

نظریه عملگر کوپمن: چارچوبی خطی برای تحلیل دینامیک غیر خطی*

حسن ملکی و یزدان گلزاده

چکیده. نظریه عملگر کوپمن با ارائه یک تغییر پارادایم اساسی، امکان توصیف دینامیک‌های غیرخطی پیچیده را در قالب عملگری خطی فراهم می‌سازد. این چارچوب نوآورانه با تغییر موضوع مورد مطالعه از فضای حالت به فضای توابعی به نام مشاهده‌پذیر که روی فضای حالت تعریف شده‌اند، ابزارهای قدرتمند جبر خطی را برای تحلیل سیستم‌هایی در دسترس قرار می‌دهد که پیش از این با روش‌های کلاسیک غیرقابل تحلیل بودند. در این مقاله، با کاوش در بنیان‌های ریاضی این نظریه و بررسی خواص طیفی عملگر کوپمن، نشان می‌دهیم که چگونه توابع ویژه و مقادیر ویژه این عملگر، مدهای ذاتی و نرخ‌های تحول سیستم‌های دینامیکی را آشکار می‌سازند. همچنین، با معرفی روش‌های عددی پیشرفته‌ای چون تجزیه مُد دینامیکی و نسخه توسعه‌یافته آن، راهکارهای عملی برای استخراج مستقیم این عملگر از داده‌های تجربی ارائه می‌شود. کاربردهای گسترده این نظریه در حوزه‌های متنوع از دینامیک سیالات و مهندسی کنترل تا یادگیری ماشین و علوم داده، گواهی بر توانایی منحصر به فرد آن در ایجاد پلی مستحکم بین ریاضیات محض و مسائل کاربردی است.

۱. مقدمه

جهان در گذر زمان در حرکت است. پدیده‌ها بی‌وقفه تغییر می‌کنند و در دل این تغییر، نظم نهفته است. آنچه به چشم، ناپایدار و سیال می‌رسد، اغلب از قانونی پنهان پیروی می‌کند. از چرخش منظم سیارات در آسمان شب تا تپش آهنگین قلب انسان، از جریان باد و آب تا نوسان قیمت‌ها در

2010 Mathematics Subject Classification. 37C30, 47A35, 37M99, 65F15, 93C10.

عبارات و کلمات کلیدی. عملگر کوپمن، سیستم‌های دینامیکی، تحلیل طیفی، تجزیه مُد دینامیکی، مدل‌سازی داده‌محور.

بازارهای مالی، از گسترش یک بیماری همه‌گیر تا ترافیک روزمره خیابان‌های شهر، همه نمونه‌هایی از سیستم‌های دینامیکی هستند؛ سامانه‌هایی که در طول زمان تغییر می‌کنند و این تغییر، گاه ساده و قابل پیش‌بینی، و گاه پیچیده، آشوبناک و دور از انتظار است [۳۸]. در دل همه این پدیده‌ها یک پرسش بنیادین نهفته است: «قوانین حاکم بر تحول زمانی سیستم چیست؟» اگر بتوانیم معادله‌ای بیابیم که مسیر دگرگونی یک سیستم را توصیف کند، گامی بزرگ در فهم و پیش‌بینی آن برداشته‌ایم. این همان پرسشی‌ست که قرن‌ها ذهن دانشمندان را به خود مشغول کرده است: کشف معادله حاکم بر حرکت.

از منظر علمی، پیدا کردن چنین معادله‌ای به مثابه در اختیار داشتن یک شاه‌کلید است؛ کلیدی که نه تنها امکان پیش‌بینی آینده یک پدیده را می‌دهد، بلکه ما را قادر می‌سازد سناریوهای مختلف را شبیه‌سازی کنیم، بر سیستم تأثیر بگذاریم، یا حتی آن را کنترل کنیم. اگر بتوانیم رفتار و ویروسی در حال گسترش را مدل کنیم، می‌توانیم جلوی شیوع آن را بگیریم. اگر بتوانیم مدل دقیقی از مصرف انرژی در یک شهر تهیه کنیم، می‌توانیم آن را بهینه کنیم. اگر بتوانیم معادله‌ای برای الگوهای امواج مغزی بنویسیم، شاید بتوانیم نشانه‌های بیماری‌هایی چون صرع یا آلزایمر را زودتر تشخیص دهیم. اما یافتن چنین معادلاتی همیشه آسان نبوده و هنوز هم نیست. گاهی قوانین فیزیکی سیستم مشخص‌اند، اما دینامیک آن چنان پیچیده است که معادله دقیق حاصل نمی‌شود. و گاه، اصلاً قانونی از پیش در کار نیست یا ناشناخته باقی مانده؛ تنها چیزی که در اختیار داریم، داده‌هایی از رفتار سیستم است: داده‌های هواشناسی، سیگنال‌های مغزی، حسگرهای تردد شهری و یا سری‌های زمانی مالی. در چنین شرایطی، پرسش کهن «معادله حاکم بر تحول چیست؟» با زبانی نو مطرح می‌شود:

آیا می‌توان از دل داده‌ها، معادله‌ای کشف کرد که دینامیک سیستم را توصیف کند؟

این پرسش، در دل خود پیوندی عمیق میان ریاضیات کلاسیک و علم داده معاصر برقرار می‌کند. در این مقاله خواهیم دید چگونه این مسیر، از کارهای گالیله و نیوتن و لاگرانژ و هامیلتون آغاز شد، با کارهای پوانکاره به مرزهای آشوب رسید، و با ایده فراموش‌شده‌ای از دهه ۱۹۳۰ به نام عملگر کوپمن و با کمک جبرخطی و آنالیز تابعی، جان تازه‌ای گرفت. برنارد او. کوپمن^۱ (۱۹۰۰-۱۹۸۱)، در سال ۱۹۳۱ در مقاله‌ای بنیادی نشان داد که هر سیستم دینامیکی غیرخطی را می‌توان از دیدگاه عملگرهای خطی بر فضای توابع مشاهده‌پذیر بررسی کرد. انگیزه اصلی او نه مدل‌سازی داده‌محور، بلکه فهم ساختار طیفی و رفتار آماری سیستم‌های دینامیکی در چارچوب نظریه ارگودیک بود. کوپمن دریافت

^۱ Bernard O. Koopman

که اگر به جای دنبال کردن تکامل نقاط در فضای حالت، تکامل توابع روی آن فضا را مطالعه کنیم، دینامیک غیرخطی به صورت یک عملگر خطی نامتناهی بُعد ظاهر می‌شود. این تغییر دیدگاه، امکان استفاده از ابزارهای آنالیز تابعی و نظریه طیفی را برای مطالعه سیستم‌های غیرخطی فراهم ساخت؛ ایده‌ای که دهه‌ها بعد، با ظهور روش‌های عددی و یادگیری ماشین، اهمیتی دوچندان یافت.

ساختار این مقاله به این صورت است: در بخش ۲ به مرور تاریخی چالش‌های مدل‌سازی دینامیک‌های غیرخطی و ظهور ایده عملگر کوپمن می‌پردازیم. در بخش ۳، بنیادهای ریاضی این نظریه، از تعریف سیستم دینامیکی تا عملگر کوپمن و خواص طیفی آن را دقیقاً بررسی می‌کنیم. در بخش ۴، روش‌های عددی و داده‌محور کلیدی مانند تجزیه مُد دینامیکی (DMD) و نسخه توسعه‌یافته آن (EDMD) را معرفی خواهیم کرد. در ادامه، در بخش ۵ قدرت این چارچوب را با ارائه مثال‌های محاسباتی از سیستم‌های آشوبناک و غیرخطی به نمایش می‌گذاریم. کاربردهای گسترده این نظریه در حوزه‌های مختلف در بخش ۶ مرور می‌شود و در نهایت، در بخش ۷ به جمع‌بندی، بحث درباره محدودیت‌ها و نقاط قوت، و ترسیم چشم‌اندازهای آینده می‌پردازیم.

۲. تاریخچه

نخستین گام‌های علمی در مسیر فهم رفتار پدیده‌ها را باید در دوران گالیله و نیوتن جست‌وجو کرد؛ زمانی که جهان همچون ساعتی منظم و قانون‌مند تصور می‌شد [۳۱]. آیزاک نیوتن^۱ (۱۶۴۲–۱۷۲۶)، با معادلات حرکت خود زبانی ریاضی برای توصیف تغییرات پدید آورد و معادلات دیفرانسیل را به ابزار اصلی مطالعه دینامیک بدل ساخت.

در ادامه، ژوزف لویی لاگرانژ^۲ (۱۷۳۶–۱۸۱۳)، با رویکردی مبتنی بر انرژی و معرفی تابع لاگرانژی، چارچوبی مجردتر برای دینامیک ارائه کرد [۲۲]. او با گذر از مختصات دکارتی به مختصات تعمیم‌یافته و بهره‌گیری از اصل کمترین کنش، زبان عمومی‌تری برای توصیف پدیده‌ها ساخت و راه را برای مکانیک هامیلتونی گشود.

ویلیام هامیلتون^۳ (۱۸۰۵–۱۸۶۵)، با معرفی مختصات-تکانه (q, p) و تابع هامیلتونی، دینامیک را به صورت جریان‌هایی در فضای فاز بازنویسی کرد [۱۱]. این دیدگاه که بر هندسه

¹ Isaac Newton

² Joseph-Louis Lagrange

³ William Rowan Hamilton

سمپلیتیک و جبر پواسون استوار بود، تحلیل پایداری و آشوب را ساده‌تر ساخت و پلی میان مکانیک کلاسیک و فیزیک نوین زد [۲۷].

اما در آستانهٔ قرن بیستم، آنری پوانکاره^۱ (۱۸۵۴-۱۹۱۲)، به جای جست‌وجوی جواب‌های بسته، به تحلیل کیفی پرداخت و نشان داد که حتی در ساده‌ترین سیستم‌های هامیلتونی، رفتارهای آشوبناک می‌توانند پدیدار شوند [۳۳]. ابزارهایی چون نگاشت پوانکاره و قضیهٔ بازگشت، نظریهٔ ارگودیک و تحلیل آماری سیستم‌های دینامیکی را بنیان نهادند [۳۴].

این تحولات پرسشی اساسی را پیش کشید: آیا می‌توان سامانه‌های غیرخطی را در قالبی خطی بازنمایی کرد؟ در این میان، دو دیدگاه کلاسیک وجود داشت: دیدگاه لاگرانژی که بر ردیابی مسیر تک‌تک ذرات تمرکز داشت، و دیدگاه اویلری که جریان‌های کلی و میدان‌ها را در یک ناحیهٔ ثابت بررسی می‌کرد. هر دو دیدگاه در مواجهه با پیچیدگی سیستم‌های غیرخطی محدودیت داشتند؛ ردیابی مسیرها دشوار بود و ابزارهای خطی سنتی مانند آنالیز فوریه برای سیستم‌های غیرخطی، کارایی نداشتند.

در چنین بستری، برنارد کوپمن ایده‌ای جسورانه ارائه کرد: به جای دنبال کردن مسیر ذرات، باید به تحول توابعی پرداخت که بر این مسیرها تعریف می‌شوند. این توابع که مشاهده‌پذیر^۲ نام دارند، می‌توانند کمیت‌هایی چون انرژی، دما یا سرعت باشند. کوپمن نشان داد که اگرچه دینامیک در فضای حالت غیرخطی است، اما تحول این مشاهده‌پذیرها تحت عملگری خطی رخ می‌دهد [۱۵]. این کشف شگفت‌انگیز، دریچه‌ای تازه گشود: زبان جبر خطی و نظریهٔ عملگرها به میدان آمدند تا پیچیدگی غیرخطی را در قالبی خطی قابل‌تحلیل بازنمایی کنند. مقالهٔ کلاسیک کوپمن در سال ۱۹۳۱، نقطهٔ آغاز نظریه‌ای شد که اگرچه در زمان خود ناشناخته ماند، اما امروزه در قلب روش‌های داده‌محور برای تحلیل سامانه‌های دینامیکی جای گرفته است.

