فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۹ (پاییز ۱۳۸۶) صص. ۱ تا ۲۲

تعدیل وردشی شبکه در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دو بعدی

علیرضا سهیلی و محمد هادی مصلحی

چکیده

در یک روش وردشی برای تعدیل شبکه، شبکهٔ تعدیل‌پذیر به عنوان نگارهٔ یک شبکهٔ ثابت یکنواخت روی یک دامنهٔ محاسباتی، تحت یک تبدیل مختصات مناسب بنا می‌شود. این تبدیل، مینیمم‌کنندهٔ یک تابعک معین می‌باشد که میزان خطا را در نتایج عددی اندازه می‌گیرد. دراین راستا یک تابع به اصطلاح نشانگر تجویز می‌شود تا تعدیل شبکه را کنترل کند. در این مقاله، یک تابعک تولید و تعدیل شبکه که تعریف آن بر نگاشت‌های همساز روی خمینه‌ها استوار است، تعریف شده و سپس یک فرم عمومی، با الهام از آن بیان می‌شود. این فرم عمومی به گونه‌ای است که اکثر تابعک‌های پیشنهادی برای تولید و تعدیل شبکه را می‌توان در آن قالب، امّا با توابع نشانگر مختلف بیان کرد.

معادلات اویلر ــ لاگرانژ متناظر با تابعک تعدیل شبکه، که در قالب معادلات دیفرانسیل جزئی بیان شده و مستقل از زمان می‌باشند را معادلات تولید و تعدیل شبکه می‌نامند. از این معادلات با استفاده از معادلات شار گرادیان، معادلهٔ حرکت شبکه منتج خواهد شد. معادلهٔ حرکتِ شبکهٔ به‌دست آمده، شبکه را در هر گام زمانی تولید خواهد کرد. درنهایت قابلیت روش مذکور با بررسی نتایج عددی، مورد تجزیه و تحلیل قرارخواهد گرفت.

واژه‌های کلیدی: تعدیل شبکه، روش وردشی، اصل هم توزیعی، معادلات اویلر ــ لاگرانژ، معادلات شار گرادیان، تانسور متری

۱ مقدمه

در دنیای امروز طیف وسیعی از مسائل موجود در طبیعت و پدیده‌های فیزیکی با معادلات

دیفرانسیل جزئی توصیف و شبیه‌سازی می‌شوند که بعضی از این مسائل از جمله حرکت امواج ، لایه های مرزی این امواج یا موجهای ناگهانی دارای تغییرات بزرگ و شوکهای مقطعی و ناگهانی هستند. لذا برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی توصیف کنندهٔ آنها که جواب‌های آنها تغییرات ناگهانی و سریع دارند، روش‌های معمولی حل عددی (تفاضل متناهی یا عناصر متناهی)، غالباً ناممکن و ناپایدار خواهند بود. از طرفی به کار گرفتن شبکه‌هایی با سلول‌های کوچک‌تر یا با گره‌های بیشتر برای تحت پوشش قرار دادن این تغییرات سریع، مقرون به صرفه نبوده و در بسیاری از موارد به ناکارآمدی روش منجر خواهد شد. بدین ترتیب استفاده از شبکهٔ تعدیل‌پذیر و قابل انطباق با تغییرات سریع موجود در جواب معادله دیفرانسیل جزئی ، به عنوان یک راهکار اساسی و انکارناپذیر در حل این معادلات مطرح شده و بنابراین روش‌های تعدیل شبکه شکل گرفتند. چندان که در ۲۰ سال گذشته با توسعهٔ تکنیک‌های مختلف تخمین خطا، استفاده از تعدیل شبکه به یک رویهٔ استاندارد در اغلب نرم افزارهای عددی تبدیل شده است.

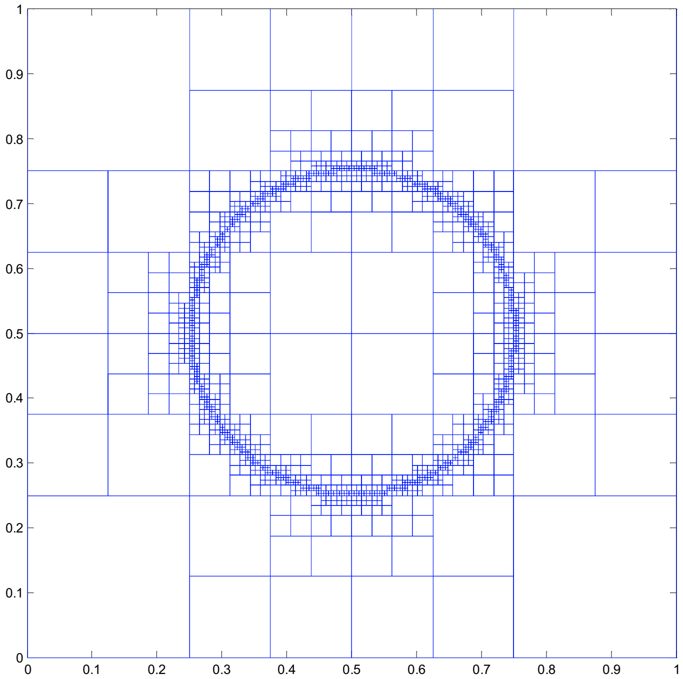
دو طیف عمدهٔ روش‌های تعدیل، روش‌های «تظریف موضعی» و «شبکهٔ متحرک» هستند که برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان بکار روند. در روش‌های تظریف موضعی، بعضی از سلول‌های شبکه که جواب فیزیکی در محدودهٔ آنها با تغییرات ناگهانی روبرو است، دوباره همانند یک شبکه با اندازهٔ h تقسیم‌بندی شده و در شبکهٔ اولیه به‌صورت موضعی قرار می‌گیرند و به روش $h-$ تظریف[۱] معروفند (شکل ۱). اما در روش‌های شبکهٔ متحرک، شبکه و گره‌ها با گذر هر گام زمانی به‌طور خودکار در محل‌هایی که تغییرات ناگهانی وجود دارد متمرکز می‌شوند.

روش‌هایی که در حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان، بر مبنای استفاده از شبکه‌های تعدیل‌پذیر متحرک پیاده‌سازی می‌شوند به دو دستهٔ ایستا و پویا تقسیم می‌شوند. در روش ایستا، شبکه در هر گام زمانی بصورت مجزا حرکت می‌کند و ارتباطی بین گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل و انتخاب شبکه وجود ندارد. در این روش جواب روی یک شبکهٔ غیر یکنواخت و در طول گام زمانی مجزا محاسبه می‌گردد. پس از طی یک یا چند مرحله، یک شبکه‌بندی مجدد صورت می‌گیرد، که ممکن است تعداد گره‌هایش با تعداد گره‌های شبکهٔ جدید تفاوت داشته باشد. متغیرهای وابسته از شبکهٔ قدیم به شبکهٔ جدید درونیابی و مقدار تابع در نقاط شبکهٔ جدید محاسبه می‌شود.

در روش پویا، معادلات دیفرانسیل جزئی فیزیکی (معادله‌ای که می‌خواهیم حل کنیم) و معادلات شبکه را به‌عنوان یک دستگاه معادلات دیفرانسیل تواماً حل می‌کنند و بر خلاف روش‌های ایستا، درونیابی از متغیرهای وابسته از شبکهٔ قدیم به شبکهٔ جدید لازم نیست.

