

سفری از آنالیز فوریه کلاسیک به آنالیز فوریه مجرد*

کنت ای. راس

ترجمه حمیدرضا ابراهیمی ویشکی

چکیده. این مقاله روایتی شخصی از تاریخچه برخی نتایج در آنالیز فوریه مجرد است. موضوعاتی که به آن‌ها پرداخته می‌شود عبارت‌اند از تجزیه توابع L^1 ، حدس L^p ، و قضیه‌هایی درباره تبدیل‌های فوریه. ریاضی‌دانانی که در این داستان ظاهر می‌شوند عبارت‌اند از رافائل سالم، پل جی. کوئین، آنتونی زیگموند، والتر رودین، ژان دیودونه، ادوین هیوئیت، ن. ت. واروپولوس، فیلیپ سی. کرتیس، و الساندرو فیگا-تالامانکا. — م.

۱ مقدمه

آنالیز فوریه کلاسیک از سری‌های فوریه شروع شد، یعنی مطالعه تابع‌های دوره‌ای روی خط حقیقی $\mathbb{R}$. از آنجا که حالت کلاسیک با تابع‌های مثلثاتی سروکار دارد، توجه خود را به توابع با دوره 2π معطوف می‌کنیم؛ این تابع‌ها توسط توابع روی $(0, 2\pi)$ تعیین می‌شوند. این مجموعه یک گروه تحت عمل جمع به پیمانه 2π است و تحت نگاشت $t \rightarrow e^{it}$ با گروه دایره‌ای $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ $T =$ یکریخت است. قضیه‌های آنالیز فوریه کلاسیک را می‌توان به عنوان نتایجی روی گروه فشرده آبدی T تلقی کرد و ما نیز چنین خواهیم کرد. به‌طور مشابه، آنالیز فوریه روی $\mathbb{R}^n$ را می‌توان به عنوان آنالیز روی گروه موضعی فشرده آبدی $\mathbb{R}^n$ تلقی کرد.

عبارات و کلمات کلیدی: آنالیز فوریه مجرد، قضیه تجزیه کوئین، یک‌های موضعی، سری فوریه، گروه‌های موضعی فشرده نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۳/۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۳/۱۲

* Ross, Kenneth A., A trip from classical to abstract Fourier analysis, *Notices Amer. Math. Soc.*, **61** (2014), no. 9, 1032-1038.

ترجمه این مقاله به پیشنهاد و دعوت سردبیر انجام شده است.

در ادامه، فضای زمینه را یک گروه موضعاً فشرده^۱ G در نظر خواهیم گرفت.^۱ چنین گروهی دارای یک اندازه پایا تحت انتقال (چپ) است، که به افتخار آلفرد هار که در سال ۱۹۳۲ وجود آن را اثبات کرد، اندازه هار نامیده می‌شود. برای $G = \mathbb{R}^n$ ، این اندازه همان اندازه لبگ است. اندازه هار برای $G = \mathbb{T}$ نیز اندازه لبگ است، که روی بازه $[0, 2\pi)$ در نظر گرفته شده و تحت یکریختی متعارف به گروه دایره‌ای $\mathbb{T}$ انتقال داده شده است. در فضاهای $L^p(G)$ اندازه روی گروه زمینه G همواره اندازه هار خواهد بود. به‌ویژه فضای $L^1(G)$ ، که از همه توابع انتگرال‌پذیر روی G تشکیل شده است، تحت حاصل ضرب پیچشی $f * g(x) = \int_G f(x+y)g(-y) dy$ یا $f * g(x) = \int_G f(xy)g(y^{-1}) dy$ برای توابع $f, g \in L^1(G)$ ، به یک جبر باناخ تبدیل می‌شود.