۳. بنیادهای ریاضی

تعریف ۱.۳. یک سیستم دینامیکی، زوج مرتب $(X, \{\phi^t\}_{t \in G})$ است که در آن X فضای حالت یا فاز، گروه آبلی G مجموعه زمانی و $\phi^t : X \rightarrow X$ خانواده‌ای از نگاشت‌هاست به‌طوری‌که

$$\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s, \quad t, s \in G \text{ و } \phi^0 = \text{id}_X$$

^۱ Henri Poincaré

^۲ observable

در این تعریف، X می‌تواند یک فضای متریک، توپولوژیک، منیفلد یا یک فضای اندازه باشد. G نیز می‌تواند مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ (برای سیستم‌های گسسته) یا مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ (برای سیستم‌های پیوسته) باشد. در حالت گسسته، قانون حاکم بر تحول سیستم با یک نگاشت $T : X \rightarrow X$ داده می‌شود که $x_{n+1} = T(x_n)$ و شار سیستم از تکرار این نگاشت به دست می‌آید: $\phi^n = T^n$. در حالت پیوسته، سیستم با یک میدان برداری هموار F و معادله دیفرانسیل $\dot{x}(t) = F(x(t))$ با شرط اولیه $x(0) = x_0$ مشخص می‌شود. نگاشت های $\phi^t(x) = \phi(x, t)$ هم منحنی‌های جواب یا شارهای جریان مسئله مقدار اولیه بالا هستند [۲۱]. شایان ذکر است که در حالت پیوسته، تعریف یک سیستم دینامیکی به صورت شار یک میدان برداری، مستلزم آن است که فضای حالت X دارای ساختار خمینه هموار باشد تا مفهوم میدان برداری و مشتق‌گیری معنا پیدا کند.

مثال ۲.۳. به عنوان نمونه‌ای کلاسیک، یک نوسان‌گر هماهنگ ساده مانند یک فنر بدون اصطکاک را در نظر بگیرید که با معادله دیفرانسیل $x'' + x = 0$ توصیف می‌شود و می‌توان آن را با تغییر متغیر $y = x'$ به دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر تبدیل کرد که روی فضای حالت $X = \mathbb{R}^2$ عمل می‌کند:

$$x' = y, \quad y' = -x.$$

در اینجا $\mathbb{R}^2$ یک خمینه هموار دوبعدی است و میدان برداری

$$F(x, y) = (y, -x)$$

یک میدان برداری هموار روی آن محسوب می‌شود. شار حاصل از این میدان برداری دوران یکنواخت روی دایره‌های هم‌مرکز را توصیف می‌کند.

در نظریه عملگر کوپمن، توجه ما معطوف بر رفتار مشاهده‌پذیرها روی فضای حالت است. به زبان ساده، یک مشاهده‌پذیر را تابعی چون $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم که عنصری از یک فضای برداری از توابع $\mathbb{C}$ -مقدار روی X به نام $\mathcal{F}$ است. برای راحتی کار، با تعریف نرم روی $\mathcal{F}$ ، آن را یک فضای باناخ در نظر می‌گیریم. تعبیر فیزیکی مشاهده‌پذیر، حسگری است که اطلاعاتی از سیستم مورد نظر به ما می‌دهد؛ ما می‌توانیم از طریق تحول مقادیر مشاهده‌پذیرها، به رفتار سیستم پی ببریم. به جای دنبال کردن مسیر حالت $\{x, T(x), T^2(x), \dots\}$ ، رد مقادیر $\{f(x), f(T(x)), f(T^2(x)), \dots\}$ را دنبال می‌کنیم [۲۹، ۵].

تعریف ۳.۳. فضای باناخ $\mathcal{F}$ از توابع مشاهده‌پذیر $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ را در نظر بگیرید. عملگر کوپمن $\mathcal{K}$ مرتبط با سیستم دینامیکی گسسته $T : X \rightarrow X$ ، عملگر $\mathcal{K} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ است که برای هر $f \in \mathcal{F}$ به صورت $\mathcal{K}f = f \circ T$ تعریف می‌شود [۳۰].

این عملگر، برخلاف توصیف نقطه‌ای از سیستم در قالب مدارها، تصویری کلی از سیستم ارائه می‌دهد و چگونگی تحول توابع مشاهده‌پذیر در طول زمان را توصیف می‌کند:

$$(\mathcal{K}f)(x_n) = f(x_{n+1}). \quad (۱.۳)$$

اگرچه تبدیل سیستم T معمولاً غیرخطی است، اگر $\mathcal{F}$ فضای برداری باشد، عملگر کوپمن $\mathcal{K}$ همیشه یک عملگر خطی است:

قضیه ۴.۳. عملگر کوپمن $\mathcal{K}$ مرتبط با سیستم دینامیکی گسسته $T : X \rightarrow X$ یک عملگر خطی روی فضای برداری $\mathcal{F}$ است.

اثبات. برای هر $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ و $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ داریم:

$$\mathcal{K}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = (c_1 f_1 + c_2 f_2) \circ T = (c_1 f_1) \circ T + (c_2 f_2) \circ T = c_1 \mathcal{K}f_1 + c_2 \mathcal{K}f_2$$

□

در نتیجه عملگر کوپمن، خطی است.

در بالا، عملگر کوپمن متناظر به یک سیستم دینامیکی زمان گسسته تعریف شد. اما در عمل در بسیاری از موارد کار با زمان گسسته با چالش‌هایی روبروست و مدل‌سازی طبیعی دینامیک در زمان پیوسته صورت می‌گیرد. اکنون، یک سیستم دینامیکی پیوسته روی X را در نظر بگیرید که توسط معادله دیفرانسیل $\dot{x} = F(x)$ با شرط اولیه $x(0) = x_0$ تعریف شده است و شار آن منحنی‌های جواب $\phi^t(x) = \phi(x, t)$ است.

تعریف ۵.۳. فضای باناخ $\mathcal{F}$ از توابع مشاهده‌پذیر $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ را در نظر بگیرید. خانواده عملگرهای کوپمن $\mathcal{K}^t : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ مرتبط با شار $\{\phi^t\}_{t \geq 0}$ ، برای هر $f \in \mathcal{F}$ به صورت $\mathcal{K}^t f = f \circ \phi^t$ تعریف می‌شود [۳۰].

در این حالت نیز، هر عملگر $\mathcal{K}^t$ یک عملگر خطی است. به علاوه خانواده $\{\mathcal{K}^t\}_{t \geq 0}$ تشکیل یک نیم‌گروه می‌دهد یعنی $\mathcal{K}^s f = f \circ \phi^s = f \circ \phi^t \circ \phi^{s-t} = \mathcal{K}^t \mathcal{K}^{s-t} f$ ، و برای هر $t, s \geq 0$ ،

$$\mathcal{K}^{t+s} f = f \circ \phi^{t+s} = f \circ (\phi^t \circ \phi^s) = \mathcal{K}^t \mathcal{K}^s f.$$

نیم‌گروه $\{\mathcal{K}^t\}_{t \geq 0}$ خاصیت مهم دیگری نیز دارد. این نیم‌گروه به صورت قوی پیوسته (یا C^0 -نیم‌گروه) است، یعنی اگر شار ϕ^t پیوسته باشد، برای هر تابع مشاهده‌پذیر پیوسته f داریم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\mathcal{K}^t f - f\| = 0.$$

که در آن $\|\cdot\|$ نرم تعریف شده در $\mathcal{F}$ است. این یعنی برای هر تابع پیوسته و کراندار f از مشاهده‌پذیرها، اثر عملگر $\mathcal{K}^t$ روی f ، هرگاه $t \rightarrow 0$ ، به صورت پیوسته به خود f نزدیک می‌شود. به عبارت بهتر، تغییرات f در راستای دینامیک، وقتی تغییرات زمان کوچک باشد، بسیار اندک است. از سوی دیگر، بر اساس قضیه هیل - یوشیدا^۱ هر نیم‌گروه به صورت قوی پیوسته، یک مولد بی‌نهایت کوچک^۲ دارد. در نتیجه، مولد بی‌نهایت کوچک کوپمن $\mathcal{L}$ به صورت زیر به دست می‌آید [۳۰]:

$$\mathcal{L}f(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{K}^t f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{t} = \left. \frac{d}{dt} f(\phi^t(\mathbf{x})) \right|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

در رابطه بالا، نماد ∇f گرادیان تابع f را نشان می‌دهد. شایان ذکر است که مفهوم گرادیان مستلزم آن است که فضای حالت X به یک ساختار ریمانی یا متریک مجهز باشد تا بتوان دیفرانسیل df را با استفاده از متر به یک میدان برداری نسبت داد. در حالت خاص $X = \mathbb{R}^n$ با متریک اقلیدسی استاندارد، گرادیان همان بردار مشتقات جزئی است:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

از معادله ۲.۳ می‌توان نتیجه گرفت که مولد $\mathcal{L}$ ، مشتق زمانی $\mathcal{K}^t$ روی تابع f در $t = 0$ است، که تساوی آخر بر اساس تعریف مشتق تابع f در جهت میدان برداری F به دست آمده است. به عبارت بهتر، مولد بی‌نهایت کوچک کوپمن معادل مشتق لی تابع مشاهده‌پذیر f در راستای میدان برداری F است. در نتیجه، این عملگر یک فرم دیفرانسیلی مرتبه اول دارد و بیانگر رفتار لحظه‌ای سیستم است، و نشان می‌دهد چگونه تابع مشاهده‌پذیر f در جهت جریان سیستم، تغییر می‌کند. اگر چه میدان برداری F ممکن است خطی نباشد، اما مولد $\mathcal{L}$ یک عملگر خطی است. واژه "بی‌نهایت کوچک" در کنار "مولد"، با توجه به رابطه ۲.۳، اشاره به این موضوع دارد که مولد، تغییرات بسیار بسیار کوچک مقدار f را وقتی از x به سمت $\phi^t(x)$ می‌رویم، بررسی می‌کند. کارایی این مولد در بازسازی ساختار دینامیک‌های غیرخطی و پیچیده است که بدون نیاز به حل مستقیم دستگاه معادله

¹ Hille-Yosida Theorem

² infinitesimal Generator

دیفرانسیل، با بررسی تغییرات در فضای تابعی، دینامیک را مدل سازی می کند. در مقایسه با هر K^t ، مولد $\mathcal{L}$ ساده و محاسبه پذیرتر است و پایه ای محکم برای تحلیل های عددی به حساب می آید. بر اساس قضیه هیل - یوشیدا در آنالیز تابعی، مولد بی نهایت کوچک عملگر کوپمن وجود دارد و یکتا است و برای هر $t \geq 0$ ، $K^t = e^{t\mathcal{L}}$ [۵]. معادله ۲.۳ به کمک عملگر کوپمن، پلی مستقیم بین نظریه سیستم های دینامیکی و نظریه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می زند و نشان می دهد که عملگر کوپمن راهی برای "خطی سازی" معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر سیستم، از طریق مطالعه تحول توابع به جای تحول نقاط، ایجاد می کند [۳۰].

