فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۴۴، شمارهٔ ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۴)، صص ۲۱۱ تا ۲۳۶

نگاه دانشوران کهن به مسئلهٔ دقت در محاسبه و اندازه‌گیری

یونس کرامتی

چکیده. در طول تاریخ، پیشرفت الگوریتم‌های محاسباتی، افزایش دقت در محاسبه، و پیشرفت فنّاوری افزایش دقت در اندازه‌گیری را در پی داشته است. نوشتهٔ حاضر به‌جای پرداختن به این روند، بر آن است تا با یادکردِ دو نمونهٔ درخورِ درنگ، تصویری هرچند نه‌چندان روشن از نگاه دانشوران پیشین به مقولهٔ دقت عرضه کند. نگاه غیاث‌الدین جمشید کاشانی به «دقت» به‌تمامی کاربردی است. به نظر او بیشینهٔ «دقت مورد نیاز» در محاسبهٔ عدد π آن است که بتوان با آن محیط بزرگ‌ترین دایرهٔ گنجنده در کیهان فیزیکی را با خطایی کمتر از کوچک‌ترین واحد اندازه‌گیری طول به‌دست آورد و دقت در همهٔ محاسبات با توجه با همین هدف تنظیم شده است. بیرونی، تنها برای بررسی فرامتن روایت‌های گوناگون موجود از نتیجهٔ اندازه‌گیری طول یک درجه از کمان نصف‌النهار در روزگار مأمون عباسی، روشی تخمینی بر پایهٔ اندازه‌گیری و محاسبه در پیش گرفته و با دستیابی به مقداری نزدیک به کمترین مقدار یادشده در روایت‌های مختلف، مطمئن شده است که این اعداد نمی‌تواند چندان دور از واقع باشد. این تلاش را، به‌رغم دستیابی به دقتی شگفت، نمی‌توان اندازه‌گیری دقیق شعاع کرهٔ زمین انگاشت؛ زیرا خودِ بیرونی با آگاهی از محدودیت‌ها و خطاهای بی‌تردیدِ آن، سرانجام به همان نتیجهٔ پیشین اعتماد کرده است.

۱ مقدمه

دستیابی به تقریبی مناسب برای نسبت محیط دایره به قطر (یا همان عدد π) و اندازه‌گیری/تخمین شعاع کرهٔ زمین، از کهن‌ترین دغدغه‌های دانشورانِ پیشین، به‌ویژه ریاضی‌دانان، اخترشناسان و جغرافی‌دانان به شمار می‌آمده است. چنان‌که خواهیم گفت، سابقهٔ عرضهٔ پاسخ‌هایی شایان درنگ برای این دو مسئله دست‌کم به سدهٔ سوم پیش از میلاد باز می‌گردد و ناگفته پیداست سابقهٔ پرداختن دانشورانِ دوران باستان به این دو مسئله، به‌ویژه مسئلهٔ نسبت محیط دایره به قطر آن، بسیار بیش

عبارات و کلمات کلیدی: ابوریحان بیرونی، غیاث‌الدین جمشید کاشانی، عدد π، شعاع زمین، رسالهٔ محیطیه
نوع مقاله: پژوهشی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱/۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۲/۲۲

doi: 10.30504/mct.2025.1545.2085

از این است. دربارهٔ نسبت محیط به شعاع، برای نمونه، بابلی‌ها و مصری‌ها در آغاز هزارهٔ دوم پیش از میلاد به تقریب‌های ۳٫۱۲۵ و ۳٫۱۶۰۵ برای عدد π دست یافته بودند و از میان یونانیان نیز بقراط خیوسی[1] (حوالی ۴۴۰ پیش از میلاد) و آناکساگوراس[2] (حوالی ۴۳۴ پیش از میلاد) به مسئلهٔ «تربیع دایره»،[3] یعنی ترسیم مربعی با مساحتی برابر با مساحتی برابر مساحت دایره‌ای معلوم پرداختند که هم‌ارز ترسیم پاره‌خطی به طول $\sqrt{\pi}$ و طبعاً نیازمند ترسیم پاره‌خطی با طول π است. بقراط خیوسی حتی کوشید تا با پیش کشیدنِ مسئلهٔ تربیع هلال،[4] که به نام او به «هلال بقراط»[5] مشهور شد، راهی برای تربیع دایره بیابد که البته این تلاش‌ها، با توجه به این که عدد π گنگ متعالی است، بی‌سرانجام بود [۲۵، ص ۱۲–۴۰].

اما اندازه‌گیری شعاع زمین، مسئلهٔ ریاضی صِرف نبود و در آن به رصد خورشید یا ستارگان ثابت و پیمایش/تخمین فاصلهٔ میان دو نقطه حاجت می‌افتاد. در منابع یونانی دربارهٔ حاصل کار اراتستن[6] و پوزیدونیوس[7] اختلاف‌هایی گاه چشمگیر دیده می‌شود، اما در دورهٔ اسلامی افزون بر اختلاف در اعداد و ارقام، مشکلی مهم‌تر که عبارت بود از اندازهٔ واحد به‌کار رفته به میان آمد که البته بر مسلمانان معلوم نبود. سرانجام ــ چنان‌که گویند ــ دانشورانِ روزگار مأمون بر آن شدند تا با پیمودن یک درجه از نصف‌النهار، محیط کرهٔ زمین را بیابند؛ اما دشواریِ کار چنان بود که شماری از پژوهشگران معاصر، روایت‌های مربوط به این سنجش را آمیخته به افسانه انگاشته‌اند [۱۷، ص ۱۵۲–۱۵۳].

در مقالهٔ حاضر دربارهٔ روشی تقریبی اما بی‌نیاز از پیمایش فاصله‌ها بحث خواهد شد که به گزارش ابوریحان پیش‌تر در روزگار مأمون عباسی به کار رفته بود و ابوریحان در هند بار دیگر آن را به‌کار بست [۱۷، ص ۱۵۳–۱۵۴].

در پایان این بخش، نکته‌ای دربارهٔ شیوهٔ نمایش اعداد شایستهٔ یادآوری است. در روزگار باستان، اعداد در دو دستگاه شمار دارای ارزش مکانی نوشته می‌شد: یکی در پایهٔ ۶۰ که دستاورد بابلی‌ها بود و امروزه بدان «دستگاه شصتگانی» گفته می‌شود و دیگری دستگاه شمار در پایهٔ ۱۰ که دستاورد هندی‌ها بود و همان است که امروزه نیز به کار می‌رود و آن را «دستگاه دهدهی» می‌نامند. نکتهٔ شایان درنگ این است که هندی‌ها برای نگارش کسرها از دستگاه شمار ابداعیِ خود بهره نمی‌بردند. به سخن دیگر، دستگاه شمار دهدهی به‌صورت اولیهٔ خود، راهی برای نگارش کسرها نداشت و ریاضی‌دانان

1. Hippocrates of Chios (ca. 470-ca. 421 BC) 2. Anaxagoras (ca. 500- ca. 428 BC) 3. squaring the circle 4. squaring the lune 5. lune of Hippocrates 6. Eratosthenes (ca. 276-c. 195 BC) 7. Posidonius (ca. 135-c. 51 BC)

به‌ناچار در محاسبات کسری، کسرهای متعارفی یا کسرهای شصتگانی را به کار می‌بُردند. کسرهای دهدهی قرن‌ها پس از ابداع دستگاه شمار دهگانی و به‌همّت ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی ابداع و به‌کار گرفته شد. تا جایی که اطلاع داریم، سموئل بن یحیی مغربی در سدهٔ ۶ق/۱۱م این کسرها را اختراع کرد و کاشانی در اوائل ۹ق/۱۵م بار دیگر این کسرها را به‌کار گرفت و در رواج آنها کوشید. در نتیجه طبیعی است که همهٔ محاسبات بیرونی (در سدهٔ ۵ق/۱۱م) در دستگاه شمار شصتگانی باشد. کاشانی نیز همهٔ محاسبات خود را در رسالهٔ محیطیه در دستگاه شمار شصتگانی انجام داده و تنها نتایج پایانی را با کسرهای دهدهی نیز نمایش داده است. در دستگاه شصتگانی، هر عدد را به‌صورت

$$a_k, a_{k-۱}, \dots, a_۰; a_{-۱}, a_{-۲}, \dots, a_{-j} = \sum_{i=-j}^{k} a_i ۶۰^i$$

نمایش می‌دهند که در آن ارقام a_i از «۰۰» تا «۵۹» است (برای آگاهی از شیوهٔ نگارش ارقام اعداد شصتگانی در متون کهن، به پیوست مقاله رجوع کنید).

همچنین بیشتر اعداد شصتگانی در این مقاله، یک‌شصتم اعداد در منابع اصلی است، زیرا تقریباً در همهٔ آثار کهن، شعاع دایره ۶۰ واحد گرفته می‌شد. در نتیجه مقدارهای توابع مثلثاتیِ کهن، مانند جیب و جیب تمام، ۶۰ برابرِ توابع مشابه امروزی (به‌ترتیب سینوس و کسینوس) می‌شد.

۲ نسبت محیط دایره به قطر (π)

ریاضی‌دانان با توجه به این نکته که محیط دایره از محیط هر چندضلعی محاط در آن (C_i) بزرگ‌تر و از محیط هر چندضلعی محیط بر آن (C_c) کوچک‌تر است؛ برای به دست آوردن تقریبی برای این نسبت، محیط دو Nضلعی منتظم متشابه محاط در و محیط بر دایره را با محاسبهٔ هر ضلع و ضرب آن در N حساب می‌کردند و نسبت آنها به قطر دایره را کران پایین و بالای π، و میانگین این دو کران را مقدار تقریبی π می‌گرفتند:

$$C_i = N \times \mathrm{cord}\big(\frac{۳۶۰}{N}\big) = N \times ۲R \times \sin\big(\frac{۱۸۰}{N}\big), \quad C_c = N \times ۲R \times \tan\big(\frac{۱۸۰}{N}\big)$$

$$C_i < C < C_c, \qquad \frac{C_i}{۲R} < \pi < \frac{C_c}{۲R}, \qquad \pi \approx \frac{C_i + C_n}{۴R}.$$

پیداست که هرچه N بزرگ‌تر باشد، «محیط این دو چندضلعی»/«کران‌های بالا و پایین» به هم نزدیک‌تر و تقریب حاصل از میانگین آنها دقیق‌تر خواهد شد. اما با بزرگ‌تر شدن N زاویهٔ مرکزی روبروی آن کوچک‌تر و در نتیجه اندازه‌گیریِ وتر و سینوس نصف آن زاویه نیز نیازمند انجام محاسبات

دقیق خواهد شد. پس در این روش، مسئلهٔ دستیابی به تقریبی شایسته برای π عملاً به مسئلهٔ دستیابی به تقریبی شایسته برای سینوس یک زاویهٔ بسیار خُرد تبدیل می‌شود.

شمار ضلع‌های چندضلعی‌های منتظم بیشتر بر اساس یکی از دو الگوی زیر انتخاب می‌شد:

۱) به صورت مضربی از ۱۸۰: مانند ۱۸۰ ضلعی ابوریحان بیرونی (۳۶۲–۴۴۳ق/۹۷۳–۱۰۵۲م؛ دربارهٔ او نک. [۲۱، ۱۴، ۲۸]) و ۷۲۰ ضلعی ابوالوفا بوزجانی (۳۲۸–۳۸۸ق/۹۴۰–۹۹۸م؛ دربارهٔ وی نک. [۲۰، ۱۸، ۲۹]).

۲) به صورت $۲^n \times ۳$: از جمله ۹۶ ضلعی ارشمیدس (۲۸۷–۲۱۲ پیش از میلاد)، ۳۸۴ ضلعی (در هند) و ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ ضلعی کاشانی (n به ترتیب برابر با ۵، ۷ و ۲۸).

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، در رسالهٔ پرآوازهٔ خود رسالهٔ محیطیه پس از یادکرد گزارشی مختصر دربارهٔ پژوهش‌های ارشمیدس، بوزجانی و بیرونی دربارهٔ π، تقریبی بسیار خوب برای آن یافته است که نزدیک به دو سده در جهان بی‌رقیب بود (نک. پس از این: بخش ۶.۲).

در این مقاله، پس از گزارشی کوتاه از نتایج ارشمیدس، بطلمیوس، و ریاضی‌دانان هندی و چینی، تقریب‌های به دست آمده توسط ابوریحان بیرونی، ابوالوفا بوزجانی، و به‌خصوص غیاث‌الدین جمشید کاشانی شرح داده شده است.