---

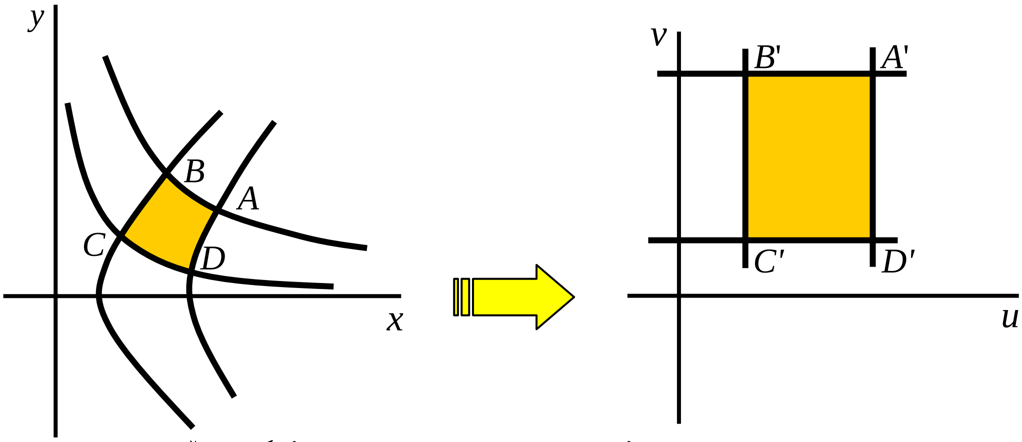
1) h_ refinement



شکل ۱. نمایشی از شبکه در روش تظریف موضعی

۲. مختصات فیزیکی و مختصات محاسباتی

هر سلول شبکه یک قسمت انتگرالی از مدل‌های تفاضل متناهی و عناصر متناهی می‌باشد. مسلماً کارآیی مدل‌های گسسته وقتی به طور فزاینده بالا می‌رود که آنها با استفاده از مختصات طبیعی (معمولی) که برای انجام محاسبات ریاضی مناسب است بنا شده باشند و یک طرح منظم از ارتباط بین گره‌های شبکه، مد نظر قرار گیرد. این امر با یک تبدیل مختصات محقق خواهد شد به شرطی که مرزهای دامنهٔ جدید، بوسیلهٔ خطوط موازی محورهای مختصات نشان داده شود. برای مثال نگاشت $w = z^۲$ (z نقطه‌ای در صفحهٔ xy و w نقطه‌ای در صفحهٔ uv است) تبدیل نشان داده شده در شکل ۲ را انجام می‌دهد به این معنی که مرز ناحیهٔ $ABCD$ را روی مرز ناحیهٔ $A'B'C'D'$ می‌نگارد.



شکل ۲. تبدیل ناحیهٔ $ABCD$ به $A'B'C'D'$ به‌وسیلهٔ نگاشت $w = z^2$

به مختصات اولی که جسم در آن قرار گرفته مختصات فیزیکی Ω_p و به مختصات دومی مختصات محاسباتی Ω_c گویند. البته در اینجا تبدیل مختصات توسط یک نگاشت معکوس پذیر

$$\begin{cases} x : \Omega_c \to \Omega_p \\ \overrightarrow{x} = x(\overrightarrow{\xi}) \end{cases}$$

با معکوس

$$\begin{cases} \xi : \Omega_p \to \Omega_c \\ \overrightarrow{\xi} = \xi(\overrightarrow{x}) \end{cases}$$

صورت می‌گیرد که نگاشت تعدیل نامیده می‌شود.

با استفاده از تابع نشانگر این نگاشت می‌تواند طوری ساخته شود که علاوه بر تطبیق مرزها، جنبه‌های مهم شبکه از قبیل تراکم، تعامد و همواری را نیز کنترل کند.

۳ توابع نشانگر در دو بُعد

همانطور که بیان شد در روش شبکهٔ متحرک برای حل معادلهٔ دیفرانسیل جزئی، گره‌های شبکه در مکان‌هایی که تابع دارای تغییرات سریع و ناگهانی است متمرکز می‌شوند. برای شناسایی این مکان‌ها از توابعی به نام توابع نشانگر[1] استفاده می‌کنند. این توابع معمولاً بر اساس یک سری خواص فیزیکی و یا هندسی تعریف می‌شوند و در فضای دوبعدی می‌توانند طوری تعریف شوند که علاوه بر تراکم شبکه[2] در محل‌های مورد نظر، کنترل خواص دیگری از شبکه از جمله هم ترازی[3] با یک میدان جهتی و برقراری یک سطح عالی از تعامد، خطوط شبکه را نیز در دل خود جای دهند. رده‌ای از روش‌های تولید شبکهٔ تعدیل‌پذیر روش‌های وردشی هستند که هدف ما مطالعهٔ آنهاست. در این روش، تبدیل مختصات بین دامنه‌های فیزیکی و محاسباتی، $\overrightarrow{\xi} = \xi(\overrightarrow{x})$ به‌عنوان مینیمم کنندهٔ

1) indicator 2) mesh concentration 3) conformity

یک تابعک معین که میزان خطا را در تخمین عددی جواب در مختصات فیزیکی اندازه می‌گیرد، معین می‌شود. در این مقاله، این تابعک به صورت کلی زیر داده می‌شود؛

$$I[\overrightarrow{\xi}] = \int_{\Omega_p} \sum_{i=1}^{2} (\nabla \xi_i)^T \; G_i^{-1} \; (\nabla \xi_i) \; d\overrightarrow{x}. \qquad (۱.۳)$$

می‌توان گفت در این صورت کلی تابعک پیشنهادی بسیاری از دانشمندان از قبیل «وینسلو»[1]، «داوینسکی»[2] و «برک بیل و سالتزمن»[3] با G_i های مختلف تأمین خواهند شد. G_i که یک ماتریس 2×2 ، معین مثبت و متقارن (البته در حالت کلی یک ماتریس نیمه معین مثبت) است، تابع نشانگر نامیده می‌شود. توابع G_i بسته به خواصی از شبکه مورد نظر که باید کنترل شوند، (از قبیل تراکم، همترازی، تعامد و ...) به طرق مختلف انتخاب می‌شوند. به‌علاوه گاهی اوقات توابع نشانگر در فضای دو بعدی را با تعمیم این توابع در فضای یک بعدی تعریف می‌کنند. مثلاً تابع «شبه طول کمان» که به‌صورت زیر تعریف می‌شود تعمیمی از تابع طول کمان در فضای یک بعدی است.

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + ||\nabla u||^2}} [I + (\nabla u).(\nabla u)^T]$$

به‌علاوه خود تابع طول کمان در فضای دو بعدی نیز به شکل $[I + (\nabla u).(\nabla u)^T]^{\frac{1}{2}}$ است.

۴. گام‌های اصلی برای حل یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی (وابسته به زمان) به روش شبکهٔ متحرک در دو بُعد

برای حل یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی به روش شبکهٔ متحرک، گام‌های زیر را طی می‌کنیم

۱) پیدا کردن یک معادلهٔ دیفرانسیل تولید / تعدیل شبکهٔ ثابت (مستقل از زمان) برای یک تبدیل مختصات $\overrightarrow{x} = x(\overrightarrow{\xi}, t)$ در یک t ثابت. (یعنی معادله دیفرانسیلی که جواب آن تبدیل مختصات (نگاشت تعدیل) باشد.)

۲) ساختن یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی حرکت شبکه ($MMPDE$)[4] وابسته به زمان.

۳) گسسته‌سازی متغیرهای مکان معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی فیزیکی (معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی که در پی حل آن هستیم) و معادلات $MMPDE$ و در نظر گرفتن آنها به‌صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی، یعنی در هر گام زمانی، ابتدا شبکه را با استفاده از گسسته‌سازی $MMPDE$ و حل عددی آن به‌دست می‌آوریم و سپس معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی فیزیکی برای این شبکه را گسسته‌سازی نموده و حل می‌کنیم.

---

1) Winslow 2) Davinsky 3) Brackbill and Saltzman 4) Moving Mesh Partial Differential Equation

۱.۴ تراکم شبکه و اصل هم توزیعی در یک بُعد

یک تبدیل مختصات بین فضای فیزیکی x و فضای محاسباتی ξ به‌وسیلهٔ هم توزیع کردن یک تابع نشانگر $M(x,t,u) > 0$ که به جواب معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی فیزیکی، $u = u(x,t)$، وابسته است معین می‌شود.