اگر X یک مجموعه متناهی باشد، عملگری با بُعد متناهی است و می توان آن را با یک ماتریس نمایش داد. با این حال، هنگامی که X دارای بُعد نامتناهی باشد، عملگری با بُعد نامتناهی است. در بسیاری موارد، به مجموعه خاصی از مشاهد پذیرهای $\{f_1, \dots, f_n\} \subset \mathcal{F}$ دسترسی داریم که می توانند کمیت های فیزیکی مرتبط یا زیرمجموعه ای از یک پایه تابعی برای فضای برداری $\mathcal{F}$ باشند. برای $\hat{f} = (f_1, \dots, f_n)^T \in \mathcal{F}^n$ ، می توانیم عملگر $\mathcal{K}$ را به صورت طبیعی به عملگر $\mathcal{K}_n : \mathcal{F}^n \rightarrow \mathcal{F}^n$ گسترش می دهیم:

$$\mathcal{K}_n \hat{f}(x) := \begin{bmatrix} \mathcal{K}f_1(x) \\ \vdots \\ \mathcal{K}f_n(x) \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

بنابراین، $\mathcal{K}_n = \bigotimes^n \mathcal{K}$. با کمی ساده انگاری، زین پس $\mathcal{K}_n$ را به جای $\mathcal{K}$ به کار می بریم. در این حالت، $\mathcal{F}^n$ فضای مشاهد پذیرهای $\mathbb{C}^n$ -مقدار روی x است و $\mathbb{C}^n$ به عنوان فضای خروجی شناخته می شود.

مثال ۶.۳. فرض کنید $X = \{e, a, a^2\}$ یک گروه دوری با مرتبه ۳ باشد ($a^3 = e$). نگاشت $T : X \rightarrow X$ را به صورت $T(p) = a \cdot p$ تعریف می کنیم. بنابراین، کل فضای حالت یک مدار تناوبی با دوره ۳ است. فرض کنید $\mathcal{F}$ فضای توابع با مقادیر مختلط روی X باشد. به وضوح، این فضا با $\mathbb{C}^3$ هم ریخت است. توابع f_1, f_2, f_3 را به صورت توابع شاخص به ترتیب روی e, a, a^2

تعریف می‌کنیم:

$$f_1(p) = \begin{cases} 1, & p = e, \\ 0, & p \neq e, \end{cases} \quad f_2(p) = \begin{cases} 1, & p = a, \\ 0, & p \neq a, \end{cases} \quad f_3(p) = \begin{cases} 1, & p = a^2, \\ 0, & p \neq a^2. \end{cases}$$

این سه تابع یک پایه برای $\mathcal{F}$ تشکیل می‌دهند. کنش عملگر کوپمن روی این پایه به صورت زیر است:

$$\mathcal{K}f_1(p) = f_1(a \cdot p) = f_3(p),$$

$$\mathcal{K}f_2(p) = f_2(a \cdot p) = f_1(p),$$

$$\mathcal{K}f_3(p) = f_3(a \cdot p) = f_2(p).$$

برای یک مشاهده پذیر $f \in \mathcal{F}$ دلخواه که به صورت

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3, \quad c_i \in \mathbb{C}$$

داده شده باشد، داریم:

$$\mathcal{K}f = c_1 f_3 + c_2 f_1 + c_3 f_2.$$

بنابراین، نمایش ماتریسی $\mathcal{K}$ در پایه $\{f_1, f_2, f_3\}$ به صورت زیر است:

$$\mathcal{K} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

معادله ۴.۳ اثر کامل عملگر کوپمن را روی $\mathcal{F}$ به دست می‌دهد [۶].

مثال ۷.۳. فرض کنید $X = \mathbb{R}^d$ و نگاشت $T : X \rightarrow X$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$(T(\mathbf{x}))_i = \mu_i x_i, \quad (5.3)$$

که در آن $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T \in X$ و $\mu_i \in \mathbb{R}$ هستند. فرض کنید $\mathcal{F}$ فضای توابع مختلط مقدار بر روی $\mathbb{R}^d$ و $\{b_1, \dots, b_d\}$ یک پایه برای X باشد. تعریف کنید:

$$f_i(\mathbf{x}) = \langle b_i, \mathbf{x} \rangle,$$

که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^d$ است. عملگر $\mathcal{K} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ روی f_i به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}f_i(\mathbf{x}) &= \langle b_i, T(\mathbf{x}) \rangle = [b_{i,1}, \dots, b_{i,d}] \begin{bmatrix} \mu_1 \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mu_d \mathbf{x}_d \end{bmatrix} \\ &= [b_{i,1}, \dots, b_{i,d}] \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

حال فرض کنید $\mathcal{F}^d = \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{F}$ و $\mathcal{K}_d$ را روی $\mathcal{F}^d$ همان‌طور که در ۳.۳ تعریف شده است، اعمال کنیم. در این صورت، برای $\hat{f} = (f_1, \dots, f_d)^\top$ داریم:

$$\mathcal{K}_d \hat{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d,1} & \dots & b_{d,d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_d \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

توجه کنید که رابطه ۸.۳ تنها بیانگر اثر عملگر کوپمن روی مشاهده‌گر خاص $\hat{f} = (f_1, \dots, f_d)^\top$ است و نه اثر کامل عملگر کوپمن روی کل فضای مشاهده‌گرها $\mathcal{F}$. نکته اصلی این است که عملگر کوپمن، به شرط آنکه T روی زیرفضایی از $\mathcal{F}$ پایا باشد، تقلیل‌پذیر است. به عنوان یک حالت خاص، می‌توانیم بردار b_i را پایه متعارف در نظر بگیریم که در مولفه i ام مقدار ۱ و در بقیه جاها ۰ است. در این حالت، توابع مشاهده‌پذیر f_i ، نمایانگر تصویرکننده‌ها روی محورهای مختصات هستند: $f_i(x) = x_i$. با توجه با این مورد، عملگر کوپمن به صورت زیر داده می‌شود که دقیقاً با

دینامیک خطی T برابر است:

$$\mathcal{K}_d \hat{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}. \quad (۸.۳)$$

۱.۳. خواص عملگر کوپمن. اگر فضای حالت یک فضای اندازه (X, B, μ) که B یک مجموعه بُرل و μ یک اندازه روی X و نگاشت $T: X \rightarrow X$ یک نگاشت پایستار (حافظ اندازه) باشد، یعنی برای هر $A \in B$ ، $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ ، می‌توانیم فضای مشاهده‌پذیرها روی X را فضای $L^2(X, \mu)$ یعنی همه توابع $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ با نرم $\|f\|_2 = \sqrt{\int_X |f(x)|^2 d\mu(x)}$ در نظر بگیریم. به علاوه، برای آنکه بتوان عملگر کوپمن را به عنوان یک عملگر خطی روی یک فضای هیلبرت بررسی کرد، لازم است ساختار ضرب داخلی روی فضای توابع مشاهده‌گر مشخص شود. ضرب داخلی در این فضا به صورت

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$$

تعریف می‌شود. با این تعریف، $L^2(X, \mu)$ یک فضای هیلبرت است و عملگر کوپمن یک عملگر خطی روی آن خواهد بود. به عنوان نمونه‌ای برای سیستم‌های پایستار، می‌توان به نگاشت دوران دایره یا سیستم‌های هامیلتونی اشاره کرد. در این سیستم‌ها، سیستم انرژی یا اندازه خودش را حفظ می‌کند. برای سیستم‌های ناپایستار نیز می‌توان به نگاشت لجستیک و سیستم‌های اتلافی^۱ مانند حرکات نوسانی با در نظر گرفتن اصطکاک اشاره کرد.

اگر نگاشت T پایستار باشد، عملگر کوپمن متناظر به آن، ایزومتری^۲ است یعنی نُرم را حفظ می‌کند: برای هر $f \in L^2(X, \mu)$

$$\|\mathcal{K}f\|_2^2 = \int_X |f(T(x))|^2 d\mu(x) = \int_X |f(y)|^2 d\mu(y) = \|f\|_2^2; \quad (۹.۳)$$

که تساوی وسط به کمک تغییر متغیر $y = T(x)$ و پایستار بودن $\mu(\cdot) = \mu(T^{-1}(\cdot))$ به دست می‌آید. به صورت معادل ایزومتری، ضرب داخلی را نیز حفظ می‌کند: $\langle \mathcal{K}f, \mathcal{K}g \rangle = \langle f, g \rangle$.

¹dissipative

²isometry

از طرف دیگر، هر عملگر کراندار و پوشا که ضرب داخلی را حفظ کند، عملگر یکانی^۱ گویند. اگر نگاشت پایستار T ، معکوس پذیر (یا به صورت دقیق تر، تقریباً همه جا معکوس پذیر) باشد، عملگر کوپمن متناظر به آن کراندار و پوشا است، و چون ضرب داخلی هم حفظ می کند، در نتیجه یک عملگر یکانی می شود [۲۹، ۲۰]. یکانی بودن عملگر کوپمن، نتایج مهمی در بر دارد. مهمترین آن که ریشه در نظریه طیفی عملگرها دارد، این است که مقادیر ویژه عملگرهای یکانی روی دایره واحد $\mathbb{S}^1$ قرار دارد. به علاوه این ویژگی به ما اجازه می دهد از آنالیز طیفی عملگرهای یکانی و قضایای مهمی همچون قضیه طیفی برای مطالعه دینامیک استفاده کنیم. یکانی بودن عملگر کوپمن، یعنی دینامیک زیربنایی هیچ اطلاعاتی را از دست نمی دهد، به نوعی حرکات نوسانی افزایشی یا میرا در سیستم مشاهده نمی شود. به عنوان جمع بندی این قسمت، عملگر کوپمن متناظر به نگاشت دوران روی دایره واحد، یکانی و عملگر کوپمن متناظر به نگاشت لجستیک، غیر یکانی است [۶]. علاوه بر این، عملگر کوپمن یک عملگر مثبت هم است، به این معنا که برای هر $f \geq 0$ ، داریم $\mathcal{K}f \geq 0$. از سوی دیگر، در خاصیت مارکو نیز صدق می کند، یعنی تابع واحد که برای هر $x \in X$ ، $1x = 1$ نقطه ثابت عملگر کوپمن است: $1\mathcal{K} = 1$. از سوی دیگر، مثبت بودن و دارا بودن خاصیت مارکو، نتیجه می دهد که عملگر کوپمن با نرم $\|\cdot\|_\infty$ یک عملگر انقباضی است، یعنی $\|\mathcal{K}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ [۲۰].

۲.۳. توابع ویژه و مقادیر ویژه عملگر کوپمن. همان گونه که در بالا اشاره شد، در صورتی که $\mathcal{F}$ به عنوان یک فضای برداری در نظر گرفته شود، عملگر کوپمن به صورت خطی عمل می کند. بنابراین، مطالعه خواص طیفی (مقادیر ویژه) آن منطقی است زیرا این کار به ما بینشی در مورد دینامیک سیستم، مشابه سیستم های خطی می دهد. برای همین فرض می کنیم که $\mathcal{F}$ یک فضای باناخ از مشاهدپذیرها با نرم $\|\cdot\|$ و عملگر $\mathcal{K}$ که عملگر کوپمن یک عملگر کراندار (و بنابراین پیوسته) بر این فضا است [۲۹، ۲۰].

تعریف ۸.۳. یک تابع ویژه برای عملگر کوپمن $\mathcal{K}$ وابسته به دینامیک گسسته T ، مشاهده پذیر $\phi_\mu \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$ است به قسمی که

$$\mathcal{K}\phi_\mu = \phi_\mu \circ T = \mu\phi_\mu \quad (۱۰.۳)$$

که در آن، $\mu \in \mathbb{C}$ مقدار ویژه متناظر به ϕ_μ است [۳۰].

^۱unitary

تعریف ۹.۳. یک تابع ویژه برای خانواده عملگر کوپمن $\mathcal{K}^t$ وابسته به شارّ زمان پیوسته $\{\phi^t\}_{t \geq 0}$ ، مشاهده‌پذیر $\{\circ\} \setminus \phi_\lambda \in \mathcal{F}$ است به قسمی که

$$\mathcal{K}^t \phi_\lambda = \phi_\lambda \circ \phi^t = e^{\lambda t} \phi_\lambda, \quad \forall t \geq 0. \quad (11.3)$$

که در آن، $\lambda \in \mathbb{C}$ مقدار ویژه متناظر به ϕ_λ است [۳۰].

