

استدلال‌های فیزیکی و اثبات‌های ریاضی

حسین تیموری فعال✉، رضا تیموری فعال

چکیده. در این مقاله، اثبات‌های شهودی برخی قضیه‌های معروف ریاضی با استفاده از اصول پایه فیزیک داده می‌شود. به نقش اثبات در هر برنامه آموزش ریاضی اشاره خواهد شد. با بیان دلایلی بر لزوم مشاهده و اندازه‌گیری در حل مسائل ریاضی با وجود اثبات‌های ریاضی تأکید می‌شود. در ضمن نقش احتمالی قوانین فیزیک (که به‌طور سنتی منبع مهم برخی از مسائل ریاضی هستند) در اثبات ریاضی و چگونگی این نقش در کلاس درس توضیح داده می‌شود. در این مقاله می‌کوشیم اثبات در کلاس درس ریاضی را با کمک استدلال‌های تجربی (فیزیکی) معنی‌دار کرده و نقش بیان کاربردهای مسائل ریاضی را در تدریس ریاضیات تقویت کنیم. برای نیل به این اهداف، برای نمونه، مثال‌های متعددی شامل قضیه دویعدی و سه‌بعدی سوا، قضیه مربوط به نقطه فرما، قضیه دویعدی و سه‌بعدی فیثاغورس مطرح و با ارائه استدلال‌های ریاضی اثبات می‌شوند. در پایان به‌عنوان یک مبحث پیشرفته‌تر از کاربرد استدلال‌های فیزیکی در ریاضی به شرط سازگاری و تک‌مقداری بودن جواب معادله‌های انتگرالی تکی‌ن از نوع کوشی اشاره می‌شود.

۱ مقدمه

فیزیک مبتنی بر ریاضیات است و بسیاری از پدیده‌های فیزیکی تعبیرهای ریاضیاتی دقیقی دارند و تجسم مفاهیم انتزاعی ریاضی در قالب پدیده‌های فیزیکی درک آن‌ها را ساده‌تر می‌کند. مواردی وجود دارد که فیزیک‌دانان با استفاده از شهود فیزیکی به کشفیات ریاضی رسیدند که بعداً ریاضی‌دانان آن‌ها را به‌طور دقیق اثبات کرده‌اند. اما نکته‌ای که باید به آن توجه داشت این است که اثبات و دلایل فیزیکی جایگزین اثبات ریاضی نمی‌شود. در آموزش ریاضی، اثبات باید دقیق، منطقی، و صرفاً بر اساس قواعد ریاضی و تعریف‌های ریاضی باشد. گاهی اوقات شهود فیزیکی می‌تواند در

عبارات و کلمات کلیدی: استدلال‌های فیزیکی، اثبات، آموزش ریاضی، قضیه سوا، نقطه فرما، انتگرال تکی‌ن
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱/۲۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۶/۴

شرایط خاص درست باشد، چنانکه در طول تاریخ، فیزیک‌دانان احکامی مطرح کرده‌اند که بعداً نقض شده‌اند چراکه صرفاً مبنای آن‌ها استدلال فیزیکی بوده است. در هر صورت استفاده از فیزیک به قوی‌تر شدن شهود و درک بهتر کمک می‌کند و منجر به تولید نظریه‌های جدید و بهبود آموزش مفاهیم انتزاعی می‌شود.

مسلماً اثبات باید بخشی از هر برنامه آموزشی ریاضی باشد که هدف آن بازتاب خود ریاضیات و نقش مهم اثبات در آن است. مهم‌ترین نقش اثبات در کلاس درس کمک به ارتقای درک ریاضی است، نقشی که اثبات در تمرین ریاضی نیز ایفا می‌کند [۳۹]. بسیاری از مربیان در مورد اینکه چگونه اثبات را در کلاس درس وارد کنیم بحث کرده‌اند. به‌ویژه در چند دهه اخیر، جهت‌گیری عمده‌ای به سمت اثبات شهودی‌تر به وجود آمده است [۱۲]. برای مثال ویتمن و مولر [۴۵] صحبت از «اثبات شهودی» می‌کنند، در حالی که در [۲۰، ۱۱] از تمایز بین اثبات‌های توضیحی و غیرتوضیحی صحبت شده است. این مربیان بر جنبه داخلی اثبات تمرکز کرده‌اند. به عبارت دیگر، آن‌ها در اصل بر عملکرد اثبات در ریاضیات تمرکز کرده‌اند و مسائلی مانند ارزش نسبی شهود و مطالعه استنتاج‌های رسمی در تدریس اثبات را مورد بحث قرار داده‌اند [۱۹، ۲۲].

با این حال، یانکه و وینتر [۲۶، ۴۴] استدلال کرده‌اند که تقابل معمول بین «شهود» و «قیاس» غیرقابل قبول است و اثبات ریاضی نباید دلیلی برای رویگردانی از مشاهده و اندازه‌گیری بشود، بلکه باید راهنمای اکتشاف هوشمند پدیده‌ها باشد. در [۲۳] تا حدودی سعی شده است این عدم تعادل از طریق بررسی اثبات با توجه به رابطه فیزیک و برهان ریاضی، یعنی استفاده از ایده‌های فیزیک برای مدل‌سازی یک مسئله ریاضی، جبران شود. سؤال خاصی که هانا و یانکه مطرح می‌کنند دو جنبه دارد: نقش احتمالی قوانین فیزیکی در اثبات ریاضی چیست و این نقش در کلاس درس چگونه باید به کار برده شود؟

بخش اول این سؤال به ساختار ریاضیات مربوط می‌شود. همکاری نزدیک بین ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان نظری منجر به افزایش آگاهی از مزایای بسیاری شده است که ریاضیات از فیزیک به دست می‌آورد [۲۴]. یافه [۲۵] اشاره می‌کند که فیزیک به‌طور سنتی منبع مهمی برای برخی از مسائل ریاضی بوده است و از این طریق به پیشرفت آن کمک می‌کند، و همچنین نتایج ریاضی حاصل نیز به حل مسائل مشکل در فیزیک کمک می‌کند. روتا [۳۶] در مقاله‌ای درباره پدیده‌شناسی اثبات معتقد است که مزایای ارتباط نزدیک بین ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان نظری به‌ویژه در موضوع اثبات ریاضی دیده می‌شود. حتی زمانی که اثباتی درستی قضیه‌ای را ثابت کرده است، ریاضی‌دانان

اغلب از آن ناراضی هستند زیرا بیش کمی از علت درستی قضیه دارند. در چنین حالتی، مفاهیم و مدل‌های فیزیکی اغلب می‌توانند سهم مهمی در درک بهتر داشته باشند. حتی می‌توانند به ریاضی‌دانان کمک کنند تا برهان‌های صرفاً ریاضی را با استفاده از شرح بیشتر ماهیت مسئله ابداع کنند. علاوه بر این گنجاندن یک استدلال از فیزیک به جای یک اثبات ریاضی به عنوان بخش جدایی‌ناپذیر هر قضیه می‌تواند برای ریاضی‌دانان مفید باشد.

بخش دوم سؤال بالا به آموزش ریاضیات مربوط می‌شود. در بررسی این موضوع می‌توان تا حد زیادی از دو نوشته که به‌طور مستقیم به نقش استدلال‌های فیزیکی در کلاس درس سروکار دارند، راهنمایی گرفت [۳۵، ۴۳]. ارجاع به قوانین فیزیکی در سایر نوشته‌ها تنها به صورت اظهارات گذرا است. برای مثال، در [۹]، هنگام پرداختن به مفهوم تشابه، تصاویر و سایه‌ها را مطرح می‌کند. استروو [۳۷] هندسه را به عنوان یک علم تجربی در مقابل هندسه به عنوان یک نظام نظری مورد بحث قرار می‌دهد. در [۵] از بیان رابطه هندسه تجربی و نظری می‌توان تصور متفاوتی از این مسئله براساس ایده‌های دینگلر مشاهده کرد.

برخی از نوشته‌های اخیر رویکردهای مختلفی را در معنی‌دار کردن اثبات در کلاس درس با کمک استدلال‌های تجربی مطرح می‌کنند. دریفوس و هاداس [۱۱] نشان می‌دهند که آموزش هندسه با استفاده از نرم‌افزارهای ریاضی می‌تواند دانش‌آموزان را بیشتر به اهمیت اثبات سوق دهد، زیرا آن‌ها می‌توانند ببینند که برای توضیح نتایج تجربی که غیرمنتظره یا غیرشهودی هستند به اثبات نیاز است. دیولیسیر [۱۰] و مریوتی [۲۹] و میسن [۳۰] ساختارهای هندسی‌ای را مورد بحث قرار می‌دهند که با روش‌های حل مسئله مبتنی بر مداد و کاغذ امکان‌پذیر نیستند. آن‌ها به نفع استفاده از نرم‌افزار برای پرورش بینش‌های جدید در قضیه‌های هندسه استدلال می‌کنند. گریر نیز در [۱۸] کاربرد قواعد تجربی برای اثبات را شرح می‌دهد.

در بین معلمان ریاضی نیز جنبشی وجود دارد که خواستار استوار شدن آموزش ریاضیات براساس جنبه‌های کاربردی آن است. یکی از جنبه‌های این تقاضا پیشنهاد رابطه نزدیک‌تر بین ریاضیات و سایر علوم [۳۳] است. جنبه‌های دیگر عبارت‌اند از آموزش ریاضی واقعیت‌مدار^۱، نامی که به یک چهارچوب نظری داده شده است که استفاده از موقعیت‌های واقعی را مبنای آموزش ریاضی قرار می‌دهد؛ برای آگاهی بیشتر به [۳، ۱۷، ۱۶، ۳۸] مراجعه کنید. تعدادی تحقیقات دیگر نیز به دنبال تقویت نقش کاربردهای ریاضی در تدریس ریاضیات به روش‌های مختلف هستند. برای تدریس

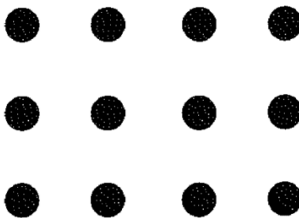
در مقاطع بالاتر مدارس، همچنین می‌توان آثار گروه ایسترون [۶] و کنفرانس بین‌المللی آموزش مدل‌سازی و کاربردهای ریاضی (رجوع کنید به [۳۲]) را نیز ذکر کرد. با این حال، هیچ‌یک از این پیشنهادها به صراحت به موضوع آموزش اثبات نمی‌پردازند.

کاربردهای ریاضیات در فیزیک (به‌ویژه، در مکانیک) معروف‌اند [۱، ۲۸، ۴۲، ۲]، فقط کافی است یک کتاب درسی مدرسه‌ای را برای یافتن چنین مثالی باز کنیم. البته، سطوح بالاتر مکانیک به یک دستگاه ریاضی پیچیده و پالایش شده نیاز دارند. با این حال، مسائل ریاضی وجود دارد که ما می‌توانیم با موفقیت از ایده‌ها و قوانین فیزیک برای حل آن‌ها استفاده کنیم. تعدادی از مسائل از این نوع را که می‌توان با روش‌های علم مکانیک (یعنی با استفاده از قوانین تعادل) حل کرد، در سخنرانی یوسپنسکی برای دانش‌آموزان سال هفتم دبیرستان در دانشگاه دولتی مسکو تحت عنوان «حل مسائل ریاضی با روش‌های مکانیک» در [۱، ۴۲] آمده است.

پس از ذکر این مقدمات، در بخش بعد منظور خود را از استدلال‌های فیزیک در ریاضیات بیان خواهیم کرد و در ادامه مقاله مثال‌های فراوانی از این نوع استدلال‌ها می‌آوریم.

۲ منظور از استدلال‌های فیزیکی در اثبات‌های ریاضی چیست؟

برای اینکه موضوع بحث را روشن‌تر کنیم، ابتدا می‌خواهیم تمایز واضحی بین استفاده از استدلال‌های فیزیکی در اثبات‌های ریاضی در مقابل استفاده صرف از نمایش‌های فیزیکی یا مصورسازی مفاهیم یا احکام ریاضی (معروف به اثبات‌های بدون کلام) قائل شویم. نمونه‌ای از دومی، اثبات قانون جابه‌جایی ضرب اعداد طبیعی با استفاده از یک چیدمان مستطیلی از گوی‌ها (شکل ۱) است.



شکل ۱. اثبات قانون جابه‌جایی ضرب

نکته اثبات در این است که برای یک جفت اعداد طبیعی مفروض، مثلاً ۳ و ۴، ممکن است یک آرایه مستطیلی از سنگریزه‌ها به طول ۴ و عرض ۳ برای نشان دادن حاصل ضرب ۳ در ۴ بسازیم. چرخش ۹۰ درجه‌ای این آرایه به آرایه‌ای منجر می‌شود که نشان‌دهنده حاصل ضرب ۴ در ۳

بدون تغییر تعداد سنگریزه‌ها است. بنابراین، تساوی $4 \times 3 = 3 \times 4$ ثابت می‌شود. تعمیم به هر جفت اعداد طبیعی، یعنی اثبات $(m \times n = n \times m)$ ، براین مبنا تکیه دارد که هر کاری را که می‌توان با اعداد خاص ۳ و ۴ انجام داد می‌توان با هر جفت اعداد خاص دیگر انجام داد.

یک جنبه تعیین‌کننده این اثبات شهودی و معروف برای قانون جابه‌جایی ضرب اعداد طبیعی این است که هر عملیاتی که در آن دخیل است، بی‌درنگ برای حواس ما در دسترس است. در اینجا از یک مدل فیزیکی استفاده می‌شود که به‌طور مستقیم ویژگی‌های اساسی مفهوم ریاضی مورد نظر را نشان می‌دهد. فقط این جمله که ما می‌توانیم این عملیات را با هر جفت اعداد طبیعی انجام دهیم، نیاز به تفکر درباره تمام چیدمان‌های مستطیلی ممکن گوی‌ها دارد و بنابراین فراتر از جهان عینی و شهودی است.