۱.۲ ارشمیدس

ارشمیدس در قضیهٔ سوم تکسیر الدائرة[1]، با استفاده از دو ۹۶ ضلعی منتظم محاطی و محیطی بازهٔ $۳\frac{۱۰}{۷۱} < \pi < ۳\frac{۱}{۷}$ را به دست آورده است.[2] بنوموسی در میانهٔ سدهٔ ۳ق/۹م یادآور شده‌اند که دربارهٔ محاسبهٔ نسبت محیط به قطر، هیچ‌چیز به دست آنان نرسیده است مگر روش ارشمیدس [۱، ص ۱۳۳]، [۳۳، ص ۱۳۲]. کاشانی با توجه به جای‌داشتنِ محیط دایره در این بازه، فاصلهٔ میان دو کران پایین و بالا، یعنی $\frac{۱}{۴۹۷}$ را برای π «مجهول» یا «مشکوک» انگاشته است.[3] پس به نظر او اگر قطر دایره‌ای ۴۹۷ «واحد» باشد محیط آن دایره به‌اندازهٔ یک «واحد» مشکوک خواهد بود. میانگین این دو کران چنین است:

$$\pi \approx ۳ + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۷} + \frac{۱۰}{۷۱}\right) \approx ۳/۱۴۱۸۵۱۱.$$

۲. صورت قضیهٔ سوم چنین است: نسبت محیط هر دایره به قطر آن کمتر از $۳\frac{۱}{۷}$ اما بیش از $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ است. ۳. البته کاشانی نیک می‌دانسته است که خطای تقریب بی‌گمان کمتر از این و نزدیک نیمی از پهنای این بازه خواهد بود.

1. Κύκλου μέτρησις /Kuklou metrēsis/Measurement of a Circle

اما باید توجه داشت که با توجه به همین دو کران، بیشینهٔ خطای ممکن ۰٫۰۰۲ خواهد بود و در عمل می‌تواند نزدیک به ۰٫۰۰۱ باشد. در نتیجه میانگین این دو کران، تنها دو رقم نخست اعشاری معتبر خواهد بود. رقم سوم با آنکه در این مورد درست به‌دست آمده[1] به تعبیر کاشانی «مشکوک» است و نمی‌توان بدان اعتماد کرد.

روش ارشمیدس کمابیش همان است که بعدها کاشانی، البته با دقتی به مراتب بیشتر، به‌کار برده است. پس می‌توان از برنامهٔ نوشته شده به زبان پایتون برای روش کاشانی (نک. برنامهٔ ۱) برای رسیدن به حاصل کار بهره برد. اما باید به یاد داشت به‌دلیل کوچک‌بودنِ $N(= ۹۶)/n(= ۵)$، در محاسبات میانی نیز به دقت بیش از ۸ رقم معنادارِ دهدهی (کمابیش معادل ۴ رقم معنادار شصتگانی) نیاز نیست؛ زیرا این افزایشِ دقت تغییری در نتیجه ندارد و «بازهٔ مشکوک» نیز از ۰٫۰۰۳۳۶۵ کمتر نخواهد شد. البته این «بازهٔ مشکوک» بیش از بازهٔ $\frac{۱}{۴۹۷}$ (= ۰٫۰۰۲۰۱۲) است که خودِ ارشمیدس از آن یاد کرده است. به عبارت دقیق‌تر، ارشمیدس با توجه به به‌کارگیریِ مقادیر تقریبی برای دو کران، بازهٔ مشکوک را کمتر از آنچه به واقع بوده، آورده است.

۲.۲ بطلمیوس

بطلمیوس تقریب $\pi = ۰۳;۰۸,۳۰$ (سه رقم معنادار شصتگانی) را به کار برده بود که با تقریب کمتر از ۰٫۰۰۰۰۱، برابر با ۳٫۱۴۱۶۷ (۶ رقم معنادار دهدهی) خواهد بود. این تقریب چه بسا برگرفته از آپولونیوس پِرگایی[2] (حدود ۲۹۰–۱۹۰ پیش از میلاد) باشد [۲۵، ص ۷۴]. زیرا اطوقیوس عسقلانی[3] (حدود ۴۸۰–۵۲۰م) در شرح تکسیر الدائرة ارشمیدس به دستیابی آپولونیوس به کران‌های پایین و بالایی نزدیک‌تر به هم، نسبت به دو کران ارشمیدسی اشاره کرده است بی‌آنکه از این کران‌ها و روشِ کار یاد کند [۳۵، ص ۱۸۹].

۳.۲ تقریب‌های هندی و چینی

هندی‌ها در حدود ۳۸۰ میلادی به تقریب ۳٫۱۴۱۶ دست یافته بودند که از تقریب بطلمیوس دقیق‌تر بود. آنها همچنین با استفاده از ۳۸۴ ضلعی‌های منتظم ($n = ۷$) به تقریب زیر دست یافتند: [۲۵، ص ۲۷–۲۶]

$$\pi \approx \frac{\sqrt{۹۸۶۹۴}}{۱۰۰} \approx ۳٫۱۴۱۵۶.$$

۱. مقدار گردشدهٔ حاصلِ کار ارشمیدس و مقدار به‌دست آمدهٔ امروزی برای π با تقریب کمتر از ۰٫۰۰۰۱ به ترتیب ۳٫۱۴۱۸ و ۳٫۱۴۱۶ است.

2. Apollonius of Perga 3. Eutocius of Ascalon

با این Nضلعی و با فرضِ در پیش گرفتنِ الگوریتم به‌کار رفته در برنامهٔ ۱، پاسخ دقیق‌تر از ۳٫۱۴۱۶۱ (تقریبی دقیق‌تر از تقریب ۳٫۱۴۱۵۶ هندی) و مقدار مشکوک نیز کمتر از ۰٫۰۰۰۲۱۰۲۷۸ نخواهد شد و البته برای رسیدن به این پاسخ، انجام محاسبات میانی با ۱۰ رقم معنادارِ دهدهی بسنده است.[۱] در چین نیز در سدهٔ ۵ میلادی به بازهٔ $۳٫۱۴۱۵۹۲۶ < \pi < ۳٫۱۴۱۵۹۲۷$ دست یافته بودند [۲۵، ص ۲۹].

۴.۲ ابوالوفا بوزجانی

به گفتهٔ کاشانی، بوزجانی با محاسبهٔ محیط ۷۲۰ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی، کران بالا و پایین ۲π را چنین به دست آورده است:

$$۶;۱۶,۵۹,۱۰,۵۹ < ۲\pi < ۶;۱۶,۵۹,۲۳,۵۴,۱۲,$$

یعنی

$$۳٫۱۴۱۵۵۳۲۰۲۱۶۰۴۹ < \pi < ۳٫۱۴۱۵۸۳۱۰۹۵۶۷۹۰.$$

پس در دایره‌ای به شعاع واحد، مقدار $۰۰;۰۰,۰۰,۱۲,۵۵,۱۲$ (۰٫۰۰۰۰۰۵۹۸۱۴۸۱۴۸) مشکوک است و این مقدار برای دایرهٔ عظیمه‌ای واقع بر کرهٔ زمین، به ۱۰۰۰ ذراع می‌رسد.[۲] کاشانی بر آن است که بوزجانی، وتر نیم‌درجه (= ضلع ۷۲۰ضلعی منتظم محاطی) را $۰;۳۱,۲۴,۵۵,۵۴,۵۵$ به دست آورده در حالی که مقدار درست آن [با همین تقریب] $۰;۳۱,۲۴,۵۶,۵۸,۳۶$ است؛ اما آنچه کاشانی با عنوان «وتر نیم‌درجه» از بوزجانی نقل کرده است، در مجسطی ابوالوفا با عنوان جیب/سینوس[۳] نیم‌درجه آمده است [۲، گ ۱۱ پ سطر ۱۰]:

$$\sin(۳۰') = ۰;۳۱,۲۴,۵۵,۵۴,۵۵.$$

کاشانی دربارهٔ مأخذ خود در انتساب مقدار نادرست به ابوالوفا چیزی نگفته است، اما فرانتس ووپکه[۴] این مأخذ ناگفته را تحریر نصیرالدین طوسی از تکسیر الدائرة ارشمیدس دانسته است [۳۶، ص ۳۰۳].

---

۱. البته هندی‌ها تقریب‌هایی با دقت کمتر را نیز به کار برده‌اند. از جمله برهمگوپته (زادهٔ ۵۹۸م) از تقریب $\pi \approx \sqrt{۱۰} = ۳٫۱۶۲۲۷۷$ بهره برده است. ۲. کاشانی محیط دایرهٔ عظیمهٔ واقع بر زمین را ۸۰۰۰ هزار فرسنگ/۲۴۰۰۰ هزار میل گرفته است (دربارهٔ این مقدار نک. پس از این: بخش ۲.۶.۲) و هر میل نیز ۴۰۰۰ ذراع است. پس محیط این دایره ۹۶۰۰۰۰۰۰ و شعاع آن نیز ۳۰۵۵۷۷۴۹ ذراع و در نتیجه مقدار مشکوک نزدیک به ۹۱۳٫۹ ذراع خواهد بود.
۳. چون ابوالوفا شعاع دایره را ۱ گرفته و نه ۶۰، تابع جیب او همان تابع سینوس امروزی می‌شود.

4. Franz Woepcke

۵.۲ ابوریحان بیرونی

بیرونی در قانون مسعودی با دو ۱۸۰ضلعی منتظم محاطی و محیطی به این نتیجه رسیده است:[1]

$$۶; ۱۶, ۵۹, ۱۰, ۴۸, ۰۰ < ۲\pi < ۶; ۱۷, ۰۱, ۵۸, ۱۹, ۰۶,$$

یعنی

$$۳٫۱۴۱۵۵۳۲۰۲۱۶۰۴۹ < \pi < ۳٫۱۴۱۵۸۳۱۰۹۵۶۷۹۰.$$

پس برای دایرهٔ عظیمه‌ای واقع بر کرهٔ زمین، مقدار مشکوک به [اندکی کمتر از] یک فرسنگ/فرسخ می‌رسد.[2] به گزارش کاشانی، بیرونی با آنکه در جدول‌های جیب/سینوس قانون مسعودی [۷، ص ۳۰۸] جیب/سینوس ۱ درجه را به‌درستی ۰; ۰۱, ۰۲, ۴۹, ۴۳ آورده، اما دو برابر آن یعنی وتر ۲ درجه (= ضلع ۱۸۰ضلعی منتظم محاطی) را به‌اشتباه ۰; ۰۲, ۰۵, ۳۹, ۴۳, ۳۶[3] محاسبه کرده است در حالی که باید ۰; ۰۲, ۰۵, ۳۹, ۲۶, ۲۲ باشد.[4]

بیرونی در محاسبهٔ محیط ۱۸۰ضلعی منتظم محیطی نیز تانژانت ۱ درجه را مقداری برابر عدد ۰; ۰۱, ۰۲, ۴۹, ۴۳, ۱۱، ذکر کرده است که در واقع سینوس ۱ درجه است؛ دو برابر آن را نیز نه ۰; ۰۲, ۰۵, ۳۹, ۲۶, ۲۲، که ۰; ۰۲, ۰۵, ۴۰, ۳۹, ۲۶, ۲۲[5] یادکرده و با ضرب این عدد در ۱۸۰، محیط ۱۸۰ضلعی محیطی را چنان که پیش‌تر یاد شد ۶; ۱۷, ۰۱, ۵۸, ۱۹, ۰۶, ۰۰[6] آورده است [۷، ص ۳۰۴]. البته ابوریحان تانژانت ۱ درجه را در جدول تانژانت‌های قانون مسعودی برابر ۰; ۰۱, ۰۲, ۵۰, ۱۷ [۷، ص ۳۴۱] گرفته است، اما در اینجا با توجه به دو برابر آن (که در ادامهٔ محاسبه به‌کار رفته است)، برابر ۰; ۰۱, ۰۲, ۵۰, ۱۹, ۴۳, ۱۱ لحاظ کرده است. یعنی بیرونی تانژانت و سینوس ۱ درجه را بیشتر و در نتیجه هر دو کران بالا و پایین را بیش از آنچه باید به دست

---

۱. کاشانی این گزارش را با بهره‌گیری از فصل‌های پنجم (محاسبهٔ نسبت میان قطر و محیط) و ششم (=جدول‌های جیب /سینوس و ظل/تانژانت) مقالهٔ سوم القانون المسعودی بیرونی فراهم آورده است. در نسخهٔ چاپیِ القانون المسعودی بسیاری از اعداد و ارقام نادرست آمده‌اند و در گزارش ابوالقاسم قربانی از این بخش نیز، به‌رغم کوشش او برای اصلاح این اشتباهات، همچنان اشکالاتی به چشم می‌خورد. در اینجا با توجه به روند محاسبات، اعداد درست یاد شده‌اند.