فرض کنید $x = x(\xi,t) \ : \ [0,1] \to [0,1]$ هم توزیعی نیاز دارد که (به ازای t ثابت)

$$\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} Mdx = \frac{\theta(t)}{N} \quad \text{یا} \quad \int_0^{x_i(t)} M(x,t)dx = \frac{i}{N}\theta(t)$$

که $x_i(t)$ ها $i = 1,2,\dots,N$ بیانگر گره‌های شبکه تعدیل شده در زمان ثابت t هستند و معادلهٔ هم توزیع پیوستهٔ متناظر با این صورت گسسته به‌صورت

$$\int_0^{x(\xi,t)} Mdx = \xi\ \theta(t)$$

است. با مشتق‌گیری نسبت به ξ ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\int_0^{x(\xi,t)} Mdx\right) = \theta(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{x(\xi,t)} Mdx\right).\frac{\partial x}{\partial\xi} = \theta(t)$$
$$\Rightarrow \quad M\frac{\partial x}{\partial\xi} = \theta(t)$$

با مشتق‌گیری دوباره نسبت به ξ داریم

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(M\frac{\partial x}{\partial\xi}\right) = 0 \qquad (۱.۴)$$

و این همان معادلهٔ دیفرانسیل تولید / تعدیل شبکهٔ ثابت (مستقل از زمان) است.
جالب است که با تعویض نقش متغیرهای وابسته و مستقل ξ و x معادلهٔ (۱.۴) به $\frac{\partial}{\partial x}(M^{-1}\frac{\partial\xi}{\partial x}) = 0$ تبدیل خواهد شد و این معادله نیز دقیقاً معادلهٔ اویلر ـ لاگرانژ از تابعک

$$I_{1D} = \int_{\Omega_p} M^{-1}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 dx \qquad (۲.۴)$$

است که حالت یک بعدی از تابعک کلی (۱.۳) می‌باشد.
اما اصل هم توزیعی را به بیان دیگری نیز می‌توان مطرح کرد:
اگر شبکه روی Ω_c یکنواخت باشد سپس $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ ، تراکم نقاط شبکه را روی Ω_p اندازه می‌گیرد. بنابراین تراکم شبکه با یک تابع مشخص شده مناسب (تابع نشانگر M) متناسب است یعنی

$\frac{\partial\xi}{\partial x} = [\theta(t)]M$ (t ثابت)

که با مشتق‌گیری از دو طرف نسبت به x به‌دست می‌آوریم $\frac{\partial}{\partial x}(M^{-1}\frac{\partial\xi}{\partial x}) = 0$

و با تعویض نقش متغیرهای x و ξ، همان معادلهٔ (۱.۴) حاصل می‌شود.
با استفاده‌از معادلهٔ (۱.۴) چندین $MMPDE$ پیشنهاد و تجزیه و تحلیل شده‌اند [۷]، مثلاً

$$\frac{\partial^{2}}{\partial \xi^{2}}(\frac{\partial x}{\partial t}) = -\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial \xi}(M\frac{\partial x}{\partial \xi})$$

که در آن پارامتر τ توسط کاربر تعریف می‌شود و به کنترل تراز هموارى زمانى کمک می‌کند، به‌علاوه در عمل یک هموارکننده فاصله‌ای از تابع نشانگر M و شبکه ضروری خواهد بود. با گسسته‌سازی $MMPDE$ می‌توان شبکه را در هر گام زمانی محاسبه کرد.
گسترش اصل هم توزیعی یک بعدی به فضاهای دوبعدی و سه‌بعدی خیلی آسان نیست، چرا که علاوه بر تعدیل و همواری، کنترل خواص دیگر شبکه از قبیل پیچش و این که شبکه خودش را قطع نکند، باید در فرمول بندی چند بعدی مورد توجه قرار گیرد. با این حال چند تعمیم دو بعدی و سه بعدی از هم توزیعی با درجه‌های موفقیت قابل تأمل و احتیاط آمیز، مطرح شده‌اند.
در بخش‌های بعدی یک روش «وردشی» را برای به‌دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی تولید شبکهٔ ثابت (مستقل از زمان) به‌کار برده و یک $MMPDE$ از آن با استفاده از معادلات شار گرادیان، نتیجه می‌گیریم.

۵ معادلهٔ دیفرانسیل تولید / تعدیل شبکهٔ ثابت (مستقل از زمان) برای یک تبدیل مختصات دو بعدی $\overrightarrow{x} = x(\overrightarrow{\xi}, t)$

یک روش برجسته در بین روش‌هایی که به‌وسیلهٔ حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، شبکه را تولید می‌کنند «روش وردشی» است که استفاده از آن برای تولید شبکه‌های تعدیل‌پذیر، به‌طور وسیعی گسترش یافته است. در یک روش وردشی که می‌توان گفت رابطهٔ نزدیکی هم بااصل هم توزیعی در فضای یک بعدی دارد، تبدیل مختصات بین دامنه‌های فیزیکی و محاسباتی، $\overrightarrow{\xi} = \overrightarrow{\xi}(\overrightarrow{x})$ برای مینیمم کردن یک تابعک، موسوم به تابعک تعدیل شبکه، معین می‌گردد. تابعک تعدیل شبکه از ترکیب خطی یک یا چند تابعک که هر کدام نمایندهٔ یکی از خواص شبکهٔ مطلوب (شبکه‌ای که هدف رسیدن به آن است) از قبیل تراکم، همواری یا تعامد است، تشکیل می‌شود.
به‌عبارتی هر کدام از اجزای این ترکیب خطی، تابعکی است که میزان انحراف (و دور شدن) از برقراری کامل یکی از خواص شبکه از قبیل تعامد یا همترازی و ... را اندازه می گیرد و یا تابعکی است که تراکم شبکه را در دل خود دارد. طبیعی است که بهترین حالت این است که هر کدام از این انحراف‌ها صفر باشد و خواص مطلوب شبکه در حد آرمانی برآورده شود. ولی به دست آوردن شبکه‌ای که در نواحی با تغییرات زیاد هم جواب به نحو مطلوبی متراکم و هموار باشد و هم خطوط شبکه در این نواحی متعامد باشد، غیر ممکن است. لذا سعی بر این است که با برقرار کردن تعادلی

بین این خواص، نگاشتی برای تبدیل مختصات حاصل شود که همهٔ این خواص را به بهترین وجهی برآورده کند. از این رو، نگاشتی مورد نظر است که ترکیب خطی (عموماً محدّب) یک یا چند تابعک (که هر کدام مبیّن اندازه یکی از این انحراف‌ها یا کنترل تراکم شبکه می‌باشد) را مینیمم سازد. با تغییر مقدار ضرائب در این ترکیب خطی میزان برقراری خواص مربوطه به‌صورت دلخواه دارای شدت و ضعف خواهند داشت.

با این که تضمین وجود، یکتایی و معکوس‌پذیری و یا یک به یک بودن چنین نگاشتی از اهمیت به‌سزایی برخوردار است، در عمل روش وردشی نیازمند استفاده از ضرائب تعدیل (ضرائب در ترکیب خطی) به‌طور تجربی است چرا که قاعده خاصی برای تعیین این ضرائب وجود ندارد. به‌علاوه عموماً نگاشت‌هایی را برای تبدیل مختصات به‌کار گیرد که در یک به یک بودنشان اطمینانی نیست. به‌طور کلی یک به یک بودن نگاشت از این لحاظ حائز اهمیت است که تضمین می‌کند که شبکهٔ به‌دست آمده خودش را قطع نکند.

٦ تابعک تولید شبکه بر مبنای نگاشت‌های همساز

در اینجا یک تابعک تولید شبکه که تعریف آن بر نگاشت‌های همساز روی خمینه‌ها استوار است معرفی می‌شود. برای ایجاد یک درک کلی از تابعک تعدیل شبکه، معادلات دیفرانسیل تولید / تعدیل شبکه و ماهیت توابع نشانگر را بررسی می‌کنیم. این تابعک بر خلاف تابعک‌های پیشنهادی دیگر که خود ممکن است ترکیبی از چند تابعک باشند، یک تابعک تکی است و لذا از فرمول‌بندی ساده‌تری برخوردار خواهد بود. مهمتر این که نگاشت تعدیل (تبدیل مختصات) به‌دست آمده از این تابعک یک نگاشت همساز است و لذا از کلیهٔ ویژگی‌هایی که برای نگاشت‌های همساز مطرح می‌شود از جمله نظم و همواری برخوردار است. نگاشت‌های همساز علاوه بر فرمول‌بندی مختصر، سودمندی مهم دیگری هم دارند و آن این است که قضیه‌ای برای تضمین وجود و یکتایی آنها در حالی که یک به یک و حتی معکوس‌پذیرند، وجود دارد و این کارایی مولّدهای شبکه بر پایهٔ نگاشت‌های همساز را بیش از پیش مطمئن می‌سازد. به علاوه به‌دست گرفتن کنترل تراکم شبکه از طریق تعریف مناسب تانسور متریک برای دامنهٔ فیزیکی و این که می‌توان مطالب مذکور را به ابعاد بالاتر تعمیم داد، از مزیت‌های دیگر استفاده از این تابعک به‌عنوان تابعک تعدیل شبکه می‌باشد.

۱.٦ نگاشت‌های همساز: تعریف و قضیهٔ وجودی

در این بخش نگاشت‌های همساز را معرفی و شرط کافی برای وجود و یکتایی آنها را بیان می‌کند. نگاشت‌های همساز توسط «فولر»[1] [۵] تعریف و نامگذاری شده‌اند. با این حال تا زمان کار اساسی «ایل»[2] و «سامپسون»[3] [۴] این زمینه از ریاضیات مورد مطالعهٔ جدی قرار نگرفته بود.