برای فهم بهتر استدلال‌های فیزیکی در یک اثبات ریاضی لازم است مطالبی درباره نقاط مادی و مرکز ثقل بیان کنیم.

۳ نقاط مادی و مرکز ثقل

در فیزیک یا مکانیک کلاسیک مسائلی وجود دارند که با مجموعه‌ای از نخ‌ها و وزنه‌های آویزان به آن‌ها سر و کار دارند. در این مسائل عموماً فرض می‌شود که وزنه‌ها از نظر اندازه بسیار کوچک هستند (آن‌قدر کوچک که موقعیت هریک را می‌توان به عنوان یک نقطه در نظر گرفت). از طرف دیگر، ما به آن نقاط وزن‌های (اجرام) معینی نسبت می‌دهیم. چنین ملاحظاتی ما را به یکی از ایده‌های اساسی در مکانیک، یعنی ایده یک «نقطه مادی» هدایت می‌کند. در مکانیک یک نقطه مادی به عنوان یک جسم آن‌قدر کوچک تعریف می‌شود که می‌توان ابعاد آن را نادیده گرفت. یک نقطه مادی را می‌توان به عنوان یک نقطه هندسی تجسم کرد که یک عدد خاصی («جرم» آن) به آن نسبت داده شده است.

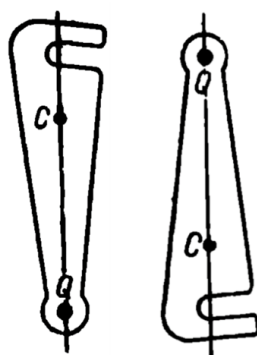
در هر سیستمی از نقاط مادی، هر نقطه تحت تأثیر نیروی گرانشی متناسب با جرم نقطه قرار می‌گیرد. می‌توان فرض کرد که برآیند همه این نیروهای موازی روی نقطه خاصی که مرکز ثقل آن سیستم نامیده می‌شود، عمل می‌کند. موقعیت مرکز ثقل به موقعیت نقاط سیستم و جرم آن‌ها بستگی دارد.

در مکانیک هر جسم را که از تعدادی نقاط مادی تشکیل شده باشد در حکم یک جسم بزرگ در نظر می‌گیرند. این نقاط مادی در حالت کلی دارای جرم‌های مختلف‌اند، به‌طوری که توزیع جرم

در داخل یک جسم ناهمگن است. برخی از قسمت‌های جسم جرم بیشتری دارند و برخی جرم کمتر. ما حتی فرض می‌کنیم قسمت‌های جدا از جسم هیچ جرمی نداشته باشند و در نتیجه «بی‌وزن» باشند (به بیان دقیق‌تر، منظور از یک «جسم بی‌وزن» (یا جسمی با «جرم صفر») جسمی است که جرم آن آن‌قدر کوچک است که می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. خواننده ممکن است متوجه یک تشابه بین مفهوم جسم مادی و مفهوم جسم بی‌وزن شود. در علم مکانیک، نادیده گرفتن جرم یک جسم نقش مهم‌تری از نادیده گرفتن اندازه ندارد. بنابراین، در تمام بحث‌ها ما از وزن (و نه ابعاد) صرف‌نظر می‌کنیم). بنابه تعریف، مرکز ثقل سیستم نقاط مادی که جسم از آن‌ها تشکیل شده است همان مرکز ثقل خود جسم است.

اگر جرم جسم در تعداد معدودی از نقاط مجزای خود متمرکز شده باشد (در ادامه با چنین مواردی مواجه خواهیم شد، به عنوان مثال، یک میله بی‌وزن با بارهای نقطه‌ای متصل به آن)، آنگاه مرکز ثقل چنین جسمی بدیهی است که بر مرکز ثقل سیستم این نقاط جداگانه منطبق است. بسیاری از خواص یک جسم کاملاً به موقعیت مرکز ثقل آن بستگی دارد. همان‌طور که از درس فیزیک دبیرستان می‌دانیم، تعادل یک جسم به نحوه قرارگیری مرکز گرانش آن و نقاطی که جسم در آن‌ها متمرکز شده است بستگی دارد. در واقع ما گزاره‌های زیر را داریم.

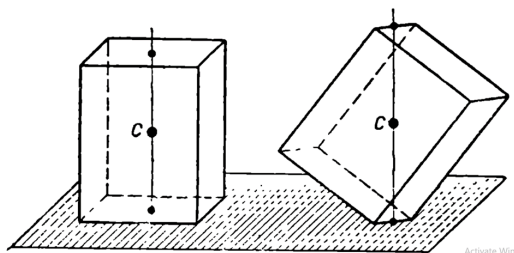
گزاره ۱.۳. اگر جسم متصل به یک نقطه ثابت ساکن باشد، آن نقطه و مرکز ثقل جسم روی خط عمودی یکسان قرار دارند (شکل ۲).



شکل ۲. جسم متصل به یک نقطه ثابت ساکن (Q نقطه ثابت و C مرکز گرانش است).

گزاره ۲.۳. اگر جسمی که دارای ناحیه تکیه‌گاهی یا یک لبه تکیه‌گاهی در حالت سکون باشد، آنگاه خط عمودی که از مرکز ثقل به سمت پایین ترسیم شده است، این ناحیه یا لبه را قطع می‌کند (شکل ۳).

از این گزاره‌ها می‌توان برای یافتن مرکز گرانش به صورت تجربی استفاده کرد. به‌ویژه، از این گزاره‌ها این نتیجه به دست می‌آید: اگر جسمی با جسمی هم‌شکل و با مرکز ثقل یکسان جایگزین شود، آنگاه موقعیت تعادل ثابت می‌ماند. با این حال، در بسیاری از موارد لازم است که نه تنها مرکز گرانش، بلکه جرم کلی جسم (یعنی مجموع جرم‌های نقاط مادی تشکیل‌دهنده جسم) را نیز به حساب آوریم. برای مثال، اگر کل جسم را عوض نکنیم، اما بخشی از آن توسط جسم هم‌شکل دیگری و با مرکز ثقل یکسان عوض شود، تعادل کل جسم ممکن است تغییر کند. زیرا موقعیت مرکز ثقل کل جسم ممکن است به دلیل تغییر جرم آن قسمت تغییر کند. آگاهی از موقعیت مرکز گرانش و جرم کل جسم در حل بسیاری از مسائل، حداقل در حل همهٔ مسائلی که ما با آن‌ها روبه‌رو خواهیم شد، کاملاً ضروری است. بنابراین، معرفی تعریف زیر از هم‌ارزی دو سیستم از نقاط مادی طبیعی است. دو سیستم از نقاط مادی معادل هستند، اگر اولاً مرکز گرانش سیستم اول بر مرکز گرانش سیستم دوم منطبق باشد و دوم اینکه مجموع جرم‌های تمام نقاط سیستم اول با مجموع جرم‌های تمام نقاط سیستم دوم برابر باشد. مفهوم هم‌ارزی سیستم‌ها که در اینجا تعریف کردیم به این طریق قابل توجه است: هنگام جایگزینی بخشی از یک سیستم خاص با یک سیستم معادل این قسمت به سیستمی معادل سیستم اولیه می‌رسیم. اجازه دهید، سعی کنیم این گزاره را به شکل واضح‌تری بیان کنیم.



شکل ۳. جسم دارای ناحیه تکیه‌گاهی یا یک لبه تکیه‌گاهی

فرض کنید سیستم α از نقاط مادی $\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_r$ با جرم‌های $\overline{m}_1, \dots, \overline{m}_r$ و سیستم $\underline{\alpha}$ از نقاط مادی $\underline{M}_1, \dots, \underline{M}_r$ با جرم‌های $\underline{m}_1, \dots, \underline{m}_r$ به ما داده شده است. در ادامه، این سیستم‌ها را به هم ملحق می‌کنیم تا دو سیستم به یک سیستم کلی α تبدیل شود و آن را به صورت زیر مشخص می‌کنیم.

(۱) لازم است در سیستم α هر نقطهٔ مادی از سیستم α را که از نظر موقعیت با هیچ‌یک از نقاط سیستم $\underline{\alpha}$ منطبق نیست لحاظ کنیم.

(۲) لازم است در سیستم α هر نقطه مادی از سیستم α را که از نظر موقعیت با هیچ یک از نقاط سیستم $\bar{\alpha}$ منطبق نیست مدنظر قرار دهیم.

(۳) اگر یک نقطه مادی معین $\bar{M}_i$ از $\bar{\alpha}$ در موقعیتی با یک نقطه مادی معین $\underline{M}_i$ از α منطبق باشد، آنگاه در سیستم α ، یک نقطه مادی جدید قرار خواهیم داد، که موقعیت آن با نقاط مادی $\bar{M}_i$ و $\underline{M}_i$ منطبق است و جرم آن‌ها برابر با مجموع $\bar{m}_j + \underline{m}_j$ ، از جرم‌های نقاط مادی موردنظر است.

حالا گزاره زیر را می‌توان بیان کرد.

گزاره ۳.۳. اگر سیستم α ، نتیجه به هم پیوستن سیستم‌های $\bar{\alpha}$ و α و سیستم β ، نتیجه به هم پیوستن سیستم‌های $\bar{\beta}$ و β باشد و اگر سیستم‌های $\bar{\alpha}$ و $\bar{\beta}$ نیز با هم معادل باشند و همچنین سیستم‌های α و β معادل باشند، آنگاه سیستم‌های α و β نیز معادل خواهند بود.

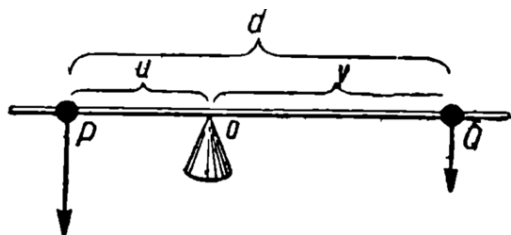
توجه داشته باشید که برای هر سیستمی از نقاط مادی امکان ساختن سیستمی معادل آن و متشکل از فقط یک نقطه مادی وجود دارد. برای این کار کافی است یک نقطه مادی واقع در مرکز ثقل سیستم اصلی و جرمی برابر با مجموع جرم‌های آن سیستم را در نظر بگیریم. این نقطه مادی یک سیستم معادل نمونه‌های اصلی را تشکیل می‌دهد. یک نقطه مادی واقع در مرکز ثقل یک سیستم خاص و داشتن جرمی برابر با مجموع جرم‌های آن سیستم، مرکز مادی سیستم مفروض، نامیده می‌شود. سیستم‌های معادل را می‌توان سیستم‌هایی تعریف کرد که مراکز مادی آن‌ها منطبق هستند.

۱.۳ مرکز ثقل یک سیستم متشکل از دو جرم مادی

فرض کنید دو بار متمرکز P و Q به یک میله بی‌وزن در فاصله d از یکدیگر متصل شده‌اند (شکل ۴). یافتن مرکز ثقل میله همراه با بارهای متمرکز مد نظر است. از گزاره ۱.۳ در بخش قبل می‌بینیم که مسئله ما معادل پیدا کردن نقطه O است که برای رسیدن به وضعیت تعادل میله باید تکیه‌گاه شود. اجازه دهید فواصل بارهای P و Q از نقطه مورد نیاز O را با u و v نشان دهیم. تعادل زمانی و تنها زمانی حاصل می‌شود که حاصل ضرب نیروی P در فاصله u برابر با حاصل ضرب نیروی Q در فاصله v باشد. این رابطه را قانون اهرم ارشمیدس می‌نامند. به عبارت دیگر، مجموع گشتاور دو نیروی P و Q حول نقطه تعادل صفر باشد. مفهوم گشتاور و دلیل این تساوی در ادامه توضیح داده خواهد شد. به بیان ریاضی، داریم $Pu = vQ$. با حل هم‌زمان رابطه‌های $Pu = vQ$ و همچنین

$u + v = d$ داریم

$$u = \frac{Q}{P+Q}d, \quad v = \frac{P}{P+Q}d. \quad (۱)$$



شکل ۴. میله بی‌وزن با دو بار متمرکز در دو سر آن

توجه داشته باشید که $\frac{u}{v} = \frac{Q}{P}$. یعنی فاصله‌ها از مرکز گرانش نسبت به بارها، نسبت معکوس با خود بارها دارند. به‌ویژه، اگر هر دو بار دارای وزن مساوی باشند، مرکز ثقل در وسط مسیر بین بارها قرار دارد (که آشکار است) و به‌عکس، اگر معلوم شود که مرکز ثقل در «نقطه میانی» است، پس از آن نتیجه می‌شود که بارها برابر هستند. اگر یکی از بارها دو برابر بار دیگر سنگین باشد، پس مرکز ثقل به بار سنگین‌تر نزدیک‌تر است و فاصله‌های بین بارها به نسبت ۱:۲ تقسیم می‌شود. برعکس، اگر مشخص شود که مرکز ثقل فاصله بین بارها را به نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند، اندازه یکی از بارها (یعنی بار نزدیک‌تر به مرکز ثقل) دو برابر بزرگ‌تر از دیگری است. مرکز ثقل میله‌ای که جرم آن در دو نقطه M و N متمرکز شده است، به مرکز گرانش سیستمی از دو نقطه مادی M و N (با جرم‌های مربوط) منطبق است. پس، نتیجه زیر را به دست آورده‌ایم.