با مشتقگیری نسبت به زمان از معادله ۱۱.۳ در $t = 0$ ، برای مولد بی‌نهایت کوچک عملگر کوپمن $\mathcal{L}$ به معادله $\mathcal{L}\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$ می‌رسیم. اگر شارّ $\{\phi^t\}_{t \geq 0}$ از معادله دیفرانسیل $\dot{x}(t) = F(x(t))$ القا شده باشد، از رابطه ۲.۳ به معادله

$$F(x) \cdot \nabla \phi_\lambda(x) = \lambda \phi_\lambda(x) \quad (12.3)$$

می‌رسیم که در آن، فرض می‌شود تابع ویژه ϕ_λ از کلاس $C^1(X)$ باشد تا گرادیان آن تعریف شود. این معادله، برای محاسبه توابع ویژه و مقادیر ویژه عملگر کوپمن مورد استفاده قرار می‌گیرد [۶].

مثال ۱۰.۳. سیستم دینامیکی $\dot{x} = F(x) = -x - x^3$ که $x \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. برای به دست آوردن تابع ویژه عملگر کوپمن متناظر به کمک معادله ۱۲.۳، به معادله دیفرانسیل مرتبه اول $(-x - x^3) \frac{d\phi_\lambda}{dx} = \lambda \phi_\lambda$ می‌رسیم که با حل آن تابع ویژه $\phi_\lambda(x) = \lambda \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ به دست می‌آید. با جاگذاری به راحتی می‌توان دید که مقدار ویژه $\lambda = -1$ است.

حال سوالی که مطرح می‌شود این است که چرا این توابع ویژه مهم هستند؟ در حالت پیوسته، اگر ϕ یک تابع ویژه عملگر کوپمن با مقدار ویژه λ باشد به این معنی است که وقتی سیستم را در طول زمان دنبال کنیم، این تابع روی فضای حالت تنها با یک ضریب نمایی $e^{\lambda t}$ تغییر می‌کند. همچنین مقدارهای ویژه آن، اطلاعاتی درباره فرکانس‌های طبیعی سیستم و پایداری آن به دست می‌دهد. توابع ویژه نشان می‌دهند که تحت دینامیک سیستم، کدام الگوها روی متغیرهای فضای حالت با چه فرکانس یا نرخ به وجود می‌آیند. به این الگوها در تحلیل دینامیکی نظریه عملگر کوپمن مُد گفته می‌شود. به عبارت بهتر، مد یک الگوی ساده تغییر در سیستم در گذر زمان است که با یک فرکانس یا نرخ (کاهشی یا افزایشی) رفتار می‌کند. در فضاهای برداری، وقتی بردار ویژه را در گذر زمان بررسی می‌کنیم، راستای آن بردار ثابت است، و در گذر زمان تنها با توجه به ضریب که همان مقدار ویژه است تغییر می‌کند. در نظریه عملگر کوپمن، به جای بردار ما یک تابع روی

فضای حالت داریم. اگر این تابع، تابع ویژه باشد، وقتی سیستم را در طول زمان دنبال می‌کنیم، مقدارش فقط با یک ضریب نمایی $e^{\lambda t}$ تغییر می‌کند. این یعنی رفتار این تابع دقیقاً یک مد زمانی منفرد دارد و تغییرات زمانی آن کمیت را می‌توان تنها با یک نرخ یا فرکانس توضیح داد، نه ترکیبی از چند نرخ یا چند فرکانس. برای مثال $y(t) = 3e^{-2t}$ یک مد میرا با نرخ میرای -2 دارد. اما $y(t) = 3e^{-2t} + 4e^{0.5t}$ دو مد با نرخ کاهشی -2 و نرخ افزایشی 0.5 دارد. بنابراین وقتی می‌گوییم «رفتار دینامیکی سیستم در امتداد یک تابع ویژه تک مدی است»، یعنی این تابع ویژه یک الگوی زمانی خالص دارد که کل تغییرات زمانی آن را می‌توان با یک λ توضیح داد و هیچ ترکیب پیچیده‌ای از نرخ‌ها یا فرکانس‌ها در آن رخ نمی‌دهد. اگر λ منفی باشد، این مد به مرور میرا می‌شود. اگر λ عدد مختلط با قسمت حقیقی 0 باشد، این مد نوسانی است و اگر λ مثبت باشد، این مد رشد نمایی دارد. این ترکیب کمک می‌کند بتوانیم دینامیک را بازسازی کنیم و حالت سیستم را برای زمان‌های آینده پیش‌بینی کنیم. به نوعی می‌توانیم رفتار بلندمدت سیستم را درک کنیم، حتی اگر سیستم پیچیده باشد [۳۰].

مثال ۱۱.۳. فرض کنید $X = \mathbb{S}^1$ و دینامیک به صورت $T^t(\theta) = \theta + \omega t \pmod{2\pi}$ باشد. اگر $f_k(\theta) = e^{ik\theta}$ را به عنوان مشاهده‌پذیر در نظر بگیریم، داریم:

$$\mathcal{K}^t f_k(\theta) = e^{ik(\theta + \omega t)} = e^{ik\omega t} f_k(\theta),$$

بنابراین f_k یک تابع ویژه عملگر کوپمن با مقدار ویژه $ik\omega$ (در حالت پیوسته) یا $e^{ik\omega}$ (در حالت گسسته) است.

مثال ۱۲.۳. [۳۰] سیستم دینامیکی خطی $\dot{x} = Ax$ ، $x \in \mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید که در آن A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی است. نشان می‌دهیم توابع مشاهده‌پذیر ϕ_j ، توابع ویژه عملگر کوپمن متناظر به این سیستم دینامیکی خطی و مقادیر ویژه آن دقیقاً مقادیر ویژه ماتریس A هستند:

$$\phi_j(x) = \langle x, w_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n \quad (13.3)$$

که در آن w_j بردارهای ویژه ماتریس الحاقی A^* هستند (یعنی $A^* w_j = \lambda_j w_j$) و به‌گونه‌ای نرمال‌سازی شده‌اند که $\langle v_j, w_k \rangle = \delta_{jk}$ ، که در آن v_j بردار ویژه A است و $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی روی فضای اقلیدسی است. با مشتق‌گیری از ۱۳.۳ به سادگی می‌توان دید که:

$$\dot{\phi}_j = \langle \dot{x}, w_j \rangle = \langle Ax, w_j \rangle = \langle x, A^* w_j \rangle = \lambda_j \langle x, w_j \rangle = \lambda_j \phi_j, \quad (14.3)$$

با حل معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه اول $\dot{\phi}_j = \lambda_j \phi_j$ و از تعریف عملگر کوپمن داریم:

$$\phi_j(t, \mathbf{x}_0) = \mathcal{K}^t \phi_j(\mathbf{x}_0) = \exp(\lambda_j t) \phi_j(\mathbf{x}_0). \quad (15.3)$$

حال، برای هر $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ، اگر ماتریس A دارای n بردار ویژه مستقل خطی با n مقدار ویژه مجزا λ_j باشد، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_j \rangle \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{x}) \mathbf{v}_j. \quad (16.3)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^t \mathbf{x}(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \exp(At) \mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^n \langle \exp(At) \mathbf{x}_0, \mathbf{w}_j \rangle \mathbf{v}_j \\ &= \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{x}_0, \exp(A^* t) \mathbf{w}_j \rangle \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^n \exp(\lambda_j t) \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{w}_j \rangle \mathbf{v}_j \\ &= \sum_{j=1}^n \exp(\lambda_j t) \phi_j(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}_j, \end{aligned} \quad (17.3)$$

که در آن، $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0)$ تابعی است که مختصات دکارتی را با نقطه اولیه $\mathbf{x}_0$ (شرط اولیه) در فضای حالت مرتبط می‌سازد. این نمایش، بسطی از دینامیک مشاهدات است که تابع مختصات $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0)$ را بر حسب کمیت‌های طیفی (مقادیر ویژه، توابع ویژه و مدهای $\mathbf{v}_j$) از خانواده عملگر کوپمن $\mathcal{K}^t$ بیان می‌کند. با توجه به رابطه ۱۷.۳، متوجه می‌شویم که کمیتی که ما به عنوان بردار ویژه $\mathbf{v}_j$ می‌شناسیم نه به خود عملگر کوپمن بلکه به مشاهده‌پذیر وابسته است. اگر مشاهده‌پذیر را تغییر دهیم، برای مثال $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$ انتخاب کنیم که در آن C یک ماتریس $m \times n$ است، آنگاه بسط به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{K}^t \mathbf{y}(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^n \exp(\lambda_j t) \phi_j(\mathbf{x}_0) C \mathbf{v}_j, \quad (18.3)$$

که در این صورت $C \mathbf{v}_j$ را j -مین مُد کوپمن مشاهده‌پذیر $\mathbf{y}$ می‌نامیم. اکنون فرض کنید فضای مشاهده‌پذیرها روی $\mathbb{R}^n$ همان فضای ترکیب خطی مختلط از $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0)$ باشد. آنگاه $C \mathbf{v}_j \phi_j(\mathbf{x}_0)$ تصویر مشاهده‌پذیر Cx روی زیرفضای ویژه خانواده عملگر کوپمن است که توسط تابع ویژه $\phi_j(\mathbf{x}_0) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_j \rangle$ تولید می‌شود.

نکته مهم آن است که آنچه بین بسط‌های ۱۷.۳ و ۱۸.۳ تغییر می‌کند، مدهای کوپمن است. از سوی دیگر، مقادیر ویژه و توابع ویژه در بسط تغییر نمی‌کنند. مدهای کوپمن با تقریب یک ضریب ثابت تعریف می‌شوند، همانگونه که بردارهای ویژه چنین خاصیتی دارند. با این حال، در اینجا ما تصویر را نسبت به یک پایه مشخص که یک دوگان متعامد یک‌ه دارد تعریف کرده‌ایم. بنابراین، آنچه با تغییر مشاهده‌پذیر تغییر می‌کند سهم آن در تحول کلی مشاهده‌پذیر است که در C^*V_j کدگذاری شده است. این ویژگی‌ها حتی در حالت کاملاً غیرخطی نیز برقرار می‌مانند، با این تبصره که بسط طیفی مقادیر ویژه معمولاً نامتناهی خواهد بود و می‌تواند دارای بخشی با طیف پیوسته باشد. همچنین باید توجه کرد که توابع مختصات را می‌توان بر حسب تحول توابع ویژه کوپمن بیان کرد:

$$K^t \mathbf{x}(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^n \phi_j(t, \mathbf{x}_0) \mathbf{v}_j. \quad (19.3)$$

این نکته همان جوهره شگفت‌انگیز نظریه کوپمن است: خود مختصات فضای حالت را می‌توان به‌عنوان یکی از توابع مشاهده‌پذیر در نظر گرفت. بدین معنا که بردار حالت x صرفاً یکی از بی‌شمار مشاهده‌پذیرهایی است که می‌توان تحول دینامیک آن را با بسط طیفی کوپمن بازسازی کرد. این ویژگی به ما اجازه می‌دهد تا دینامیک غیرخطی مختصات را در قالبی خطی و طیفی یعنی با استفاده از توابع ویژه، مقادیر ویژه و مدهای کوپمن، بیان کنیم.

به عنوان جمع‌بندی این قسمت، قضیه مهم زیر را بیان می‌کنیم. این قضیه تعمیم مستقیم تجزیه فوریه برای سیستم‌های خطی، به دنیای سیستم‌های دینامیکی غیرخطی و ارگودیک است و پیوند عمیقی بین نظریه ارگودیک، تحلیل هارمونیک و نظریه عملگرها برقرار می‌کند.