۲. با فرض محیط دایرهٔ عظیمه برابر با ۸۰۰۰ فرسنگ، مقدار مشکوک ۱۱۸۴۹٫۵ ذراع یعنی نزدیک به ۱۳ برابر مقدار مشکوک بوزجانی خواهد شد.

۳. در نسخهٔ چاپی قانون مسعودی با یک رقم اضافه: ۰; ۰۲, ۰۵, <u>۳۰</u>, ۳۹, ۴۳, ۳۶

۴. البته کاشانی رقم سمت راست کسر شصتگانی یعنی ۲۲ را به دو برابر جیب ۱ درجهٔ مستخرج از جدول بیرونی افزوده است تا ارقام معنادار آن با ارقام معنادار عدد نادرست بیرونی یکی شود. سینوس ۱ درجه با تقریب کمتر از سابعه (۷ رقم کسر شصتگانی) برابر با ۰; ۰۱, ۰۲, ۴۹, ۴۳, ۱۱, ۱۴, ۴۴ است.

۵. در چاپ قانون مسعودی و گزارش قربانی رقم آخر نیامده است.

۶. در چاپ قانون مسعودی رقم «۰۱» (ثانیه) افتاده و قربانی نیز «۰۶» (خامسه) را نیاورده است.

آورده است. در پایان، برای مقدار π به این تقریب رسیده است:

$$\pi \approx ۰۳; ۰۸, ۳۰, ۱۷, ۱۶, ۴۶, ۳۰ \approx ۳/۱۴۱۷۴۶۶۶۴۷۳۷۶۷.$$

اما اگر او همان مقادیر یاد شده در جدول‌های خود را به کار می‌بُرد به این بازه می‌رسید:

$$۶; ۱۶, ۵۸, ۱۸, ۰۰ < ۲\pi < ۶; ۱۷, ۰۱, ۴۲, ۰۰,$$

که از بازهٔ مشکوک یادشده در قانون مسعودی بیشتر است، اما میانگین دو کران، همان تقریب بطلمیوس است: $\pi \approx ۰۳; ۰۸, ۳۰$.

بیرونی در پایانِ محاسبات خود یادآور شده است که بخش کسریِ تقریب به دست آمده، $\pi \approx ۰۳; ۰۸, ۳۰, ۱۷, ۱۶, ۴۶, ۳۰$، از «یک‌هفتم» (کران بالای ارشمیدسی) کمتر است و سرانجام نیز به پیروی از بطلمیوس تأکید کرده است. شایان ذکر است که او در محاسبات مربوط به تخمین قطر زمین (نک. پس از این: بخش ۳) حتی همین مقدار به‌دست آمده را نیز به کار نبرده و به‌جای آن از $\pi \approx ۳\frac{۱}{۷}$ بهره برده است.

۶.۲ کاشانی

یکی از برجسته‌ترین آثار دربارهٔ π، الرسالة المحیطیة غیاث‌الدین جمشید کاشانی (درگذشته به تاریخ ۱۹ رمضان ۸۳۲ ق/۲۲ ژوئن ۱۴۲۹م) است که نگارش آن در میانهٔ شعبان ۸۲۷ ق/ژوئیهٔ ۱۴۲۴م به پایان رسیده است [۱۲]. در بر داشتنِ تقریبی بسیار خوب برای π (درست تا ۱۶ رقم اعشار و بی‌رقیب در جهان تا ۱۶۹ سال) تنها ویژگی مهم این اثر نیست، زیرا کاشانی در این اثر افزون بر پرداختن به تاریخچهٔ π،[۱] به تفصیل دربارهٔ «دقت» و از آن مهم‌تر، از «نهایت دقت مورد نیاز» (هم برای نتیجهٔ نهایی و هم برای محاسبات میانی) سخن گفته است. دربارهٔ روش کاشانی و محتوای این رساله تاکنون چند پژوهش، از جمله آثاری از پاول لوکای [۳۱]، قربانی [۱۱]، هوخندایک [۲۷]، کرامتی ([۱۶]، [۱۵، ص ۲۰۲–۲۰۳] ،[۱۹]) و جز آن [۲۴، ۲۲، ۲۳] منتشر شده است.[۲] در این مقاله، بیشتر به نکاتی اشاره خواهد شد که در پژوهش‌های یادشده دربارهٔ روش محاسباتیِ کاشانی از آنها چشم‌پوشی شده است. مهم‌ترین نکته در این بخش، نگاه کاشانی به مقولهٔ دقت است که نگارندگانِ آثار یادشده چندان که باید بدان نپرداخته‌اند.

---

۱. یعنی تقریب‌های ارشمیدس، ابوالوفا بوزجانی و ابوریحان بیرونی (نک. پیش از این). رسالهٔ کاشانی یکی از کهن‌ترین نمونه‌های این تاریخچه به شمار می‌آید. ۲. در این مقاله از ارجاع پیاپی به این آثار، مگر به ضرورت، خودداری مرده‌ایم. برای ارجاعات دقیق‌تر می‌توان به [۱۶، ۱۵، ۱۹] مراجعه کرد.

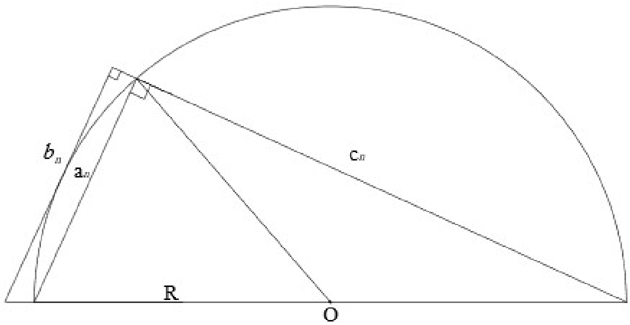
۱.۶.۲ روش محاسبه

کاشانی برای تعداد اضلاع Nضلعی‌های منتظم از الگوی ۳×۲^n بهره گرفته است. محیط Nضلعی منتظم را می‌توان چنین به دست آورد:

$$C_i = ۳ \times ۲^n \times a_n, \qquad a_n = \mathrm{cord}\big(\frac{۳۶۰}{۳ \times ۲^n}\big) = ۲R\sin\big(\frac{۶۰}{۲^n}\big). \quad (۱.۱.۶.۲)$$

اما کاشانی به‌جای محاسبهٔ مستقیم این وتر، نخست وتر کمان مکمل کمان متناظر با a_n، یعنی c_n را حساب کرده است و این دو، اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای هستند که وتر آن، قطر دایره است (شکل ۱). پس

$$c_n = \mathrm{cord}\big(۱۸۰ - \frac{۶۰}{۲^n}\big), \qquad a_n = \sqrt{(۲R)^۲ - c_n^۲}. \quad (۲.۱.۶.۲)$$



شکل ۱. ضلع ۳×۲^n ضلعی منتظم محیطی (b_n) و محاطی (a_n)، و وتر مکمل کمان متناظر با دومی (c_n) (در اندازهٔ اضلاع چندضلعی اغراق بسیار شده است تا قابل دیدن باشد.)

کاشانی c_n را از رابطهٔ بازگشتی نوآورانهٔ خود، $c_n = \sqrt{R(۲R + c_{n-۱})}$، محاسبه کرده است که نقطهٔ آغاز آن $c_۱ = \mathrm{cord}(۱۸۰ - ۶۰) = \sqrt{۳}R$ است.[۱] او با این کار، محاسبهٔ سینوس یک زاویه را به محاسبهٔ جذرهای پیاپی و تودرتو تبدیل و این جذرها را با دقت مطلوب خود (که در ادامه خواهد آمد) حساب کرده است.[۲]

محیط Nضلعی منتظم محیطی عبارت است از $C_n = ۳ \times ۲^n \times b_n$ که در آن

۱. از روی این وتر و با استفاده از رابطهٔ (۲.۱.۶.۲)، ضلع ۶ ضلعی منتظم محاطی به دست می‌آید. ۲. او برای محاسبهٔ هر جذر، مطابق روش رایج میان پیشینیان، شکلی شبیه به جدول ترسیم و محاسبات و نیز آزمون درستی محاسبات را در آن جای داده است.

$$b_n = ۲R\tan\left(\frac{۶۰}{۲^n}\right) = \frac{۲R\sin\left(\frac{۶۰}{۲^n}\right)}{\sqrt{۱-\sin^۲\left(\frac{۶۰}{۲^n}\right)}} = \frac{a_n}{\sqrt{۱-\left(\frac{a_n}{۲R}\right)^۲}}$$
$$= \frac{۲R}{\sqrt{(۲R)^۲-a_n^۲}}a_n = \frac{۲R}{c_n}a_n.$$

کاشانی برای به دست آوردن دستور محاسبهٔ این محیط، نخست نوشته است

$$\frac{C_i}{C_c} = \frac{a_n}{b_n} = \frac{c_n}{۲R}.$$

سپس با تفضیل نسبت در مخرج، به رابطهٔ

$$\frac{C_i}{C_c - C_i} = \frac{c_n}{۲R - c_n} \qquad (۳.۱.۶.۲)$$

و از آنجا به

$$C_c - C_i = \Delta C = C_i \times \frac{۲R - c_n}{c_n} \qquad (۴.۱.۶.۲)$$

رسیده است. البته کاشانی صورت و مخرج کسر سمت راست (۴.۱.۶.۲) را بر دو تقسیم کرده و تفاوت دو محیط و سپس محیط Nضلعی منتظم محیطی و سرانجام، نسبت محیط به قطر را از این راه حساب کرده است:[۱]

$$\Delta C = C_i \times \frac{R - \frac{c_n}{۲}}{\frac{c_n}{۲}}, \quad C_c = C_i + \Delta C, \quad ۲\pi \approx \frac{C_i + C_c}{۲R} \qquad (۵.۱.۶.۲)$$

۲.۶.۲ «دقت مورد نیاز» کاشانی [۲]

نکتهٔ مهم در اینجا، دست‌کم از دیدگاه مورد نظر ما، نه دقّت مورد نظر کاشانی، بلکه نگاه او به «دقت مورد نیاز» یا دقیق‌تر، «بیشینهٔ دقت مورد نیاز» است. او پس از نقد محاسبات پیشین، آورده است: «می‌خواهیم محیط دایره را با داشتن قطر آن (یعنی نسبت محیط به قطر $= \pi$) چنان به دست آوریم که در محاسبهٔ دایره‌ای با قطر ۶۰۰ هزار برابر قطر زمین، خطا به قطر تار مویی نرسد».

کاشانی بر آن بود که دانشوران روزگار مأمون در دشت سنجار اندازهٔ یک درجه از نصف‌النهار را $۲۲\frac{۲}{۹}$ فرسنگ ($۶۶\frac{۲}{۳}$ میل) به‌دست آورده‌اند.[۳] بر این پایه محیط دایرهٔ عظیمهٔ واقع بر کرهٔ زمین را

۱. این همان مقداری است که کاشانی آن را «مقدار مشکوک» نامیده است. ۲. این بخش بر اساس نتایج برنامهٔ ۱ تنظیم شده است. ۳. حاصل این اندازه‌گیری $۵۶\frac{۲}{۳}$ میل بود و نه $۶۶\frac{۲}{۳}$. آنچه کاشانی حاصل کار دانشوران روزگار مأمون انگاشته، مقداری است که دانشوران دورهٔ اسلامی حاصل کار دانشوران یونانی می‌دانستند و در سده‌های نخست دورهٔ اسلامی، به‌ویژه در آثار جغرافیایی تکرار می‌شد (نک. پس از این: بخش ۳)

۸ هزار فرسنگ/۲۴ هزار میل می‌انگاشت [۱۳، ص ۳۰]. او در رسالهٔ سُلَّم السَّماء[۱] آورده است: «بعد محدب فلک ستارگان» و «بعد مقعر فلک اطلس» ۲۶۳۴۰;۴۵,۴۷ برابر شعاع زمین است اما بعد محدب فلک اطلس را جز خداوند متعال نمی‌داند» [۱۳، ص ۵۷]، [۳، ص ۹۴]. مقصود کاشانی از «فلک اطلس» کیهان فیزیکی[۲] است. گویا کاشانی بیشینهٔ «بعد محدب فلک اطلس»، یعنی شعاع کیهان را ۶۰۰۰۰۰ برابر شعاع کرهٔ زمین (نزدیک به ۲۳ برابر ۲۶۳۴۰;۴۵,۴۷) فرض کرده است. پس دایرهٔ عظیمه‌ای با محیط/شعاع ۶۰۰۰۰۰ برابر محیط/شعاع دایرهٔ عظیمهٔ واقع بر زمین، بزرگ‌ترین دایره‌ای است که با فرض کاشانی در کیهان خواهد گنجید.[۳] از سوی دیگر، یکای اندازه‌گیری «مو» کوچک‌ترین واحد اندازه‌گیری طول در ایران و دیگر سرزمین‌های اسلامی بود. بنابراین هدف کاشانی رسیدن به تقریبی برای نسبت محیط به قطر است که با بهره‌گیری از آن، خطای محاسبهٔ بزرگ‌ترین طول کیهان از کوچک‌ترین واحد اندازه‌گیری طول کمتر باشد؛ دقتی که بیش از آن اساساً در کیهان فیزیکی به‌کار نیاید. محیط تقریبی این دایرهٔ عظیمه بر حسب «مو» چنین است:[۴]

$$C_U = 600000 \times 8000 \times 3 \times 4000 \times 24 \times 6 \times 6 = 60^5 \times 2^6 \times 10^6.$$