نتیجه ۴.۳. مرکز ثقل یک سیستم از دو نقطه مادی، روی خط مستقیمی که این نقاط را به هم وصل می‌کند قرار دارد. فواصل آن از این نقاط با وزن این نقاط (که به معنای جرم آن‌ها نیز هست) نسبت معکوس دارد. به‌ویژه، مرکز ثقل فاصله بین دو نقطه را نصف می‌کند اگر و تنها اگر وزن این نقاط برابر باشند. مرکز ثقل فاصله بین آن‌ها را به نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند اگر و تنها اگر یکی از این نقاط دو برابر سنگین‌تر از دیگری باشد (مرکز ثقل به نقطه سنگین‌تر نزدیک‌تر است).

اگر بخواهیم تعمیمی از رابطه (۱) برای مرکز ثقل یک سیستم متشکل از چندین نقطه مادی داشته باشیم نخست تعریفی از گشتاور یک نیرو حول یک نقطه در فیزیک و مهندسی ارائه می‌دهیم که در قسمت‌های بعدی مقاله نیز استفاده می‌شود. گشتاور یک نیرو حول یک نقطه کمیتی است

که از حاصل ضرب اندازه نیرو ضرب در فاصله عمودی راستای نیرو تا نقطه مورد نظر (که گشتاور حول آن نقطه به دست می‌آید) محاسبه می‌گردد. این کمیت میزان تمایل آن نیرو را برای دوران یک جسم حول نقطه مورد نظر را نشان می‌دهد. حال بیا یک میله بی‌وزن را با بارهایی از وزنه‌های $P_1, P_2, \dots, P_n$ که بر روی آن ثابت شده‌اند تصور کنیم و مسئله یافتن مرکز ثقل این میله را مطرح کنیم. درست مانند میله با دو بار متمرکز، برای حل مسئله کافی است نقطه O را پیدا کنیم، به طوری که اگر میله در آن نقطه قرار گیرد، در حالت تعادل باشد. ما مختص x_O چنین نقطه اتکایی را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید محل اعمال بار P_1 برابر با $x_1 = x$ ، محل اعمال بار P_2 برابر با $x_2 = x$ ، و غیره باشد، و در نهایت محل اعمال بار P_n برابر با $x_n = x$ باشد. فرض کنید نقطه تکیه‌گاه O بین بارهای P_k و P_{k+1} قرار دارد (حالتی که یکی از این بارها دقیقاً در O قرار دارد مستثنا نیست). پس طول بازوهای نیروهای $P_1, P_2, \dots, P_k$ به ترتیب برابر با $x_O - x_1, x_O - x_2, \dots, x_O - x_k$ باشند و طول بازوهای نیروهای $P_{k+1}, P_{k+2}, \dots, P_n$ به ترتیب برابر با $x_{k+1} - x_O, x_{k+2} - x_O, \dots, x_n - x_O$ هستند. از آنجا که میله در حالت تعادل است، مجموع گشتاورهای نیروهایی که میله را در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حول O می‌چرخاند، باید برابر با مجموع گشتاورهای نیروهایی باشد که میله را در جهت عقربه‌های ساعت حول O می‌چرخاند، پس داریم

$$\begin{aligned} P_1(x_O - x_1) + P_2(x_O - x_2) + \dots + P_k(x_O - x_k) \\ = P_{k+1}(x_{k+1} - x_O) + P_{k+2}(x_{k+2} - x_O) + \dots + P_n(x_n - x_O) \end{aligned} \quad (2)$$

و یا

$$x_O = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{\sum_{k=1}^n P_k}. \quad (3)$$

حال فرض کنیم یک سیستم مادی متشکل از اجرام $m_1, m_2, \dots, m_n$ داشته باشیم. گشتاور نیروی وزن تک‌تک این اجرام را، یعنی $m_1 g, m_2 g, \dots, m_n g$ ، که نقش نیروهای $P_1, P_2, \dots, P_n$ را ایفا می‌کنند، حول مبدأ مختصات می‌توان یافت و با یکدیگر جمع کرد که در این صورت مختصات نقطه تعادل این سیستم اجرام در حالت سه‌بعدی، که مرکز ثقل نامیده می‌شود، با توجه به رابطه (۳) به صورت زیر در می‌آید که نشان می‌دهد هر سیستم مادی فقط یک مرکز ثقل دارد

$$x_O = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad y_O = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad z_O = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{\sum_{k=1}^n m_k}. \quad (4)$$

۲.۳ قضیه‌هایی در مورد تقاطع خطوط مستقیم

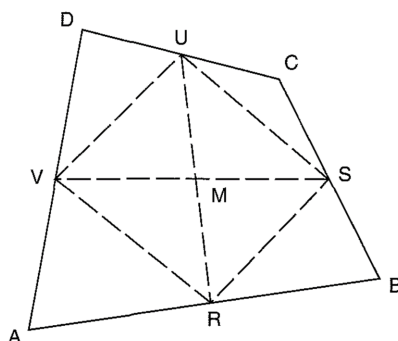
اکنون سیستمی از نقاط مادی α را در نظر می‌گیریم که اشتراک سیستم‌های β و γ است. مراکز مادی β و γ را به ترتیب با M و N نشان می‌دهیم. از گزاره ۲.۳ از بخش قبلی، سیستم نقاط مادی M و N معادل سیستم α است. بنابراین مرکز مادی از سیستم α بر مرکز مادی سیستم متشکل از نقاط M و N ، منطبق است. بنابراین روی خط مستقیمی که این نقاط را به هم متصل می‌کند قرار دارد. از آنجا که مرکز مادی یک سیستم در مرکز گرانش آن قرار دارد، قضیه زیر به دست می‌آید.

قضیه ۵.۳. مرکز ثقل سیستمی از نقاط مادی که از اشتراک سیستم‌های β و γ تشکیل شده است، روی خط مستقیمی که مراکز ثقل سیستم‌های β و γ را به هم متصل می‌کند قرار دارد.

در ادامه، چندین کاربرد هندسی از قضیه بالا را می‌آوریم. در مقابل نمایش فیزیکی صرف در شکل ۱، اجازه دهید یک مثال معمولی بیاوریم که نشان می‌دهد منظور ما از یک استدلال فیزیکی در یک اثبات ریاضی چیست. به این منظور از یک قضیه هندسه مقدماتی مشهور استفاده می‌کنیم.

قضیه ۶.۳. در هر چهارضلعی دلخواه $ABCD$ نقاط وسط اضلاع آن S, R, U, V ، یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند (شکل ۵ را ببینید).

برای اثبات کاملاً هندسی از این نتیجه شگفت‌انگیز می‌توان چهارضلعی را به دو مثلث تقسیم کرده و استدلال کنیم. اما استدلالی مبتنی بر مکانیک چنین خواهد بود. فرض کنید نقاط A, B, C, D با جرم‌های برابر بارگذاری (هریک به جرم ۱ واحد) و با میله‌های صلب اما بی‌وزن به هم متصل شده‌اند. دلیل این مطلب این اصل است که «هر سیستم جرمی فقط یک مرکز ثقل دارد». البته کل سیستم به وزن ۴ واحد یک مرکز گرانش دارد، که ما می‌خواهیم آن را تعیین کنیم. دو زیرسیستم AB و CD هریک به وزن ۲ واحد و دارای مراکز ثقل مربوط به خود هستند. نقاط میانی آن‌ها R و U هستند. با توجه به ملاحظات ایستایی، می‌توان AB و CD را با R و U جایگزین کرد، که هریک با جرم ۲ واحد بارگذاری (به صورت نقطه‌ای) می‌شوند. اما AB و CD سیستم کل $ABCD$ را تشکیل می‌دهند. بنابراین مرکز ثقل آن نقطه وسط RU یعنی M است. به همین ترتیب، می‌توانیم $ABCD$ را به عنوان سیستم تشکیل شده از BC و DA در نظر بگیریم. بنابراین، مرکز ثقل سیستم کل $ABCD$ نقطه وسط SV است زیرا مرکز گرانش یکتا است، این نقطه میانی باید M باشد، پس M هر دوی RU و SV را به قطعات مساوی تقسیم می‌کند. بنابراین، چهارضلعی $RSUV$ که قطرهای آن RU و SV هستند متوازی‌الاضلاع است.



شکل ۵. نقاط میانی V, U, S, R چهار رأس یک متوازی‌الاضلاع‌اند.

کل استدلال ما در این بحث به این واقعیت بستگی دارد که هر جسم فیزیکی دارای جرم دارای مرکز ثقل است. البته، مرکز ثقل نقطه‌ای است که پس از یافتن یا ساختن آن می‌توان به آن اشاره کرد، و بنابراین در جهان مرئی وجود دارد. از این نظر، با گوی‌های به کار رفته در اثبات قبلی قابل مقایسه است. اما یک تفاوت اساسی بین مرکز جاذبه و مثال گوی‌ها وجود دارد: مرکز گرانش معنای خود را مدیون قانون فیزیکی پیچیده‌ای است که بر رفتار مکانیکی اجسام فیزیکی حاکم است.

به طور کلی، مرکز گرانش یک معنای ایستایی و یک معنای دینامیکی دارد. معنای ایستایی آن این است که یک جسم اگر در مرکز گرانش خود نگه داشته شود در حالت تعادل است. معنای دینامیکی آن این است که در بسیاری از موقعیت‌ها، یک جسم متحرک را می‌توان با مرکز گرانشش جایگزین کرد. اگرچه این قانون از مکانیک بر جهان مرئی ما حاکم است، خودِ قانون قابل مشاهده نیست. این چیزی نظری ساخته ذهن ما است، از نظر عملکرد در یک استدلال منطقی، می‌توان آن را فقط به عنوان یک قضیه ریاضی در نظر گرفت که در اختیار ما است. بنابراین، استناد به استدلال فیزیکی در یک اثبات ریاضی با استفاده صرف از یک نمایش فیزیکی بسیار تفاوت دارد و درواقع به معنای تکیه بر یک اصل فیزیکی است که گویی قضیه‌ای از ریاضیات است.

از این مثال می‌توان نتیجه گرفت که فیزیک نه تنها می‌تواند ابزارهای استدلال‌مان را با ارائه یک اصل اضافی گسترش دهد، بلکه می‌تواند به درک شهودی ریاضیات نیز کم کند. برای ذهن آموزش‌نندیده ممکن است تعجب‌آور به نظر برسد که هر چهارضلعی، هرچند نامنظم، دارای چنین نظم بالایی باشد. اما وقتی یک چهارضلعی را به عنوان یک سیستم چهار نقطه‌ای در نظر بگیریم، با وجود این فرض، مشخص است که مرکز ثقل آن چهار ضلعی نیز باید دو میله‌ای را که نقاط میانی اضلاع مقابل را به هم وصل می‌کند به قسمت‌های مساوی تقسیم کند.

نمونه‌های تاریخی و آموزشی از این مسئله وجود دارد. مواردی می‌توان یافت که اثبات کاملاً ریاضی یک قضیه مطلوب به نظر نمی‌رسد، در حالی‌که که معرفی مفاهیم و استدلال‌های حاصل از فیزیک اثبات ساده‌ای برای قضیه ارائه می‌دهد. یک نمونه معروف استفاده از قانون اهرم ارشمیدس است مثلاً در تعیین حجم و سطوح. مثال دیگر که همان اندازه معروف است، در حساب وردش‌ها است: اصل دیریکله که وجود کمینه‌های خاص به عنوان راه حل برخی مسائل مقدار مرزی را مقرر می‌کند. در قرن نوزدهم، دیریکله و ریمان این اصل را به دلایل فیزیکی بدیهی می‌دانستند اما وایرستراوس بعداً استفاده از آن را مورد انتقاد قرار داد. ریاضی‌دانان مجبور شدند اثبات ریاضی برای این اصل بیابند، که کاری دشوار بود، اما در نهایت این تلاش منجر به پیشرفت قابل توجهی در زمینه حساب وردش‌ها شد [۳۱].

مثال کمتر شناخته‌شده‌ای متعلق به جیوانی سوا^۱ است. در سال ۱۶۷۸، او کتابچه کوچکی در حدود ۸۰ صفحه با عنوان «ساختار ایستایی خطوط مستقیم متقاطع» منتشر کرد. در مقدمه، او می‌نویسد که به جای به کارگیری ساختارهای هندسی توسط خط‌کش و پرگار (همان‌طور که هندسه‌دان‌ها معمولاً انجام می‌دهند) ایده او این است که «خطوط و وزنه‌ها جایگزین شوند». او با به کار بردن روش‌های ایستایی در حل مسائل مطلقاً هندسی توانست مسائلی را که تا آن زمان غیرقابل حل بودند حل کند. سوا با استفاده از این روش قضیه‌ای را پیدا کرد که هنوز هم به نام او است و در آن شرایط بسیار کلی به دست داده می‌شود که سه خط وصل‌کننده یک رأس مثلث به یک نقطه روی ضلع مقابل در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند (به آنچه که در ادامه خواهد آمد نگاه کنید).

پی‌یر وارینیون^۲ نیز که روی مبانی جدید ایستایی تحقیق می‌کرد، زمانی که با متوازی‌الاضلاع محاط‌شده در یک چهارضلعی دلخواه سروکار داشت با قضیه‌ای که در بالا مورد بحث قرار گرفت مواجه شد. ملاحظات ایستایی می‌تواند ابزار قدرتمندی در هندسه مقدماتی باشد. به این موضوع در بخش بعد خواهیم رسید.

اجازه دهید اکنون از تاریخ ریاضیات به آموزش ریاضیات برویم. نمونه‌هایی از اعمال قوانین فیزیکی در اثبات ریاضی با توجه به جنبه آموزشی را می‌توان در فصلی با عنوان «ریاضیات فیزیکی» از کتاب ریاضیات و استدلال پذیرفتنی نوشته پولیا [۳۵] یافت. پولیا اصول اپتیک و مکانیک را به کار می‌برد تا یک سری مسائل بهینه‌سازی را به روشی بسیار روشن‌تر حل کند.