سؤال. کدام تابع h در $L^1(G)$ را می‌توان به صورت $f * g$ نوشت؟ یعنی کدام h در $L^1(G)$ به عنوان پیچش دو تابع L^1 تجزیه می‌شود؟

قضیه (رافائل سالم، ۱۹۳۹ [۳۲]). $L^1(\mathbb{T}) * L^1(\mathbb{T}) = L^1(\mathbb{T})$. همچنین اگر $C(\mathbb{T})$ فضای توابع پیوسته روی $\mathbb{T}$ باشد، $L^1(\mathbb{T}) * C(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$.^۲

سالم در چه سالی این نتیجه را منتشر کرد؟ طبق کتاب زیگموند [۳۷] و آثار منتشر شده سالم [۳۳]، ص ۹۰ این مقاله در سال ۱۹۳۹ انتشار یافته است. طبق کتاب هیویت و راس [۱۷]، این مقاله در سال ۱۹۴۵ منتشر شده است. آن مقاله در مارس ۱۹۴۰ داوری شد، بنابراین سال ۱۹۳۹ قطعاً صحیح است. داستان پیچیده‌تر از یک خطای ساده در [۱۷] است. مقالات آن شماره از مجله در سال ۱۹۳۹ به دفتر مجله واصل شده بود، اما به دلیل جنگ جهانی دوم تا سال ۱۹۴۵ هیچ شماره‌ای منتشر نشد. متأسفانه، هیویت و من از تاریخ انتشار درج شده روی خود مجله استفاده کرده بودیم.

سالم که بود؟ او کارمند بانکی در فرانسه و بسیار با استعداد بود که در کنار کارش به ریاضیات نیز می‌پرداخت. با شروع جنگ جهانی دوم به کانادا رفت و سرانجام استاد ام‌آی‌تی (مؤسسه فناوری ماساچوست) شد. آنتونی زیگموند شرح کوتاهی از زندگی سالم را در مقدمه مجموعه آثار او [۳۳] ارائه داده است. ادوین هیویت به من می‌گفت که سالم انسان بسیار شریفی بود و با دانشجویان

۱. گروه‌های موضعاً فشرده را همه‌جا هاسدورف در نظر گرفته‌ایم. ۲. برای اطلاعات بیشتر درباره قضیه‌های سالم به پیوست مراجعه کنید.

تحصیلات تکمیلی رفتار خوبی داشت. سالم در سال ۱۹۶۳ درگذشت.^۱
در ۱۹۵۷، والتر رودین اعلام کرد^۲ که $L^1(\mathbb{R}^n) * L^1(\mathbb{R}^n) = L^1(\mathbb{R}^n)$. این امر باعث شد که ژان دیودونه، ریاضی‌دان برجسته فرانسوی و یکی از نویسندگان اصلی گروه نیکولا بورباکی، در ۱۷ دسامبر ۱۹۵۷ نامه‌ای به شرح زیر به رودین بنویسد [۳۰، فصل ۲۳]:

پروفسور رودین عزیز:

در آخرین شماره بولتن انجمن ریاضی آمریکا دیدم که در چکیده شماره 731t در صفحه ۳۸۲، اعلام داشته‌اید که در جبر $L^1(\mathbb{R}^n)$ ، هر عضو پیچش دو عضو از آن جبر است. از این حکم قدری شگفت‌زده شدم، زیرا چند سال پیش نکته ساده‌ای را دریافته بودم که به نظرم قضیه شما را نفی می‌کند [۹].^۳ این اثبات را برای شما بازگویی می‌کنم:

فرض کنید $f, g \in L^1$ و هر دو نامنفی‌اند. همچنین به ازای هر n ، تابع‌های «بریده» معمولی $f_n = \inf(f, n)$ و $g_n = \inf(g, n)$ را در نظر بگیرید. f (و g) حد دنباله صعودی (f_n) (و (g_n)) هستند. پس، طبق قضیه عادی همگرایی لبگ، تابع $h = f * g$ تقریباً همه‌جا حد تابع $h_n = f_n * g_n$ است که به روشنی دنباله‌ای است صعودی. علاوه بر این، f_n و g_n هر دو در L^2 هستند. پس، همان‌طور که می‌دانیم، h_n را می‌توان پیوسته و کراندار گرفت. از این نتیجه می‌شود که h تقریباً همه‌جا با تابعی از رده نخست برابر است. ولی، می‌دانیم توابع انتگرال‌پذیری وجود دارند که این ویژگی را ندارند، و در نتیجه ممکن نیست پیچش دو تابع L^1 باشند. من نمی‌توانم نقصی در این استدلال بیابم، و اگر شما می‌توانید، بسیار سپاسگزار خواهم بود که در صورت امکان مرا از اشتباهم آگاه کنید.