کاشانی می‌گوید چه محیط دایره [ای به قطر ۱۲۰] را ۳۶۰ بگیریم (یعنی $\pi \approx 3$) و چه «۳۷۶ و کسری» (یعنی $\pi \approx 3{,}1416$ و در نتیجه $120\pi \approx 376{,}992$)،[۵] حاصل ضرب ثامنهٔ (=کسر مرتبهٔ هشتم شصتگانی) چنین عددی (نسبتی) در دایره‌ای به بزرگی یاد شده، کمتر از چهار پنجم «مو» خواهد بود. محیط دایره‌ای به قطر ۱۲۰، برابر با 120π است که کاشانی آن را در تقریب خود، ۳۶۰ فرض کرده است و اگر بخواهیم خطای ثامنهٔ آن را در نظر بگیریم، باید محیط دایره یادشده برحسب «مو» بر 360×60^8 تقسیم شود، یعنی

$$\frac{C_U}{120\pi \times 60^8} \approx \frac{60^5 \times 2^6 \times 10^6}{360 \times 60^8} = \frac{200}{243} \approx \frac{4}{5}$$

---

۱. یعنی: نردبام آسمان ۳. در این باره نیز نک. [۲۷، ص ۷۶] ۴. نسبت میان واحدهای کهن چنین است: ۱ فرسنگ/فرسخ = ۳ میل؛ ۱ میل= ۴۰۰۰ گز/ذراع ؛ ۱ گز/ذراع (نزدیک به ۵۰ سانتی‌متر)= ۲۴ انگشت/اصبع؛ ۱ انگشت= ۶ جو/شعیره (=پهنای یک دانهٔ معمولی جو)؛ ۱ جو =۶ مو/شعرة (= قطر موی معمولی یال اسب) ۵. این عدد در دست‌نویس خود کاشانی نیز «۳۶۶ و کسری» یعنی «ثلثمائة و ستة و ستین و کسراً» آمده است که بی‌وجه است و باید «ثلثمائة و ستة و سبعین و کسراً»، یعنی «۳۷۶ و کسری» باشد. گویا کاشانی بر اثر اشتباه لفظی سبعین (=۷۰) را ستین (۶۰) نوشته است. لوکای گرچه در ویراست متن عربی ۳۶۶ آورده اما در ترجمهٔ آلمانی ۳۷۷ ترجمه کرده است زیرا به نظر او اگر $\pi \approx 3\frac{1}{7}$ فرض شود آن‌گاه $120\pi \approx 377{,}143$ [۳۱، ص ۷، ۵۵] اما چنان‌که هوخندایک [۲۷، ص ۸۷] نیز پیش‌تر اشاره کرده است کاشانی قاعدتاً تقریبی دقیق‌تر از $\pi \approx 3\frac{1}{7}$، مثلاً همین $\pi \approx 3{,}1416$ را در نظر داشته است که در این صورت 120π به ۳۷۷ نمی‌رسد و همان «۳۷۶ و کسری» خواهد شد.

2. physical universe

که البته حاصل، اندکی بیش از این (تقریباً ۰٫۸۲۳) است. اما اگر در مخرج به‌جای ۳۶۰ عدد ۳۷۶ بیاید حاصل تقریباً ۰٫۷۸۸ خواهد شد.

کاشانی شعاع دایره را ۶۰ گرفته و در نتیجه دربارهٔ ۱۲۰π و دقت آن سخن گفته است، اما در مقالهٔ حاضر، شعاع دایره مطابق رسم کنونی ۱ در نظر گرفته شده است و در نتیجه همهٔ اعداد رسالهٔ کاشانی بر ۶۰ تقسیم شده‌اند. پس ثامنهٔ رسالهٔ کاشانی (رقم مرتبهٔ هشتم کسر شصتگانی)، تاسعه مقالهٔ حاضر (رقم مرتبهٔ نهم کسر شصتگانی) و عاشرهٔ این مقاله، تاسعهٔ کاشانی است. از این‌رو در مقالهٔ حاضر، مقدار ۲π باید تا تاسعه دقیق و ΔC نیز باید کمتر از ۱ تاسعه[۱] باشد تا دقت مطلوب کاشانی حاصل شود.

نخستین گام کاشانی برای رسیدن به این دقت، تعیین کمینهٔ مقدار n (تعداد اضلاع چندضلعی‌های منتظم= ۳×۲^n) است. کاشانی از حداکثر خطای مجاز برای ΔC در رابطهٔ (۴.۱.۶.۲) آغاز کرده و با توجه به رابطهٔ (۲.۱.۶.۲) به این نتیجه رسیده است که a_n نباید بیش از ۷ خامسه باشد. اگر $n = ۲۸$، کمان متناظر با این ضلع (با فرض $\pi \approx ۳$)، کمتر از ۶ خامسه (دقیق‌تر: $۰۵; ۴۷, ۳۶, ۵۱, ۲۶, ۱۶, ۴۵, ۲۸, ۰۷, ۳۰ \times ۶۰^{-۵}$) می‌شود و ضلع نیز بی‌گمان از این کمتر خواهد بود. پس کاشانی برای رسیدن به دقت مورد نظر خود باید از ۳×۲^{۲۸} ضلعی بهره بَرد.

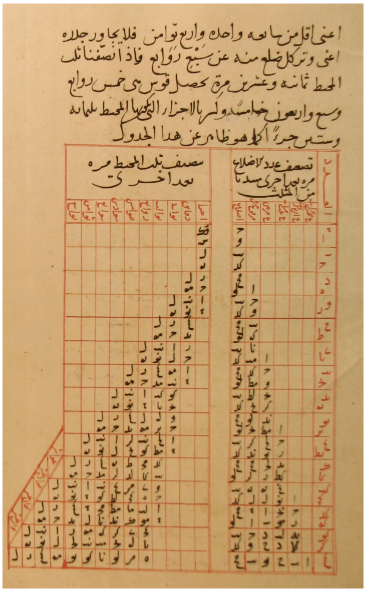
کاشانی که دلبستگی آشکاری به عرضهٔ آسان مطالب، به‌ویژه در ساختارهای «جدول‌گونه» دارد، برای این کار نیز جدولی ترتیب داده است که در ستون سمت راست آن، تعداد اضلاع با شروع از $n = ۰$ پیاپی دو برابر شده و در ستون سمت چپ، کمان متناظر با وتر هر ضلع (با فرضِ $\pi \approx ۳$)، یعنی $۲R/۲^n$، پیاپی نصف‌شده و کار تا رسیدن به پاسخ مطلوب ادامه یافته است (شکل ۲).[۲]

چنان‌که خواهیم دید، با این چندضلعی‌ها ΔC کمتر از ۲۹ عاشره خواهد شد، اما اگر $n = ۲۷$ آنگاه ΔC به ۲ تاسعه می‌رسد که برای کاشانی مجاز نیست. به طور خلاصه، اگر $n < ۲۸$ آنگاه حداقل خطای نظری از حداکثرِ خطای مجاز بیشتر خواهد بود و افزایش دقت در محاسبهٔ جذرها نمی‌تواند مشکل را برطرف کند و البته به $n > ۲۸$ نیز نیاز نیست.

روش کاشانی برای محاسبهٔ کمینهٔ n این طور بوده است: اگر قرار باشد نتیجهٔ عملیات تا f رقم کسر در پایهٔ B (۱۰، ۶۰ یا هر پایهٔ دیگر برای دستگاه شمار) درست باشد، آنگاه با فرض $R = ۱$ و $\pi \approx ۳٫۱۵$ باید $a_n < \frac{۲\pi}{۳\times۲^n} < \frac{۶٫۳}{۳\times۲^n} < \sqrt{\frac{۱}{B^f}}$ و درنتیجه $\frac{۲^n}{۲٫۱} > \sqrt{B^f}$. پس

---

۱. در واقع کمتر از ۲ تاسعه، چون خطای محاسبه نزدیک به نصف آن است. ۲. نکتهٔ شایان درنگ آنکه کاشانی، برخلاف ریاضی‌دانان کهن که نه‌تنها «۰» که حتی «۱» را نیز «عدد» به‌شمار نمی‌آوردند، در اینجا (و نیز در بسیاری جای‌های دیگر) نه‌تنها «۰» را عدد انگاشته، بلکه آن را به‌عنوان توان ۲ به‌کاربرده و $۲^۰$ را نیز ۱ گرفته است (برای اطلاعات بیشتر نک. [۱۵، ص ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۷۵–۱۷۶]).



شکل ۲. جدول تعداد اضلاع $۲^n \times ۳$ ضلعی و طول کمان متناظر با هر ضلع با فرض $\pi \approx ۳$ و $R = ۶۰$ [۱۲، گ ۵ ر]

$\ln(\frac{۲^n}{۲/۱}) > \ln(\sqrt{B^f})$. از اینجا نتیجه می‌شود که

$$n > \frac{f}{۲ \log_B ۲} + \frac{\ln ۲/۱}{\ln ۲} \geq \frac{f}{۲ \log_B ۲} + ۱/۰۷۰۴.$$

برای محاسبات کاشانی از این رابطه همان عدد ۲۸ بیرون می‌آید:

$$n > \frac{۹}{۲ \log_{۶۰} ۲} + ۱/۰۷۰۴ > ۲۷/۶۵۱۴.$$

در دستگاه دهدهی نیز با ۱۶ رقم اعشار دقت، همین نتیجه بیرون می‌آید (اختلاف در عدد سمت راست نیز به این علت است که ۹ رقم کسر شصتگانی و ۱۶ رقم کسر دهدهی دقیقاً معادل هم نیستند):

$$n > \frac{۱۶}{۲ \log_{۱۰} ۲} + ۱/۰۷۰۴ > ۲۷/۶۴۵۸۲۵.$$

البته در روزگار کاشانی تابع لگاریتم در کار نبوده است، اما جدول او (جدول ۱) همان کارکرد لگاریتم را برایش داشته است.

گام دوم، محاسبهٔ تعداد ارقام معناداری است که در محاسبات باید لحاظ شود که البته کاشانی

جدول ۱. تعداد اضلاع ۳×۲^n ضلعی و طول کمان متناظر با هر ضلع با فرض $\pi \approx ۳$ و $R = ۶۰$ (بازنویسی جدول کاشانی، شکل ۲)