به عنوان مثال دیگر، می‌توان به ساخت نقطه فرمای یک مثلث اشاره کرد، یعنی نقطه‌ای که

مثلاً توسط یک سیستم مکانیکی متشکل از یک صفحه سوراخ‌دار و طناب‌های وزن‌دار مدل‌سازی شده است [۳۵]. مجموعه‌ای از قضیه‌های هندسه مقدماتی را که با استفاده از قانون اهرم یا مفهوم مرکز ثقل به راحتی می‌توان اثبات کرد می‌توان در [۴۳] یافت. در بخش بعد به چند نمونه از این‌ها خواهیم پرداخت. مثال‌های دیگر را می‌توان در دو کتاب از مکتب ریاضیات روسی [۴۲، ۲۷] و نیز مقاله توکیدا [۴۰] یافت.

مثال دیگری نیز در زمینه حساب دیفرانسیل و انتگرال بیان می‌کنیم. ابتدا قضیه مقدار میانگین را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید تابع $f(t)$ از بازه $[a, b]$ به اعداد حقیقی تعریف شده باشد: $\mathbb{R} \rightarrow [a, b] : f$. اگر این تابع در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و در بازه (a, b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه نقطه‌ای مانند c در (a, b) وجود خواهد داشت که $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. شاید بتوان این قضیه را مهم‌ترین قضیه درباره توابع پیوسته در حسابان نامید. تفسیر هندسی قضیه مقدار میانگین به صورت زیر است. اگر خط قاطعی که نمودار تابع پیوسته $f(t)$ را در دو نقطه $t = a$ و $t = b$ به یکدیگر متصل می‌کند در نظر بگیریم، حتماً نقطه‌ای مانند $t = c$ در بین دو نقطه $t = a$ و $t = b$ وجود دارد که شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه با شیب خط قاطع ترسیم‌شده از دو نقطه $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ برابر است. قضیه مقدار میانگین بیان این حقیقت شهودی است که شیب بین نقاط انتهایی یک منحنی (و همچنین بین مقادیر فرینه شیب‌های مماس) میانگین (متوسط) شیب‌ها در نقاط مختلف در امتداد آن منحنی است، به طوری که شیب خط قاطع حداقل در یک نقطه با شیب خط مماس برابر است.

اگر مشتق تابع موقعیت یک ذره نسبت به زمان را سرعت آن ذره در یک لحظه معین تفسیر کنیم پس قضیه مقدار میانگین را مستقیماً از مشاهده سرعتی که ذره‌گذرنده از A در $t = a$ به B در $t = b$ (در حداقل در یک نقطه) باید داشته باشد می‌توان ملاحظه کرد. در واقع سرعت متوسط برای بی‌نهایت نقطه بین دو نقطه $t = a$ و $t = b$ به صورت $\frac{\int_a^b f'(t)dt}{b-a}$ و یا $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ تعریف می‌شود که با سرعت لحظه‌ای در نقطه‌ای بین دو نقطه $t = a$ و $t = b$ یعنی $f'(c)$ برابر است.

چنین کاربردهایی از فیزیک در اثبات ریاضی کار فراتر از نشان دادن مفهوم یک قضیه انجام می‌دهند. این تعبیرها با معرفی مفاهیم مولد اثبات رضایت‌بخش‌تری برای یک قضیه را ممکن می‌سازند. همچنین بر اساس یک هم‌شکلی بین ساختارهای ریاضی و فیزیکی، مسلماً این اثبات‌ها کم‌دقت‌تر نیستند. در این مورد، آن‌ها با بسیاری از آنچه که به نام «ریاضیات تجربی» نامیده شده است تفاوت دارند.

اغلب، استدلال‌های فیزیکی راهنمایی برای ریاضی‌دانان در پیدا کردن اثبات ریاضی زیبا ترند. چنین اثباتی نیز ممکن است به طرق مختلف روشن‌گر جنبه‌های مختلف موضوع باشند. ممکن است جنبه‌های اساسی از یک ساختار پیچیده ریاضی را آشکار کند یا به وضوح بیشتر ارتباط یک قضیه با سایر حوزه‌های ریاضیات یا سایر شاخه‌های علمی سوق دهد. همچنین استفاده از یک استدلال فیزیکی ممکن است به ایجاد یک صورت «کلی‌نگر» از یک اثبات کمک کند که می‌توان آن را به‌طور کامل درک کرد. برخلاف یک استدلال ریاضی پیچیده و اغلب دشوار فهم، مزایای گفته‌شده استدلال‌های فیزیکی حتی برای ریاضی‌دانان عمل‌گرا نیز ارزشمند است. بنابراین، به‌وضوح این نوع استدلال‌ها قابلیت زیادی برای فهم بهتر مطالب توسط دانش‌آموزان را دارند. متأسفانه، از این قابلیت بهره برده نمی‌شود، زیرا مفاهیم و استدلال‌های فیزیکی در تدریس اثبات در کلاس درس تا حد زیادی (و قطعاً به روش سازمان‌یافته‌ای) ادغام نشده‌اند. این تعجب‌آور نیست، زیرا هیچ مجموعه‌ای از تحقیقات در مورد این موضوع وجود ندارد که راهنمایی و ابزارهای لازم برای معلمان و تهیه‌کنندگان برنامه‌های درسی را در اختیار آن‌ها قرار دهد.

۴ مثال‌ها

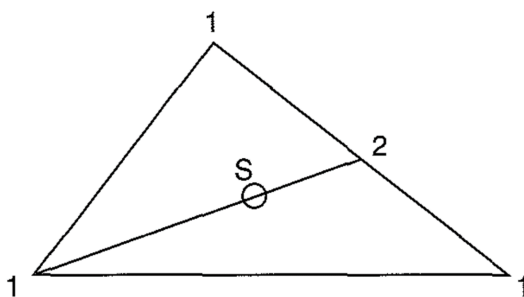
با چند مثال شروع می‌کنیم که ثمربخشی استدلال‌های مرکز ثقل را نشان می‌دهند. برای درک بهتر استدلال‌ها لازم است سه اصل را بپذیریم:

- قانون اهرم؛
- هر پیکربندی هندسی (یک خط، یک شکل، یک صفحه، یا یک جسم جامد) دارای مرکز ثقل است؛
- مرکز ثقل یک پیکربندی می‌تواند با تعیین مراکز ثقل زیرسیستم‌های آن و سپس ترکیب کل قسمت‌های آن تعیین شود.

مثال ۱.۴. با یک استدلال فیزیکی نسبتاً ساده می‌توانیم این قضیه معروف هندسه دبیرستانی را که میانه‌های یک مثلث در یک نقطه هم‌رأس‌اند اثبات کنیم [۲۳]. از سه اصل بالا، در ابتدا می‌توانیم مرکز ثقل مثلث را با در نظر گرفتن مثلث به عنوان یک سیستم با جرم‌های بارگذاری شده در رئوس آن با وزن واحد (شکل ۶) پیدا کنیم (فرض می‌شود که رأس‌ها توسط میله‌های صلب و بی‌وزن به هم متصل شده‌اند).

پس، نقطه وسط یک ضلع که با وزن ۲ واحد بارگذاری شده است، مرکز ثقل آن است، اگر

این نقطه میانی را به رأس سوم وصل کنیم تا یک میانه به دست آید، مرکز ثقل کل مثلث باید روی این میانه قرار بگیرد، و طبق قانون اهرم، باید آن را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم کند، زیرا این ساختار می‌تواند با استفاده از دو ضلع دیگر تکرار شود یعنی سه میانه باید در یک نقطه، یعنی مرکز ثقل، برخورد کنند. مثال بالا، در واقع موضوع تجربه تدریس هانا [۲۳]، بوده است که به دنبال این بوده است که ببیند استدلال‌های فیزیک تا چه اندازه‌ای ممکن است به دانش‌آموزان در درک و اثبات اینکه سه میانه یک مثلث در یک نقطه (که مرکز ثقل مثلث است) به هم می‌رسند کمک می‌کند [۲۱]. نتایج این تجربه تا حدودی دلگرم‌کننده بوده است. از نظرات دانش‌آموزان و ارزیابی کار آن‌ها توسط معلم، کاملاً واضح بوده است که چندین دانش‌آموز درک درستی از نقش اصول فیزیک در اثبات یک قضیه ریاضی نشان داده‌اند. با این حال، برخی از دانش‌آموزان که اثبات را تنها به عنوان یک تعمیم از یک مشاهده تجربی در نظر می‌گرفتند دچار بدفهمی می‌شدند.

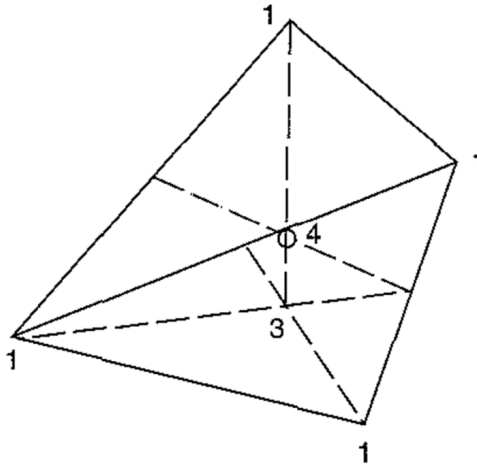


شکل ۶. مثلث با جرم‌های مساوی واقع در رأس‌های آن

مثال ۲.۴. اینکه استدلال مثال بالا را می‌توان بلافاصله به سه بعد تعمیم داد توانایی قابل توجه استدلال‌های ایستایی را به وضوح نشان می‌دهد. می‌توان نشان داد که چهار خط اتصال رئوس دلخواه از یک چهاروجهی به نقاط تقاطع سه میانه مثلث‌های مقابل رئوس همگی در یک نقطه به هم می‌رسند.

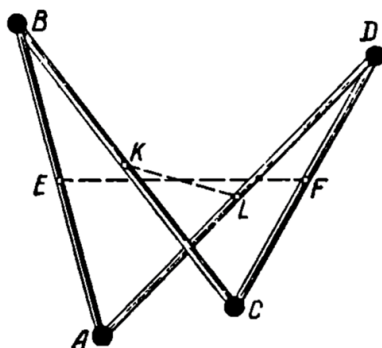
برای اثبات این قضیه هندسی پیچیده، چهارضلعی که در چهار رأس آن با جرم‌های مساوی ۱ واحد بارگذاری شده است (شکل ۷) در نظر گرفته شده است [۲۳]. دوباره، رئوس با میله‌های صلب و بی‌وزن به هم متصل می‌شوند. حالا مرکز ثقل یک مثلث را در نظر می‌گیریم که نقطه تلاقی میانه‌های سه ضلع این مثلث خواهد بود و با وزن ۳ واحد بارگذاری می‌شود. بنابراین، مرکز ثقل کل چهاروجهی، باید روی خطی قرار بگیرد که این نقطه و بقیه رئوس را به هم وصل می‌کند و طبق قانون اهرم باید این خط را در نسبت ۱:۳ تقسیم کند. از آنجا که این استدلال می‌تواند (به دلیل

تقارن) برای هر وجه مثلث و رأس مقابل آن تکرار شود، مشخص است که همه این خطوط در یک نقطه، یعنی مرکز ثقل چهاروجهی، به هم می‌رسند.



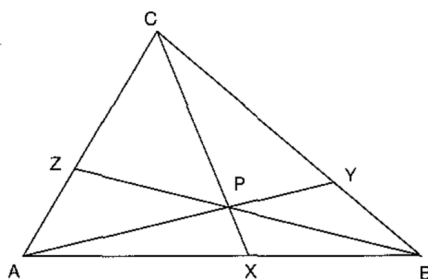
شکل ۷. چهاروجهی با جرم‌های برابر در رأس‌های آن

در [۴۲]، این اثبات به صورت دیگری بیان شده است که در ادامه می‌آوریم. فرض کنید یک چهارضلعی فضایی $ABCD$ داریم (شکل ۸). نشان خواهیم داد که خطوط مستقیم EF و KL که نقاط میانی اضلاع مقابل خود را به هم پیوند می‌دهند متقاطع‌اند. در رأس‌های چهارضلعی وزنه‌های مساوی قرار می‌دهیم. ما این وزنه‌ها را به عنوان نقاط مادی در نظر می‌گیریم. همان‌طور که در «اثبات» قضیه میانه‌ها چنین بود. برای کشف مرکز ثقل چهارضلعی بر روی هریک از خطوط مستقیم EF و KL کافی است نشان دهیم که مرکز ثقل روی EF قرار دارد (اینکه مرکز ثقل روی KL نیز قرار دارد، به روشی مشابه نشان داده می‌شود). برای انجام این کار، سیستم مادی را به دو بخش افراز می‌کنیم: نقاط A, B, C, D را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم به قسمی که نقاط A و B را متعلق به یکی از آن‌ها و نقاط C و D را متعلق به دیگری در نظر می‌گیریم. مرکز ثقل قسمت اول در نقطه E و مرکز ثقل قسمت دوم در نقطه F واقع خواهد شد. براساس قضیه فرمول‌بندی شده در ابتدای این بخش، مرکز ثقل کل چهارضلعی بر روی خط مستقیم EF قرار دارد. اثبات اینکه بخش‌های EF و KL در نقطه تقاطع یکدیگر را به دو نیم تقسیم می‌کنند، ساده است و به خواننده واگذار می‌شود.



شکل ۸. نمایش یک چهارضلعی فضایی با وزنه‌های مساوی واقع در رأس‌های آن

مثال ۳.۴. قضیه معروف سوا یک شرط کلی به دست می‌دهد که سه خط داخلی یک مثلث (خطوطی که رأس را به نقطه‌ای در طرف مقابل متصل می‌کند) در یک نقطه همدیگر را قطع کنند. از این شرط کلی می‌توان قضیه‌های نیمسازهای زاویه‌ها، میانه، ارتفاع و عمودمنصف‌ها را استخراج کرد (در ادامه خطوط داخلی را «خطوط قاطع»^۱ می‌نامیم. خطوط قاطعی که شرایط خط‌های سوا را برآورده می‌کنند خطوط سوایی نامیده می‌شوند؛ شکل ۹ را ببینید.