ارادتمند شما، ژ. دیودونه

همان‌طور که رودین اشاره می‌کند، توابع نامنفی در L^1 وجود دارند که نمی‌توانند به صورت $f * g$

۱. از سال ۱۹۶۸، جایزه سالم تقریباً هر ساله به یک ریاضی‌دان جوان اعطا می‌شود که به تشخیص هیئت داوران کار برجسته‌ای در زمینه سری‌های فوریه، در وسیع‌ترین معنای آن، انجام داده باشد. این جایزه دارای اعتبار بسیاری است و بسیاری از برندگان آن بعدها در دوران حرفه‌ای خود موفق به دریافت مدال فیلدز نیز شده‌اند. ۳. آن نکته در پانویس آورده شده بود و مدعای آن این است: «کافی است حالتی را در نظر بگیریم که در آن f, g مثبت هستند»

با شرط f, g نامنفی نوشته شوند.^۱ رودین در جواب دیودونه این خطای ظریف را توضیح داد. در واقع، رودین در سال ۱۹۷۹ در نامه‌ای جداگانه به من، که اکنون آن نامه گم شده است، گفت: «این یک خطای بسیار ظریف است، و اگر خلاف آن را قبلاً ثابت نکرده بودم، قطعاً برقراری آن را باور می‌کردم.» بعدها، رودین در خاطراتش [۳۰] می‌نویسد: «گفتن ندارد که خیلی تعجب کردم. طرف من کسی نبود جز دیودونه، ریاضی‌دانی در سطح جهانی و یکی از پایه‌گذاران بورباکی، که به‌جای اینکه به من — یک جوان تازه‌کار — بگوید: «اشتباه می‌کنی، چون این چیزی است که من چند سال پیش ثابت کردم»، از من می‌خواست تا اشتباهش را به او بگویم! در واقع مدتی وقت صرف کردم تا خطا را یافتم، و اگر قبلاً ثابت نکرده بودم که تجزیهٔ پیچش همواره در L^1 ممکن است، استنتاج او را بی‌هیچ تردید پذیرفته بودم، نه به دلیل شهرت او، بلکه به این دلیل که بحث او در حد خودش ساده و روشن و کاملاً درست بود.»

پاسخ مورخ ۱۷ ژانویهٔ ۱۹۵۸ دیودونه این است:

پروفسور رودین عزیز:

سپاسگزارم که خطای مرا گوشزد کردید. از آنجاکه این نوع خطا بسیار متداول است، گمان می‌کنم می‌بایست خودم قادر به کشف آن بوده باشم. ولی می‌دانید که خطای خود را یافتن چه دشوار است، آن هم وقتی که اعتقاد یافته‌اید که نتیجهٔ خاصی باید درست باشد!!

اثبات شما بسیار زیرکانه است. امیدوارم بتوانید این نتیجه را به گروه‌های موضعاً فشردهٔ آبلی دلخواه تعمیم دهید. ولی گمان من این است که چنین تعمیمی نوع نسبتاً متفاوتی از اثبات را می‌طلبد.

با تبریک برای حکم زیبایی که یافته‌اید، و بهترین سپاس‌ها. ارادتمند شما، ژ. دیودونه

در واقع، رودین قضیهٔ زیر را اثبات کرده بود:

قضیه (والتر رودین [۲۷، ۱۹۵۷]، [۲۸، ۱۹۵۸]). برای هر گروه آبلی موضعاً اقلیدسی G داریم $L^1(G) * L^1(G) = L^1(G)$. در حالت خاص، این تساوی برای گروه‌های $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^n$ برقرار است.