1) Fuller 2) Eell 3) Sampson

فرض کنید M و N خمینه‌های ریمانی فشرده از بعد n به‌ترتیب با تانسورهای متری $g_{\alpha,\beta}$ و h_{ij} در مختصات موضعی $\overrightarrow{x}=(x^1,...,x^n)$ و $\overrightarrow{\xi}=(\xi^1,...,\xi^n)$ باشند. اگر $x:N\to M$ یک نگاشت C^1 باشد، چگالی انرژی بدین صورت تعریف می‌شود:

$$e(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j,\alpha,\beta}h^{ij}(\xi)g_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial\xi^j}$$

که $H=[h_{ij}]_{n\times n}$ و $H^{-1}=[h^{ij}]$.

انرژی کل متناظر با نگاشت x بصورت زیر خواهد بود (تابعک انرژی)؛

$$E[\overrightarrow{x}]=\int_N e(x)d\overrightarrow{\xi}$$

اگر $\overrightarrow{x}$ از کلاس C^2 ، $E[\overrightarrow{x}]<\infty$ و $\overrightarrow{x}$ یک نقطهٔ بحرانی E باشد، $\overrightarrow{x}$ همساز نامیده می‌شود.

معادلهٔ اویلر ـ لاگرانژ متناظر به صورت زیراست [۳]:

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\frac{\partial}{\partial\xi^k}\sqrt{h}\,h^{kj}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^j}+h^{kj}\,\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(M).\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^k}.\frac{\partial x^\beta}{\partial\xi^j}=0\qquad\lambda=1,2\qquad(1.6)$$

که $h=\det([h_{ij}])$ و $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(M)$ ، نماد کریستوفل از نوع دوم است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(M)=\frac{1}{2}\sum_\lambda g^{\alpha\lambda}[\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\gamma}+\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^\beta}-\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\lambda}]$$

در زیر شرایط کافی برای وجود و یکتایی نگاشت‌های همساز صورت بندی می‌کنیم.
قضیهٔ زیر که به قضیهٔ HSY معروف است به‌وسیلهٔ «هامیلتون»[1] [۶] و «شون»[2] و «یائو»[3] [۹] بیان شده است.

قضیهٔ ۱.۶.(HSY) فرض کنید (M,ρ) و (N,γ) دو خمینهٔ ریمانی با مرزهای ∂M و ∂N و $\phi:M\to N$ یک دیفئومرفیسم باشد. برای هر نگاشت $f:M\to N$ که $f|_{\partial M}=\phi|_{\partial M}$ ، قرار می‌دهیم $E(f)=\int_X\|df\|^2dX$ (تابعک انرژی). در این صورت f همساز است اگر یک نقطه اکسترمال از E باشد.

قضیه ۲.۶. اگر انحناء (موضعی) N نامثبت و ∂N محدب باشد (نسبت به متر γ)، آنگاه یک نگاشت همساز یکتا $f:M\to N$ وجود دارد به طوری که f یک هموتوپی هم‌ارز با ϕ است. بدین معنی که، f را بتوان با بنا کردن یک خانواده پیوسته از نگاشت‌های $g_t:M\to N$ و $t\in[0,1]$ به ϕ تغییر شکل داد، به طوری که $g_0(x)=\phi(x)$ و $g_1(x)=f(x)$ و به ازای هر $x\in\partial M$ ، $g_r(x)=\phi(x)$. خاطر نشان می شود که قضیهٔ HSY برای دامنه‌های همبند n ـ بعدی نیز معتبر است.

---

1) Hamilton 2) Schoen 3) Yau

از این دو قضیه بر می آید که:
اولاً: f همساز است هر گاه یک اکسترمال از تابعک انرژی باشد. لذا نگاشتی که $E[f]$ را مینیمم سازد یک نگاشت همساز است و نگاشت همساز باید در معادلات اویلر ـ لاگرانژ متناظر با تابعک انرژی صدق کند.
ثانیاً: برای دو خمینهٔ ریمانی M و N ، اگر انحناء موضعی N نامثبت و مرز N محدب باشد نگاشت همساز یکتایی از M به N وجود دارد.
ثالثاً: مینیمم‌سازی انرژی روی تمام نگاشت‌های f صورت می‌گیرد که با دیفئومرفیسم ϕ روی مرز یکی باشند.
رابعاً: نگاشت همساز یکتای f ، با دیفئومرفیسم ϕ هم ارز هموتوپی است.
به بیانی ساده‌تر، برخی خواص ϕ قابل تعمیم به f هستند. از جمله در حالت $\dim M = \dim N = ۲$، خواص ناشی از دیفئومرفیسم بودن ϕ به f قابل تعمیم است و معکوس‌پذیری نگاشت همساز تضمین می‌شود[۹] (نگاشت یکتای f ، که یک تناظر یک به یک بین Ω_C و Ω_P برقرار می‌کند را به‌عنوان نگاشت تبدیل مختصات در نظر می‌گیرند).

۲.۶ کاربرد قضیهٔ HSY

قضیهٔ HSY شرط کافی برای وجود و یکتایی نگاشت‌های همساز را بیان می‌کند. در این بحث، بهتر است تا خمینه‌های مطرح شده در قضیه با دامنه‌های فیزیکی و محاسباتی را متحد قرار دهیم. فرض کنید $M = \Omega_P$ دامنه فیزیکی و $N = \Omega_C$ دامنهٔ محاسباتی باشد. بنابر قضیه ۱.۶ نگاشت همساز $\Omega_C \to \Omega_P$ موجود است اگر دو شرط زیر برآورده شوند (این نگاشت همساز را به‌عنوان نگاشت تبدیل مختصات در نظر می‌گیرند)؛
۱) انحناء Ω_P نامثبت باشد.
۲) $\partial\Omega_P$ محدب باشد.
شرط اول را می‌توان براحتی با تعریف یک تانسور متریک مناسب، مثلاً متریک اقلیدسی ($g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$: که $\delta_{\alpha\beta}$ تابع دلتای کرونکر است) روی Ω_P برآورد نمود چرا که انحنای فضای اقلیدسی با متر معمولی صفر است.
اگر علاوه بر آن مرز دامنهٔ فیزیکی ($\partial\Omega_P$) محدب نیز باشد نگاشت یکتای $\Omega_C \to \Omega_P$ همیشه موجود است و در حالتی که $\partial\Omega_P$ محدب نباشد، وجود و یکتایی نگاشت به هر حال قابل اطمینان نیست. با خطی کردن رابطهٔ (۱.٦) به‌عنوان معادلهٔ دیفرانسیل تولید / تعدیل شبکه و گسسته‌سازی آن می‌توان نگاشت $\overrightarrow{x} = x(\overrightarrow{\xi})$ و در نتیجه شبکه را به دست آورد. از آنجایی که Ω_C یعنی دامنهٔ محاسباتی به‌دلخواه ساخته می‌شود، می‌توان آن را طوری ساخت که دو شرط قضیه برآورده شوند. لذا در عمل تابعک انرژی را برای نگاشت $\xi : \Omega_P \to \Omega_C$ مطرح کرده و معادلهٔ اویلر ـ لاگرانژ متناظر با آن را می‌نویسند و با توجه به برقراری دو شرط قضیه برای Ω_C وجود و

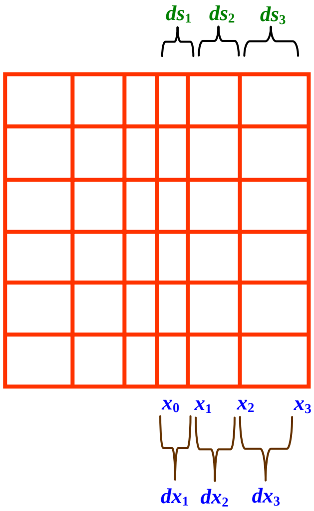
یکتایی نگاشت معکوس‌پذیر $\xi : \Omega_P \to \Omega_C$ تضمین می‌شود. سپس با تعویض نقش متغیرهای مستقل و وابسته در معادلهٔ اویلر ـ لاگرانژ، معادلهٔ دیفرانسیل جزئی به‌دست می آید، که حل آن به معکوس $\overrightarrow{\xi} = \xi(\overrightarrow{x})$ یعنی $\overrightarrow{x} = x(\overrightarrow{\xi})$ منجر می‌شود. این معادله، معادلهٔ دیفرانسیل تولید / تعدیل شبکه خواهد بود.

