فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۰ (بهار ۱۳۸۷) صص. ۷۱ تا ۷۵

هدیه‌ای به وارن امبروز

آی. م. سینگر و ه. وو*

مترجم: محمد جلوداری ممقانی

روز اول ورودم را به MIT هیچوقت فراموش نمی‌کنم. مدرسین مور[1] در ۱۹۵۰ باید در مدرسهٔ تابستانی درس می‌دادند. برای پیدا کردن ساختمان شماره ۲، در بعد از ظهر یکی از روزهای اوایل جولای، از پل گذشتم. دفتر بخش ریاضی در طبقهٔ دوم قرار داشت و هنوز آنجاست. خود را به روت گودوین[2] منشی بخش معرفی کردم و خواستم رئیس بخش را ببینم. وقتی نام خود را به روت گفتم، مردی که روبروی وی نشسته و سرگرم خواندن روزنامهٔ بوستون گلوب بود، سرش را بلند کرد و گفت: «سینگر، من امبروز[3] هستم، تا پنج دقیقهٔ دیگر سمیناری در گروه‌های لی آغاز می‌شود. می‌توانی بعداً مارتین را ببینی، بیا برویم.»
رفتیم، و در آنجا جان مور[4] بارت اونیل[5] و جورج وایتهد[6] را که بعدها دوستان خوبی شدیم، دیدم. پس از دریافت حکم تدریس از تد مارتین، امبروز به من گفت که سمینار نصف شب در قهوه‌خانهٔ هیز ــ بیکفورد[7] برگزار می‌شود و من ساعت ۱۱:۴۵ تو را به آنجا می‌برم. به این جلسات شبانه کی وایتهد[8] نیز ملحق شد، قهوه‌خانه کم رونق بود ولی بحث‌های داغی داشتیم. همان شب امبروز من را در شهر گرداند و به موقع پیاده کرد. ما دوستان خوبی بودیم.

روزی امبروز از من پرسید «سینگر! تو در کلاس‌های درس چرن شرکت می‌کردی، او چه می‌گفت؟» در شیکاگو در حالی که تز خود را در زمینهٔ دیگری می‌نوشتم با بی‌میلی از درس چرن نیز یادداشت برمی‌داشتم. به علت تعمق در این یادداشت‌ها، خواندن مقاله‌های چرن، حمله به الی‌کارتان و تأکید امبروز بر فهم تمام جزئیات، هندسهٔ دیفرانسیل را با هم یاد گرفتیم.

امبروز درس هندسهٔ منیفلد را طراحی کرد و ما سال‌ها آن را به تناوب درس دادیم. این درس امروز همان است که آن موقع بود: نظریهٔ استانده‌ٔ منیفلدها در ترم اول، و مباحث منتخب مدرس

---

*) I.M. Singer and H. Wu 1) Moore 2) Ruth Godwin 3) Warren Ambrose 4) John Moore 5) Barrett O'Neill 6) George Withehead 7) Hayes-Bickford 8) Kay Withehead

در ترم دوم. براساس این درس‌ها، دانشجویان ما، بیشاپ ـ کریتندن[1]، هیکس[2] و وارنر[3]، چند کتاب معروف در سطح فوق‌لیسانس نوشتند.

امبروز با شور و اشتیاق همیشگی‌اش برنامهٔ دوره کارشناسی ریاضی محض را تغییر داد. جالب است بدانید که آندره ویل[4] در ۱۹۴۸ فرم‌های دیفرانسیل را به اعضای هیأت علمی دانشگاه شیکاگو معرفی کرد و ما در کمتر از ده سال آن‌ها را در درس هندسهٔ دیفرانسیل دورهٔ کارشناسی گنجاندیم. امبروز در درس آنالیز انتگرال لبگ را برای دانشجویان سال بالایی و سال پایینی درس می‌داد «چون آسانتر از انتگرال ریمان است». حدود بیست سال امبروز روح راهنمای بخش ریاضی محض دانشگاه MIT بود و تلاش‌های او کلید تبدیل آن به یک بخش بزرگ بودند.