قضیه ۱۳.۳ (قضیه تجزیه طیفی مزیک برای سیستم‌های ارگودیک). [۳۰] فرض کنید (X, B, μ, T) یک سیستم دینامیکی معکوس‌پذیر و ارگودیک باشد. آنگاه عملگر کوپمن K متناظر با آن، یک عملگر یکانی روی فضای هیلبرت $L^2(X, \mu)$ است و هر تابع مشاهده‌پذیر $f \in L^2(X, \mu)$ را می‌توان به صورت

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j + f_0.$$

تجزیه کرد که در آن ϕ_j توابع ویژه K با مقادیر ویژه λ_j روی دایره واحد هستند ($|\lambda_j| = 1$)، c_j ضرایب مختلط، و f_0 مؤلفه‌ای است که میانگین زمانی آن صفر است. به علاوه، تحول زمانی f

تحت عملگر کوپمن به صورت زیر است:

$$(\mathcal{K}^n f)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \lambda_j^n \phi_j(x) + \mathcal{K}^n f_0.$$

نوشتن تجزیه به صورت مجموع شمارا ناظر بر بخش طیف نقطه‌ای عملگر کوپمن است. از آنجا که $L^2(X, \mu)$ یک فضای هیلبرت جداپذیر است، هر دستگاه متعامد از توابع ویژه حداکثر شمارا خواهد بود. بنابراین زیرفضای مولد توسط توابع ویژه دارای پایه‌ای شمارا است. لازم به ذکر است که این تجزیه تنها بخش طیف گسسته را توصیف می‌کند. در حالت کلی، طبق قضیه طیفی برای عملگرهای یکتای هیلبرتی، بخش پیوسته طیف نیز ممکن است وجود داشته باشد که در این صورت تجزیه کامل به صورت یک انتگرال طیفی بیان می‌شود [۳۰].

در حالت زمان گسسته، مجموعه $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ از تابع‌های ویژه عملگر کوپمن $\mathcal{K}$ را در نظر می‌گیریم، که n می‌تواند ۱، ۲، ... یا حتی ∞ باشد. لازم به ذکر است این مجموعه، لزوماً یک پایه برای $L^2(X, \mu)$ تشکیل نمی‌دهد. می‌دانیم که رابطه زیر برقرار است:

$$\mathcal{K}\phi_i(p) = \lambda_i \phi_i(p).$$

در گزاره‌های زیر، ساختار جبری توابع ویژه (گزاره ۱۴.۳) و نقش آن‌ها در هم‌ارزی طیفی سیستم‌های مزدوج را (گزاره ۱۵.۳) بیان می‌کنیم.

گزاره ۱۴.۳. فرض کنید $\mathcal{F}$ زیرمجموعه‌ای از تمام توابع مختلط مقدار روی X (فضای مشاهده‌پذیرها) باشد که یک فضای برداری را تشکیل می‌دهد و تحت ضرب نقطه‌به‌نقطه‌ای توابع بسته است و $T : X \rightarrow X$ یک نگاشت است. در این صورت، مجموعه توابع ویژه عملگر کوپمن $\mathcal{K}$ متناظر به T ، تحت ضرب نقطه‌به‌نقطه‌ای توابع، یک نیم‌گروه‌آبلی تشکیل می‌دهد. به‌طور خاص، اگر $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}$ توابع ویژه $\mathcal{K}$ با مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 باشند، آنگاه $\phi_1 \phi_2$ یک تابع ویژه $\mathcal{K}$ با مقدار ویژه $\lambda_1 \lambda_2$ خواهد بود. علاوه بر این، اگر $p \in \mathbb{R}^+$ و ϕ یک تابع ویژه با مقدار ویژه λ باشد، آنگاه ϕ^p یک تابع ویژه با مقدار ویژه λ^p است، که در آن $\phi^p(x) = (\phi(x))^p$. اگر ϕ تابع ویژه‌ای باشد که هیچ‌گاه صفر نمی‌شود و $r \in \mathbb{R}$ ، آنگاه ϕ^r یک تابع ویژه با مقدار ویژه λ^r است. توابع ویژه‌ای که هرگز صفر نمی‌شوند، یک گروه‌آبلی را تشکیل می‌دهند [۶].

گزاره ۱۵.۳ بیان می‌کند که اگر دو سیستم دینامیکی از نظر توپولوژیک مزدوج باشند، طیف عملگرهای کوپمن متناظر با آنها یکسان خواهد بود. به بیان دیگر، ساختار طیفی تحت تبدیلات همسانریختی که ساختار توپولوژیکی را حفظ می‌کنند، پایدار می‌ماند.

گزاره ۱۵.۳. فرض کنید $S : M \rightarrow M$ و $T : N \rightarrow N$ مزدوج توپولوژیک باشند؛ یعنی یک همسانریختی $h : N \rightarrow M$ وجود داشته باشد به طوری که $S \circ h = h \circ T$. اگر ϕ یک تابع ویژه برای K_S با مقدار ویژه λ باشد، آنگاه $h \circ \phi$ یک تابع ویژه برای K_T با مقدار ویژه λ خواهد بود [۶].

بین نقاط ثابت عملگر کوپمن K_T و مجموعه‌های T -پایای $A \subset X$ که $T^{-1}(A) = A$ ارتباط مستقیم وجود دارد. قضیه زیر این ارتباط را بیان می‌کند:

گزاره ۱۶.۳. فرض کنید K_T عملگر کوپمن مرتبط با تبدیل معکوس‌پذیر $T : X \rightarrow X$ باشد. در این صورت، مجموعه $A \subset X$ ، T -پایا است اگر و فقط اگر $A \setminus K = \emptyset$ باشد. علاوه بر این، اگر تابع f ای وجود داشته باشد به طوری که $K_T f = f$ آنگاه برای هر r ، مجموعه $A_r = \{x \in X | f(x) \leq r\}$ ، T -پایاست [۳۰].

۴. روش‌های عددی و داده‌محور

اگرچه نظریه عملگر کوپمن از دهه ۱۹۳۰ در چارچوب نظریه ارگودیک و تحلیل طیفی سیستم‌های دینامیکی مورد مطالعه قرار گرفته بود، اما کاربردهای عددی و داده‌محور آن تا دهه‌های اخیر به طور گسترده توسعه نیافته بودند. چالش اصلی، طبیعت انتزاعی و بی‌نهایت‌بُعدی این عملگر بود که محاسبه مستقیم و کاربردی‌سازی آن را در مسائل واقعی غیرممکن می‌ساخت. این عملگر، با وجود خطی بودن، در فضایی از توابع زندگی می‌کند که بُعد آن می‌تواند نامتناهی باشد. پرسش اساسی این بود: چگونه می‌توان این موجودیت ریاضی قدرتمند را به دنیای محاسبات محدود و داده‌های متناهی پیوند زد؟

در سال ۲۰۰۵، ایگور مزیک^۱ [۲۸] با احیای این نظریه، نشان داد که چگونه می‌توان از ویژگی‌های طیفی عملگر کوپمن برای تحلیل سیستم‌های غیرخطی پیچیده استفاده کرد. مقاله دیگر او [۳۵] در سال ۲۰۰۹ و به‌ویژه مقاله مروری جامع‌اش در سال ۲۰۱۳ [۲۹] جرقه‌ای بود برای تبدیل

¹Igor Mezić

این نظریه انتزاعی به یک چارچوب کاربردی. ایده محوری او آن بود که به جای بررسی مستقیم تکامل حالت‌های سیستم، که عموماً غیرخطی‌اند، باید تکامل توابع مشاهده‌پذیر تعریف شده بر فضای حالت مطالعه شود؛ زیرا این تکامل به وسیله عملگر کوپمن همواره خطی است، حتی اگر دینامیک زمینه‌ای کاملاً غیرخطی باشد. بدین ترتیب، مزیک نشان داد که اطلاعات بنیادی دینامیکی سیستم، از جمله ساختار جاذب‌ها، بسامدهای غالب، نواحی هم‌فاز و رفتارهای شبه‌دوره‌ای، در طیف عملگر کوپمن (شامل مقادیر ویژه و توابع ویژه آن) نهفته است. نوآوری اصلی او ارائه یک چارچوب طیفی برای سیستم‌های غیرخطی بود که مشابه نظریه طیفی عملگرهای خطی در آنالیز تابعی عمل می‌کند. به بیان دقیق‌تر، وی نشان داد که می‌توان رفتار بلندمدت سیستم‌های غیرخطی را از طریق تجزیه طیفی عملگر کوپمن تحلیل کرد؛ به همان شیوه‌ای که در سیستم‌های خطی از تجزیه مقادیر ویژه استفاده می‌شود. این دیدگاه منجر به معرفی مختصات ویژه کوپمنی شد که در آن‌ها دینامیک پیچیده سیستم در قالبی خطی و جداپذیر ظاهر می‌شود. در ادامه، مقاله دیگر او در سال ۲۰۰۹ [۳۵] این چارچوب را به تحلیل داده‌های تجربی و مسائل سیالات محاسباتی گسترش داد. سپس مقاله مروری جامع او در سال ۲۰۱۳ [۲۹] این نظریه را به صورت نظام‌مند بسط داد و آن را به چارچوبی عملی برای تحلیل سیستم‌های مهندسی و سامانه‌های پیچیده تبدیل کرد. با این حال، هنوز یک مانع بزرگ وجود داشت: چگونه می‌توان عملگر کوپمن را مستقیماً از داده‌های تجربی، بدون آگاهی قبلی از معادلات حاکم، استخراج کرد؟ پاسخ این چالش، در سال ۲۰۱۰ و با کار پیشگامانه پتر اشمید^۱ [۳۶] ارائه شد. او روش تجزیه مُد دینامیکی (DMD)^۲ را معرفی کرد که الگوریتمی عددی و داده‌محور است که با استفاده از دنباله‌ای از مشاهدات گسسته از یک سیستم دینامیکی، تقریبی خطی از عملگر کوپمن ارائه می‌دهد و از طریق آن مدهای طیفی غالب دینامیک را استخراج می‌کند. در اینجا منظور از «داده»، مجموعه‌ای از مشاهدات

$$x_1, x_2, \dots, x_m$$

است که از نمونه برداری گسسته مدار سیستم $x_{n+1} = T(x_n)$ حاصل شده‌اند. اگرچه این الگوریتم، در ابتدا به صورت مستقل از نظریه کوپمن توسعه یافته بود، به سرعت آشکار شد که این روش در حقیقت در حال تقریب زدن طیف عملگر کوپمن برای مشاهده‌پذیرهای خطی است. این کشف، پلی حیاتی بین علوم مهندسی و ریاضی برقرار کرد.

¹Peter J. Schmid

²Dynamic Mode Decomposition

با این حال، روش DMD یک محدودیت ذاتی داشت: این روش عمدتاً برای تقریب زدن دینامیک‌های خطی یا سیستم‌های غیرخطی با رفتار تقریباً خطی مناسب بود. برای غلبه بر این محدودیت، در سال ۲۰۱۵، ویلیامز^۱ و همکارانش [۳۹] با الهام از دیدگاه مزیک، گام بعدی را برداشتند. آن‌ها روش تجزیه مُد دینامیکی توسعه‌یافته (EDMD)^۲ را معرفی کردند. ایدهٔ مرکزی این الگوریتم، ارتقای داده‌ها به یک فضای با ابعاد بالاتر از طریق انتخاب یک مجموعه به نام «دیکشنری» از توابع غیرخطی بود. این کار، به صورت مؤثری دینامیک غیرخطی را در فضای جدید خطی می‌کرد و امکان تقریب بسیار دقیق‌تری از عملگر کوپمن و توابع ویژهٔ آن را فراهم می‌ساخت. این سیر تکاملی، از کشف مجدد بنیان‌های نظری توسط مزیک، تا الگوریتم‌های کاربردی مانند DMD توسط اشمید، و در نهایت تعمیم آن به الگوریتم EDMD توسط ویلیامز، باعث تولد دوبارهٔ نظریهٔ کوپمن شد. امروزه، این چارچوب به یکی از ابزارهای محوری در علم داده‌های دینامیکی تبدیل شده است [۲۵]. در ادامه، این روش‌های عددی کلیدی را به تفصیل بررسی خواهیم کرد. مرجع [۹] منبع مناسب و جدیدی در زمینهٔ الگوریتم‌های داده‌محور مبتنی بر عملگر کوپمن است.