۷ فرمول بندی مترهای ریمانی

تاکنون تبدیل مختصات به‌دست آمده تعدیلی در شبکه ایجاد نکرده است و باید برای مورد استفاده قرار دادن ابزار نگاشت‌های همساز برای تولید شبکه‌های تعدیل‌پذیر باید مترهای ریمانی مناسب روی دامنه‌ها را تعریف نمود.
برای جا انداختن ایده، یک مثال ساده می آوریم. تلاش می‌کنیم تا یک شبکه در اطراف یک خط راست قائم در وسط دامنهٔ فیزیکی مربعی تولید کنیم.
دراینجا از یک نگاشت $\Omega_P \to \Omega_C$ استفاده خواهد شد. دامنهٔ محاسباتی برای این مسأله یک مستطیل است که با یک شبکه یکنواخت افراز و اندازهٔ آن به‌وسیلهٔ تعداد گره‌ها در هر کدام از جهت‌های ξ و η مشخص می‌شود. ابتدا می‌خواهیم مطمئن شویم که انحنای دامنهٔ محاسباتی، نامثبت است. با تعریف متر δ_{ij} برای آن، این امر به آسانی محقق خواهد شد. (زیرا انحناء در این صورت صفر خواهد بود).
قضیهٔ HSY هیچ محدودیتی را روی متریک فضای فیزیکی g_{ij} قرار نمی‌دهد. از این رو g_{ij} می‌تواند برای تعدیل شبکه به‌کار رود. به‌طور واضحتر، g_{ij} را می‌توان طوری بنا کرد که شبکه در محل یک خط راست قائم در وسط دامنهٔ فیزیکی مربعی متراکم شود در حالیکه با دور شدن از این خط قائم شبکه به حالت طبیعی (با خانه‌های مساوی) نزدیک شود[۹]. برای مثال مورد نظر، این متریک به‌وسیلهٔ

$$\begin{aligned} g_{۱۱} &= ۱ + f(x - x_{\circ}) \\ g_{۲۲} &= ۱ \quad g_{۱۲} = g_{۲۱} = \circ \qquad (۱.۷) \end{aligned}$$

داده می‌شود که در آن $x = x_{\circ}$ خطی است که شبکه در روی آن متراکم می‌شود و $f(x - x_{\circ})$ به گونه‌ای تعریف می‌شود که



شکل ۳. تراکم شبکه در $x = x_{\circ}$ با استفاده از متر تعریف شده در (۱.۷)

موقعی که $x = x_{\circ}$ یک ماکزیمم داشته باشد و $f(x - x_{\circ}) \to \circ$ وقتی $(x - x_{\circ}) \to \infty$.
به‌عنوان مثال، f را می‌توان به‌صورت $f(x - x_{\circ}) = Ae^{-B(x-x_{\circ})^{۲}}$ در نظر گرفت که A و B اعدادی ثابت و مثبت هستند که مقدار و نرخ زوال $f(\circ)$ را کنترل می‌کنند.

شکل ۳ شبکهٔ به‌دست آمده از (۱.۷) را نشان می‌دهد. خانه‌های شبکهٔ شکل ۳ نسبت به متر اقلیدسی در اطراف خط $x = x_{\circ}$ جمع شده‌اند و حال آن که، نسبت به متریک g_{ij} با هم برابرند، بر اساس تعریف طول قوس در خمینه‌ها داریم؛

$$(ds)^{۲} = g_{۱۱}(dx)^{۲} + g_{۲۲}(dy)^{۲} + g_{۱۲}dxdy + g_{۲۱}dydx$$

پس با توجه به متریک g_{ij}

$$ds_{۱} = ds_{۲} = ds_{۳}$$
$$\Rightarrow \quad g_{۱۱}(x_{۱})(dx_{۱})^{۲} = g_{۱۱}(x_{۲})(dx_{۲})^{۲} = g_{۱۱}(x_{۳})(dx_{۳})^{۲}$$

همانطور که دیده می‌شود $dx_{۱} < dx_{۲} < dx_{۳}$ ، لذا $g_{۱۱}(x_{۱}) > g_{۱۱}(x_{۲}) > g_{۱۱}(x_{۳})$. پس هر چه به خط $x = x_{\circ}$ نزدیک می‌شویم باید $g_{۱۱}(x)$ افزایش یابد.

بدین ترتیب یک شبکه در دامنهٔ فیزیکی داریم که در اطراف $x = x_{\circ}$ جمع شده است ولی نسبت به متریک g_{ij} ، دارای خانه‌های با مساحت های برابر است و یک شبکهٔ محاسباتی خواهیم داشت که نسبت به متریک اقلیدسی دارای خانه‌های برابر است. این نتایج را می‌توان به یک منحنی دلخواه، نقطه یا هر ترکیبی از آنها گسترش داد. یعنی می‌توان شبکه را روی هر منحنی دلخواه، نقطه و یا ترکیبی از آنها متمرکز نمود. برای انجام این کار داوینسکی متریک g_{ij} فوق را تعریف نمود [۳].

فرض کنید محل‌های جذب (مکان‌هایی که شبکه به آن مکان‌ها گرایش دارد و در آنجا متراکم می‌شود)، به‌وسیلهٔ تابع $F(\overrightarrow{x}) = ۰$ که $\overrightarrow{x} = (x, y)$ داده شود. به عنوان مثال، فرض کنید محل‌های جذب به منحنی‌های مجزای $F_i(x) = ۰$ ، $i = ۱, ..., n$ مقید شوند، در این صورت $F(x) = F_۱(x)...F_n(x)$. داوینسکی قرار داد:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + f(F)\ \frac{F_{x^i}\ .\ F_{x^j}}{\|\nabla F\|^۲} \qquad (۲.۷)$$

که $f(F)$ یک تابع فاصله است. (متناسب با کوتاه‌ترین فاصله یک نقطهٔ داده شده تا منحنی $F(x) = ۰$ است.) به طوری که $f(F)$ افزایش می‌یابد وقتی که فاصله به صفر میل کند و $f(F)$ به صفر می‌رود وقتی که فاصله افزایش یابد.

قسمت نااقلیدسی $f(F)\ \frac{F_{x^i}\ .\ F_{x^j}}{\|\nabla F\|^۲}$ ، شامل یک عامل ضربی $f(F)$ ، که اندازهٔ متریک (g_{ij} ها) را کنترل می‌کند و یک عامل جهتی $\frac{F_{x^i}\ .\ F_{x^j}}{\|\nabla F\|^۲}$ که مقداری از $f(F)$ که باید با توجه به جهت حرکت از یک نقطه شبکه به نقطهٔ دیگر به δ_{ij} اضافه شود را اصلاح می‌کند.

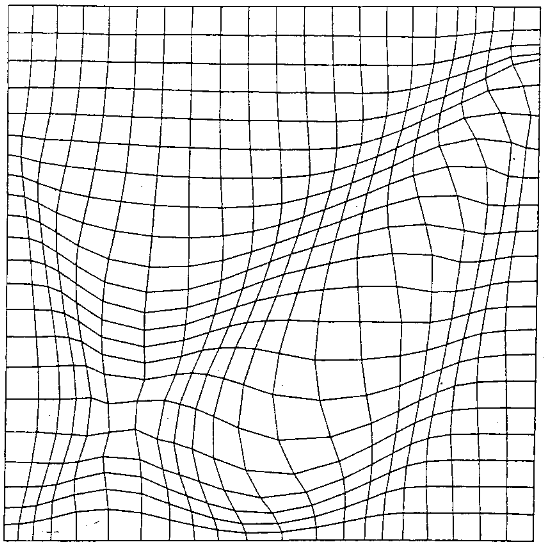
معادلهٔ (۲.۷) به محاسباتی پرهزینه برای محاسبهٔ کوتاه‌ترین فاصلهٔ هر گرهٔ شبکه، $x_۰$ ، از منحنی $F(x) = ۰$ نیاز دارد. هر گاه $F(x_۰)$ را فاصلهٔ $x_۰$ تا $F(x)$ در نظر بگیریم این محاسبات را به راحتی می‌توان حذف نمود. در مثالی که قبلاً بیان شد $F(x_۰)$ ، دقیقاً کوتاه‌ترین فاصله بین $x_۰$ و $F(x)$ بود. شکل ۳ مثالی از جذب شبکه به سهمی $y = ۳(x - ۰/۵)^۲$ و خط راست $y = x$ را نشان می‌دهد. از این رو $F = (y - ۳(x - ۰/۵)^۲)(y - x)$. دراین شکل شبکه از معادلات

$$\nabla.(\sqrt{g}G^{-۱}\nabla\xi) = ۰ \qquad [g_{ij}] = G$$
$$\nabla.(\sqrt{g}G^{-۱}\nabla\eta) = ۰ \qquad g = \det G$$

که در آن g_{ij} ها از (۲.۷) به‌دست آمده‌اند، محاسبه شده است.