n	دوبرابر کردن پیاپی شمار ضلع‌ها با شروع از مثلث	نصف کردن پیاپی یک سوم محیط دایره
۰	۳; ۰۰	۱۲۰; ۰۰
۱	۶; ۰۰	۶۰; ۰۰
۲	۱۲; ۰۰	۳۰; ۰۰
۳	۲۴; ۰۰	۱۵; ۰۰
۴	۴۸; ۰۰	۷; ۳۰
۵	۱, ۳۶; ۰۰	۳; ۴۵
۶	۳, ۱۲; ۰۰	۱; ۵۲, ۳۰
۷	۶, ۲۴; ۰۰	۰; ۵۶, ۱۵
۸	۱۲, ۴۸; ۰۰	۰; ۲۸, ۰۷, ۳۰
۹	۲۵, ۳۶; ۰۰	۰; ۱۴, ۰۳, ۴۵
۱۰	۵۱, ۱۲; ۰۰	۰; ۰۷, ۰۱, ۵۲, ۳۰
۱۱	۱, ۴۲, ۲۴; ۰۰	۰; ۰۳, ۳۰, ۵۶, ۱۵
۱۲	۳, ۲۴, ۴۸; ۰۰	۰; ۰۱, ۴۵, ۲۸, ۰۷, ۳۰
۱۳	۶, ۴۹, ۳۶; ۰۰	۰; ۰۰, ۵۲, ۴۴, ۰۳, ۴۵
۱۴	۱۳, ۳۹, ۱۲; ۰۰	۰; ۰۰, ۲۶, ۲۲, ۰۱, ۵۲, ۳۰
۱۵	۲۷, ۱۸, ۲۴; ۰۰	۰; ۰۰, ۱۳, ۱۱, ۰۰, ۵۶, ۱۵
۱۶	۵۴, ۳۶, ۴۸; ۰۰	۰; ۰۰, ۰۶, ۳۵, ۳۰, ۲۸, ۰۷, ۳۰
۱۷	۱, ۴۹, ۱۳, ۳۶; ۰۰	۰; ۰۰, ۰۳, ۱۷, ۴۵, ۱۴, ۰۳, ۴۵
۱۸	۳, ۳۸, ۲۷, ۱۲; ۰۰	۰; ۰۰, ۰۱, ۳۸, ۵۲, ۳۷, ۰۱, ۵۲, ۳۰
۱۹	۷, ۱۶, ۵۴, ۲۴; ۰۰	۰; ۰۰, ۰۰, ۴۹, ۲۶, ۱۸, ۳۰, ۵۶, ۱۵
۲۰	۱۴, ۳۳, ۴۸, ۴۸; ۰۰	۰; ۰۰, ۰۰, ۲۴, ۴۳, ۰۹, ۱۵, ۲۸, ۰۷, ۳۰
۲۱	۲۹, ۷, ۳۷, ۳۶; ۰۰	۰; ۰۰, ۰۰, ۱۲, ۲۱, ۳۴, ۳۷, ۴۴, ۰۳, ۴۵
۲۲	۵۸, ۱۵, ۱۵, ۱۲; ۰۰	۰; ۰۰, ۰۰, ۰۶, ۱۰, ۴۷, ۱۸, ۵۲, ۰۱, ۵۲, ۳۰
۲۳	۱, ۵۶, ۳۰, ۳۰, ۲۴; ۰۰	۰; ۰۰, ۰۰, ۰۳, ۰۵, ۲۳, ۳۹, ۲۶, ۰۰, ۵۶, ۱۵
۲۴	۳, ۵۳, ۱, ۰, ۴۸; ۰۰	۰; ۰۰, ۰۰, ۰۱, ۳۲, ۴۱, ۴۹, ۴۳, ۰۰, ۲۸, ۰۷, ۳۰
۲۵	۷, ۴۶, ۲, ۱, ۳۶; ۰۰	۰; ۰۰, ۰۰, ۰۰, ۴۶, ۲۰, ۵۴, ۵۱, ۳۰, ۱۴, ۰۳, ۴۵
۲۶	۱۵, ۳۲, ۴, ۳, ۱۲; ۰۰	۰; ۰۰, ۰۰, ۰۰, ۲۳, ۱۰, ۲۷, ۲۵, ۴۵, ۰۷, ۰۱, ۵۲, ۳۰
۲۷	۳۱, ۴, ۸, ۶, ۲۴; ۰۰	۰; ۰۰, ۰۰, ۰۰, ۱۱, ۳۵, ۱۳, ۴۲, ۵۲, ۳۳, ۳۰, ۵۶, ۱۵
۲۸	۱, ۲, ۸, ۱۶, ۱۲, ۴۸; ۰۰	۰; ۰۰, ۰۰, ۰۰, ۰۵, ۴۷, ۳۶, ۵۱, ۲۶, ۱۶, ۴۵, ۲۸, ۰۷, ۳۰

آن را به‌صورت ادامهٔ محاسبات تا مرتبه‌ای خاص از کسرهای شصتگانی مطرح کرده که تفاوت میان این دو آشکار است. به‌گمان کاشانی، محاسبات باید تا مرتبهٔ ۱۸ کسر شصتگانی ادامه یابد و با توجه به این که بیشتر اعداد او دو مرتبهٔ شصتگانی صحیح نیز دارند؛ در بیشترِ محاسبات ۲۰ رقم معنادار

در کار بوده است (معادل با ۳۶ رقم معنادار در دستگاه دهدهی).[۱] او پس از انجام محاسبات با این دقت،[۲]، در فصل هفتم نشان داده است که در محاسبهٔ c_nها (c_1 تا c_{28}) و سه مرحلهٔ پس از آن، اگر کسرها را گرد نمی‌کرد، باز هم در نتیجهٔ نهایی تغییری حاصل نمی‌شد. او خطای ناشی از گردشدن نتیجهٔ هر مرحله را در جدولی آورده است. در سطر اول این جدول (نواقص و زوائد)، «ص=ناقص» به معنی آن است که مقدار گردشده کمتر از مقدار اصلی بوده است (و «ئد»=زائد عکس آن). از مقادیر یادشده در این جدول (مانند خطای مربوط به گرد شدنِ c_9، c_{10} و c_{22}) پیداست که کاشانی هنگام ثبت آنها، افزون بر نخستین رقم حذف شده، به رقم پس از آن نیز توجه داشته و در عمل، محاسبات را با دو رقم شصتگانی بیش از آنچه لازم می‌دانسته است انجام داده و بی‌تأثیر بودنِ این کار را در نتیجه نشان داده است.

اما دربارهٔ حداقل دقت مورد نیاز در صورتی که همهٔ محاسبات با دست‌کم ۱۰ رقم معنادار انجام شود، ΔC همواره بسیار نزدیک به ۲۹ تاسعه خواهد بود.[۳] البته ۱۰ رقم معنادار در محاسبهٔ مقدار $\frac{c_n}{2} - 1$ (و خود ΔC) که ارقام معنادار آن از عاشره آغاز می‌شود، به معنای ادامهٔ محاسبه تا مرتبهٔ ۱۹ کسر شصتگانی در روش کاشانی است. اما خود کاشانی چنان‌که خواهد آمد، در محاسبهٔ ΔC تنها از ۲ رقم معنادار استفاده کرده (و البته دقت بیش از این هم به‌کار او نمی‌آمده) است.

انجام محاسبات با ارقام معنادارِ بیشتر، کاهش خطا/افزایش دقت را در پی دارد، اما نکته این است که در صورت محاسبه با ۱۸ رقم معنادار، نتیجهٔ محاسبات با تقریب کمتر از تاسعه، همان نتیجهٔ کاشانی خواهد بود و انجام محاسبه با ارقام معنادار بیش از این نیز عملاً بی‌فایده است و خطای محاسبه همچنان در حد کمتر از تاسعهٔ شصتگانی و 1×10^{-17} دهدهی باقی می‌مانَد.[۴] در حالت کلی نیز می‌توان گفت برای محاسبه تا fرقم کسر دهگانی/شصتگانی، انجام محاسبه با $2f + 1$رقم معنادار همواره بسنده است و حتی در کمتر از نیمی از موارد (ازجمله در حالت خاص

---

۱. در برنامهٔ نوشته شده به زبان پایتون، محاسبات در دستگاه شمار دهدهی انجام شده است. همچنین محاسبه با فرض تعداد ارقام معنادار مشخص (و نه تا مرتبه‌ای مشخص از کسر) انجام شده است. تعداد ارقام معنادار در محاسبات دهدهی نیز با ضرب این عدد در $\log_{10}(60)$ و گرد کردن حاصل به بالا به دست آمده است. برای شبیه‌سازی دقیق روش کاشانی، اولاً باید همهٔ محاسبات به‌صورت خالص در دستگاه شصتگانی انجام شود و ثانیاً به‌جای ارقام معنادار، باید دقیقاً همان ارقام کسری لحاظ شوند که هیچ بسته یا ماژولی برای پایتون با این ویژگی‌ها یافت نشد (برای نمونه در بستهٔ `sexagesimal-calculator` جذر خالص شصتگانی (یعنی مهم‌ترین عملیات ریاضی رسالهٔ کاشانی) تعریف نشده است و البته اشکالاتی دیگر نیز در ضمن محاسبات دیگر آن دیده شد). نگارنده در بازهٔ زمانی نگارش این مقاله فرصت نیافت ماژولی با این مشخصات بنویسد و این کار را به زمانی مناسب‌تر واگذارد. اما برنامهٔ کوتاه کنونی کمابیش نیاز این مقاله را برطرف کرده است. ۲. موارد استثنا را در ادامه ببینید. ۳. این نکته البته با توجه به اینکه ΔC عملاً از روی تعداد اضلاع مشخص می‌شود، قابل پیش‌بینی بود. ۴. زیرا همچنان‌که گفته شد برای آنکه خطا از این نیز کمتر شود، باید تعداد اضلاع چندضلعی‌ها نیز متناسب با افزایش دقت محاسبات افزایش یابد.

کاشانی) $۲f$رقم معنادار نیز بسنده خواهد بود.[۱] در نهایت می‌توان گفت که کاشانی خطای محاسبه در محاسبات میانی را با دقتی شایان توجه و کمابیش به‌درستی مشخص کرده و محاسبه را با دقت بهینه انجام داده است.

۳.۶.۲ نتایج محاسبات

نتیجهٔ آخرین محاسبات کاشانی چنین است:

$$\begin{aligned} c_{۲۸} &= ۰۱;۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۰,۴۷,۵۲,۱۲,۳۰,۴۸,۳۷,۴۹,۵۴,۴۰ \\ a_{۲۸}^{۲} &= ۰۰;۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۳۶,۴۸,۳۱,۰۹,۵۶,۴۵,۲۸,۴۰,۲۱,۱۷ \\ a_{۲۸} &= ۰۰;۰۰,۰۰,۰۰,۰۰,۰۶,۰۴,۰۱,۱۴,۵۹,۳۶,۱۴,۳۳,۳۶,۱۹,۲۵ \\ C_i &= ۰۶;۱۶,۵۹,۲۸,۰۱,۳۴,۵۱,۴۶,۱۴,۴۹,۴۶ \end{aligned}$$

آخرین رقم $a_{۲۸}$ باید ۲۴ باشد، اما این خطا به دلیل گردشدنِ مربع آن در محاسبهٔ قبلی پیش آمده است که البته این خطا در محاسبهٔ محیط با تقریب «مورد نیاز» کاشانی اشکالی ایجاد نمی‌کند. کاشانی می‌بایست مقادیر زیر را در رابطهٔ (۴.۱.۶.۲) استفاده می‌کرد:

$$\begin{aligned} \frac{c_n}{۲} &= ۰۰;۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۹,۵۵,۲۳,۵۶,۰۶,۱۵,۲۴,۱۸,۵۴,۵۷,۲۰ \\ ۱-\frac{c_n}{۲} &= ۰۴;۳۶,۰۳,۵۳,۴۴,۳۵,۴۱,۰۵,۰۲,۴۰ \times ۶۰^{-۱۰} \end{aligned}$$

اما او به‌درستی یادآور شده است که گردشدهٔ این دو مقدار و نیز C_i با دو رقم معنادار برای کار او کافی است؛ زیرا در نظر گرفتنِ ارقام بعدی تنها در مراتب کمتر از عاشره خود را نشان می‌دهد و کاشانی حاصل کار خود را از این مراتب بی‌نیاز دانسته است:

$$\begin{aligned} \Delta C &\approx ۶;۱۷ \times \frac{۴;۳۶}{۱;۰۰} \times ۶۰^{-۱۰} = ۲۸;۵۴,۱۲ \times ۶۰^{-۱۰} \approx ۲۹ \times ۶۰^{-۱۰} \\ C_c &= C_i + \Delta C = ۶;۱۶,۵۹,۲۸,۰۱,۳۴,۵۱,۴۶,۱۴,۵۰,۱۵ \\ ۲\pi &\approx \frac{C_i + C_c}{۲} = ۶;۱۶,۵۹,۲۸,۰۱,۳۴,۵۱,۴۶,۱۴,۵۰. \end{aligned}$$

با این تقریب، همهٔ ارقام آن درست است. او این عدد را در دستگاه شمار دهدهی نیز نوشته است که ارقام آن نیز با تقریب مورد نیاز کاشانی درست است: $۲\pi \approx ۶/۲۸۳۱۸۵۳۰۷۱۷۹۵۲۶۵$. در پایان، مقدار π با تقسیم عدد بالا بر ۲ تا ۱۶ رقم اعشار مطابق محاسبهٔ امروزین به‌دست می‌آید.

۱. چون در ضمن محاسبات اعدادی کوچک‌تر از $\sqrt{۱۰}$ (در حالت کلی کوچک‌تر از $\sqrt{B}$) و دارای f رقم کسری معنادار و یک رقم صحیح به توان ۲ می‌رسند و نتیجه $۲f$رقم کسری و یک رقم صحیح خواهد داشت. با اجرای برنامهٔ ۱ معلوم شد برای f از ۱ تا ۱۰۰ در ۳۷ درصد موارد (ازجمله حالت خاص کاشانی)، از ۱۰۱ تا ۲۰۰ در ۴۰ درصد موارد و پس از آن تا ۵۰۰۰ در نزدیک به ۴۷ درصد موارد $۲f$رقم معنادار بسنده است.