شنیده‌ام که گفته‌اند رودین صحبت‌های سالم یا زیگموند دربارهٔ این قضیه را در شیکاگو شنیده و نتیجه را از آنجا دزدیده و به نام خودش منتشر کرده است. اما این داستان از نظر زمانی و ترتیبات آن کاملاً نادرست است؛ گذشته از این، اثباتی که رودین ارائه داده با روش سالم تفاوت اساسی دارد. وقتی در سال ۱۹۷۹ به رودین نامه نوشتم، البته به این شنیده‌ها اشاره نکردم. با وجود این، پاسخ او با این جملات آغاز می‌شد:

اول از همه، بگذارید بگویم که بسیار متأسفم که هرگز فرصت نکردم تقدم کار سالم را در جایی ذکر کنم. من هنگام انجام این کار از قضیه تجزیه او بی‌خبر بودم، و بعدها هرگز فرصت مناسبی برای ذکر از این موضوع پیش نیامد.

۲ قضیه تجزیه کوئین

والتر رودین در دانشگاه روچستر بود. اولین کتابش، که کتاب بسیار موفقی در آنالیز دوره کارشناسی است [۲۶] و از روی علاقه «رودین کوچولو» یا «رودین آبی»^۱ نام گرفته، در سال ۱۹۵۳ منتشر شد و در آن محل کار رودین دانشگاه روچستر ذکر شده است. درحالی‌که، او این کتاب را زمانی تألیف کرد که در ام‌آی‌تی بود. در سال ۱۹۵۷، پُل کوئین دورهٔ دکترا را، تحت راهنمایی آنتونی زیگموند در دانشگاه شیکاگو تمام نکرده به دانشگاه روچستر رفت. با اینکه نه زیگموند از کار رسالهٔ کوئین خوشش آمده بود و نه خود کوئین، اما رودین و چند نفر دیگر سرانجام کوئین را متقاعد کردند که کار رساله‌اش را تمام کند و برای دفاع و امتحان نهایی به شیکاگو برگردد.

تقریباً در همین زمان، رودین کار خود در مورد تجزیه [توابع] را به کوئین نشان می‌دهد. کوئین با دیدن هسته‌های فیر و ریس و چیزهایی مانند آن می‌گوید: «آهان، همانی‌های تقریبی». یک همانی تقریبی دنباله یا توری مانند $\{e_\alpha\}$ در یک جبر توپولوژیک است به‌طوری که برای هر x ، $x = \lim_\alpha x e_\alpha = \lim_\alpha e_\alpha x$ خیلی زود کوئین اثباتی زیبا، کوتاه، و کاملاً مقدماتی (تنها با استفاده از تعریف‌ها) برای قضیه زیر پیدا کرد:

قضیه (پُل جی. کوئین، ۱۹۵۹ [۵]). اگر A یک جبر باناخ با همانی تقریبی کراندار باشد، آنگاه $AA = A$ ؛ یعنی هر عنصر A را می‌توان به عنوان حاصل ضرب دو عنصر در A تجزیه کرد.^۲

پُل جی. کوئین ریاضی‌دان نابغه‌ای بود که چند سالی در رشتهٔ من، آنالیز هارمونیک، کارهای قابل توجهی انجام داد. در واقع، سه مقالهٔ دیگر او در این زمینه، مبنای نتایج اصلی فصل‌های ۳ و ۴

۱. به رنگ جلد این کتاب اشاره دارد. — م. ۲. توجه کنید که اگر A یکدار باشد این حکم بدیهی است.

کتاب رودین، آنالیز فوریه روی گروه‌ها (۱۹۶۲)، [۲۹] هستند. بعد از آن در سال ۱۹۶۱، کوئین از صفر شروع کرد و به حوزه مبانی ریاضیات روی آورد. او تا سال ۱۹۶۳ یا ۱۹۶۴ اولین کار واقعاً بنیادی در زمینه مبانی ریاضیات از زمان گودل به بعد را به انجام رساند. [از جمله کارهای او این بود که نشان داد نه اصل موضوع انتخاب و نه فرضیه پیوستار هیچ‌یک قابل اثبات در نظریه مجموعه‌های استاندارد تسرملو-فرانکل نیستند.]