بدین‌ترتیب ماتریس $G = \begin{pmatrix} g_{۱۱} & g_{۱۲} \\ g_{۲۱} & g_{۲۲} \end{pmatrix}$ کنترل تراکم شبکه را بر عهده دارد و لذا می‌تواند به عنوان تابع نشانگر در نظر گرفته شود و چون G یک تانسور متریک و لذا معین مثبت و متقارن است [۱]، بنابراین تابع نشانگر در دو بعد به عنوان یک ماتریس ۲×۲ ، معین مثبت و متقارن تعریف خواهد شد.

ظاهراً داوینسکی اولین کسی بود که اهمیت علمی این حقیقت را کشف کرده که هیچ محدودیتی روی تانسورمتری $G = [g_{ij}]$ ضروری نیست تا معکوس پذیری نگاشت همساز را تضمین کند و این که چنین نگاشتی که از معادلات اویلر ـ لاگرانژ تعریف شده، می‌تواند به طور ویژه برای تعدیل شبکه استفاده شود و این تانسورهای متری می‌توانند به گونه‌ای انتخاب شوند که نقاط شبکه در ناحیه‌ای که جواب فیزیکی تغییرات سریع دارد، متراکم شوند و مهم‌تر این که یک شبکه که این چنین به‌دست آمده، از خواص مطلوب نگاشت همساز مخصوصاً نظم (قاعده) یا همواری برخوردار می‌شود.



شکل ۴. تراکم شبکه در یک سهمی $y = ۳(x - ۰/۵)^۲$ و
یک خط راست $y = x$ با استفاده از متریک تعریف شده در (۲.۷)

۸ تعریف تابعک تعدیل شبکه در یک فرم عمومی

«هانگ» و «راسل» با الهام گرفتن از تابعک تعدیل شبکه بر پایهٔ نگاشت‌های همساز، تابعک تعدیل شبکه خود را در یک فرم کلی به صورت زیر تعریف کردند[۸]:

$$I[\xi, \eta] = \frac{۱}{۲} \int_{\Omega_P} [\nabla \xi^T G_۱^{-۱} \nabla \xi + \nabla \eta^T G_۲^{-۱} \nabla \eta] \, dxdy \qquad (۱.۸)$$

که $G_۱$ و $G_۲$ ماتریس های معین مثبت متقارن یا همان توابع نشانگر هستند و

$$\overrightarrow{\xi} = (\xi, \eta) \ ، \ \overrightarrow{x} = (x, y) \ ، \ \nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})^T$$

و $\overrightarrow{\xi} = \overrightarrow{\xi}(\overrightarrow{x})$ تبدیل مختصات از دامنهٔ فیزیکی به دامنهٔ محاسباتی می‌باشد. با قرار دادن ماتریس‌های معین مثبت متقارن گوناگون به‌جای $G_۱$ و $G_۲$ در تابعک (۱.۸)، می‌توان تابعک‌های تعدیل شبکه مختلفی تعریف نمود. اما برای حصول نتایج قابل قبول، لازم است که تعریف $G_۱$ و $G_۲$ هدفمند و دارای پشتوانه‌های نظری و تجربی باشد. اکثر تابعک‌های تعدیل شبکه‌ای که تا به حال تعریف شده‌اند در این فرم کلی قابل طرح هستند. نگاشت $\overrightarrow{\xi} = \overrightarrow{\xi}(\overrightarrow{x})$

که مینیمم ساز تابعک فوق است باید در معادلات اویلر ــ لاگرانژ مربوطه صدق کند. معادلات اویلر ـ لاگرانژ برای تابعک $I[\xi,\eta]$ عبارتند از:

$$\nabla.(G_1^{-1}\nabla\xi) = 0$$
$$\nabla.(G_2^{-1}\nabla\eta) = 0.$$

این معادلات، تبدیل مختصاتی را که برای تولید و تعدیل شبکه به‌کار می‌رود، معین می‌کنند.

۹ معادلهٔ حرکت شبکه

روش‌های وردشی بالا فقط برای تولید یک شبکهٔ تعدیل پذیر مستقل از زمان، متناسب با تابع نشانگرمربوطه بیان شده‌اند. اگر بخواهیم یک مسألهٔ وابسته به زمان را حل کنیم، برای هر گام زمانی به یک شبکهٔ تعدیل شده، احتیاج است. اولین راه برای حل این مشکل، این است که در هر گام زمانی، یک تابع نشانگر تعریف و با استفاده از روند بالا، شبکه تعدیل‌پذیر متناظر، تولید شود. این روش، عموماً یک روش مؤثر نخواهد بود. برای افزایش کارایی و به‌دست آوردن حرکت شبکهٔ هموار، هانگ و راسل، معادلهٔ شار گرادیان را برای تولید معادلهٔ دیفرانسیل جزئی حرکت شبکه به‌کار گرفتند که بدین ترتیب تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\frac{1}{\tau}\frac{\delta I}{\delta\xi} \qquad , \qquad \frac{\partial\eta}{\partial t} = -\frac{1}{\tau}\frac{\delta I}{\delta\eta} \qquad (1.9)$$

و

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\nabla.(G_1^{-1}\nabla\xi) \qquad , \qquad \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\nabla.(G_2^{-1}\nabla\eta) \qquad (2.9)$$

که در آن τ یک عامل هموارى زمانی است. حد معادلات سهموی فوق، وقتی $\tau \to 0$ ، معادلات اویلر ـ لاگرانژ برای مینیمم‌سازی تابعک تعدیل شبکه (۱.۸) است. با تغییر τ می‌توان یک تعادل بین تعدیل شبکه و همواری زمانی ایجاد کرد.
با افزایش τ حرکت شبکهٔ هموارتر و با کاهش τ ، تعدیل شبکهٔ دقیق‌تر می‌شود.
در محاسبات عملی، نقش متغیرهای وابسته و مستقل را عوض می‌کنند. بدین ترتیب معادلهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial t} = \quad & - \quad \frac{\overrightarrow{x}_\xi}{\tau J}\{+\frac{\partial}{\partial\xi}[\frac{1}{Jg_1}(\overrightarrow{x}_\eta^T G_1 \overrightarrow{x}_\eta)] - \frac{\partial}{\partial\eta}[\frac{1}{Jg_1}(\overrightarrow{x}_\xi^T G_1 \overrightarrow{x}_\eta)]\} \\ & - \quad \frac{\overrightarrow{x}_\eta}{\tau J}\{-\frac{\partial}{\partial\xi}[\frac{1}{Jg_2}(\overrightarrow{x}_\eta^T G_2 \overrightarrow{x}_\xi)] + \frac{\partial}{\partial\eta}[\frac{1}{Jg_2}(\overrightarrow{x}_\xi^T G_2 \overrightarrow{x}_\xi)]\} \quad (3.9)\end{aligned}$$

این معادله همان $MMPDE$ است که به همراه شرایط مرزی مناسب (معمولاً دیریکله) شبکه

تعدیل‌پذیر را در هر گام زمانی تولید می کند.

۱۰ نتایج عددی

در این بخش برخی از مباحث مطرح شده در بخش‌های قبلی را با استفاده از مثال‌های عددی، مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور از MMPDE ی (۳.۹) وقتی $G_1 = G_2 = G$ استفاده می‌کنیم. بنابراین MMPDE

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial t} = & - \frac{\overrightarrow{x}_\xi}{\tau J}\{+\frac{\partial}{\partial \xi}[\frac{1}{Jg}(\overrightarrow{x}_\eta^T G \overrightarrow{x}_\eta)] - \frac{\partial}{\partial \eta}[\frac{1}{Jg}(\overrightarrow{x}_\xi^T G \overrightarrow{x}_\eta)]\} \\ & - \frac{\overrightarrow{x}_\eta}{\tau J}\{-\frac{\partial}{\partial \xi}[\frac{1}{Jg}(\overrightarrow{x}_\eta^T G \overrightarrow{x}_\xi)] + \frac{\partial}{\partial \eta}[\frac{1}{Jg}(\overrightarrow{x}_\xi^T G \overrightarrow{x}_\xi)]\} \qquad (1.10)\end{aligned}$$

را خواهیم داشت. اگر فقط به‌دست آوردن شبکهٔ تعدیل شدهٔ شبکه $N \times N$ مورد نظر باشد، از آنجایی که نقاط روی مرز مشخص هستند لذا $2 \times (N-2)^2$ مجهول خواهیم داشت. با گسسته‌سازی MMPDE ی (۱.۱۰) و پیاده‌سازی آن روی نقاط میانی شبکه، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی که شامل $2 \times (N-2)^2$ معادله و $2 \times (N-2)^2$ مجهول است، حاصل می‌شود که حل آن نقاط شبکه را در یک زمان دلخواه به‌دست می‌دهد.