۱.۴. الگوریتم تجزیهٔ مُد دینامیکی. این الگوریتم که توسط اشمید در سال ۲۰۱۰ [۳۶] معرفی شد، یک روش داده‌محور برای استخراج مُدهای دینامیکی غالب از داده‌های زمانی است. این روش را می‌توان به عنوان یک تقریب متناهی‌البعدی از عملگر کوپمن در نظر گرفت که بر پایهٔ داده‌های اسنپ‌شات (تصاویر لحظه‌ای) عمل می‌کند.

فرض کنید دنباله‌ای از بردارهای حالت (اسنپ‌شات‌ها) $x_1, x_2, \dots, x_M \in \mathbb{R}^n$ در اختیار داریم که در آن $x_{k+1} = T(x_k)$ برای یک نگاشت (احتمالاً ناشناخته) T برقرار است. هدف، یافتن تقریبی خطی برای دینامیک سیستم است. ماتریس‌های داده را به صورت زیر می‌سازیم:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{M-1} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & \cdots & x_M \end{bmatrix}.$$

هدف، یافتن ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ است که رابطهٔ خطی $Y \approx AX$ را برقرار کند. این ماتریس، تقریبی از عملگر کوپمن در فضای حالت اصلی است. برای پایداری عددی و کاهش ابعاد، ابتدا تجزیه مقدار منفرد (SVD) ماتریس X را انجام می‌دهیم:

$$X = U\Sigma V^*,$$

¹Matthew O Williams

²Extended Dynamic Mode Decomposition

که در آن $U \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{r \times r}$ و $V \in \mathbb{R}^{(M-1) \times r}$ بوده و $r = \text{rank}(X)$ است. ستون‌های U یک پایه متعامد برای زیرفضای ستونی X تشکیل می‌دهند که متناظر به بزرگترین مقادیر منفرد ماتریس X است و زیرفضایی از فضای حالت را تولید می‌کند که نمایانگر بیشترین تغییرات انرژی یا بیشترین تغییرات داده‌ها است. بنابراین می‌توان ماتریس A را در این زیرفضا تصویر کرد یعنی دامنه و برد این ماتریس به زیرفضای تولیدشده توسط ستون‌های U محدود شود. به عبارت دیگر، به دنبال ماتریس کاهش‌یافته $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ هستیم به‌گونه‌ای که:

$$A \approx U \tilde{A} U^*.$$

حال با ضرب رابطه $Y \approx AX$ در U^* از چپ و استفاده از تقریب $A \approx U \tilde{A} U^*$ داریم:

$$U^* Y \approx U^* (U \tilde{A} U^*) X = (U^* U) \tilde{A} (U^* X) = I_r \tilde{A} (U^* X).$$

از آنجا که $U^* U = I_r$ (چون U متعامد است)، نتیجه می‌شود:

$$U^* Y \approx \tilde{A} (U^* X).$$

از معادله SVD داریم $X = U \Sigma V^*$ ، بنابراین:

$$U^* X = U^* (U \Sigma V^*) = (U^* U) \Sigma V^* = \Sigma V^*.$$

در نتیجه:

$$U^* Y \approx \tilde{A} (\Sigma V^*).$$

با ضرب دو طرف معادله در $V \Sigma^{-1}$ از راست و با توجه به اینکه $V^* V = I_r$ (چون V نیز متعامد است)، خواهیم داشت:

$$\tilde{A} = U^* Y V \Sigma^{-1}. \quad (1.4)$$

معادله ۱.۴، از ترکیب سه ایده اصلی تقریب خطی دینامیک، کاهش بعد با روش SVD و استفاده از پایه U و تصویر عملگر خطی A بر زیرفضای غالب تولید شده توسط ستون‌های U به دست می‌آید. این روش به دلیل استفاده از SVD از لحاظ عددی پایدار بوده و مدهای غالب دینامیک را با دقت خوبی استخراج می‌کند.

به عنوان جمع‌بندی این قسمت، عملگر کوپمن تقریبی خطی از دینامیک سیستم روی فضاها نامتناهی بُعد از توابع مشاهده‌پذیر است. ماتریس A نیز یک تقریب متناهی از عملگر کوپمن با

ابعاد $n \times n$ است که به دست آوردن آن نیاز به محاسبات سنگینی دارد و در آخر، ماتریس $\tilde{A}$ تقریبی کاهش یافته از ماتریس A با ابعاد $r \times r$ است که $r < n$ و در نتیجه، محاسبه آن به مراتب راحت تر است. نشان داده می شود به شرط انتخاب توابع مشاهده پذیر به اندازه کافی مناسب، مقادیر ویژه $\tilde{A}$ تقریبی از مقادیر ویژه ماتریس A و عملگر کوپمن هستند.

پس از محاسبه مقادیر ویژه λ_j و بردارهای ویژه w_j ماتریس کاهش یافته $\tilde{A}$ ، مدهای DMD در فضای اصلی به صورت

$$v_j = U w_j$$

تعریف می شوند. هر مد v_j یک الگوی فضایی ثابت است که با مقدار ویژه λ_j متناظر بوده و نرخ رشد یا کاهش فرکانس نوسان آن مد را تعیین می کند. با استفاده از این مدها، حالت سیستم در زمان های بعدی به صورت

$$x(t) \approx \sum_{j=1}^r v_j b_j \lambda_j^{t/\Delta t} \quad (2.4)$$

تقریب زده می شود، که در آن ضرایب اولیه b_j از تصویر کردن داده اولیه x_1 روی زیرفضای مولد توسط مدهای DMD به دست می آیند. برای روشن شدن منشأ این رابطه، فرض کنید عملگر کوپمن متناظر با دینامیک، دارای توابع ویژه φ_j و مقادیر ویژه λ_j باشد:

$$K\varphi_j = \lambda_j \varphi_j.$$

در چارچوب نظریه کوپمن، تابع همانی $g(x) = x$ را می توان به صورت ترکیبی از توابع ویژه بسط داد:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) v_j, \quad (3.4)$$

که در آن بردارهای ثابت v_j مدهای کوپمن هستند [۳۶]. رابطه (۳.۴) بیان می کند هر نقطه در فضای حالت ترکیبی خطی از بردارهای ثابت v_j است که ضرایب آن توسط توابع ویژه $\varphi_j(x)$ تعیین می شود. تابع ویژه $\varphi_j(x)$ تعیین می کند که در نقطه x ، چه مقدار از بردار x در امتداد جهت v_j قرار دارد. با حرکت در فضای حالت (تغییر x)، مقادیر $\varphi_j(x)$ تغییر می کنند، اما بردارهای v_j ثابت می مانند. به بیان ساده تر، v_j ها جهت های اصلی دینامیک هستند و $\varphi_j(x)$ ها مختصات

هر نقطه در این جهت‌ها را مشخص می‌کنند. حال اگر سیستم را در زمان دنبال کنیم، طبق خاصیت توابع ویژه کوپمن داریم:

$$\varphi_j(\mathbf{x}(t)) = \lambda_j^{t/\Delta t} \varphi_j(\mathbf{x}_1)$$

که با جایگذاری در بسط بالا، به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{t/\Delta t} \varphi_j(\mathbf{x}_1) \mathbf{v}_j.$$

اگر این بسط را به r مد غالب محدود کنیم، رابطه تقریبی (۲.۴) به دست می‌آید، که در آن

$$b_j = \varphi_j(\mathbf{x}_1)$$

ضرایب اولیه هستند. در عمل، توابع ویژه دقیق در دسترس نیستند و مدهای DMD تقریبی از مدهای کوپمن هستند. بنابراین ضرایب b_j با حل مسئله کمترین مربعات

$$\min_{\mathbf{b}} \left\| \mathbf{x}_1 - \sum_{j=1}^r \mathbf{v}_j b_j \right\|_2^2$$

محاسبه می‌شوند، که معادل تصویر کردن $\mathbf{x}_1$ روی زیرفضای تولیدشده توسط $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ است. از آنجا که مقادیر ویژه λ_j خروجی الگوریتم DMD برای گام زمانی Δt هستند، تکامل در زمان پیوسته t به صورت $\lambda_j^{t/\Delta t}$ ظاهر می‌شود [۳۶].

۲.۴. الگوریتم تجزیه مد دینامیکی توسعه‌یافته. اگرچه الگوریتم DMD در بسیاری موارد مفید است، اما یک محدودیت اساسی دارد: این روش ذاتاً یک تقریب خطی از دینامیک است و در مواجهه با غیرخطی‌های قوی ممکن است با دقت پایینی مواجه شود. همانگونه که در بالا اشاره شد برای رفع این مشکل، تجزیه مد دینامیکی تعمیم یافته توسط ویلیامز و همکاران در سال ۲۰۱۵ معرفی شد [۳۹].

ایده اصلی در این الگوریتم، انتقال از فضای حالت اصلی به یک فضای مشاهده‌پذیر با ابعاد بالاتر است. این کار با استفاده از یک دیکشنری (یا پایه تابعی) از توابع مشاهده‌پذیر انجام می‌شود. فرض کنید دیکشنری $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) & \psi_2(\mathbf{x}) & \dots & \psi_r(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T, \quad (۴.۴)$$

که در آن $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \psi_i$ توابع پایه (مانند چندجمله‌ای‌ها، توابع مثلثاتی یا توابع پایه شعاعی) هستند.

حال، برای جفت داده‌های $(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m)$ که $\mathbf{y}_m = T(\mathbf{x}_m)$ و $m = 1, \dots, M$ ، ماتریس‌های داده «ارتقا یافته» را می‌سازیم که در نهایت تخمین دقیق‌تری به دست می‌دهد:

$$\Psi_X = \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{x}_1) & \Psi(\mathbf{x}_2) & \dots & \Psi(\mathbf{x}_M) \end{bmatrix},$$

$$\Psi_Y = \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{y}_1) & \Psi(\mathbf{y}_2) & \dots & \Psi(\mathbf{y}_M) \end{bmatrix}.$$

هدف، یافتن ماتریس $K \in \mathbb{R}^{r \times r}$ است که رابطه $\Psi_Y \approx K \Psi_X$ را برقرار کند. این ماتریس K ، یک نمایش گسسته و متناهی‌بُعدی از عملگر کوپمن بر روی زیرفضای پوشش داده‌شده توسط دیکشنری Ψ است. ماتریس K از طریق حل یک مسئله کمترین مربعات به دست می‌آید:

$$K = \Psi_Y \Psi_X^\dagger, \quad (5.4)$$

که در آن $\Psi_X^\dagger$ ماتریس شبه‌معکوس مور-پنروز^۱ ماتریس Ψ_X است. برای محاسبه‌ای پایدارتر، می‌توان از یک فرمول‌بندی مبتنی بر همبستگی استفاده کرد:

$$K = (\Psi_Y \Psi_X^\top)(\Psi_X \Psi_X^\top)^\dagger = AG^\dagger,$$

که در آن $A = \frac{1}{M} \Psi_X \Psi_Y^\top$ و $G = \frac{1}{M} \Psi_X \Psi_X^\top$ هستند.

پس از محاسبه K ، مقادیر ویژه λ_j و بردارهای ویژه ξ_j آن را محاسبه می‌کنیم. این مقادیر و بردارها، به ترتیب، تقریب‌هایی برای مقادیر ویژه و توابع ویژه عملگر کوپمن هستند:

$$\hat{\phi}_j(\mathbf{x}) = \xi_j^\top \Psi(\mathbf{x}). \quad (6.4)$$

در نهایت، تحول هر تابع مشاهده‌پذیر g را می‌توان با این بسط طیفی تقریب زد:

$$(\mathcal{K}^t g)(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^r \hat{\phi}_j(\mathbf{x}) c_j \lambda_j^t, \quad (7.4)$$

که در آن ضرایب c_j از برآورد اولیه g بر روی توابع ویژه تقریبی به دست می‌آیند.