در سال ۱۹۶۸، قضیه تجزیه کوئین را در یک درس دوره تحصیلات تکمیلی که داشتم بیان کردم، شاید روز دوم بود، چون اثبات آن مستقل بود و نیاز به مطالب دیگر نداشت. بیل پاشکه، یکی از دانشجویان کلاس، پرسید آیا عکس قضیه ممکن است درست باشد و مثالی از یک جبر باناخ A ، بدون همانی تقریبی کراندار، یافت که در تساوی $AA = A$ صدق می‌کرد [۲۴].

از آنجا که $L^1(G)$ یک جبر باناخ با همانی تقریبی کراندار است، تعمیم شگفت‌انگیز زیر را برای قضیه رودین داریم:

قضیه. برای هر گروه موضعاً فشرده G ، از جمله گروه ناآبلی، داریم $L^1(G) * L^1(G) = L^1(G)$.

قضیه تجزیه کوئین یک دستاورد واقعی بود. در واقع، او ثابت کرد که برای هر G فشرده نیز داریم $L^1(G) * C(G) = C(G)$ ، و کمی بعدتر تعمیم‌های مدولی این قضیه نیز منتشر شد، که آن را به‌طور مستقل ادوین هیوئیت [۱۵] و فیلیپ سی. کرتیس (پسر) و آلساندرو فیگا-تالامانکا [۶] به دست آورده بودند. هیچ‌کدام آن‌ها از اصطلاحات مدول استفاده نکردند، اما اصول موضوعه هیوئیت اساساً اصول موضوعه مدول بودند.

فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. یک A -مدول چپ باناخ، یک فضای باناخ L است که A روی آن اثر می‌کند. نماد $a \bullet x \rightarrow (a, x)$ را برای اثر A روی L استفاده می‌کنیم به‌طوری که $a \bullet x \rightarrow (a, x)$ یک نگاشت از $A \times L$ به L است. علاوه‌براین، نامساوی $\|a \bullet x\|_L \leq \|a\|_A \cdot \|x\|_L$ را برای هر $(a, x) \in A \times L$ لازم داریم.

قضیه تجزیه مدول‌های باناخ ([۱۷]، قضیه ۲۲.۳۲). اگر A یک جبر باناخ با همانی تقریبی کراندار باشد، و اگر L یک A -مدول چپ باناخ باشد، آنگاه $A \bullet L$ یک زیرفضای خطی بسته از L است. به‌ویژه، اگر $A \bullet L$ در L چگال باشد، آنگاه به‌طور بدیهی $A \bullet L = L$.

ملاحظه. اگر $A \bullet L = M$ ، آنگاه $A \bullet (A \bullet L) = (AA) \bullet L = A \bullet L = M$.

کاربرد اصلی قضیه هیوئیت حکم زیر بود:

قضیه (ادوین هیوئیت، ۱۹۶۴ [۱۵]). با فرض $1 \leq p < \infty$ ، برای هر گروه موضعاً فشردۀ G داریم $L^1(G) * L^p(G) = L^p(G)$.

فیلیپ کرتیس و آلساندرو فیگا-تالامانکا نتیجه بالا و کاربردهای دیگری در آنالیز هارمونیک و جبرهای تابعی ارائه دادند. به ویژه، آن‌ها قضیه زیر را اثبات کردند.

قضیه (کرتیس و فیگا-تالامانکا، ۱۹۶۵ [۶]، قضیه ۱۰۳). برای هر گروه موضعاً فشردۀ G داریم

$$L^1(G) * L^\infty(G) = Cru(G) = L^1(G) * Cru(G), \quad (1)$$

که در آن فضای همه توابع کراندار از راست یکنواخت پیوسته روی G است. تساوی آخر از نکته ذکر شده پس از قضیه ی تجزیه مدول‌های باناخ نتیجه می‌شود.

همچنین داریم $L^1(G) * C_*(G) = C_*(G)$ ، که در آن فضای توابع پیوسته روی G است که در بی‌نهایت صفر می‌شوند؛ [۱۷]، پانویس [۴۴.۳۲] را ببینید.