شکل ۹. خطوط سوایی در یک مثلث

براساس این قضیه (شکل ۹ را ببینید) سه خط سوایی AX ، BZ ، AY و CX در مثلث ABC در یک نقطه هم‌رأس هستند اگر و فقط اگر دو ضرب تشکیل‌شده توسط «قطعات متناوب» برابر باشند، یعنی، داشته باشیم

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = 1 \quad \text{یا} \quad \overline{AX} \cdot \overline{BY} \cdot \overline{CZ} = \overline{XB} \cdot \overline{YC} \cdot \overline{ZA}$$

نخست اثبات ارائه شده در [۲۳] را بیان می‌کنیم. دوباره از رئوس مثلث با جرم‌های بارگذاری شده استفاده می‌کنیم، اما این بار از وزن‌های مختلف بهره می‌گیریم. روش کلی این است که وزن‌ها را به روشی تعریف کنیم که محل تقاطع سه خط سوایی، تبدیل به مرکز ثقل مثلث بارگذاری شده بشود. بنابراین، وزن‌ها را به صورتی تعریف می‌کنیم که دو تساوی زیر برقرار باشد

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{AX}} = \frac{\text{جرم در } A}{\text{جرم در } B} \quad \text{و} \quad \frac{\overline{YC}}{\overline{BY}} = \frac{\text{جرم در } B}{\text{جرم در } C}$$

پس X و Y باید به ترتیب مراکز ثقل AB و BC باشند. اکنون، فرض می‌کنیم که سه خط قاطع در P هم‌رأسند. از آنجا که X مرکز ثقل AB است، مرکز گرانش مثلث ABC باید روی CX قرار داشته باشد. به طور مشابه، مرکز گرانش مثلث ABC باید روی AY قرار داشته باشد، بنابراین، P مرکز ثقل مثلث ABC و در نتیجه، Z مرکز گرانش AC است. از این رو

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZC}} = \frac{\text{جرم در } C}{\text{جرم در } A},$$

و بنابراین،

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{AX}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{BY}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZC}} = 1.$$

برای نشان دادن عکس قضیه، فرض می‌کنیم که حاصل ضرب‌های جایگزین برابر هستند، یعنی ضرب آن‌ها برابر با ۱ است. وزن‌های A ، B ، C به صورت بالا تعریف شده‌اند، به طوری که X و Y به ترتیب مراکز ثقل AB و BC هستند. پس مطابق شرایط برای قطعات متناوب هستند. اکنون داریم

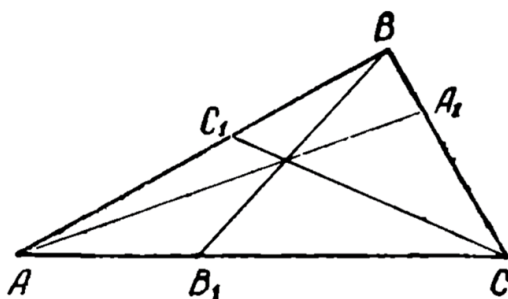
$$\frac{\text{جرم در } C}{\text{جرم در } A} = \frac{\text{جرم در } B}{\text{جرم در } A} \cdot \frac{\text{جرم در } B}{\text{جرم در } C} = \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZC}}.$$

بنابراین، Z مرکز ثقل AC است، یعنی سه خط عرضی هم‌رأسند، زیرا هریک از خطوط قاطع که یک رأس را به مرکز گرانش ضلع مقابل وصل می‌کند، باید از مرکز ثقل کل مثلث عبور کند و در نتیجه در یک نقطه به هم می‌رسند.

در [۴۲]، مجدداً با یک نگاه سیستمی به مسئله، اثبات مشابهی برای این قضیه داده شده است که در ادامه بیان می‌کنیم.

قضیهٔ مربوط به هم‌رأسی میانه‌های یک مثلث یک مورد خاص از قضیهٔ معروف به قضیهٔ سوا است. فرض کنید A_1 ، B_1 و C_1 سه نقطه در اضلاع BC ، CA و AB از مثلث ABC باشد (شکل ۱۰). به منظور اینکه که خطوط مستقیم AA_1 ، BB_1 و CC_1 هم‌رأس باشند لازم و کافی است که رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1 \quad (5)$$



شکل ۱۰. نمایش سه خط هم‌رأس در یک مثلث

توصیه می‌شود که خواننده بررسی کند که رابطهٔ (۵) در موارد زیر برقرار است.

- وقتی خطوط مستقیم AA_1 ، BB_1 و CC_1 نیمساز یک مثلث هستند (از قضیه‌ای استفاده کنید که بیان می‌کند نیمساز یک زاویه در مثلث، ضلع مقابل را به قطعات متناسب با اضلاع مجاور تقسیم می‌کند). از این‌رو، نیمسازهای یک مثلث هم‌رأس هستند.
- وقتی خطوط مستقیم AA_1 ، BB_1 و CC_1 ارتفاع‌های مثلث هستند. (ارتفاع ضلع مربوط را به بخش‌هایی تقسیم می‌کند که طول این بخش‌ها توسط یک فرمول خاص به دست می‌آید و می‌توان از این فرمول استفاده کرد). از این‌رو نتیجه می‌شود که ارتفاع‌های یک مثلث هم‌رأس هستند.

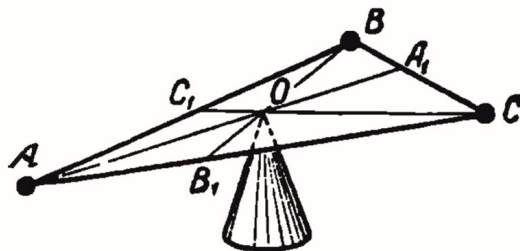
اکنون، به اثبات قضیهٔ سوا می‌پردازیم.

اثبات قضیهٔ سوا. فرض کنید رابطهٔ (۵) برقرار است. نشان خواهیم داد که خطوط مستقیم AA_1 ، BB_1 و CC_1 هم‌رأس هستند. این استدلال همان مسیری را دنبال می‌کند که در دو مورد اثبات قبل وجود داشت. ما نشان خواهیم داد که با انتخاب مناسب بارهای قرار گرفته در رأس‌ها مرکز ثقل سیستم روی هریک از خطوط مستقیم AA_1 ، BB_1 و CC_1 قرار دارد. فرض کنیم

$$AB_1 = a, B_1C = b, CA_1 = c, A_1B = d, BC_1 = e, C_1A = f,$$

به طوری که $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 1$. در رأس A یک بار برابر با bd ، در رأس B یک بار برابر با ac ، در رأس C یک بار برابر با ad قرار می‌دهیم (در اثبات ارائه‌شده در [۲۳] مقدار دقیق جرم‌ها بیان نشده است، بلکه نسبت آن‌ها گفته شده است). مرکز ثقل سیستم $\{A, C\}$ در نقطه‌ای قرار دارد که فواصل آن از رئوس A و C با بارهای این رأس‌ها نسبت معکوس دارند! اما B_1 چنین نقطه‌ای است. به همین ترتیب، مرکز ثقل سیستم $\{B, C\}$ در نقطه A_1 قرار دارد. در نهایت مرکز ثقل سیستم $\{A, B\}$ در نقطه‌ای قرار دارد که فواصل آن x و y از رئوس A و B با بارهای bd و ac هم نسبت معکوس دارند، یعنی $x + y = f + e$ و $\frac{x}{y} = \frac{ac}{bd}$. اما از رابطه (۵) نتیجه می‌شود که $\frac{f}{e} = \frac{ac}{bd}$. بنابراین $x = f$ و $y = e$. بنابراین، مرکز گرانش سیستم $\{A, B\}$ در نقطه C_1 می‌افتد. گفتنی است که با قضیه‌ای که در ابتدای این بخش بیان شد، مرکز ثقل کل مثلث روی هریک از خطوط مستقیم AA_1 ، BB_1 ، و CC_1 قرار دارد.

برعکس، فرض کنید نقطه تلاقی خطوط مستقیم AA_1 ، BB_1 ، و CC_1 نقطه O باشد. در ادامه، نشان خواهیم داد که رابطه (۵) برقرار است. برای نشان دادن این موضوع، مثلث خود را به صورت یک لایه بی‌وزن تصور می‌کنیم. آن را به صورت افقی قرار می‌دهیم و آن را در O معلق می‌کنیم. اکنون، بارها را در رئوس به گونه‌ای قرار دهید که حالت تعادل مثلث حفظ شود (شکل ۱۱).



شکل ۱۱. نمایش مثلث معلق در یک نقطه

از گزاره ۱۰۳ در بخش قبلی نتیجه می‌شود که نقطه O مرکز ثقل مثلثی است که با بارهای شکل ۱۱ مجهز شده است. بنابراین مرکز ثقل سیستم تشکیل‌دهنده این بارها است. بنابراین نقطه O باید روی خط مستقیمی قرار داشته باشد که A را به مرکز گرانش سیستم $\{B, C\}$ پیوند می‌دهد و

بنابراین A_1 ، مرکز ثقل سیستم $\{B, C\}$ است. به همین ترتیب، B_1 و C_1 به ترتیب مراکز ثقل سیستم‌های $\{A, B\}$ و $\{A, C\}$ هستند. اگر جرم نقاط مادی A, B, C را به ترتیب با q, p, r و نشان دهیم طبق بخش قبل داریم

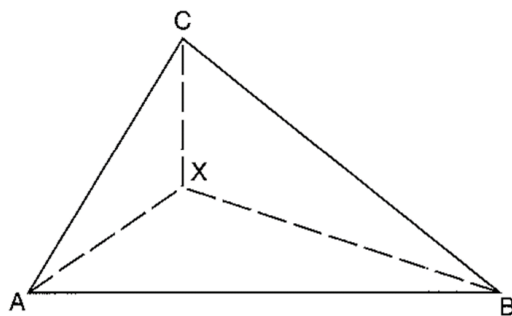
$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{r}{p}, \quad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{q}{r}, \quad \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{p}{q}.$$

با ضرب تمام این نسبت‌ها رابطه مطلوب (۵) به دست می‌آید. $\square$

برای مثال بعد به یک تعریف نیاز داریم.

تعریف ۴.۴ (نقطه فرما). نقطه فرمای مثلث ABC عبارت از نقطه‌ای مانند X است که مجموع فواصل X از سه رأس آن مثلث کمینه گردد (شکل ۱۲).

یک مثال واقعی و کاربردی برای این مفهوم هندسی مهم می‌تواند مکان بهینه یک نیروگاه تامین‌کننده برق سه شه باشد.



شکل ۱۲. نقطه فرما

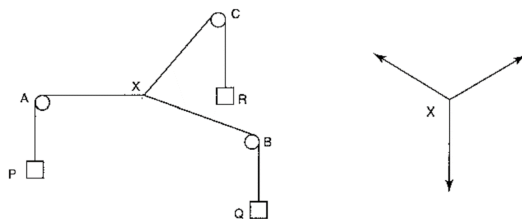
مثال ۵.۴. در این مثال، اصول مکانیکی متفاوتی وجود دارند [۲۳]. برای تعیین نقطه فرمای یک مثلث، اولاً جمع نیروها توسط قانون متوازی‌الاضلاع مشخص می‌شود و دوم اینکه سیستمی از اجسام متصل بهم در میدان گرانشی به حالتی تمایل دارد که مرکز ثقل مشترک اجسام تشکیل‌دهنده آن در پایین‌ترین موقعیت ممکن قرار گیرد (انرژی پتانسیل به حداقل برسد).

راه‌حل‌های مسئله با استفاده از روش‌های ابتدایی هندسه یا حساب دیفرانسیل و انتگرال، نه ساده هستند و نه واضح. مطابق شکل ۱۳ سه رشته XAP ، XBQ ، و XCR از روی قرقره‌ها عبور می‌کنند در نقطه پایانی مشترک خود به یکدیگر متصل می‌شوند، همچنین در انتهای دیگر

رشته‌ها، وزنه‌های مساوی را آویزان می‌کنیم. اکنون سؤال این است که Q ، P ، X و R به کدام سو حرکت می‌کنند؟ البته جواب باید موقعیتی باشد که در آن سه نیروی وارد بر X ، با توجه به وزنه‌ها، همدیگر را متعادل کنند. از طرف دیگر، X به نقطه‌ای حرکت می‌کند که سه وزن Q ، P ، R متصل به هم، تا حد امکان پایین بیایند. این همان حالت حداقل انرژی پتانسیل است و این بدان معنی است که $AP + BQ + CR$ یک مقدار بیشینه به خود می‌گیرد. از آنجا که مجموع طول‌های سه رشته ثابت است، نتیجه می‌شود که $AX + BX + CX$ یک مقدار کمینه به خود می‌گیرد. بنابراین، X به نقطه فرمای مثلث ABC حرکت می‌کند. از آنجا که در موقعیت تعادل، بین نیروهای سه‌گانه تعادل برقرار می‌شود، و از آنجا که وزن‌ها برابر بودند، بنابراین، به دلیل تقارن، جهت نیروها باید به یک اندازه به یکدیگر مایل باشند. بنابراین

$$\angle AXB = \angle CXA = \angle BXC \leq 120^\circ.$$

در مثلث‌هایی که همه زاویه‌ها کمتر از 120° درجه باشد نقطه فرما داخل مثلث قرار می‌گیرد و در صورتی که یک زاویه بزرگ‌تر یا مساوی 120° درجه باشد رأس همان زاویه نقطه فرما است. نقطه‌ای که در شرط بالا صدق کند به راحتی قابل ساختن است. با نگاهی به گذشته این ایده هوشمندانه، فرد بینشی واقعی نسبت به مسئله پیدا می‌کند. از همان ابتدا، فرد احساس می‌کند که نقطه فرما بلافاصله با نوعی تقارن و قیاس فیزیکی ماهیت این تقارن مشخص می‌شود. بهایی که باید برای این بینش شهودی بپردازید، جز به کارگیری یک دیدگاه کلی‌نگر و اساساً یک اصل غیرریاضی نیست.