امبروز و من به‌طور مرتب شب‌ها در بوستون رانندگی و در مورد ریاضیات و زندگی صحبت می‌کردیم. تمام خیابان‌ها را می‌شناختیم، و تا امروز علاوه بر این که ترافیک و پیدا کردن راهی برای گریز از آن، که معمولاً اتفاق می‌افتاد، را به یاد دارم، یک لحظهٔ خاص دیگر هم یادم هست: بلی، ما در اینجا هولونومی[5] را فهمیدیم.*

هر چند ریاضیات شگفت‌انگیز بود، من بسیار ناامید بودم. پسر بزرگم نابینای مادرزاد بود، و به طوری که بعدها فهمیدم، نارسایی مغزی داشت. من بدون پشتیبانی دائمی امبروز و دوست بسیار خوبم دیک کادیسون[6] نمی‌توانستم به عنوان یک ریاضیدان به زندگی ادامه دهم. کسانی که امبروز را می‌شناسند می‌دانند که نزد وی ابراز سپاسگزاری ممنوع بود. وقتی یک‌بار در این مورد سعی کردم او سریع از اطاق خارج شد. گاهی که من برای یک ریاضیدان جوان کاری انجام می‌دهم، به امبروز فکر می‌کنم و احساس می‌کنم که اگر تا آن لحظه به صد نفر کمک کرده باشم تازه شروع کرده‌ام دین خود را به وی ادا کنم.

من امبروز را به خاطر درستکاری مطلقش، سخاوتمندی‌اش، هوش سرشارش، توانائیش، و بالاتر از همه به خاطر شفقتش که بسیار تلاش می‌کرد پنهان نماید، دوست می‌داشتم. متأسفم که کمتر ریاضیدانی می‌داند که او چه مرد بزرگی بود. اما وقتی با ژانت ازدواج کرد خوشحال شدم، چون با وی می‌توانست بیست سال آن طور که می‌خواست زندگی کند.

I.M. Singer

وارن امبروز یکی از پیشگامان هندسهٔ دیفرانسیل ۴ دسامبر ۱۹۹۵ در ۸۱ سالگی در پاریس درگذشت.

هندسهٔ دیفرانسیل همیشه محبوبیت کنونی خود را نداشته است. در دههٔ ۱۹۵۰ امبروز (همراه با آی.م. سینگر) MIT را به تنها مرکز هندسه در خارج از دانشگاه شیکاگو تبدیل کرد. امبروز در

1) Bishop-Crittenden 2) Hicks 3) Warner 4) Andre Weil 5) Holonomy
6) Dick Kadison

*) یک پاراگراف در مورد علاقمندی امبروز به موسیقی جاز ترجمه نشده است (م)

۲۵ اکتبر ۱۹۱۴ به دنیا آمد. دکتری خود را در احتمال با استاد راهنمایی دووب در دانشگاه اوربانا ایلینویز (اوربانا ــ کمپین فعلی) در ۱۹۳۹ دریافت کرد، اما بزودی به آنالیز تابعی علاقمند شد. احتمالاً کار اساسی وی در زمینهٔ اخیر نظریهٔ ساختاری وی در H^* ــ جبرهاست، که تعمیمی از گروه‌جبرهای L^2 یک گروه فشرده است (Trans. Amer. Math. Soc. 57(1945), 364-386).

در اوایل دههٔ ۱۹۵۰ علاقهٔ وی مجدداً، و این بار به هندسهٔ دیفرانسیل تغییر یافت. در اواخر عمر، وی این تغییر علاقه را به این صورت بیان می‌کرد که می‌خواستم در زمینه‌ای کار کنم که «قضیه‌هایش به آسانی اثبات نشوند».