۳ نرخ کاهش ضرایب و تبدیل‌های فوریه

اکنون یک گروه موضعاً فشردۀ آبلی G را در نظر می‌گیریم. در این حالت هم، همانند حالت کلاسیک، تبدیل‌های فوریه ابزار کلیدی هستند. این توابع روی گروه سرشت‌های $\hat{G}$ تعریف می‌شوند؛ گروهی متشکل از همه سرشت‌های χ روی G ، یعنی هم‌ریختی‌های پیوسته از G به گروه دایره‌ای. از این‌رو

$$\chi_y(x) = e^{ixy}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ برای هر } \hat{\mathbb{R}} = \{\chi_y : y \in \mathbb{R}\}$$

و

$$\chi_n(z) = z^n, \quad z \in \mathbb{T} \text{ که در آن برای هر } \hat{\mathbb{T}} = \{\chi_n : n \in \mathbb{Z}\}$$

روی بازه $[0, 2\pi]$ ، سرشت χ_n به صورت $\chi_n(t) = e^{int}$ داده می‌شود. اینکه مجموعه‌های اندیس‌گذار برای $\hat{\mathbb{R}}$ و $\hat{\mathbb{T}}$ گروه‌های آشنایی هستند تصادفی نیست. اگرچه این حکم در حالت کلی برای هر گروه G معلوم نیست، اما $\hat{G}$ با توپولوژی مناسبی همواره یک گروه موضعاً فشردۀ آبلی است.

اکنون، برای تابع f در $L^1(G)$ ، تبدیل فوریه آن را روی $\hat{G}$ به صورت $\hat{f}(\chi) = \int_G f \bar{\chi}$ تعریف می‌کنند. روی گروه $\mathbb{R}$ ، صرف‌نظر از یک ثابت بحث‌برانگیز، تبدیل فوریه با ضابطه

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

داده می‌شود. روی گروه $\mathbb{T}$ ، نیز تبدیل فوریه با ضابطه

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(z) z^{-n} dz \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

داده می‌شود. از آنجاکه $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$ ، رابطه ساده و نزدیکی بین تبدیل‌های فوریه روی $\mathbb{T}$ و ضرایب فوریه کلاسیک سری‌های فوریه وجود دارد. بنابراین تبدیل این قضیه‌ها به یکدیگر تقریباً واضح است؛ اگر به مقاله اصلی سالم نگاه کنید، خواهید دید که همین کار را با قضیه او کرده‌ام. یک مطلب اساسی این است:

لم ریمان-لبگ. اگر f در $L^1(G)$ باشد، آنگاه تبدیل فوریه $\hat{f}$ در $C_0(\hat{G})$ قرار دارد، یعنی $\hat{f}$ یک تابع پیوسته روی $\hat{G}$ است که در بی‌نهایت صفر می‌شود.

بنابراین تبدیل فوریه هر تابع در $L^1(\mathbb{R})$ در بی‌نهایت صفر می‌شود. به همین ترتیب، برای f در $L^1(\mathbb{T})$ دنباله $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ در بی‌نهایت صفر می‌شود، و همین امر در مورد ضرایب فوریه در سری فوریه متناظر با f نیز صادق است. در اینجا یک پرسش طبیعی مطرح می‌شود.

سؤال. آیا $\hat{f}$ می‌تواند با هر سرعتی که بخواهیم در بی‌نهایت صفر شود؟

برای گروه دایره‌ای $\mathbb{T}$ ، پاسخ قویاً «بله» است. در واقع، اگر (a_n) دنباله دلخواهی از اعداد نامنفی روی $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $\lim_{|n| \rightarrow \infty} a_n = 0$ ، آنگاه f در $L^1(\mathbb{T})$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{Z}$ ، $\hat{f}(n) \geq a_n$. این مطلب را آ. ن. کولموگوروف بیان و اثبات کرد [۲۱، ۱۹۲۳]. این نتیجه درست است زیرا هر دنباله (a_n) روی $\mathbb{Z}$ که در $\pm\infty$ صفر می‌شود توسط یک دنباله متقارن محدب (c_n) از اعداد مثبت محدود می‌شود، و هر چنین دنباله‌ای تبدیل فوریه یک تابع f در $L^1(\mathbb{T})$ است. به بیانی دیگر، یعنی برای هر $n \in \mathbb{Z}$ ، $\hat{f}(n) = c_n \geq |a_n|$. برای دیدن اینکه چرا چنین دنباله‌های (c_n) تبدیل فوریه هستند، لازم است به مقاله دبلو. اچ. یانگ [۳۵، ۱۹۱۳] مراجعه شود.^۱

برگردم به سال‌های ۱۹۶۷ یا ۱۹۶۸، زمانی که ادوین هیویت و من مشغول تألیف کتابمان

۱. برای اطلاعات بیشتر در این مورد، به پیوست مراجعه کنید.