شکل ۱۳. یک وسیله مکانیکی برای یافتن نقطه فرما

۵ اثبات‌های فیزیکی و آموزش ریاضی

دلایل آموزشی بسیاری برای بررسی استفاده از استدلال‌های فیزیکی در اثبات‌های ریاضی وجود دارد. همان‌طور که قبلاً ذکر شد، در کشورهای غربی یک گرایش برای دوری از استفاده اثبات در کلاس

درس وجود دارد.^۱ به نظر می‌رسد این تحول ارزش آموزشی تدریس ریاضیات را تهدید می‌کند و باید توسط روش‌های جدید آموزش اثبات با آن مقابله شود. با توجه به علاقه در حال ظهور برای بازگرداندن اثبات به برنامه درسی ریاضیات، راه‌هایی را که می‌تواند به غلبه بر مشکلات قبلی آموزش اثبات کمک کند پیشنهاد خواهیم کرد.

ظاهراً گرایش فعلی به سمت اجرای ریاضیات تجربی است که خود به تولید داده‌هایی که «کاملاً» قابل اعتماد هستند مربوط می‌شود و تبادل موثر درک شهودی باید با تأکید بیشتر روی ریاضیات تجربی در مدارس منعکس شود [۸]. اما ریاضیات تجربی در مدارس نباید محدود به «ریاضیات مبتنی بر کامپیوتر» باشد. از دیدگاه آموزشی چنین گسترشی خطرناک است. بلکه ریاضیات تجربی باید شامل یک جزء قوی از کاربردهای کلاسیک ریاضیات در جهان فیزیکی باشد. در انجام ریاضیات تجربی لازم است این سؤال که ریاضیات چگونه به کشف و درک دنیای اطراف ما کمک می‌کند هادی دانش‌آموزان و معلمان باشد. همان‌طور که در بالا بحث شد، ریاضیات تجربی در مقابل اثبات نمی‌ایستد، بلکه برعکس، با آن همسو است. اگر هدف کار آزمایشگاهی مشاهده واقعی باشد، باید هوشمندانه انجام شود، بنابراین، به ساخت مدل‌ها، ابداع استدلال‌هایی برای پاسخ به پرسش «چرا»، مطالعه پیامدهای ناشی از مفروضات و غیره نیازمند است.

در کشورهای غربی، فیزیک، که نزدیک‌ترین رشته به ریاضیات است، موضوعی است که کمتر به آن احتیاج پیدا شده است [۲۳]. بنابراین برای حفظ معنی‌داری و تدریس ریاضیات بین‌رشته‌ای می‌توان مقداری از فیزیک مقدماتی را در برنامه آموزشی ریاضی وارد کرد.

جنبه کلی‌نگر بسیاری از استدلال‌ها که می‌توان از فیزیک به اثبات‌های ریاضی آورد، همان‌طور که در بالا ذکر شد، بخش مهمی از قابلیت‌های ریاضیات است که اغلب دست کم گرفته شده است و در عوض، روش‌های گام‌به‌گام غالب است. یافتن نمونه‌های خوب از استدلال‌های فیزیکی که در اثبات‌های ریاضی مفید هستند، به ایجاد روشی نوین در آموزش ریاضیات کمک می‌کند [۲۳].

اکنون سؤالات زیر مطرح می‌شود.

- چگونه می‌توان نقش واقعی استدلال فیزیکی را در تمرین ریاضی به بهترین وجه در برنامه آموزشی منعکس کرد؟
- چگونه می‌توان از چنین اصولی به بهترین وجه در کلاس درس برای ارتقاء درک مطالب ریاضی استفاده کرد؟

۱. نویسنده دوم شخصاً با تجربه محدودی که در تدریس درس هندسه برای دانش‌آموز مقطع دبیرستان در کشور استرالیا در سال ۲۰۰۲ داشته است این گرایش را مشاهده کرده است.

• چگونه استدلال‌های فیزیکی می‌توانند به فهم بهتر اثبات در دانش‌آموزان کمک کنند؟

برای پرداختن به سؤال اول باید معرفت‌شناسی ریاضیات را بررسی و آن را با ماهیت ریاضیات، آن‌گونه که در عمل دیده می‌شود، مقایسه کرد. تفاوت‌های ضمنی معرفت‌شناسی ضروری است. برای مثال، اغلب به دانش‌آموزان گفته می‌شود که قضیهٔ مجموع زوایا برای مثلث‌ها در حالت کلی درست است، فقط به این دلیل که از نظر ریاضی ثابت شده است. کشف ارتباط این اثبات با اندازه‌گیری در دنیای واقعی نیاز به درک درست از معرفت‌شناسی و ماهیت علم ریاضی دارد و به‌گونه‌ای باید توسط معلمان به دانش‌آموزان تفهیم شود تا موجب قطع ارتباط و یا سو برداشت نشود [۲۲، ۲۳].

سؤال دوم، استفاده از اثبات برای ارتقاء درک دانش‌آموزان از ریاضیات است. دانش‌آموزان با اثبات ریاضی آشنا می‌شوند درحالی که تصورات قبلی و عدم قطعیت شناختی در آن‌ها وجود دارد. معلمان باید متوجه هر دوی این نکات باشند. مثلاً وقتی دانش‌آموزان اثبات قضیه‌ای را می‌بینند اغلب می‌گویند که اثبات را فهمیده‌اند، اما هنوز لازم است آن را با آزمایش تجربی بیازمایند! از دیدگاه ریاضی محض، چنین درخواستی کاملاً غیرمنطقی به نظر می‌رسد و معلمان معمولاً آن را به‌عنوان نشانه‌ای از عدم فهم دانش‌آموزان از مفهوم اثبات ریاضی تلقی می‌کنند. با این حال، از دیدگاه یک فیزیک‌دان نظری چنین درخواستی کاملاً طبیعی به نظر می‌رسد. هیچ فیزیک‌دانی یک واقعیت را صرفاً براساس استنتاج نظری نمی‌پذیرد مگر آنکه آن را مشاهده کند. بنابراین، توجه به نقش اثبات ریاضی در فیزیک نظری می‌تواند به‌خوبی به ما نشان دهد که دانش‌آموزان به اثبات چه نگاهی دارند [۲۳].

به خاطر داشته باشید که در تجزیه و تحلیل رویکرد دانش‌آموزان به اثبات، مقایسهٔ او با یک فیزیک‌دان نظری، زمانی مفید است که از نرم‌افزارهای هندسه مانند Cabri-Geometre یا مثلاً Geometer's Sketchpad که کار اکتشافی شبیه فیزیک تجربی را میسر می‌سازند استفاده شود. در استفاده از مفاهیم و استدلال‌های فیزیکی در اثبات‌های ریاضی ممکن است سؤالاتی در ذهن دانش‌آموزان پیدا شود که مقایسهٔ دانش‌آموزان با فیزیک‌دانان نظری باعث بهتر شدن رفتار معلمان در مواجهه با این سؤالات می‌شود [۲۳].

۱۰۵ یک نمونه: قضیهٔ فیثاغورس و اثبات‌های آن

چه اثباتی از قضیهٔ فیثاغورس [۴۱، ۷] ممکن است برای یک معلم فیزیک جذاب باشد؟ اثباتی که از مفهوم جرم استفاده کند به‌طور یقین مورد توجه او خواهد بود. در حالی که اثبات‌های مختلف

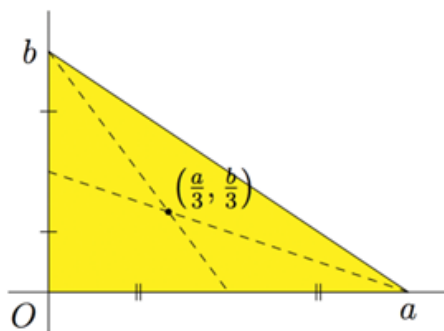
قضیه فیثاغورس از مرکز دایره محاطی و مرکز دایره محیطی یک مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنند [۳۴] احتمالاً بیشتر افراد از اثباتی که از مرکز جرم مثلث استفاده می‌کند آگاه نیستند. در این بخش به جزئیات یکی از این اثبات‌ها می‌پردازیم.

اجازه دهید، ابتدا مطالب مورد نیاز از فیزیک را خلاصه کنیم. یک ناحیه $X \subseteq \mathbb{R}^2$ با چگالی یکنواخت و مساحت کل A را در نظر بگیرید. اگر X را به قسمت‌های متمایز $X_1, X_2, \dots, X_n$ تجزیه کنیم، آنگاه مرکز جرم کل را می‌توان در ابتدا با یافتن مرکز جرم $(\bar{x}_j, \bar{y}_j)$ و سطح A_j از قسمت j ام و سپس محاسبه میانگین وزنی

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^n A_j \bar{x}_j}{A}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^n A_j \bar{y}_j}{A}$$

به دست آورد (رابطه (۴) و توضیحات پس از آن را ببینید).

مطالبی نظیر اینکه مرکز جرم یک مثلث میانه‌های آن را به نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند را مفروض می‌گیریم (به [۴] برای اثباتی سراسر مراجعه کنید). بنابراین، نتیجه می‌گیریم که مرکز سطح یک مثلث قائم‌الزاویه با رئوس $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$ دارای مختصات $(\frac{a}{3}, \frac{b}{3})$ است؛ این نکته در شکل ۱۴ نشان داده شده است.

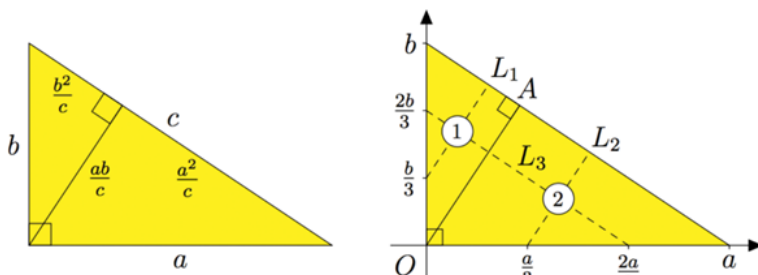


شکل ۱۴. مرکز جرم یک مثلث قائم‌الزاویه

با داشتن این جزئیات اثبات قضیه فیثاغورس با شکل آشنای ۱۵ در زیر آغاز می‌شود. مثلث بیرونی به‌وضوح متشابه با هریک از دو مثلث داخلی است و طول هر ضلع روی آن مشخص شده است. اثبات‌های سنتی مختلفی براساس این ساختار وجود دارند. یک رویکرد این است که c برابر است با مجموع اجزای آن است، یعنی داریم

$$c = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c}.$$

بدیهی است که رابطه بالا حاکی از نتیجه مطلوب است. رویکرد دیگر این است که توجه کنید که مساحت کل برابر است با مجموع مساحت‌های اجزای آن است.



شکل ۱۵. تجزیه مثلث قائم‌الزاویه به دو مثلث متشابه

در اینجا با ذکر این نکته که مرکز جرم یک جسم برابر است با مجموع مراکز جرم وزنی قطعات آن، اثبات دیگری می‌آوریم. ابتدا مرکز جرم $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ از مثلث ۱ در شکل ۱۵ را تعیین می‌کنیم. توجه داشته باشید که خط L_3 ، ضلع طول b را به نسبت ۲:۱ تقسیم می‌کند. پس، از آنجا که L_3 با ضلع به طول c موازی است، خط L_3 نیز OA را به نسبت ۲:۱ تقسیم می‌کند. بنابراین مرکز جرم از مثلث ۱ در خط L_3 قرار دارد. به همین ترتیب می‌توانیم استدلال کنیم که مرکز جرم موردنظر نیز در خط L_1 قرار دارد. بنابراین نقطه تقاطع $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ خطوط عمود بر هم $L_1: -ax + by = \frac{b^2}{3}$ و $L_3: bx + ay = \frac{2ab}{3}$ را تعیین می‌کنیم. نتیجه می‌شود که

$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \left(\frac{ab^2}{3(a^2 + b^2)}, \frac{b(2a^2 + b^2)}{3(a^2 + b^2)} \right) \quad (6)$$

به همین ترتیب، مرکز جرم مثلث ۲، نقطه تقاطع $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ دو خط عمودی L_3 و $L_1: ax - by = \frac{a^2}{3}$ است. پس، نتیجه می‌شود که

$$(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = \left(\frac{b(2b^2 + a^2)}{3(a^2 + b^2)}, \frac{ab^2}{3(a^2 + b^2)} \right). \quad (7)$$

اکنون می‌توان مرکز جرم مثلث بیرونی را به عنوان مجموع وزنی اجزای آن محاسبه کرد. محاسبات جبری اندکی ناخوشایند است، بنابراین با صرف‌نظر از برخی از جزئیات به دست می‌آوریم

$$\bar{x} = \frac{A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{ab^2}{3c^2} \frac{ab^2}{3(a^2 + b^2)} + \frac{ba^2}{3c^2} \frac{a(2b^2 + a^2)}{3(a^2 + b^2)}}{\frac{ab^2}{3c^2} + \frac{ba^2}{3c^2}} = \frac{a(a^2 + b^2)}{3c^2}. \quad (8)$$

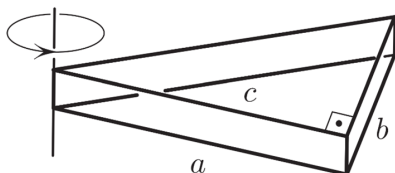
اما، از شکل ۱۵ داریم $\bar{x} = \frac{a}{3}$. لذا نتیجه مطلوب، یعنی رابطه فیثاغورس، از این دو رابطه اخیر به دست می‌آید. بنابراین، دیدیم که مرکز جرم می‌تواند چیز جدیدی نسبت به اثبات سنتی قضیه فیثاغورس ارائه دهد.