امبروز موقعی وارد حیطهٔ هندسه شد که عصر جدیدی در حال آغاز شدن بود. کارهای جی. ال. سینج[1]، اچ. هاپف[2] و اس. کن‌وسن[3] در دههٔ بعد از ۱۹۲۵ و کارهای اس. ب. میرز[4] و اس. اس. چرن[5] در دههٔ چهل تغییر تمرکز هندسه را از موضعی به سرتاسری اجتناب ناپذیر کرده بود. سپس در ۱۹۵۰ ارزمن[6] با انتشار مقاله‌ای مبانی را اصلاح کرد، وی با استفاده از آخرین یافته‌های نظریهٔ لی و توپولوژی، نخستین تعریف دقیق التصاق روی یک کلاف تاری[7] را ارائه داد. بنابراین صحنه برای یک قضیهٔ نابدیهی که غنیمتی برای این روح جدید و روش جدید بود آماده شده بود. می‌توان ثابت کرد که این قضیه همان قضیهٔ هولونومی امبروز ــ سینگر بود. (Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), 428- 443)) این قضیه به یک G ــ کلاف اصلی P با التصاق C روی یک منیفلد همبند M، که در آن G یک گروه لی است، مربوط است. التصاق C به هر خم γ واقع بر M که نقاط x و y را به‌هم وصل کند ایزومرفیسم γ_*، موسوم به‌انتقال موازی از x به y، از تار P_x به تار P_y را نسبت می‌دهد. (اگر P کلاف پایه‌ها در فضاهای مماسی M باشد طوری که G گروه خطی عام $Gl(n,R)$ باشد، آنگاه γ_* انتقال موازی به معنای کلاسیک است، یعنی پایه‌های M_x را (فضای مماس در x) را به پایه‌های M_y می‌نگارد.) حال نقطهٔ x در M را تثبیت کنید و تمام طوقه‌هایی که از x آغاز و به آن ختم می‌شوند را در نظر بگیرید. در این صورت γ_* یک خود ریختی P_x است که برابر است با عمل عضوی چون γ^* از G روی P_x. به آسانی دیده می‌شود که مجموعهٔ تمام این γ^* ها وقتی γ روی تمام طوقه‌ها در x تغییر می‌کند زیرگروهی از G است. مؤلفهٔ همانی این زیرگروه یک گروه لی است و با H نشان داده می‌شود. H تا حد مزدوج گیری در G مستقل از انتخاب x است. H گروه هونولومی (تحدید شدهٔ) التصاق C است. قضیهٔ هونولومی امبروز ــ سینگر بیان می‌کند که جبر لی H/ گروه H فضای خطی تولید شده به وسیلهٔ مقادیر فرم انحنای Ωی C است. (نکتهٔ فنی: Ω را باید به زیرکلاف P تحدید نمود.) بنابراین این قضیه تعمیم بزرگی از این قضیه است که اگر التصاق یک منیفلد ریمانی تخت[8] (انحنا صفر) باشد، آنگاه انتقال موازی آن بدیهی است (بدون هونولومی). یک قضیه مشابه (اما قدری ضعیف‌تر) این قضیه را ا. نیینهوئیز[9] تقریباً در همان زمان ثابت کرد، اما برهان امبروز و سینگر توجه تمام هندسه‌دان‌ها را به خود جلب کرد. اگرچه به روشنی

1) J. G. Synge 2) H. Hopf 3) S. Cohnvossen 4) S. B. Myers 5) S. S. Chern
6) Ehresmann 7) fiber bundle 8) flat 9) A. Nijenhuis

ایدهٔ هندسی برهان در درجهٔ اول اهمیت قرار دارد، کل استدلال با دقتی کامل و در زمینه‌ای کاملاً مجرد تنظیم شده است. در ادبیات کلاسیک ریاضی هرگز چیزی که به طور مبهم شبیه این برهان باشد وجود نداشته است. هنوز این برهان در کتاب‌های درسی استانده امروزی اساساً کلمه به کلمه بازنویسی می‌شود.