اگر علاوه بر به‌دست آوردن نقاط شبکه در زمان دلخواه t ، حل عددی معادله دیفرانسیل جزئی فیزیکی نیز در آن زمان خواسته شود، معادله دیفرانسیل جزئی فیزیکی را گسسته‌سازی کرده و روی نقاط میانی شبکه پیاده‌سازی می‌کنیم. لذا در هر نقطهٔ شبکه سه مجهول x ، y و $u(x,y)$ را خواهیم داشت. با در نظر گرفتن توأمان معادلات به‌دست آمده از گسسته‌سازی MMPDE و معادله دیفرانسیل جزئی فیزیکی، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با $3 \times (N-2)^2$ معادله و $3 \times (N-2)^2$ مجهول خواهیم داشت. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی از حل کنندهٔ معادلهٔ دیفرانسیل معمولیِ «ode15s» در نرم‌افزار MATLAB استفاده می‌کنیم. نواحی فیزیکی و محاسباتی را نیز بدین طریق انتخاب می‌کنیم.

$$(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \qquad\qquad (\xi,\eta) \in [0,1] \times [0,1]$$

مثال ۱.۱۰. در این مثال $u(x,y)$ داده شده است. هدف اصلی پاسخ به این سؤال است که آیا MMPDE مطرح شده در رابطهٔ (۱.۱۰) می‌تواند شبکه را در محل‌هایی که $u(x,y)$ دارای تغییرات سریع است متمرکز کند یا نه؟ برای این کار شبکه ۱۶ × ۱۶ را در نظر گرفته و MMPDE را در بازهٔ زمانی [۵ و ۰] و با استفاده از ode15s در نرم‌افزار MATLAB حل می‌کنیم.

فرض کنید

$$u(x,y) = 1 + c.e^{-c^2((x-0/5)^2+(y-0/5)^2)} \quad , \quad c = 10$$

$u(x,y)$ در شکل (۵) رسم شده است.

تابع نشانگر را به دو روش ذیل انتخاب می‌کنیم.

الف :

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{v}_\perp = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = u(x,y) \quad , \quad c = 10$$

و λ_2 به چهار طریق نشان داده شده در شکل (٦) انتخاب می‌شود.

ب :

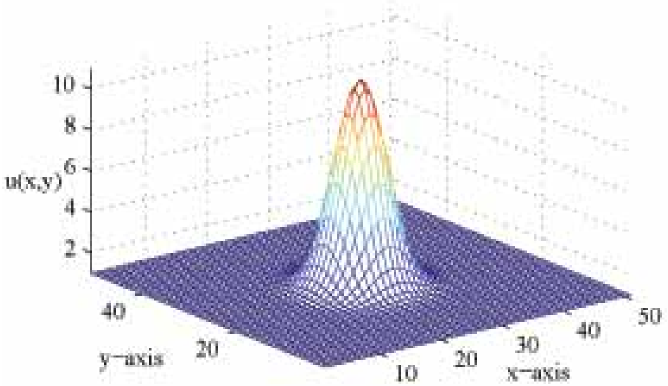
$$(a) \quad G = (\sqrt{1+|\nabla U|^2})I,$$

$$(b) \quad G = (\sqrt{1+U^2})I,$$

$$(c) \quad G = (\sqrt{1+|\nabla U|^2+U^2})I,$$

$(d) \quad G =$ تابع شبه طول کمان

نتایج به‌دست آمده برای روش الف در شکل (٦) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، شبکهٔ (a) که در آن $\lambda_2 = \lambda_1$ است، تراکم بهتری در نقطهٔ (۰/۵ و ۰/۵) دارد که تابع u در آن ماکسیمم خود را اختیار می‌کند.



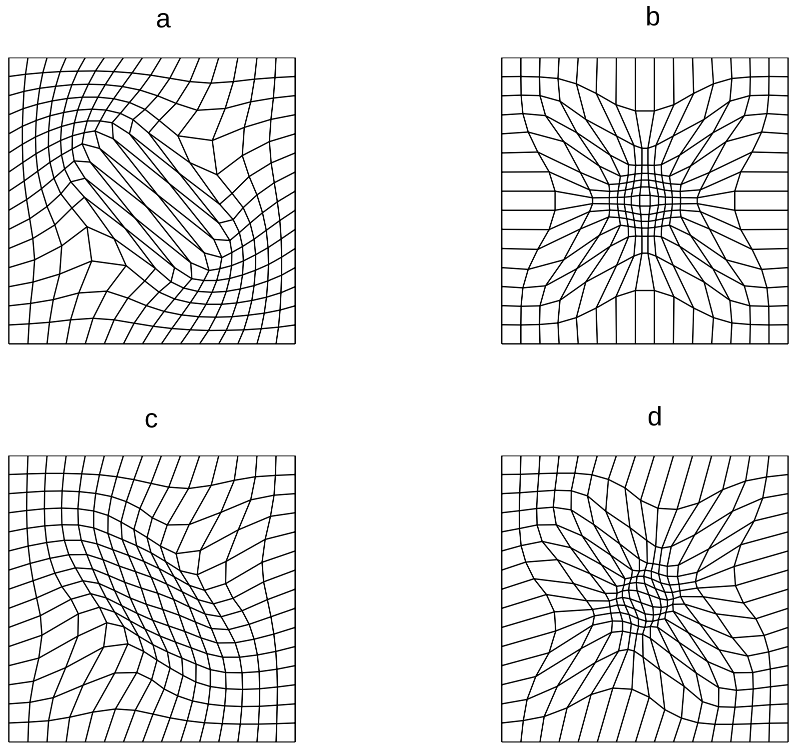
شکل ۵. رسم سه بعدی تابع $u(x,y)$ در مثال ۱.۱۰

نتایج به‌دست آمده برای روش ب، در شکل (۷) نشان داده شده است. همان طور که مشخص است به جز حالت (d) بقیهٔ حالات تراکم نسبتاً خوبی را در نقطهٔ (۰/۵ و ۰/۵) دارند. جالب این است که حالت‌های (a) و (c) مشابه هم هستند. از این امر می‌توان حدس زد که ترکیب تابع نشانگر (a) با (b) به صورتی که (c) را پدید آورد، چندان تأثیری در افزایش تراکم در نقطهٔ (۰/۵ و ۰/۵) ندارد.

مثال ۲.۱۰.(معادلهٔ برگر) در این مثال، روش حرکت شبکه در حل عددی مسائل مقدار مرزی و مقدار اولیه را برای معادلهٔ برگر دو بعدی زیر به‌کار می گیریم.