الگوریتم کاشانی در برنامهٔ ۱ پیاده شده است. در این برنامه همهٔ مقادیر محاسبه‌شده در روش کاشانی با همان روش او اما با دو رقم کسر شصتگانی بیشتر، محاسبه شده‌اند تا بررسی ارقام یادشده در فصل هفتم (خطای ناشی از گرد کردن) نیز آسان شود. محاسبات در دستگاه دهدهی انجام و نتایج به‌صورت شصتگانی نیز نشان داده شده است.

برنامه ۱. محاسبهٔ محیط به قطر به روش کاشانی (به زبان پایتون)

```python
from mpmath import mp
import mpmath as MP
def EXP(V,B=10):
   return int(MP.ceil(-float(MP.log(MP.sign(V)*V,B))))

(B,f)= (60, 9) #B=base (10 or 60); f=fractional Figures of  final  result
n = int(mp.ceil((f*mp.log(B)/(2*mp.log(2))+mp.log(1.2)/mp.log(2)))) #3*2^n sided regular polygon
mp.dps=mp.ceil((2*f+1)*mp.log(B)/mp.log(10))      #Desimal places
sps=int(mp.nint((2*f+1)*mp.log(60)/mp.log(B)))    #Sexagesimal places
cn=mp.one
for i in range(n):
     cn=mp.sqrt(2+cn)
an2=4-cn*cn
an=mp.sqrt(an2) #calculating an from cn
inscribed=(3*2**n)*an
DeltaC=inscribed*(2-cn)/cn
circumscribed=inscribed+DeltaC
My2Pi=(inscribed+circumscribed)/2
Error=My2Pi-2*mp.pi
print(f'Modern     = {str(mp.pi):.{f+4}}\nCalculated = {str(My2Pi/2):.{f+4}}')
print(f'Error={float(Error*10**EXP(Error))4.:f}e{-EXP(Error)}')
```

۳ بیرونی و «تخمین» و نه «اندازه‌گیری» قطر زمین

اراتستن (در حوالی ۲۳۰ پیش از میلاد) با فرض جای‌داشتنِ اسکندریه و اسوان (سوئنه[1] کهن) بر یک نصف‌النهار، تفاوت عرض جغرافیایی این دو را با رصد خورشید، «یک‌پنجاهم دایره» اندازه گرفت و با تخمین فاصلهٔ میان آنها برابر با ۵۰۰۰ استادیا[2] محیط دایرهٔ عظیمهٔ زمین را ۲۵۰ هزار استادیا به‌دست آورد. پس‌از او پوزیدونیوس با فرضِ جای‌داشتنِ رودس و اسکندریه بر یک نصف‌النهار، تفاوت عرض این دو را با رصد سهیل اندازه‌گرفت و با تخمین فاصلهٔ میان آنها، این محیط را نخست ۲۴۰ هزار و سپس ۱۸۰ هزار استادیا به‌دست آورد. بطلمیوس ۱۸۰ هزار استادیای پوزیدونیوس را

1. Syene 2. stadion (plural stadia)

پذیرفت و در آثار خود از آن یاد کرده است. دانشوران دورهٔ اسلامی هر ۷/۵ استادیا را برابر با ۱ میل انگاشتند[۱] و محیط این دایره را ۲۴ هزار میل و طول یک درجه از آن را ۶۶⅔ میل حساب کردند. این مقدارها در سده‌های نخست دورهٔ اسلامی، به‌ویژه در آثار جغرافیایی تکرار می‌شد (برای مطالعهٔ بیشتر در این باره نک. [۱۷، ص ۱۵۲–۱۵۳]) بیرونی اندازه‌هایی دیگر از آثار هندی در این باره آورده است [۸، ۲۱۱–۲۱۲ص] و [۹، ص ۲۳۳].

بنا بر روایتی مشهور، مأمون چون مقدار دقیق استادیا نزد بطلمیوس را نمی‌دانست، یا به‌دلیل اختلاف بسیار میان فرقه‌های گوناگون (یونانیان، هندی‌ها و . . .) در مقدار محیط زمین، دستور داد تا در بیابان سنجار یک درجه از عرض زمین را اندازه بگیرند. دو گروه در دو جهت شمال و جنوب راه افتادند و پیوسته ارتفاع نیم‌روزی خورشید را رصد می‌کردند تا به جایی برسند که نسبت به نقطهٔ آغاز، با در نظر گرفتن تغییر میل خورشید در این مدت، یک درجه تفاوت باشد. سپس این مسافت را دوباره پیمودند. از این اندازه‌گیری چند گزارش در دست است (برای آنها نک. [۱۷، ۱۵۴ ص]). بیرونی خود چهار روایت دربارهٔ نتیجهٔ کار در دست داشت: دو روایت که در کتاب پرآوازهٔ خود تحدید نهایات الاماکن[۲] به‌تفصیل آورده و در قانون مسعودی به‌اختصار تکرار کرده، عبارت است از ۵۶ میل بنابر گزارش حبش حاسب و در گزارش فرغانی.[۳] بیرونی افزوده است که گرچه کمابیش همه را درست گرفته‌اند، اما ۵۶ یادشده در گزارش حبش ناشی از از قلم افتادنِ بخش کسری (اشتباه کاتب) نیست، زیرا محاسبات حبش نشان می‌دهد که او همان ۵۶ میل را به‌کار برده است و چه‌بسا هریک از این دو، حاصل کار یکی از دو گروه باشد. دو روایت نیز در کتاب کمتر شناخته‌شدهٔ بیرونی با عنوان مقالة فی التطریق الی استعمال فنون الاسطرلابات آمده است. میان نتیجهٔ کار دو گروه، دوسوم میل اختلاف بود؛ یعنی یک گروه ۵۶½ و گروه دیگر ۵۷ میل به دست آورده بودند. به گفتهٔ بیرونی، آنها احتیاطاً میانگین این دو را که می‌شد ۵۶⅔ مبنای کار گرفتند [۵، ص ۸۴] و [۳۴، ص ۲۷۳–۲۷۶]. بیرونی در التفهیم نیز تنها به روایت ۵۶⅔ اشاره کرده است [۶، ص ۱۶۰–۱۶۳]. بیرونی دربارهٔ این اختلاف در تحدید نهایات الاماکن آورده است:

> «این مایهٔ سرگردانی است و باید بار دیگر امتحان و رصد شود و کیست که مرا در این باره یاری کند؟ چه این کار، به سبب پهناوری و گستردگی زمینی که باید

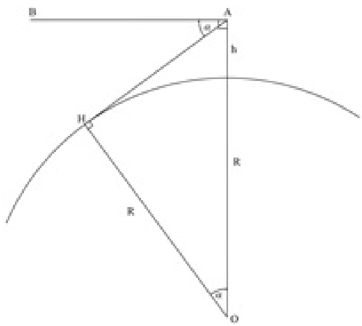
---

۱. البته آنها استادیا را بیش از آنچه باید انگاشته بودند. در دوران باستان چند نوع استادیا به کار می‌رفت که مقدار تقریبی آنها میان ۰/۷۹ تا ۰/۱۰۵ میل عربی بودند؛ مشروط بر آنکه هر میل عربی را ۱۹۹۵ متر بدانیم (دربارهٔ اختلاف در مقدار میل ادامهٔ مطالب را بخوانید). ۲. این کتاب، اثر تخصصی بیرونی دربارهٔ جغرافیای ریاضی و اندازه‌گیری فاصلهٔ میان شهرها است. ۳. هر دو منبع بیرونی (حبش حاسب و فرغانی)، از اخترشناسان و ریاضی‌دانان نامدار ایرانی و با دست‌اندرکاران این اندازه‌گیری در ارتباط نزدیک بوده‌اند.

در آن اندازه‌گیری صورت گیرد، و پرهیز از خطاهای افرادی که در آن ناحیه پراکنده می‌شوند[۱] به اقتدار[۲] نیاز دارد. من برای این کار سرزمین‌های میان دهستان در نزدیکی گرگان تا جایگاه ترکان غز را برگزیدم، ولی تقدیر یاری نکرد و همّت کسانی که باید در این کار به من مدد رسانند سستی گرفت.» [۸، ص ۲۱۳–۲۱۵](نیز تکرار همین مضمون در [۵، ص ۸۳–۸۴] و اشاره‌ای کوتاه در [۷، ص ۵۳۰]).

بیرونی در یکی از نخستین آثار خود دربارهٔ کاربردهای اسطرلاب آورده است:

«برای یافتن اندازهٔ محیط/شعاع کرهٔ زمین راهی دیگر وجود دارد که به صورت نظری درست و قابل اثبات، اما به‌کار بستن آن، به دلیل خردی ابزار (=اسطرلاب) و ناچیزی آنچه باید بدان اندازه گرفته شود [زاویهٔ α در شکل ۳]، دشوار است. و این روش چنین است: ”از کوهی مشرف بر دریا یا دشتی هموار بالا روی و غروب خورشید را رصد کنی . . .“». [۴، ص ۱۴۳][۳]



شکل ۳. اندازه‌گیری قطر زمین با رصد خورشید در افق؛ در اندازهٔ h نسبت به قطر زمین (و در نتیجه اندازهٔ α) اغراق شده است.

مزیت این روش به این بود که به پشتیبانی دولتی برای کار دشوار پیمودن دشت نیاز نبود. این روش را می‌توان به زبان ریاضی امروز چنین نشان داد:

$$R = \frac{\cos(\alpha)}{۱ - \cos(\alpha)} h$$

که در آن h ارتفاع کوه، A جای رصدگر (بر فراز قلهٔ کوه)، O مرکز زمین، H مرکز قرص خورشید هنگام غروب/طلوع، و AB و AH افق حقیقی و حسّی (مرئی) ناظر است (شکل ۳).

۱. یعنی اشتباهات مأموران اندازه‌گیری و مساحی ۲. به عبارت دقیق‌تر: پشتیبانی همه‌جانبهٔ دولت ۳. این روش برخلاف گمان رایج، ابداع بیرونی نیست. بیرونی بعدها یادآور شده است: «این روش دقیقاً همان روشی است که ابوالطیب سند بن علی به فرمان مأمون عباسی انجام داد» [۵، ص ۸۳] و [۸، ص ۲۲۰].

بیرونی سال‌ها پس از نگارش این رساله و هنگامی که در دژ نندنَه در پنجاب زندانیِ سیاسی محمود غزنوی بود، فرصت یافت تا این روش را به کار بندد.[۱] او ارتفاع کوه را با ابزاری که گویا ابداع خودش بوده، $۶۵۲;۰۳,۱۸$ ذراع به‌دست آورد و «انحطاط افق» (یعنی زاویهٔ α) را که اندکی کمتر از ۳۵ دقیقه بود، ۳۴ دقیقه گرفت. بیرونی در تحدید نهایات الاماکن، $\cos(۰;۳۴)$ را $۰;۵۹,۵۹,۴۹$ گرفته و شعاع کرهٔ زمین را چنین حساب کرده است:

$$R = \frac{۰;۵۹,۵۹,۴۹}{۰;۰۰,۰۰,۱۱} \times ۶۵۲;۰۳,۱۸ = ۱۲۸۰۳۳۳۷;۰۲,۰۹.$$

او یادآور شده است که ارتفاع کوه را با «ذراع مرسوم در آن سرزمین برای اندازه‌گیری پارچه» اندازه گرفته است [۸، ص ۲۲۳]؛ اما در تحقیق ماللهند بر یکسانیِ ذراع و میل رایج در هند و سرزمین‌های اسلامی تأکید کرده است [۹، ص ۲۳۳]. او هنگام تبدیل محیط زمین از «ذراع» به «میل»، هر میل را ۴۰۰۰ ذراع انگاشته است. والتر هینتس در پژوهش پرآوازهٔ خود، اوزان و مقادیر در دورهٔ اسلامی، میل را برابر با «۴۰۰۰ ذراع شرعی» (و نه انواع دیگر ذراع) انگاشته و ذراع شرعی نیز ۰٫۴۹۸۷۵ (به طور معمول: ۰٫۵) متر است [۲۶، ص ۶۱، ۶۳]. با این فرض خواهیم داشت

$$R = ۱۲۸۰۳۳۳۷٫۰۳۶ \text{ ذراع } = ۶۳۸۵٫۶۶۴ \text{ کیلومتر}$$

که خطای آن نسبت به مقدار اندازه‌گیری‌شده در روزگار ما، یعنی به طور متوسط ۶۳۷۱ کیلومتر (۶۳۷۸ کیلومتر خط استوا، ۶۳۵۷ کیلومتر در امتداد دو قطب) [۳۲، ص ۹۸] چندان اندک است (۰٫۲۳ درصد بیش از مقدار متوسط) که بسیار شگفت می‌نماید.[۲] بیرونی در قانون مسعودی با همین داده‌ها، این بار $\cos(۰;۳۴)$ را $۰;۵۹,۵۹,۵۹,۴۹,۰۲,۲۸$ گرفته، که دقیق‌تر از بار پیش است، و شعاع کرهٔ زمین را چنین محاسبه کرده است:

$$R = ۶۵۲;۰۳,۱۸ \frac{۰;۵۹,۵۹,۴۹,۰۲,۲۸}{۰۰;۰۰,۰۰,۱۰,۵۷,۳۲} = ۱۲۸۵۱۳۶۹;۵۰,۴۲.$$

---

۱. بیرونی از میانهٔ ۴۰۸ ق/۱۰۱۷م نزدیک به یک سال در این دژ زندانی بود [۱۴]. ۲. جمیل صادق الخلیلی، نامور به جیم خلیلی، فیزیک‌دان عراقی‌الاصل تبعهٔ بریتانیا و استاد دانشگاه سارِی که چند مستند علمی برای BBC ساخته است در قسمت دوم مستند «العلم و الاسلام» (Science and Islam, Episode 2: The Empire of Reason) آورده است که اخترشناسان روزگار مأمون محیط زمین را ۲۴۰۰۰ مایل (انگلیسی) به دست آوردند که ۴٪ کمتر از مقدار تقریبی امروزی آن (۲۵۰۰۰ مایل) بود. او بر آن است که روش پیمودن زمین برای اندازه‌گیری قطر زمین ناقص و دشوار و به روشی قابل اعتمادتر نیاز بود که ۲۰۰ سال پس از مرگ مأمون (=زمان بیرونی) امکان‌پذیر شد. او سرانجام یادآور شده است که بیرونی محیط کرهٔ زمین را با خطایی کمتر از ۲۰۰ مایل انگلیسی یعنی کمتر از ۱٪ به دست آورد که برای فردی در ۱۰۰۰ سال پیش دستاوردی شایان توجه است (از ۱۶:۴۴ تا ۲۳:۰۸ مستند). گذشته از اینکه بیشتر اعداد و ارقام او نادرست است؛ نظرش دربارهٔ دقت بیشتر کار بیرونی نیز پذیرفتنی نیست؛ چنان‌که خود بیرونی نیز چنین گفته است.

به عبارت دیگر،

$$R = \text{۱۲۸۵۱۳۶۹٫۸۴۵ ذراع} = \text{۶۴۰۹٫۶۲۱ کیلومتر}.$$

این بار نیز خطا ۰٫۶ درصد است که باز هم بسیار خوب است.

بیرونی در تحقیق ماللهند هنگام یاد کردن از روایت‌های مختلف قطر و محیط دایرهٔ عظیمهٔ زمین در میان هندی‌ها، آورده است: «شعاع زمین چنان‌که ما یافتیم ۳۱۸۴ میل می‌شود و اگر هر فرسنگ را ۳ میل بگیریم محیط ۶۷۲۸ فرسنگ خواهد شد» [۹، ص ۲۳۳]. این دو عدد همخوانی ندارند مگر آنکه فرض کنیم بیرونی π را ۳٫۱۶۹۵۹۸ گرفته باشد که دقت آن حتی از کم‌دقت‌ترین تقریب هندیِ یادشده در همان‌جا و نیز از تقریب $\pi \approx ۳\frac{۱}{۷}$ مرسوم نزد خود بیرونی نیز کمتر است. از یک‌سو دربارهٔ درستی ۶۷۲۸ برای محیط می‌توان مطمئن بود، زیرا بیرونی سه‌چهارم و سه‌هشتم آن را ۵۰۴۶ و ۲۵۲۳ آورده است؛[۱] و از دیگر سو، ۳۱۸۴ میل/۱۲۷۳۶۰۰۰ ذراع با اندازه‌گیری‌های قبلی بیرونی فاصله‌ای زیاد دارد. پس محتمل‌ترین حالت آن است که ۳۱۸۴ درست نیامده باشد. همچنین بعید نیست که بیرونی در اینجا برای هماهنگی میان نتایج خود و نتایج هندی‌ها، به‌جای تقریب $\pi \approx ۳\frac{۱}{۷}$ یکی از تقریب‌های زیر را به‌کار برده باشد:

$$\pi \approx \frac{۶۵۹۶\frac{۹}{۲۵}}{۲۱۰۰} \qquad \text{(آنچه یعقوب بن طارق از آثار هندی نقل کرده است)}$$

$$\pi \approx \frac{۵۰۲۶\frac{۱۴}{۲۵}}{۱۶۰۰} = ۳٫۱۴۱۶ \qquad \text{(همان تقریب مشهور هندی)}$$

$$\pi \approx \frac{۵۰۰۰}{۱۵۸۱} \approx \sqrt{۱۰} \qquad \text{(تقریب برهمگوپته)}.$$

احتمال حذف یک یا دو رقم کسر شصتگانی در محاسبهٔ ارتفاع کوه نیز در نظر گرفته شد که البته تأثیر آن در نتیجه چشم‌پوشیدنی بود. با در نظر گرفتن همهٔ این حالات، به نظر می‌رسد بیرونی در اینجا تقریب یعقوب بن طارق و مقدار ارتفاع کوه را با همان دو رقم کسر اعشاری در نظر گرفته باشد که در این صورت شعاع کرهٔ زمین ۳۲۱۲٫۸۶۲۹ میل/۱۲۸۵۱۴۵۱٫۴۱ ذراع و مقدار به‌کار رفته برای $\cos(۰;۳۴)$ نیز $۰;۵۹,۵۹,۴۹,۰۲,۲۸,۱۵$ به دست می‌آید که بسیار به مقادیر یادشده در قانون مسعودی نزدیک است. اما باید توجه کرد که بیرونی در هر سه بار محاسبه، $\cos(۰;۳۴)$ را کمتر از آنچه باید به‌دست آورده است. اگر او مقدار دقیق‌ترِ $۰۰;۵۹,۵۹,۴۹,۲۶,۰۹,۲۶$ را به‌کار می‌بُرد، شعاع را با خطای ۴٫۳۷ درصد و برابر با ۶۶۴۹٫۲ کیلومتر به‌دست می‌آورد.

۱. مگر آنکه فرض کنیم کاتبی این دو عدد را با ۶۷۲۸ هماهنگ کرده باشد؛ اما چنین کاتب مفروضی چرا نباید به نسبت محیط و شعاع توجه کرده باشد؟

خطای دیگر بیرونی در اندازه‌گیری زاویهٔ α است. اگر فرض کنیم او h را به‌درستی به‌دست آورده باشد (که این نیز محل تردید است هرچند نمی‌توان آن را بررسی کرد) آنگاه α را باید چنین می‌یافت

$$\alpha = a\cos(\frac{R}{R+h}) = ۰۰, ۳۴, ۴۴$$

اما خودش گفته است که خُردیِ اسطرلاب او را از اندازه‌گیری زاویه با این دقت باز داشته است.

به‌طور خلاصه، بیرونی از یک‌سو α را از آنچه باید کمتر یافته است که موجب افزایش مقدار $\cos(\alpha)$ و کاهش مقدار $\cos(\alpha)/(۱-\cos(\alpha))$ می‌شود و از سوی دیگر، $\cos(\alpha)$ را از آنچه باید کمتر گرفته است که به‌طور قابل‌توجهی، تأثیر خطای اندازه‌گیری را کاهش داده است. اما نکتهٔ مهم در اینجا نه نتیجه که نگاه بیرونی به نتیجه است. بیرونی برای محاسبهٔ محیط دایرهٔ عظیمهٔ زمین در تحدید نهایات الاماکن، پس از ضرب شعاع در $\frac{۴۴}{۷}$ (یعنی استفاده از تقریب نه‌چندان دقیق $\pi \approx ۳\frac{۱}{۷}$، همان کران بالای اندازه‌گیری ارشمیدس)، و تقسیم حاصل بر ۳۶۰ و تبدیل آن از ذراع به میل، آورده است: «طول کمان یک درجه ۵۵;۵۳, ۱۵ میل می‌شود که از روایت حبش دور نیست»[۸، ص ۲۲۳]. در التفهیم‌نیز در این باره گفته است: «من نیز به زمین هندوستان آن را به دیگر طریق‌ها آزمودم، بسی خلاف نیافتم با این مقدار که حکایت کردم» [۶، ص ۱۶۴]. اما نکتهٔ مهم‌تر در قانون مسعودی آمده است:

> «طول کمان یک درجه ۵۶;۰۵, ۵۰ میل می‌شود که نزدیک (قریب) بلکه بسیار نزدیک (لاصق=چسبیده) به چیزی است که آنان (= دانشوران روزگار مأمون) به دست آورده‌اند و [با این نتیجه] دل به یافتهٔ آنان آرام می‌گیرد. پس ما نیز آن را به کار می‌بریم؛ زیرا ابزارهایشان دقیق‌تر و رنجشان در به دست آوردن آن بیشتر بوده است.» [۷، ص ۵۳۱]

پس انتساب اندازه‌گیریِ بسیار دقیق به بیرونی اساساً «نادرست» است؛ زیرا او تنها می‌خواسته روشی دستیاب و سریع در قیاس با پیمودن راهی طولانی در دشت‌ها بیابد و خود با توجه به محدودیت‌های کار، به‌ویژه خُردیِ اسطرلاب و دشواری اندازه‌گیری زاویه‌ای بسیار کوچک با آن، می‌دانسته که دقت نتیجه نمی‌تواند چندان شایان توجه باشد. برای همین پس از اطمینان از درستیِ اخبار رسیده از اندازه‌گیری دانشوران روزگار مأمون، همان مقدار $۵۶\frac{۲}{۳}$ میل برای هر درجه و ۲۰۴۰۰ میل/۶۸۰۰ فرسنگ برای محیط دایرهٔ عظیمه را پذیرفته است (برای نمونه در التفهیم: نک. [۶، ص ۱۵۶]).

از این گذشته، دربارهٔ دقت تخمین بیرونی نیز باید بازنگری شود. چنان‌که دیده شد، بیرونی هنگام مقایسهٔ نتایج، «میل» خود و «میل» به کار رفته در اندازه‌گیری روزگار مأمون عباسی را یکی انگاشته است و میل به کار رفته در آن اندازه‌گیری نیز بنابر تأکید حبش حاسب (منبع بیرونی)، برابر با ۴۰۰۰ «ذراع سودا» (و نه ذراع شرعی) بوده است که مأمون عباسی برای اندازه‌گیری پارچه و ساختمان و زمین وضع کرده بود [۱۰، ص ۱۱۵] (نیز نک. [۳۰، ص ۱۲۲]). بیرونی نیز (قاعدتاً به پیروی از حبش) در التفهیم بر به‌کارگیریِ «ذراع سودا» در این اندازه‌گیری تأکید کرده است [۶، ص ۱۶۴]. ذراع سودا نیز ۵۴٫۰۴ سانتی‌متر است. پس می‌توان گفت بیرونی نیز همین ذراع را به کار برده است. با این فرضْ شعاع زمین در تحدید نهایات الاماکن، قانون مسعودی (= تحقیق ماللهند) و نیز با محاسبهٔ دقیق $\cos(\text{۰};\text{۳۴})$ به ترتیب ۶۹۱۸٫۹، ۶۹۴۴٫۹ و ۷۲۰۴٫۵ کیلومتر و خطای تخمین نیز ۸٫۶۰، ۹٫۰۱ و ۱۳٫۰۸ درصد خواهد بود.

پیوست: نوشتن و خواندن ارقام شصتگانی با حروف در گذشته اخترشناسان از دستگاه شمار شصتگانی و برای نوشتن ارقام نیز از حروف الفبا بهره می‌بردند. به نوشتن این اعداد با حروف الفبای عربی، اصطلاحاً «حساب جُمَّل» (یا به تعبیر رایج میان عموم: حساب ابجد) گفته می‌شود. هریک از ۲۸ حرف الفبای عربی با ترتیبِ «اَبْجَد، هَوَّز، حُطّی، کلِمَن، سَعفَص، قَرَشَت، ثَخذ، ضظغ» نشانهٔ یک عدد در نظر گرفته می‌شود: ۹ رقم برای اعداد ۱ تا ۹، ۹ رقم برای اعداد ۱۰ تا ۹۰، ۹ رقم برای اعداد ۱۰۰ تا ۹۰۰ و رقمی برای ۱۰۰۰ (جدول ۲). اعداد دیگر نیز با ترکیب این حروف به‌دست می‌آید. برای نوشتن هر عدد، باید حروف نشانگر اعداد بزرگ‌تر نخست نوشته شود. برای نمونه، ۲۴۷ را باید «رمز» نوشت و نوشتن آن به‌صورت «مرز» نادرست است. اگر عدد از ۲۰۰۰ بیشتر باشد، شمار هزارها پیش از «غ» بیاید. برای نمونه، «طغ»= ۹×۱۰۰۰، اما «غط»=۱۰۰۰+۹.