مقالهٔ امبروز ـ سینگر به درستی یکی از مؤثرترین مقاله‌ها در تاریخ جدید هندسه شناخته شده است، اماشناخت کامل اهمیت آن فقط در ده سال گذشته اتفاق افتاده است. برای بیان جزئیات قضیه فرض کنید M یک منیفلد ریمانی با متریک g، P کلاف پایهٔ متعامد یکه در M نسبت به g برابر گروه متعامد $O(n)$، G، و C التصاق لوی چویتای g باشد. در این صورت جبر هونولومی H به وسیلهٔ مجموعه‌ای از ماتریس‌های کج متقارن تولید می‌شود (جبر لی $O(n)$) که مقادیر فرم انحنای Ω ی g هستند، و به علاوه Ω باید در دسته‌ای از اتحادها موسوم به اتحادهای بیانچی[1] صدق کند. بنابراین روشن است که H اصلاً دلخواه نیست. مارسل برژه[2] در ۱۹۵۵ با الهام گرفتن از این ایده و استفاده از قضیهٔ هولونومی ثابت کرد که تعداد زیرگروه‌های $O(n)$ که می‌توانند گروه هولونومی یک منیفلد ریمانی باشند به شدت محدود است. به‌ویژه اگر H به صورت تحویل ناپذیر بر یک M_x عمل کند ولی روی کرهٔ واحد M_x ترایا نباشد، آنگاه M باید با یک فضای متقارن رتبه $\leq$ ۲ موضعاً ایزومتریک باشد. (جیم سیمسون در ۱۹٦۲ برهان مستقیمی از این گزاره ارائه داد.) این نکتهٔ مهم تاحدود بیست سال ناشناخته ماند تا این‌که هندسه‌دانان فهمیدند که این قضیه ابزاری قوی برای شناسایی فضای متقارن رتبه $\leq$ ۲ در میان منیفلدهای ریمانی فراهم می‌کند. از کاربردهای مهم آن، می‌توان به شناسایی فضاهای متقارن فشردهٔ ارمیتی[3] تا حد ایزومتری، بین منیفلدهای فشرده کاهلر[4] بر حسب انحنای دومقطعی[5] (N. Mok, 1988) و شناسایی فضاهای متقارن از نوع نافشرده رتبه $\leq$ ۲ تا حد ایزومتری، بین منیفلدهای ریمانی کامل با انحنای مقطعی نامنفی برحسب رتبهٔ هندسی (P. Eberlin, W. Ballman, M. Gromov و دیگران) اشاره کرد. برهان این قضیه‌ها بدون استفاده از کار برژه و در نهایت قضیهٔ امبروز ـ سینگر امکان ناپذیر است.

امبروز در ۱۹۵۵ قضیه ایزومتری خود را که اکنون به قضیهٔ ایزومتری امبروز موسوم است، منتشر کرد(Ann. Math. 64 (1956), 337-363). به همین ترتیب کار وی در مبانی هندسهٔ ریمانی تأثیرگذار بود، که سرانجام بعد از تأخیری طولانی در J. Indian Math. Soc. 24(1960), 23-76 منتشر کرد. اکنون این واقعیت که قضیه‌های هندسهٔ ریمانی باید فقط با استفاده از ویژگی‌های التصاق لوی چویتا بدون دخالت حسابان وردشی توسعه یابند آشکار شده بود، اما تا زمانی که امبروز این کار را با پشتکار دنبال نکرد وضع به این صورت نبود.

بعد از ۱۹٦۰ علاقهٔ امبروز به معادلات دیفرانسیل پاره‌ای متمایل شد و بزودی مقالات وی این پیچش را نمایان کرد. وی طرح‌های بلند پروازانه‌ای داشت اما زنده نماند تا ثمرهٔ آن‌ها راببیند. آن‌هایی که امبروز را در دههٔ پنجاه می‌شناختند رهبری عالی و توانایی بی‌نظیر او را در سازمان‌دهی

1) Bianchi 2) Marcel Berger 3) Hermitian 4) Kahler 5) bisectional

به خاطر می‌آورند که MIT را به بهترین بخش ریاضی دنیا تبدیل نمود. امبروز به عنوان یک معلم به خاطر تدریس خوبش مشهور بود. چون در آن زمان روشن نویسی در هندسه کیفیتی بود که کمتر پشتیبانی می‌شد، تعجبی ندارد که کلاس‌های درس امبروز از طریق نوشته‌های دوستان و شاگردان وی مخاطبین بین‌المللی پیدا کرد.

امبروز انسانی مطلقاً وارسته بود. او شخصی نبود که خودنمایی یا ناراستی را با خوشحالی تحمل کند. در عین حال کسانی که به وی نزدیک بودند نیز به‌طور استثنایی اخلاق خود گریزی و مهربانی بیش از حد او را تجربه کرده‌اند.

اساساً تمام زندگی علمی امبروز در MIT سپری شد. وی در ۱۹۸۵ بازنشسته شد و در ۱۹۹۰ به پاریس نقل مکان نمود. او با همسرش و دو فرزند از همسر سابقش زندگی می‌کرد.

مترجم: محمد جلوداری ممقانی
گروه آمار دانشگاه علامه طباطبائی
imamaghan@yahoo.com