۱.۱.۵ اثبات دیگری برای قضیه فیثاغورس

برای اثبات‌های دیگری برای این قضیه مشهور، نخست مطلبی را که ظاهراً به دلیل کم‌اهمیت بودنش ارزش ذکر ندارد، بیان می‌کنیم: آب در یک ظرف در حال سکون، بدون اغتشاش، باید در حال سکون باقی بماند. گفتنی است که این واقعیت قضیه فیثاغورس را به عنوان نتیجه‌ای به دنبال دارد. علاوه بر این، این امر که بی‌اهمیت به نظر می‌رسد بر قانون شناوری ارشمیدس تکیه دارد و ما را به صورت سه‌بعدی قضیه فیثاغورس هدایت می‌کند.

روش «مخزن ماهی» برای اثبات قضیه فیثاغورس

اجازه دهید یک «مخزن ماهی» منشوری شکل با قاعده‌ای به شکل مثلث قائم‌الزاویه بسازیم (شکل ۱۶). مخزن را طوری سوار می‌کنیم که بتواند آزادانه حول محور عمودی گذرنده از یک انتهای وتر بچرخد. حالا اجازه دهید مخزن ماهی خود را با آب پر کنیم. آب روی دیوارها در سه جهت فشار می‌آورد. شکل ۱۷ نشان می‌دهد که هر نیرو سعی می‌کند مخزن را به دور P بچرخاند. البته، رقابت آن‌ها حالت تساوی دارد: مخزن هیچ تمایلی برای چرخیدن ندارد. در غیر این صورت موتوری داشتیم که از هیچ سوختی استفاده نمی‌کرد، یعنی یک ماشین به اصطلاح با حرکت دائمی که وجود آن براساس قانون بقای انرژی ناممکن است.

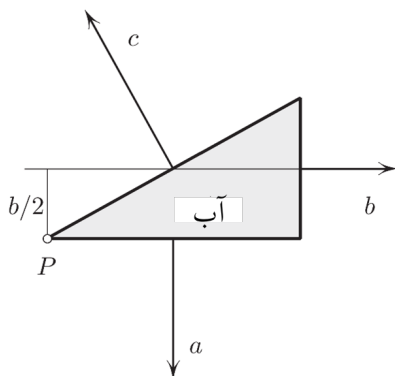


شکل ۱۶. مخزن ماهی پر از آب که آزادانه می‌تواند حول یک لبه عمودی بچرخد اما تمایلی به دوران ندارد. در این حالت گشتاور یا «تمایل به دوران» برابر مجموع سه گشتاور نیروهای فشاری است. در اینجا توجه می‌کنیم که گشتاور نیروی حول یک لولای P به سادگی برابر با مقدار حاصل ضرب نیرو در فاصله خط اثر نیرو از نقطه لولا است. گشتاور شدتی را اندازه‌گیری می‌کند که با آن نیرو سعی می‌کند جسمی را که به آن وارد می‌شود حول P بچرخاند. برای راحتی کار، اجازه دهید نیروی ناشی

از فشار را ۱ کیلوگرم در واحد طول دیوار فرض کنیم (همیشه می‌توانیم با تنظیم عمق آب به آن دست پیدا کنیم). این سه نیرو عبارت‌اند از a ، b ، و c . طول بازوی نیروها، به ترتیب برابر $\frac{a}{\rho}$ ، $\frac{b}{\rho}$ ، و $\frac{c}{\rho}$ هستند و شرایط گشتاور صفر به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$a\frac{a}{\rho} + b\frac{b}{\rho} - c\frac{a}{\rho} = 0, \quad (9)$$

یا به طور معادل $a^2 + b^2 = c^2$ که قضیه فیثاغورس را نتیجه می‌دهد.



شکل ۱۷. قضیه فیثاغورس معادل صفرشدن گشتاور ترکیبی روی مخزن حول نقطه P است.

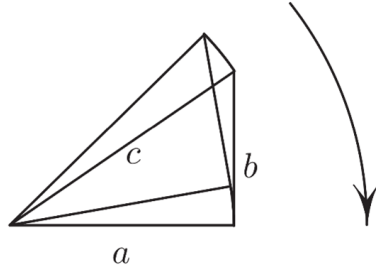
ملاحظه ۱۰.۵. توجه داشته باشید که ما مجبور نیستیم مخزن ماهی موردنظر را حتی در آزمایش فکری بسازیم، بلکه می‌توانیم منشور را در حجم بزرگ‌تری از آب در نظر بگیریم. قضیه فیثاغورس در این حالت هم از این واقعیت ناشی می‌شود که منشور خودبه‌خود تحت فشار سیال روی سطوح عمودی آن نخواهد چرخید. نتیجه می‌گیریم که قضیه فیثاغورس پیامد این واقعیت است که آب ساکن همچنان ساکن باقی می‌ماند.

صورت دقیق‌تر این استدلال فیزیکی

نکته محوری اثبات «مخزن ماهی» صفر شدن گشتاور خالص حول P بود (شکل ۱۶). چگونه می‌توانیم این ایده گشتاور صفر را به صورت کاملاً ریاضی بدون توسل به مفاهیم فیزیکی بیان کنیم؟ رابطه فیزیکی (۹) (گشتاور خالص صفر حول P) به عبارت هندسی یعنی «مساحت مثلث وقتی مثلث حول P می‌چرخد تغییر نمی‌کند» تبدیل می‌شود. در ادامه، اثبات این برابری را بیان می‌کنیم. فرض کنید $A(\theta)$ مساحت مثلثی باشد که به دور P به اندازه زاویه θ می‌چرخد. البته این ناحیه مستقل از θ است. پس، $A'(\theta) = 0$ ، و ما ادعا می‌کنیم که این رابطه مساحت معادل شرط

گشتاور صفر (۹) است. برای نشان دادن این برابری کافی است مشاهده کنیم که

$$A'(\theta) = a \frac{a}{4} + b \frac{b}{4} - c \frac{a}{4}. \quad (10)$$



شکل ۱۸. قضیه فیثاغورس معادل صفرشدن گشتاور ترکیبی روی مخزن حول نقطه P است.

برای نشان دادن رابطه (۱۰)، مطابق شکل ۱۸ مثلث را در یک زاویه کوچک θ حول P می‌چرخانیم. ضلع a قطاعی به مساحت $\frac{1}{4}a^2\Delta\theta$ را طی می‌کند. عبارت مشابه را نیز برای ضلع c داریم. در واقع مساحت طی شده توسط b با عبارت مشابه $\frac{1}{4}b^2\Delta\theta$ داده می‌شود. در اصل، b دو حرکت را به‌طور هم‌زمان اجرا می‌کند: (الف) در راستای خود می‌لغزد و هیچ سهمی در میزان پیمودن ناحیه ندارد، و (ب) چرخش حول محور جلویی خود. نتیجه می‌گیریم که مساحت پیموده شده برابر $\frac{1}{4}b^2\Delta\theta$ است. کل مساحت پیموده شد توسط هر سه ضلع عبارت است از

$$\Delta A = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)\Delta\theta. \quad (11)$$

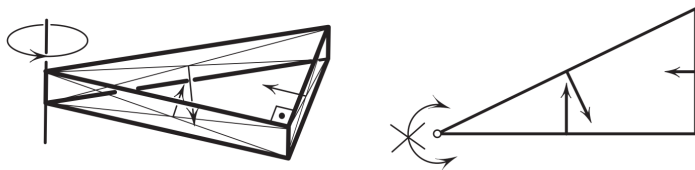
در اینجا علامت منفی به این دلیل است که سطح از طریق وتر «از دست رفته» است. با تقسیم بر $\Delta\theta$ و گرفتن حد به‌صورت $\Delta\theta \rightarrow 0$ ، به‌سادگی رابطه (۹) به دست می‌آید.

آب هنوز در اعماق جریان دارد یک گفته فریبنده و سطحی می‌تواند عواقبی داشته باشد. در چنین جمله‌ای آورده شده است: «بدون اغتشاش خارجی، آب ساکن در ظرف ثابت می‌ماند.» این جمله یک مورد خاص از قانون بقای انرژی است که بیان می‌کند انرژی نمی‌توان ایجاد شود. هرچه این جمله کلی‌تر باشد، ساده‌تر به نظر می‌رسد. در واقع، این گفته آشکار مستلزم حقایق کمتر بدیهی زیر است.

• قضیه فیثاغورس؛

• قانون شناوری ارشمیدس.

اولین مورد در اصل با روش «مخزن ماهی» توضیح داده شد. در آن استدلال به جای مخزن ماهی می‌توانیم منشوری از آب را تصور کنیم که مانند شکل ۱۹ در یک حجم بزرگ از آب ساکن آویزان است. چون منشور در حالت تعادل است، مجموع گشتاورها (در اطراف هر لبه عمودی) ناشی از فشار به طرف داخل در وجوه عمودی صفر است. این شرط گشتاور صفر همان رابطه (۹) (بسته به علامت) یعنی همان قضیه فیثاغورس است.



شکل ۱۹. مجموع گشتاورهای منشور خیالی آب صفر است.

قانون ارشمیدس «قانون ارشمیدس» می‌گوید که نیروی شناوری که روی یک جسم غوطه‌ور عمل می‌کند (مثلاً یک سنگ) برابر وزن آب جابه‌جاشده توسط جسم است. اثباتی از این قانون در ادامه می‌آید.

اثبات. سنگ غوطه‌ور را با یک حباب آب هم‌شکل جایگزین کنید. این لکه آب، طبق اصل «آب ساکن» در حالت تعادل معلق خواهد بود. بنابراین، نیروی شناوری آب با وزن حباب آب برابر است. اما سنگ همان احساس شناوری را دارد، چون شکلی مشابه حباب آب دارد. □

قضیه سه‌بعدی فیثاغورس

قضیه ۲.۵. برای هر چهاروجهی محدود به سه صفحه متعامد و صفحه چهارم که با هیچ‌یک از سه صفحه دیگر موازی نیست، داریم $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

اثبات فیزیکی. مطابق شکل ۲۰ ما چهاروجهی را با گاز فشرده پر می‌کنیم. مجموع تمام نیروهای فشاری داخلی بر هرم صفر است:

$$\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_c = -\mathbf{F}_d. \quad (12)$$

زیرا در غیر این صورت ظرف ما به‌طور خودبه‌خود در جهت نیروی منته‌ج شتاب می‌گیرد، که به ما منبع انرژی رایگان می‌دهد که به‌وضوح نقض قانون بقای انرژی است. از آنجا که می‌دانیم $(\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b) \perp \mathbf{F}_c$ ، از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود که

$$|\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b|^2 + |\mathbf{F}_c|^2 = |\mathbf{F}_d|^2. \quad (۱۳)$$

به طور مشابه

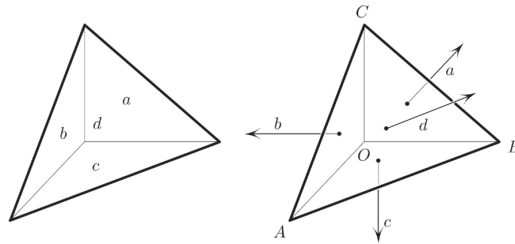
$$|\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b|^2 = |\mathbf{F}_a|^2 + |\mathbf{F}_b|^2. \quad (۱۴)$$

از روابط (۱۳) و (۱۴) نتیجه می‌گیریم

$$|\mathbf{F}_a|^2 + |\mathbf{F}_b|^2 + |\mathbf{F}_c|^2 = |\mathbf{F}_d|^2. \quad (۱۵)$$

حال از تعریف فشار داریم $pa = \text{سطح} \times \text{فشار} = |\mathbf{F}_a|$ ، به طور مشابه $pb = |\mathbf{F}_b|$ ، $pc = |\mathbf{F}_c|$ و $pd = |\mathbf{F}_d|$. با جایگزینی این روابط در (۱۵) و حذف p^2 رابطه $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ نتیجه می‌شود. $\square$

خلاصه آنکه قضیه مساحت یا قضیه سه‌بعدی فیثاغورس به معنای این است که ظرف تحت فشار به شکل نشان داده شده در شکل ۲۰ رانش صفر دارد! یک مشاهدات فیزیکی ساده، یک قضیه ریاضی مرتبه منظم به دست داد.



شکل ۲۰. صورت سه‌بعدی قضیه فیثاغورس

دقیق ساختن اثبات بالا فرد شکاک ممکن است در مورد عدم دقت ریاضی در رسیدن به رابطه (۹) اعتراض کند. در واقع در اینجا به قانون بقای انرژی متوسل شدیم که یک فرمول ریاضی دقیق نیست. برای پاسخ به این اعتراض، مشاهده می‌کنیم که رابطه (۹) معادل عدم تغییر حجم هرم تحت انتقال است. در واقع، رابطه (۹) معادل این است که بگوییم برای هر بردار $\mathbf{r}$ داریم

$$\mathbf{F}_a \cdot \mathbf{r} + \mathbf{F}_b \cdot \mathbf{r} + \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{r} = -\mathbf{F}_d \cdot \mathbf{r} \quad (۱۶)$$

که در آن «۰» نشان‌دهنده ضرب نقطه‌ای یا داخلی دو بردار است. اما عبارت $\mathbf{F}_a \cdot \mathbf{r}$ حجم جاروب شده توسط وجه OBC را وقتی که به اندازه بردار $\mathbf{r}$ جابه‌جا می‌شود، نشان می‌دهد. به‌طور خلاصه، آخرین معادله این واقعیت را که هرم به اندازه بردار $\mathbf{r}$ جابه‌جا می‌شود بیان می‌کند که حجم به دست آمده توسط وجه‌های a, b, c و برابر با حجم از دست‌رفته توسط وجه d است. به بیان دیگر، فرض کنید $V = V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ حجم هرم جابه‌جا شده توسط بردار $\mathbf{r} = (x, y, z)$ باشد. البته V مستقل از $\mathbf{r}$ است، یعنی مشتقات جزئی نسبت به هریک از این سه متغیرها صفر می‌شوند؛ یعنی $\nabla V(\mathbf{r}) = V(x, y, z) = 0$. از نظر فیزیکی، بردار گرادیان $\nabla V(\mathbf{r})$ بردار مشتقات جزئی (نیروی حاصل از فشارهای داخلی گاز در فشار $p = 1$ بر روی دیواره‌های ظرف) است.