منجّمان در نوشتن اعداد به حساب شصتگانی نقطهٔ حرف «ب» و «ج» و «ز» و «ی» را نمی‌گذارند و برای آنکه «ج» با «ح» اشتباه نشود، حرف «ج» را به صورت «ح» می‌نویسند(جدول ۳). برای مثال، رقم «۴۵» شصتگانی را باید به‌صورت «۵+۴۰=م+ه=مه» نوشت. در یک عدد شصتگانی، ارقام سمت راستْ ارزش مکانی بیشتری دارد و برای مشخص شدنِ مرتبهٔ ارقام، مرتبهٔ کم‌ارزش‌ترین عدد در پایان یاد می‌شود. مثلاً یکی از اعداد رسالهٔ کاشانی (البته پس از تقسیم بر ۶۰) چنین است:

$$C_i = \text{۰۶}; \text{۱۶}, \text{۵۹}, \text{۲۸}, \text{۰۱}, \text{۳۴}, \text{۵۱}, \text{۴۶}, \text{۱۴}, \text{۴۹}, \text{۴۶}$$

جدول ۲. ارقام جُمَّل

حرف	عدد	حرف	عدد	حرف	عدد
ا	۱	ی	۱۰	ق	۱۰۰
ب	۲	ک	۲۰	ر	۲۰۰
ج	۳	ل	۳۰	ش	۳۰۰
د	۴	م	۴۰	ت	۴۰۰
ه	۵	ن	۵۰	ث	۵۰۰
و	۶	س	۶۰	خ	۶۰۰
ز	۷	ع	۷۰	ذ	۷۰۰
ح	۸	ف	۸۰	ض	۸۰۰
ط	۹	ص	۹۰	ظ	۹۰۰
				غ	۱۰۰۰

که با حساب جمّل چنین نوشته می‌شود: «و یو نط کح ا لد نا مو ید مط مو عاشره». کلمهٔ عاشره در پایان عدد، یعنی رقم «مو» در مرتبهٔ دهم کسر شصتگانی است و در نتیجه «و=۶» بخش صحیح عدد است. شاید تصوّر کنید که در این صورت، ممکن است مثلاً ارقام «ز» (=۷) و «ر» (=۲۰۰) باهم اشتباه شوند، اما بزرگ‌ترین رقم حساب شصتگانی، ۵۹ است پس اگر رقمی به شکل «ر» در یک جدول نجومی دیدیم، بدون تردید منظور همان رقم «ز» یعنی ۷ است. حذف نقطه‌های دو حرف «ب» و «ی» (یای کوچک) نیز اشتباهی به‌وجود نخواهد آورد. برای مثال، «یو» (بدون نقطه) هرگز «بو» (یعنی ۶+۲=۸) خوانده نمی‌شود، زیرا برای ۸ یک رقم جداگانه داریم. پس منظور از «یو» (بدون نقطه) همیشه ۶+۱۰ است. اما اگر دربالای آن، نقطه‌ای باشد یعنی «نو» نوشته شود، مقصود ۵۶ (۶+۵۰) خواهد بود.

جدول ۳. ارقام حساب شصتگانی(۱ تا ۵۹) و چگونگی ترکیب حروف

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰		ا	ب	ح	د	ه	و	ر	ح	ط
۱	ی	یا	یب	یح	ید	یه	یو	یر	یح	یط
۲	ک	کا	کب	کح	کد	که	کو	کر	کح	کط
۳	ل	لا	لب	لح	لد	له	لو	لر	لح	لط
۴	م	ما	مب	مح	مد	مه	مو	مر	مح	مط
۵	ن	نا	نب	نح	ند	نه	نو	نر	نح	نط

مراجع

[۱] بنو موسی، معرفة مساحة الاشکال البسیطة و الکریة (تحریر نصیرالدین طوسی)، ویراستهٔ رشدی راشد، مؤسسة الفرقان للتراث الاسلامی، لندن، ۱۹۹۶؛ همچنین نک. [۳۳].

[۲] بوزجانی، ابوالوفا، مجسطی، دست‌نویس شمارهٔ ۲۴۹۴ (شم ۱۱۳۸ قدیم)، کتابخانهٔ ملی فرانسه.

[۳] بهلول، حمید، سُلّم السماء، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، پژوهشکدهٔ تاریخ علم دانشگاه تهران، دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۸۶.

[۴] بیرونی، ابوریحان محمد بن احمد، اخراج ما فی قوة الاسطرلاب إلی الفعل، ویراستهٔ پویان رضوانی، معهد تاریخ العلوم العربیة و الاسلامیة، فرانکفورت، ۲۰۲۰؛ همچنین نک. [۳۴].

[۵] بیرونی، ابوریحان محمد بن احمد، التطریق الی استعمال فنون الاسطرلابات، ویراستهٔ پویان رضوانی، معهد تاریخ العلوم العربیة و الاسلامیة، فرانکفورت، ۲۰۲۰؛ همچنین نک. [۳۴].

[۶] بیرونی، ابوریحان محمد بن احمد، التفهیم لاوائل صناعة التنجیم [فارسی]، ویراستهٔ جلال‌الدین همایی، انجمن آثار ملی، تهران، ۱۳۵۲.

[۷] بیرونی، ابوریحان محمد بن احمد،القانون المسعودی، دائرةالمعارف العثمانیة، حیدرآباد دکن، ۱۹۵۴-۱۹۵۶م/۱۳۷۳-۱۳۷۵ق.

[۸] بیرونی، ابوریحان محمد بن احمد، تحدید نهایات الاماکن لتصحیح مسافات المساکن، ویراستهٔ پاول گیورگیویچ بولگاکف، قاهره، ۱۹۶۲.

[۹] بیرونی، ابوریحان محمد بن احمد، تحقیق ما للهند من مقولة مقبولة فی العقل او مرذولة، ویراستهٔ کارل ادوارد زاخاو، تروبنر و لودگیت‌هیل، لندن، ۱۸۸۷.

[۱۰] حبش حاسب، احمد بن عبدالله، الاجرام و الابعاد، ویراستهٔ یتزاک تزوی لانگرمن، ۱۹۸۵؛ همچنین نک. [۳۰].

[۱۱] قربانی، ابوالقاسم، کاشانی‌نامه، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۸.

[۱۲] کاشانی، غیاث‌الدین جمشید بن مسعود، الرسالة المحیطیة، دست‌نویس شمارهٔ ۵۳۸۹، کتابخانهٔ آستان قدس رضوی.

[۱۳] کاشانی، غیاث‌الدین جمشید بن مسعود، سلّم السماء، ویراستهٔ حمید بهلول؛ همچنین نک. [۳].

[۱۴] کرامتی، یونس، بیرونی‌شناخت، ۱۴۰۴ (در دست انتشار).

[۱۵] کرامتی، یونس، کاشانی‌شناخت: پژوهشی در آثار ریاضی غیاث‌الدین جمشید کاشانی، میراث مکتوب، تهران، ۱۴۰۳.

[۱۶] کرامتی، یونس، رسالهٔ محیطیه، در دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ج ۲۵، مرکز دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، تهران، ۱۴۰۲، ۱۷-۲۱.

[۱۷] کرامتی، یونس، رصد، در دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ج ۲۵، مرکز دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، تهران، ۱۴۰۲، ۱۰۴-۱۶۰.

[۱۸] کرامتی، یونس، شیفتهٔ هندسهٔ زندگی: مروری بر زندگی و آثار ابوالوفا بوزجانی، همشهری، تهران، ۱۳۹۲.

[۱۹] کرامتی، یونس، مقدمه بر الرسالة المحیطیة، میراث مکتوب، تهران، ۱۳۹۲.

[۲۰] کرامتی، یونس، بوزجانی، در دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ج ۱۲، مرکز دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، تهران، ۱۳۸۳، ۷۲۷-۷۳۷.

[۲۱] کرامتی، یونس، بیرونی، در دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ج ۱۳، مرکز دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، تهران، ۱۳۸۳، ۳۸۷-۴۰۳.

[22] Azarian, M. K., Al-Risāla al-Muhītīyya: A summary, *Missouri J. Math. Sci.*, **22** (2010), no. 2, 64-85.

[23] Azarian, M. K., The introduction of Al-Risāla al-Muhītīyya: An English translation,*Internat. J. Pure Appl. Math.*, **57** (2009), no. 6,903-914.

[24] Azarian, M. K., Al-Kāshī's fundamental theorem, *Internat. J. Pure Appl. Math.*, **14** (2004), no. 4, 493-503.

[25] Beckmann, P., *A History of Pi*, St. Martin's Publishing Group, New York, 1971.

[26] Hinz, W., *Islamische Masse Und Gewichte: Umgerechnet Ins Metrische System*, Brill, Leiden, 1955.

[27] Hogendijk, J. P., Al-Kāshī's Determination of π to 16 Decimals in an Old Manuscript, *Zeitschrift Für Geschichte Der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, **18** (2009), 73-153.

[28] Karamati, Y., Al-Bīrūnī, in *Encyclopaedia Islamica*, trans. M. Melvin-Koushki, Brill, Leiden-Boston, 2015, 1-17.

[29] Karamati, Y., Al-Būzjānī, Abū al-Wafāʾ, in *Encyclopaedia Islamica*, trans. M. Asatryan, Brill, Leiden-Boston, 2015, 307-320.

[30] Langermann, Y. T., The Book of Bodies and Distances of Habash Al-Hāsīb, *Centaurus*, **28** (1985), no. 2, 108-128.

[31] Luckey, P., *Der Lehrbrief über den Kreisumfang (ar-Risāla al-Muḥīṭīya) von Ǧamšīd b. Masʿūd al-Kāšī* (ed. A. Siggel), Akademie Verlag, Berlin, 1953.

[32] Moore, P., *The Data Book of Astronomy*, vol. 1, 1st ed., Institute of Physics Pub, 2000.

[33] Rashed, R., *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle, I. Fondateurs et commentateurs: Banū Mūsā, Ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd*, Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, London, 1996.

[34] Rezvani, P., *Two Treatises on the Astrolabe by Abū Rayḥān Bīrūnī*, Institute for the History of Arabic-Islamic Science, Frankfurt am Main, 2020.

[35] Toomer, G. J., Apollonius of Perga, in *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 1, C. C. Gillispie, ed., Scribner, New York, 1970, 179-193.

[36] Woepcke, F., Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux, d'après des traités inédits arabes et persans, Troisième article: Sur une mesure de la circonférence du cercle, due aux astronomes arabes, et fondée sur un calcul d'Aboûl Wafâ, *Journal asiatique (5e série)*, **15** (1860), 281-320.

یونس کرامتی: دانشگاه تهران، دانشکدهٔ الهیات و معارف اسلامی، پژوهشکدهٔ تاریخ علم
رایانامه: ykaramati@ut.ac.ir

Mathematical Culture and Thought
Volume 44, Number 1, Spring/Summer 2025, Pages 211–236
doi: 10.30504/mct.2025.1545.2085

Ancient Scholars' Viewpoint on Precision in Calculation and Measurement and its Concept: Calculation of π and Estimation of the Radius of the Earth

Y. Karamati [1]

Institute for the History of Science, University of Tehran, Iran

Abstract. Throughout history, advancements in computational algorithms, increased precision in calculation, and technological progress have led to greater accuracy in measurement. Rather than examining this trajectory, the present essay seeks to offer—by recalling two noteworthy examples—a somewhat indistinct yet revealing portrayal of how scholars of the past viewed the concept of precision. For Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Kāshānī, the notion of "precision" was entirely pragmatic. In his view, the maximum "required precision" in calculating π was that which would allow one to determine the circumference of the largest physically conceivable circle in the cosmos with an error smaller than the smallest measurable unit of length. Accordingly, the accuracy of all calculations was calibrated to meet this objective. Al-Bīrūnī, on the other hand, adopted an estimation-based approach rooted in measurement and computation solely to examine the meta-narrative of various accounts regarding the measured length of a one-degree meridian arc during the era of al-Maʾmūn al-ʿAbbāsī. By arriving at a value close to the smallest recorded figure among these accounts, he concluded that these measurements could not be far from reality. Despite achieving remarkable precision, this effort cannot be regarded as an exact measurement of the Earth's radius, for al-Bīrūnī—fully aware of its inherent limitations and inevitable errors—ultimately placed his trust in the previously established result.

Keywords: Abu Rayhan Bīrūnī, Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Kāshānī, the number π, earth's radius
Article history: Received 29 March 2025; Accepted 12 May 2025
Article type: original

1. ykaramati@ut.ac.ir

ISSN 1022-6443/