^۱ ماتریس شبه‌معکوس مور-پنروز برای هر ماتریس A ، ماتریسی است با نماد $A^\dagger$ که در چهار شرط پنروز صدق می‌کند: $(A^\dagger A)^\dagger = A^\dagger A$ و $(A A^\dagger)^\dagger = A A^\dagger$ ، $A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$ ، $A A^\dagger A = A$ معمولی است که حتی برای ماتریس‌های غیرمربعی یا ماتریس‌های مربعی معکوس‌ناپذیر نیز به صورت یکتایی وجود دارد.

یک نتیجه نظری مهم، همگرایی تقریب EDMD به عملگر کوپمن واقعی در فضای L^2 با افزایش تعداد داده‌ها ($M \rightarrow \infty$) و غنای دیکشنری ($r \rightarrow \infty$) است که پایه ریاضی محکمی برای قابلیت اطمینان روش فراهم می‌کند [۱۷]. دقت EDMD به شدت به انتخاب دیکشنری $\mathcal{A}$ وابسته است، به طوری که یک دیکشنری ضعیف ممکن است نتواند رفتارهای غیرخطی کلیدی سیستم را ثبت کند. رویکردهای مدرن مانند استفاده از هسته‌ها [۳۹] یا شبکه‌های عصبی عمیق [۲۳] برای یادگیری خودکار دیکشنری بهینه از داده‌ها پیشنهاد شده‌اند. مزیت کلیدی EDMD نسبت به DMD در این است که DMD حالت خاصی از EDMD با دیکشنری همانی است، در حالی که EDMD با انتخاب دیکشنری غیرخطی مناسب می‌تواند دینامیک‌های غیرخطی پیچیده‌تری را مدل کند. با این حال، چالش ابعاد بالا همچنان پابرجاست، چرا که با افزایش بعد فضای حالت، تعداد توابع پایه مورد نیاز به طور نمایی رشد می‌کند و نیازمند تکنیک‌های کاهش بُعد و انتخاب ویژگی است.

۵. مثال‌های محاسباتی

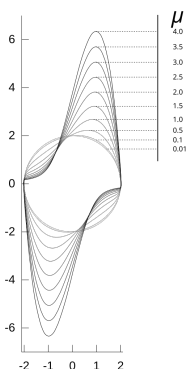
در این بخش، قدرت و کارایی عملی نظریه عملگر کوپمن را در مواجهه با سیستم‌های دینامیکی غیرخطی به نمایش می‌گذاریم. هر مثال گویای این حقیقت است که چگونه این چارچوب ریاضی، پیچیدگی‌های ظاهری دینامیک غیرخطی را در قالب زیبای تحلیل خطی آشکار می‌سازد.

مثال ۱۰۵. سیستم نوسانگر غیرخطی ون در پل^۱ به عنوان یک مثال استاندارد در مطالعه نوسانگرهای غیرخطی میراشونده شناخته می‌شود [۳۸]. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که روش EDMD قادر به استخراج دقیق مقادیر ویژه و توابع ویژه سیستم است [۳۹].

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x \end{cases} \quad (1.5)$$

در این معادلات، پارامتر μ نقش کنترل‌کننده میزان غیرخطی بودن سیستم را ایفا می‌کند (شکل ۱). برای $\mu = 1/5$ ، سیستم رفتاری شگفت‌انگیز از خود نشان می‌دهد: مسیرها پس از دوره‌ای گذرا، به یک چرخه محدود پایدار همگرا می‌شوند. اکنون پرسش بنیادین این است: آیا می‌توان این دینامیک غیرخطی پیچیده را در قالب خطی بازنمایی کرد؟ پاسخ نظریه عملگر کوپمن به این

¹ Van der Pol oscillator



شکل ۱: مدارهای معادله نوسانگر ون در پل برای مقادیر مختلف پارامتر μ

پرسش، مثبت است. با جمع آوری داده‌های زمانی از شبیه‌سازی سیستم و اعمال روش EDMD با دیکشنری $\Psi(x, y) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3]^T$ به نتایج قابل توجهی دست می‌یابیم. مدل کوپمن به طور خودکار مقادیر ویژه غالب $1/i \pm 0/2 \approx \lambda_{1,2}$ را شناسایی می‌کند. بخش حقیقی منفی، نرخ میرا شدن و بخش موهومی، فرکانس نوسانات سیستم را مشخص می‌سازد [۳۹]. تابع ویژه متناظر با این مقادیر ویژه، به زیبایی الگوی فضایی چرخه محدود سیستم را آشکار می‌سازد. این تابع ویژه در حقیقت «مد» ذاتی سیستم است که رفتار نوسانی آن را توصیف می‌کند. با حل معادله مقدار ویژه برای مولد بی‌نهایت کوچک عملگر کوپمن:

$$y \frac{\partial \phi}{\partial x} + [\mu(1 - x^2)y - x] \frac{\partial \phi}{\partial y} = \lambda \phi$$

تابع ویژه متناظر با $1/i + 0/2 \approx \lambda_1$ ،

$$\phi_1(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \left[y + i\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\right]$$

متناظر با $1/i - 0/2 \approx \lambda_2$ ،

$$\phi_2(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \left[y - i\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\right]$$

و متناظر با $\lambda_3 = 0$ ، تابع $\phi_3(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) + \frac{\mu}{4}x^4$ به دست می‌آید. این توابع، «مدهای ذاتی» سیستم هستند که تحت تأثیر دینامیک، تنها با نرخ‌های نمایی مشخص تغییر می‌کنند.

با استفاده از ترکیب خطی توابع ویژه و مدهای کوپمن، می‌توان تحول زمانی مختصه x را به صورت زیر بازسازی کرد:

$$x(t) = \sum_{j=1}^K \phi_j(x_0, y_0) v_j^{(x)} e^{\lambda_j t}$$

برای $\mu = 1/5$ ، با سه تابع ویژه بالا داریم:

$$\begin{aligned} x(t) \approx & \exp\left(-\frac{x_0^2}{4}\right) \left[y_0 + i \left(x_0 - \frac{x_0^2}{3} \right) \right] v_1^{(x)} e^{(-0.2 + 1.1i)t} \\ & + \exp\left(-\frac{x_0^2}{4}\right) \left[y_0 - i \left(x_0 - \frac{x_0^2}{3} \right) \right] v_2^{(x)} e^{(-0.2 - 1.1i)t} \\ & + \left(\frac{1}{4}(x_0^2 + y_0^2) + 0.375x_0^4 \right) v_3^{(x)} e^{(-0.2)t} \end{aligned}$$

که می‌توان آن را به فرم نوسانی ساده‌تر نوشت:

$$x(t) \approx A e^{-0.2t} \cos(1.1t + \theta) + B$$

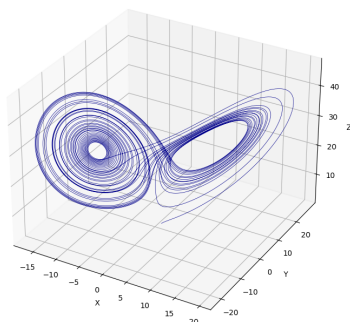
که در آن A و θ به شرایط اولیه و B مقدار میانگین بلندمدت را مشخص می‌کنند. این مثال به وضوح نشان می‌دهد که چگونه عملگر کوپمن، بدون هیچ دانش قبلی از معادلات حاکم و تنها با اتکا به داده‌های تجربی، هسته ریاضی سیستم دینامیکی را کشف می‌کند.

مثال ۲.۵. سیستم لورنس^۱ به عنوان نماد کلاسیک سیستم‌های آشوبناک با معادلات

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = x(\rho - z) - y, \quad \dot{z} = xy - \beta z$$

و مقادیر استاندارد $\sigma = 10$ ، $\rho = 28$ و $\beta = 8/3$ مورد بررسی قرار می‌گیرد [۲۴]. به کارگیری روش DMD نشان می‌دهد که این روش به دلیل استخراج تنها مدهای خطی، قادر به پیش‌بینی بلندمدت رفتار سیستم نیست [۳۶]. با این حال، با استفاده از روش EDMD و دیکشنری غیرخطی شامل توابعی مانند $x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz$ ، می‌توان مدهای غیرخطی غالب را شناسایی کرد. تحلیل طیفی با EDMD مقادیر ویژه متعددی را آشکار می‌سازد که بخشی از آنها مقادیر ویژه گسسته با بخش حقیقی منفی (نشان‌دهنده جاذب بودن سیستم) و بخشی دیگر طیف پیوسته را تشکیل می‌دهند.

¹Lorenz system



شکل ۲: مدارهای معادله سیستم لورنس برای پارامترهای خاص

توابع ویژه متناظر، ساختارهای فضایی پیچیده‌ای را نشان می‌دهند که الگوهای گردابه‌ای مشخصه جاذب لورنز را بازتولید می‌کنند [۳۹].

مثال ۳.۵. سیستم گسسته نگاشت لجستیک $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ برای $r = 3/7$ که منجر به رفتار آشوبناک می‌شود، با انتخاب دیکشنری مناسب مانند

$$\Psi(x) = [x, x(1 - x), x^2(1 - x), \dots]^T$$

و اعمال EDMD تحلیل می‌شود. طیف عملگر کوپمن برای این سیستم شامل مقادیر ویژه متعددی بر روی دایره واحد و همچنین مقادیر ویژه با اندازه کوچکتر از یک است که به ترتیب مربوط به رفتارهای تناوبی و میرا شونده هستند. توابع ویژه به دست آمده، ساختارهای تناوبی پنهان در دل آشوب را آشکار می‌سازند و هر تابع ویژه مربوط به یک نوسان با فرکانس مشخص در سیستم است. حتی در این سیستم ساده یک بعدی، عملگر کوپمن بینش کمی ارزشمندی درباره نرخ اختلاط و ویژگی‌های ارگودیک سیستم ارائه می‌دهد. به طور خاص، توزیع مقادیر ویژه، اطلاعاتی در مورد نرخ همگرایی توابع همبستگی و نرخ اختلاط سیستم در اختیار قرار می‌دهد [۱۷].