مثال‌های ذکر شده در بالا تنها نمونه‌های از کاربرد استدلال‌های فیزیکی برای اثبات قضیه‌های ریاضی بودند. انبوهی از کاربردهای استدلال‌های فیزیکی در ریاضی و برعکس کاربردهای ریاضی در فیزیک را در [۲۸، ۴۲] می‌توان یافت.

در پایان به مثالی از کاربرد استدلال‌های فیزیکی در یک مبحث پیشرفته‌تر از ریاضی اشاره می‌کنیم.

۶ یک مثال پیشرفته از علوم مهندسی

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، مواردی وجود دارد که در آن با استفاده از مفاهیم فیزیکی و استدلال‌های فیزیکی درک ضرورت منطقی حاکم بر مسئله برای ریاضی‌دان آسان‌تر می‌شود.

در این بخش شرط سازگاری و تک‌مقداری بودن حل معادله‌های انتگرالی تکی‌ن از نوع کوشی بیان می‌شود. این معادله‌ها از فرمول‌بندی مسائل مقدار مرزی مختلط در فیزیک کاربردی و مهندسی به دست می‌آیند. به‌ویژه این معادله‌ها نقش مهمی در حل مسائل متنوعی نظیر تماس و ترک^۱ در مکانیک جامدات دارند؛ مسائل تماس مسائلی هستند که در شاخه‌ای از مهندسی مکانیک به نام مکانیک تماس مطرح می‌شوند. مکانیک تماس، مطالعه تغییر شکل اجسام جامدی است که در یک یا چند نقطه با یکدیگر در تماس هستند. در شاخه‌ای از مهندسی مکانیک به نام مکانیک شکست اجسام دارای ترک مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ترک‌ها شکاف‌هایی هستند که در اجسام ایجاد می‌شوند و در اثر بارگذاری‌های مختلف رشد کرده و بزرگ‌تر می‌شوند و در نهایت منجر به شکست قطعات صنعتی می‌گردند. در اثر بارگذاری لبه‌های ترک (شکاف) از هم فاصله می‌گیرند و مقدار این فاصله بازشدگی دهانه ترک نامیده می‌شود. میزان بازشدگی دهانه ترک در ابتدا و انتهای ترک یا دو نوک

1. crack

ترک صفر می‌باشد که منجر به شرط بسته شدن دهانه ترک در نوک ترک‌ها می‌شود. در گروهی از معادله‌های انتگرالی هسته‌ها دارای تکیگی ساده از نوع کوشی هستند. این معادله‌ها را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۱۳، ۱۴]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(t)}{t-s} dt + \int_{-1}^1 k(s,t) \phi(t) dt = f(s), \quad (-1 < s < 1) \quad (17)$$

که در آن $\phi(t)$ تابع مجهول است، و تابع $f(s)$ و هسته $k(s,t)$ توابع معلومی هستند که H -پیوسته در بازه بسته $[-1, 1]$ هستند. تابع $\phi(t)$ باید شرط سازگاری و تک‌مقداری بودن حل معادله‌های انتگرال تکیگی از نوع کوشی، یعنی $\int_{-1}^1 \phi(t) dt = A$ را که در آن A یک عدد ثابت است برآورده کند [۱۳، ۱۴]. حل عددی معادله‌های (۱۷) را فاضل اردوغان^۱ ارائه کرده است. طبیعی است که یافتن شرط سازگاری و تک‌مقداری بودن حل معادله‌های انتگرال تکیگی از این نوع بسیار دشوار می‌نماید در حالی که چنین شرطی به عنوان یک نتیجه بدیهی منتج از فیزیک مسئله، یعنی شرط بسته شدن دهانه ترک در نوک ترک‌ها، به دست می‌آید که فاضل اردوغان نیز به آن اشاره کرده است [۱۳، ۱۴]. چنین شرطی در صورتی که معادله‌های (۱۷)، معادله حاکم بر حل یک مسئله مکانیک شکست باشد، منجر به شرط بدیهی سازگاری و تک‌مقداری بودن حل معادله‌های انتگرال تکیگی از نوع کوشی می‌گردد که یافتن چنین شرطی از تحلیل‌های ریاضی صرف دشوار خواهد بود. تعمیمی از حل معادله‌های (۱۷) در مسائل کلی‌تر مکانیک شکست در [۱۵] آمده است.

مراجع

- [۱] اوسپنسکی، و. آ.، کاربردهایی از مکانیک در ریاضیات، ترجمه کورس ضیائی، آشتی با ریاضیات، ۶ (۱) (۱۳۶۱)، ۸۱-۱۳۳.
- [۲] پارسیان، علی، استدلال‌های فیزیکی در ریاضیات، نشریه ریاضی و جامعه، ۶ (۲) (۱۴۰۰)، ۴۹-۷۳.
- [۳] وان زانتن، ام؛ وان دن هوول پانه‌یزن، ام.، ریاضیات واقعیت‌مدار: تاریخچه مختصری از فرآیند بلندمدت جنبش اصلاحات، ترجمه ندا توانایی و عبدالحمید چکنژاد، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۲ (۱۴۰۲)، شماره ۱، ۲۱۳-۲۲۴.
- [4] Apostol, T. M., Mnatsakanian, M. A., Finding centroids the easy way, *Math. Horizons*, 8 (2000), 7-12.
- [5] Bender, P., Schreiber, A., *Operative Genese der Geometrie*, Hölder-Pichler-Temsky, Vienna, 1985.
- [6] Blum, W., ed., *Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht. Beiträge aus dem ISTRON-Wettbewerb*, Franzbecker, Hildesheim, 1993.

- [7] Bogomolny, A., Pythagorean theorem from the intersecting chords theorem (2015), available at <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/proof79.shtml>.
- [8] Borwein, J., Borwein, P., Girgensohn, R., Parnes, S., Experimental mathematics: a discussion (1996), available at <http://www.cecm.sfu.ca/organics/vault/expmath/expmath/html/expmath.html>.
- [9] Castelnuevo, E., Objekt und Aktion im Unterricht in anschaulicher Geometrie, in *Zur Didaktik des Mathematikunterrichts*, C. Gattegno, ed., Band 2, Schroedel Verlag, Hannover, 1971, 36–53.
- [10] De Villiers, M., An alternative approach to proof in dynamic geometry, *Micromath*, **11** (1995), 14–19.
- [11] Dreyfus, T., Hadas, N., Proof as answer to the question why, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, **28** (1996), 1–5.
- [12] Dörfler, W., Fischer, R., Vorträge des 2, *Internationalen Symposiums für Didaktik der Mathematik vom 26.9 bis 29.9.1978 in Klagenfurt*, Vienna, Hölder-Pichler-Tempsky, 1979.
- [13] Erdogan, F., Approximate solution of system of integral equations, *SIAM J. Appl. Math.*, **17** (1969), 6.
- [14] Erdogan, F., Gupta, G. D., Cook, T. S., Numerical solution of integral equations, in *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, Mechanics of Fracture 1*, G. C. Sih, ed., Noordhoff, Leyden, 1973, 368–425.
- [15] Faal, R. T., Fariborz, S. J., Daghyani, H. R., Antiplane Deformation of Orthotropic Strips with Multiple Defects, *J. Mech. Mater. Struct.*, **1** (2006), 1097–1114.
- [16] Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel, Dordrecht, 1973.
- [17] Freudenthal, H., *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel, Dordrecht, 1983.
- [18] Greer, B., Solving the pentagon problem, *J. Math. Psych.*, **15** (1996), 151–154.
- [19] Hanna, G., Jahnke, H., Proof and application, *Educ. Stud. Math.*, **24** (1993), 421–438.
- [20] Hanna, G., Some pedagogical aspects of proof, *Interchange*, **21** (1996), 6–13.
- [21] Hanna, G., Jahnke, H., DeBruyn, Y., Lomas, D., Teaching mathematical proofs that rely on ideas from physics, *Can. J. Sci. Math. Tech. Educ.*, **1** (2001), 183–192.
- [22] Hanna, G., Jahnke, H., Proof and proving, in *International Handbook of Mathematics Education*, A. Bishop, et al., eds., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996, 877–908.
- [23] Hanna, G., Jahnke, H., Arguments from physics in mathematical proofs: An educational perspective, *For Learn. Math.*, **22** (2002), 38–45.
- [24] Jaffe, A., Quinn, F., Theoretical mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **29** (1993), 1–13.
- [25] Jaffe, A., Proof and the evolution of mathematics, *Synthese*, **3** (1997), 133–146.
- [26] Jahnke, H., *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik-Beweisen als didaktisches Problem*, Materialien und Studien des IDM, Band 10, Bielefeld, IDM, 1978.
- [27] Kogan, B., *The Application of Mechanics to Geometry*, The University of Chicago Press, Chicago, 1974.
- [28] Levi, M., *The Mathematical Mechanics: Using Physical Reasoning to Solve Problems*, Princeton University Press, 2023.
- [29] Mariotti, M., Introducing pupils to proof: a teaching experiment, in *Justifying and Proving in School Mathematics*, C. Hayles, L. Healy, eds., Institute of Education, London, 1995, 174–189.
- [30] Mason, J., Questions about geometry, in *Teaching and Learning School Mathematics*, D. Pimm, E. Love, eds., Hodder and Stoughton, London, 1991, 77–90.
- [31] Monna, A., *Dirichlet's Principle: A Mathematical Comedy of Errors and its Influence on the Development of Analysis*, Oosthoek, Scheltema and Holkema, Utrecht, 1975.

- [32] Niss, M., Blum, W., Huntley, I., *Teaching of Mathematical Modelling and Applications*, Ellis Horwood, New York, NY, 1991.
- [33] OECD, *Proceedings of the Second Conference of the OECD Project: Future Perspectives of Mathematics, Science and Technology Education in OECD Countries*, Organisation for Economic Co-operation and Development, Paris, 1991.
- [34] Oliver, J., Pythagoras theorem: An alternative to note 79.57, *Math. Gaz.*, **81** (1997), 117–118.
- [35] Polya, G., *Mathematics and Plausible Reasoning, vol. I: Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1954.
- [36] Rota, G.-C., The phenomenology of mathematical proof, *Synthese*, **3** (1997), 183–197.
- [37] Struve, H., *Grundlagen einer Geometriedidaktik*, Bibliographisches Institut, Marmheim, 1990.
- [38] Streefland, L., *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research* (R. Rainero et al., trans.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [39] Thurston, W., On proof and progress in mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **30** (1994), 161–177.
- [40] Tokieda, T., Mechanical ideas in geometry, *Amer. Math. Monthly*, **105** (1998), 697–703.
- [41] Treeby, D., A physical proof of the Pythagorean theorem, *Phys. Teach.*, **55** (2017), 92.
- [42] Uspenskii, V., *Some Applications of Mechanics to Mathematics*, Balisdell Publishing Company, New York, NY, 1961.
- [43] Winter, H., Geometrie vom Hebelgesetz aus-ein Beitrag zur Integration von Physik-und Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, *Der Mathematikunterricht*, **24** (1978), 88–125.
- [44] Winter, H., Zur Problematik des Beweisbedürfnisses, *J. Math.-Didaktik*, **1** (1983), 59–95.
- [45] Wittmann, E., Müller, G., Wann ist ein Beweis ein Beweis?, in *Mathematik-Didaktik, Theorie und Praxis; Festschrift für Heinrich Winter*, P. Bender, ed., Berlin, Cornelsen, 1988, 237–257.

حسین تیموری فعال: دانشگاه علامه طباطبائی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه

رایانامه: hossein.teimoori@atu.ac.ir

رضا تیموری فعال: دانشگاه زنجان، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک

رایانامه: faal92@yahoo.com

Physical Arguments vs. Mathematical Proofs

H. Teymoori Faal¹, R. Teymoori Faal²

¹Faculty of Statistics, Mathematics, and Computer, Allameh Tabataba'i University, Iran

²Department of Mechanical Engineering, University of Zanjan, Iran

Abstract. In this article, intuitive proofs of some well-known mathematical theorems are reviewed using basic principles of physics. In this article, proof is introduced as a part of any mathematical curriculum, with a potential contribution to the classroom and to the promotion of mathematical understanding. It is emphasized that observation and measurement should not be abandoned in the name of providing mathematical proof. In addition, the possible role of the laws of physics (which are traditionally an important source of some mathematical problems) in mathematical proof and how this role can be played in the classroom is explained. This article attempts to make proof in the classroom meaningful with the help of empirical (physical) arguments and to strengthen the role of applications in teaching mathematics. To achieve these goals, for example, numerous examples, including the two-dimensional and three-dimensional Seva theorem, the Fermat point theorem, and the two-dimensional and three-dimensional Pythagorean theorem, are presented and proven by presenting mathematical arguments. Finally, as a more advanced topic of the application of physical arguments in mathematics, the condition of consistency and singularity of the solution of singular integral equations of the Cauchy type is mentioned.

Keywords: physical arguments, proof, mathematics education, Ceva's Theorem, Fermat point, singular integral

Article history: Received 15 March 2025; Accepted 11 October 2025

Article type: survey

1. hossein.teimoori@gmail.com

2. reza.faal@znu.ac.ir