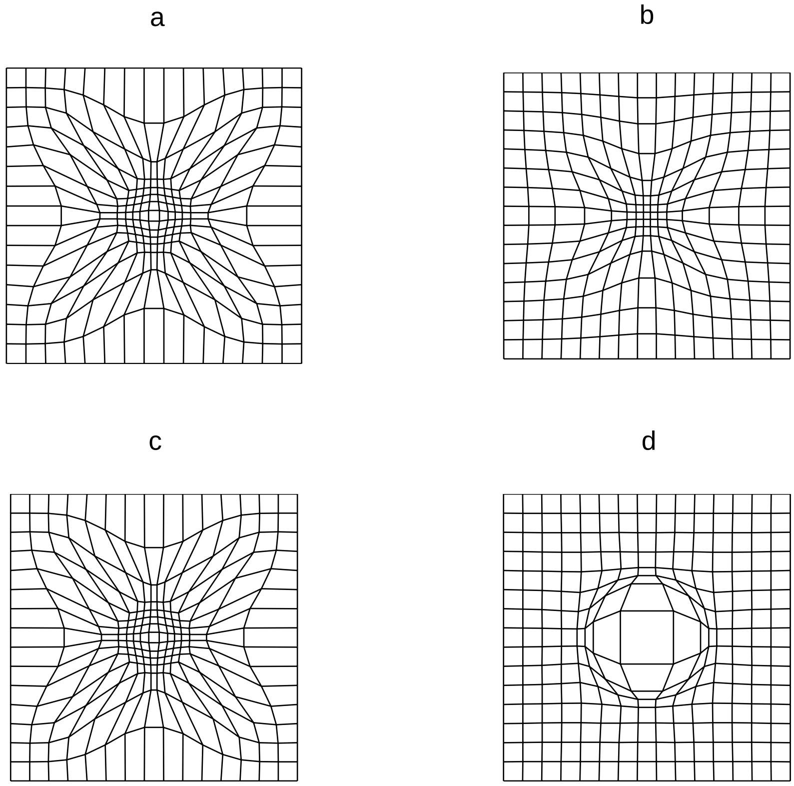
$$u_t = R\Delta u - uu_x - uu_y \quad , \quad (x,y)\in(۰,۱)\times(۰,۱) \quad , \quad R = ۰/۰۰۱$$

شرایط مرزی دیریکله و شرایط اولیه به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که جواب دقیق مسأله، $u(x,y,t) = (۱ + e^{\frac{x+y-t}{۲R}})^{-۱}$ باشد. در اینجا MMPDE و معادله دیفرانسیل جزئی فیزیکی (معادلهٔ برگر) گسسته سازی‌شده معادلات حاصل از MMPDE و معادله دیفرانسیل جزئی فیزیکی، همزمان در یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی قرار می‌گیرند. اگر یک شبکهٔ $N \times N$ داشته باشیم، از آنجایی که نقاط روی مرز مشخص هستند، تعداد نقاط داخلی شبکه، $(N-۲)^۲$ نقطه خواهد بود.



شکل ۶. شبکهٔ به‌دست آمده برای مثال ۱.۱۰ الف با انتخاب‌های متفاوت از $\lambda_۲$ و $\tau = ۰/۰۰۰۰۰۱$. (a) $\lambda_۲ = \frac{۱}{\lambda_۱}$، (b) $\lambda_۲ = \lambda_۱$، (c) $\lambda_۲ = ۱$ و (d) $\lambda_۲ = ۲\lambda_۱$.

در هر نقطه سه مجهول $u(x,y), y, x$ باید محاسبه شود. لذا دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی ما $(N-۲)^{۲} \times ۳$ مجهول و همین تعداد معادله خواهد داشت. دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی مزبور را با استفاده از حل کنندهٔ دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی «ode15s» در نرم‌افزار MATLAB، که برای سیستم‌های سخت طراحی شده است حل کرده و از مقادیر $RTOL = ۱ \times ۱۰^{-۱۲}$ و $ATOL = ۱ \times ۱۰^{-۱۲}$ و $\tau = ۰/۰۰۰۰۰۱$ و $R = ۰/۰۰۱$ استفاده می‌کنیم. نتایج عددی در شکل (۸) نمایش داده شده است.

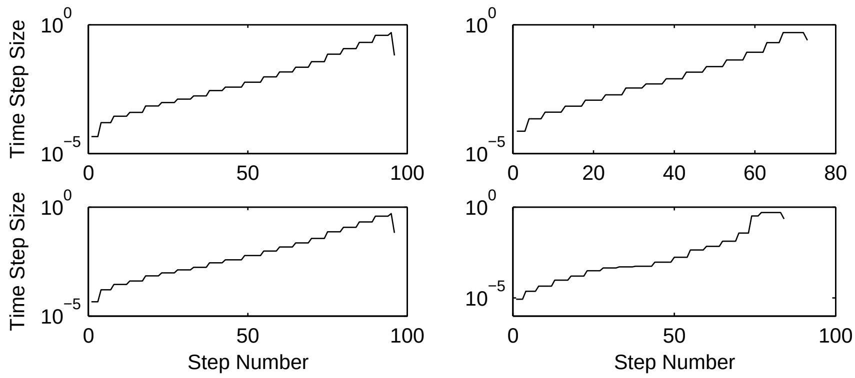


شکل ۷. شبکهٔ به‌دست آمده برای مثال ۲.۱۰ (ب) با $\tau = ۰/۰۰۰۰۰۱$ و

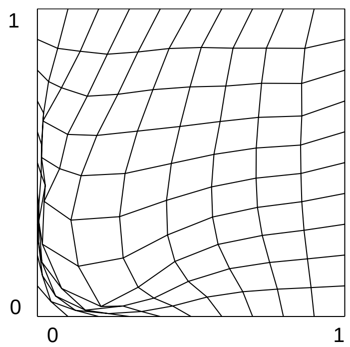
$(a)\ G = (\sqrt{۱ + |\nabla U|^{۲}})I \qquad (b)\ G = (\sqrt{۱ + U^{۲}})I$

$(c)\ G = (\sqrt{۱ + |\nabla U|^{۲} + U^{۲}})I \qquad (d)\ G =$ تابع شبه طول کمان

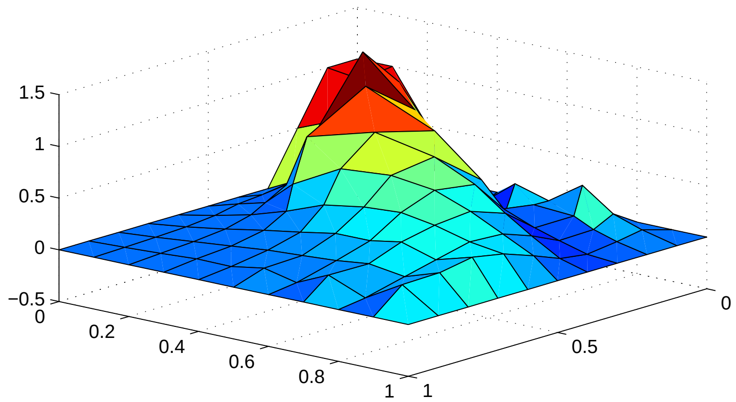
در چهار نمودار پایین نیز، چگونگی انتخاب گام‌های زمانی توسط ode15s در تولید چهار شبکهٔ بالایی به‌طور مجزا نشان داده شده است.



شکل ۸. چگونگی انتخاب گام زمانی در تولید شبکه برای مثال ۲.۱۰ (ب) به ازای
$\tau =$ ۰/۰۰۰۰۰۱



شکل ۹. شبکه ۱۱ × ۱۱ تولید شبکه برای حل معادلهٔ برگر(مثال ۲.۱۰) در زمان $t =$ ۰/۲ به ازای $R =$ ۰/۰۰۱



شکل ۱۰. حل معادلهٔ برگر(مثال ۲.۱۰) در زمان $t = ۰/۲$ به ازای $R = ۰/۰۰۱$
و $\tau = ۰/۰۰۰۰۰۱$
$cputime = ۳/۹۳۳۶ \times ۱۰^{۳} s$

منابع

[1] W.M. Boothby, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, 2nd ed., Academic press, Inc., Orlando 1986.

[2] J.U. Brackbill and J.S. Saltzman, Adaptive zoning for singular problem in two dimensions, J. Comput. Phys. 46 (1982) 342-368.

[3] A.S Davinsky, Adaptive grid generation from harmonic maps on Riemannian manifolds, J. Comput. Phys. 95 (1991) 450-476.

[4] J. Eell and H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 86, No.1, 109-160 (1964).

[5] F.B. Fuller, Harmonic Mappings, Proc. Natl. Acad. Sci.USA 40, 987-991 (1954).

[6] R. Hamilton, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 471, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1975.

[7] W. Huang, Y. Ren and R.D. Russel, Moving mesh based on moving mesh Partial differential equation, J. Compute. Phys. 113 (1994), pp. 279-290.

[8] W. Huang and R.D. Russel, Moving mesh strategy based on a gradient flow equation for two-dimensional problems, SIAM J. Sci. Comput. 20 (1999) 998-1015.

[9] R. Schoen and S.T Yau, On univalent harmonic maps between surface, Invent. Math. 44, 265-278 (1978).

[10] A. Winslow, Numerical solution of the quasi-linear Poisson equation in a nonuniform triangle mesh, J. Comput. Phys. 1 149-172 (1967).

علیرضا سهیلی و محمد هادی مصلحی
گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان
soheili@math.usb.ac.ir
moslehi@mhm.ir