۶. کاربردهای نظریه عملگر کوپمن

نظریه عملگر کوپمن با توانایی منحصر به فرد در خطی‌سازی دینامیک‌های غیرخطی، به ابزاری تحول‌ساز در حوزه‌های متنوع مهندسی و علوم تبدیل شده است [۴۰]. در دینامیک سیالات و

مهندسی هوافضا، این نظریه با شناسایی ساختارهای هم‌بسته و مدهای جدایش گردابه [۳۶]، کاهش مدل سیستم‌های پیچیده [۳۵]، و بهینه‌سازی طراحی آیرودینامیکی [۱۰] کاربرد گسترده‌ای یافته است. در حوزه کنترل و رباتیک، روش‌های مبتنی بر کوپمن امکان کنترل سیستم‌های غیرخطی [۱۸، ۱۴]، طراحی کنترلرهای پایدار برای ربات‌های پیچیده [۵، ۲۶]، و مدیریت محدودیت‌های سخت‌افزاری [۱۲] را فراهم می‌کنند. در یادگیری ماشین و هوش مصنوعی، این نظریه با توسعه شبکه‌های عصبی کوپمن [۴] و بهبود الگوریتم‌های یادگیری تقویتی [۱۹]، پل مستحکمی بین ریاضیات محض و هوش مصنوعی کاربردی ایجاد کرده است. با بهره‌گیری از روش‌های مبتنی بر عملگر کوپمن، می‌توان به صورت کاملاً داده‌محور و بدون پیش‌فرض‌های فیزیکی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم‌های طبیعی را کشف کرد. این رویکرد انقلابی در مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده‌ای ایجاد کرده که معادلات تحلیلی آنها ناشناخته است [۷، ۲۳، ۱۴]. در حوزه سلامت عمومی، از عملگر کوپمن برای پیش‌بینی انتقال فضایی-زمانی بیماری‌های واگیر استفاده می‌شود. این مدل‌ها امکان پیش‌بینی گسترش جغرافیایی بیماری‌ها و ارزیابی اثرگذاری مداخلات سلامت عمومی را فراهم می‌کنند [۳۲]. نظریه عملگر کوپمن در علوم پزشکی با تحلیل سیگنال‌های زیستی مانند EEG و ECG و امکان تشخیص زودهنگام بیماری‌های عصبی و قلبی-عروقی را فراهم می‌کند [۲۰] و با مدل‌سازی دینامیک سلولی و مولکولی، پیش‌بینی پاسخ به درمان‌های دارویی را ممکن می‌سازد [۱۳]. در حوزه انرژی، این نظریه با مدیریت هوشمند شبکه‌های قدرت از فروپاشی‌های آشناری جلوگیری می‌کند [۱، ۲] و با بهینه‌سازی عملکرد توربین‌های بادی و آرایه‌های خورشیدی، راندمان سیستم‌های انرژی تجدیدپذیر را افزایش می‌دهد [۱۸]. در علوم اقلیم و هواشناسی، عملگر کوپمن با شناسایی الگوهای غالب در دینامیک اقلیم و بهبود دقت پیش‌بینی عددی وضع هوا [۳۷، ۸]، ابزار قدرتمندی برای درک و پیش‌بینی پدیده‌های جوی و اقلیمی محسوب می‌شود. همچنین از عملگر کوپمن برای استخراج الگوهای فضایی-زمانی از داده‌های ماهواره‌ای (مانند ابرناکی، دمای سطح دریا، و پوشش گیاهی) استفاده می‌شود. این تحلیل‌ها در پایش تغییرات محیطی و اقلیمی کاربرد وسیعی دارد [۱۶].

۷. محدودیت‌ها، نقاط قوت و چشم‌اندازهای آینده

نظریه عملگر کوپمن اگرچه با توانایی بی‌نظیر در خطی‌سازی دینامیک‌های غیرخطی و بهره‌گیری از ابزارهای قدرتمند جبر خطی تحولی در تحلیل سیستم‌های دینامیکی ایجاد کرده، با چالش‌های مهمی

روبرو است. انتخاب دیکشنری بهینه [۲۳]، مقابله با چالش ابعاد بالا در سیستم‌های پیچیده، و خطای تقریب در داده‌های نویزی [۱۷] از مهم‌ترین محدودیت‌های کنونی این روش محسوب می‌شوند. با این حال، قابلیت پیش‌بینی دقیق، کشف خودکار ساختارهای ذاتی سیستم و انعطاف‌پذیری در کاربرد با سیستم‌های متنوع، مزایای منحصر به فرد این چارچوب هستند. چشم‌انداز آینده این حوزه بر توسعه دیکشنری‌های خودآموز، ادغام با دانش فیزیکی، تعمیم به سیستم‌های پارامتری و تصادفی [۱۸]، و مقابله با چالش ابعاد بالا از طریق الگوریتم‌های مقیاس‌پذیر متمرکز است. در نهایت، توسعه کتابخانه‌های نرم‌افزاری استاندارد می‌تواند نقش کلیدی در گسترش کاربرد این روش در میان جامعه مهندسی ایفا کند.

۸. نتیجه‌گیری

در این مقاله، سیر تکاملی نظریه عملگر کوپمن از یک ایده ریاضی محض تا یک پارادایم کاربردی در تحلیل سیستم‌های دینامیکی غیرخطی بررسی شد. هسته اصلی این، انتقال از توصیف نقطه‌ای دینامیک در فضای حالت به مطالعه تحول مشاهد پذیرها در فضای توابع است که امکان خطی‌سازی دینامیک‌های غیرخطی پیچیده را فراهم می‌سازد. توابع ویژه و مقادیر ویژه عملگر کوپمن به ترتیب مدهای ذاتی و نرخ‌های تحول سیستم را نمایندگی می‌کنند و درکی کیفی از رفتار سیستم ارائه می‌دهند. روش‌های داده‌محور نوینی مانند DMD و EDMD با تقریب عملگر کوپمن مستقیماً از داده‌های تجربی، این نظریه را از قلمرو ریاضیات محض به عرصه کاربردهای عملی گشاده‌اند. اگرچه چالش‌هایی چون انتخاب دیکشنری بهینه و مقابله با ابعاد بالا همچنان پابرجاست، اما موفقیت‌های چشمگیر این چارچوب در حوزه‌های متنوعی از دینامیک سیالات و کنترل تا پزشکی و یادگیری ماشین، گواهی بر توانایی منحصر به فرد و بلوغ فزاینده آن است. آینده این حوزه در تلفیق هرچه بیشتر با یادگیری ماشین، توسعه الگوریتم‌های مقیاس‌پذیر برای سیستم‌های با ابعاد بالا، و تعمیق بنیادهای نظری برای سیستم‌های تصادفی و پارامتری نهفته است. بدون تردید، عملگر کوپمن همچنان نقش محوری در درک پدیده‌های دینامیکی پیچیده ایفا خواهد کرد.

مراجع

- [1] Annaswamy, A. M., Korda, M., Koopman-based modeling and control of smart grids, *IEEE Transactions on Power Systems*, **36** (2021), 3215–3226.

- [2] Arora, S., Kutz, J. N., Load forecasting in smart buildings using Koopman operator theory, *Energy and Buildings*, **255** (2022), 111647.
- [3] Benosman, M., Borggaard, J., Learning-based control of power plants using Koopman operators, *Control Engineering Practice*, **94** (2020), 104198.
- [4] Brunton, S. L., Proctor, J. L., Kutz, J. N., Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **113** (2016), 3932–3937.
- [5] Brunton, S. L., Budišić, M., Kaiser, E., Kutz, J. N., Modern Koopman theory for dynamical systems, *arXiv preprint arXiv:2102.12086*, (2020).
- [6] Budišić, M., Mohr, R., Mezić, I., Applied Koopmanism, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **22** (2012), 047510.
- [7] Champion, K., Lusch, B., Kutz, J. N., Brunton, S. L., Data-driven discovery of coordinates and governing equations, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **116** (2019), 22445–22451.
- [8] Chorin, A. J., Lu, F., Prediction of climate dynamics using Koopman operators, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **75** (2018), 3725–3737.
- [9] Colbrook, M., Drma, Z., Horning, A., An Introductory Guide to Koopman Learning, <https://arxiv.org/html/2510.22002v1>, (2025).
- [10] Geddes, J., Kutz, J. N., Brunton, S. L., Koopman operator methods for global stability analysis of aerodynamic flows, *AIAA Journal*, **58** (2020), 1137–1150.
- [11] Hamilton, W. R., On a General Method in Dynamics, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **125** (1835), 95–144.
- [12] Han, Y., Hao, W., Vaidya, U., Robust Koopman operator-based control for nonlinear systems with bounded disturbances, *IEEE Control Systems Letters*, **5** (2021), 1219–1224.
- [13] Ioannou, M., Kevrekidis, I. G., Koopman operator approach for modeling of cellular dynamics, *Journal of Theoretical Biology*, **502** (2020), 110357.
- [14] Kaiser, E., Kutz, J. N., Brunton, S. L., Data-driven discovery of Koopman eigenfunctions for control, *Machine Learning: Science and Technology*, **2** (2021), 035023.
- [15] Koopman, B. O., Hamiltonian Systems and Transformation in Hilbert Space, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **17** (1931), 315–318.
- [16] Kondrashov, D., Ghil, M., Data-driven analysis of satellite observations using Koopman operators, *Remote Sensing of Environment*, **253** (2021), 112225.

- [17] Korda, M., Mezić, I., On convergence of extended dynamic mode decomposition to the Koopman operator, *Journal of Nonlinear Science*, **28** (2018), 687–710.
- [18] Korda, M., Mezić, I., Linear predictors for nonlinear dynamical systems: Koopman operator meets model predictive control for renewable energy systems, *Automatica*, **108** (2019), 108498.
- [19] Korda, M., Mezić, I., Koopman operator based reinforcement learning, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **65** (2020), 3664–3671.
- [20] Kutz, J. N., Brunton, S. L., Brunton, B. W., Proctor, J. L., *Dynamic Mode Decomposition: Data-Driven Modeling of Complex Systems*, SIAM, (2016).
- [21] Kuznetsov, Y. A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer, (2023).
- [22] Lagrange, J. L., *Mécanique Analytique*, Paris, (1788).
- [23] Li, Q., Dietrich, F., Bollt, E. M., Kevrekidis, I. G., Extended dynamic mode decomposition with dictionary learning: A data-driven adaptive spectral decomposition of the Koopman operator, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **27** (2017), 103111.
- [24] Lorenz, E. N., Deterministic Nonperiodic Flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20** (1963), 130–141.
- [25] Lusch, B., Kutz, J. N., Brunton, S. L., Deep learning for universal linear embeddings of nonlinear dynamics, *Nature Communications*, **9** (2018), 4950.
- [26] Mamakoukas, G., Castano, M. L., Tan, X., Murphey, T. D., Derivative-based Koopman operators for real-time control of robotic systems, *IEEE Transactions on Robotics*, **37** (2021), 2173–2192.
- [27] Marsden, J. E., Ratiu, T. S., *Introduction to Mechanics and Symmetry*, 2nd ed., Springer, (1999).
- [28] Mezić, I., Spectral Properties of Dynamical Systems, Model Reduction and Decompositions, *Nonlinear Dynamics*, **41** (2005), 309–325.
- [29] Mezić, I., Analysis of Fluid Flows via Spectral Properties of the Koopman Operator, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **45** (2013), 357–378.
- [30] Mauroy, A., Mezić, I., Susuki, Y., *The Koopman Operator in Systems and Control: Concepts, Methodologies, and Applications*, Springer, (2022).
- [31] Newton, I., *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, London, (1687).
- [32] Pei, S., Kandula, S., Yang, W., Forecasting the spatial transmission of influenza in the United States using Koopman operator methods, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **117** (2020), 20430–20437.
- [33] Poincaré, H., Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Mathematica*, **13** (1890), 1–270.

- [34] Poincaré, H., *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, (1892).
- [35] Rowley, C. W., Mezić, I., Bagheri, S., Schlatter, P., Henningson, D. S., Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **641** (2009), 115–127.
- [36] Schmid, P. J., Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *Journal of Fluid Mechanics*, **656** (2010), 5–28.
- [37] Selten, F. M., Branicki, M., Improved weather forecasting using Koopman operator analysis, *Monthly Weather Review*, **148** (2020), 1123–1138.
- [38] Strogatz, S. H., *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd ed., CRC Press, (2018).
- [39] Williams, M. O., Kevrekidis, I. G., Rowley, C. W., A data-driven approximation of the Koopman operator: Extending dynamic mode decomposition, *Journal of Nonlinear Science*, **25** (2015), 1307–1346.
- [40] Williams, M. O., Hemati, M. S., Dawson, S. T., Kevrekidis, I. G., Control of nonlinear systems using Koopman operator-based model predictive control, *Annual Reviews in Control*, **51** (2021), 56–67.

(حسن ملکی) ایران، ملایر، دانشگاه ملایر

تارنما: <http://malayeru.ac.ir/~hmaleki>

رایانامه: hmaleki@malayeru.ac.ir

(یزدان گلزاده) ایران، تهران، دانشگاه علم و صنعت

رایانامه: yazdan.golzadeh1984@gmail.com