a given element, *J. Pure Appl. Algebra*, **212** (2008), no. 4, 727-734.
[41] Rezaei, R., Niroomand, P., Erfanian, A., On the multiple exterior degree of finite groups, *Math. Slovaca*, **64** (2014), no. 4, 859-870
[42] Rusin, D., What is the probability that two elements of a finite group commute, *Pacific. J. Math.*, **82** (1979), no. 1, 237-247.
[43] Salih, H. M., The probability of zero multiplication in finite group algebras, *Int. J. Group Theory*, **13** (2024), no. 2, 189-194.
[44] Salih, H. M., On the probability of zero divisor elements in group rings, *Int. J. Group Theory*, **11** (2022), no. 4, 253-257.
[45] Sarma, D., Subedi, T., The probability that the product of three elements in a finite ring is zero, *J. Algebra Appl.*, (2025), 2550349.
[46] Sherman, G. J., What is the probability an automorphism fixes a group element?, *Amer. Math. Monthly*, **82** (1975), 261-264.
[47] Shumyatsky, P., Vannacci, M., Commuting and product-zero probability in finite rings, *Internat. J. Algebra Comput.*, **34** (2024), no. 2, 201-206.

محمدعلی اسم‌خانی: دانشگاه زنجان، گروه ریاضی
رایانامه: esmkhani@znu.ac.ir
سید مجید جعفریان امیری: دانشگاه زنجان، گروه ریاضی
رایانامه: sm_jafarian@znu.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 44, Number 1, Spring/Summer 2025, Pages 165–176
doi: 10.30504/mct.2025.1499.2051

On the Probability on Groups and Rings

M. A. Esmkhani[1], S. M. Jafarian Amiri[2]✉

[1,2]Department of Mathematics, University of Zanjan, Iran

Abstract. In this paper, we explore certain probabilistic concepts introduced by mathematicians in the context of groups and rings in recent years. We provide a comprehensive review of the most significant results obtained in these areas. In particular, we highlight key findings by the present authors concerning the probability that the product of two elements is zero in a finite commutative ring.

Keywords: finite group, finite commutative ring, commuting probability, nullity probability
Article history: Received 25 September 2024; Accepted 16 February 2025
Article type: review

---

1. esmkhani@znu.ac.ir
2. sm_jafarian@znu.ac.ir