[۱۷] بودیم، ادکار تعمیم این نتایج را «به عهده» من گذاشت. من روی گروه‌های فشردهٔ آبلی تمرکز کردم و به جایی نرسیدم. من عمدتاً مثل احمق‌ها سعی داشتم که توابع محدب را به بیشتر گروه‌های فشرده تعمیم دهم. تا اینکه یکی از آن ایده‌های خوب و خیلی نادری که گاهی به سراغم می‌آید پیدا شد. با استفاده از صورت مدول‌های باناخ قضیهٔ تجزیه، برای گروه‌های موضعاً فشردهٔ آبلی، داریم

$$\widehat{L^1(G)} \cdot C_*(\hat{G}) = C_*(\hat{G}). \quad (۲)$$

در اینجا عمل مدولی برای $(f, \psi) \in L^1(G) \times C_*(\hat{G})$ به صورت $f \bullet \psi = \hat{f}\psi$ است. با توجه به تساوی (۲)، پاسخ به سؤال بالا، لاقلاً برای گروه‌های فشردهٔ آبلی، «مثبت» است. ایدهٔ این پاسخ را روی $\mathbb{T}$ با استفاده از $c_*(\mathbb{Z}) = \widehat{L^1(\mathbb{T})} \cdot c_*(\mathbb{Z})$ نشان می‌دهم، که در آن $c_*(\mathbb{Z})$ مرکب از همهٔ دنباله‌های روی $\mathbb{Z}$ است که در $\pm\infty$ صفر می‌شوند. دنبالهٔ نامنفی (a_n) در $c_*(\mathbb{Z})$ را در نظر بگیرید. پس g یی در $L^1(\mathbb{T})$ و (b_n) ی در $c_*(\mathbb{Z})$ وجود دارند به طوری که برای هر $n \in \mathbb{Z}$ ، $a_n = \hat{g}(n)b_n$. بنابراین مجموعهٔ $F = \{n \in \mathbb{Z} : |b_n| > 1\}$ متناهی است و $n \notin F$ ایجاب می‌کند که $|b_n| \leq 1$ و این نیز $|\hat{g}(n)| \geq a_n$. در نتیجه g به جز احتمالاً روی F کارگر می‌افتد. اما روی مجموعهٔ متناهی F با افزودن یک چندجمله‌ای مثلثاتی مناسب به g می‌توان $\hat{g}$ را طوری تنظیم کرد که f مطلوب به دست آید.

از این بابت بسیار خشنود بودم، بنابراین اثبات را به اد هیوئیت و همچنین به ایروینگ گلیکسبرگ، که آنالیزدان خوب دیگری در دانشگاه واشنگتن بود، نشان دادم.^۱ آن‌ها هردو اثبات را پسندیدند. با این حال، بیست و چهار ساعت بعد ایروینگ خاطر نشان کرد که این نتیجه در مقالهٔ کرتیس و فیگا-تالامانکا [۶] آمده است. من خیلی ناراحت شدم، زیرا فکر می‌کردم این موضوع ارزش انتشار یک یادداشت کوتاه را داشت.

اصلاح ساده‌ای در استدلال بالا حکم زیر را ثابت می‌کند.

قضیه (هیوئیت و راس [۱۷، ۴۷.۳۲]). فرض کنید G یک گروه موضعاً فشردهٔ آبلی با گروه سرشت‌های $\hat{G}$ باشد. برای هر تابع نامنفی ψ در $C_*(\hat{G})$ ، تابع f ی در $L^1(G)$ وجود دارد به طوری که برای هر $\chi \in \hat{G}$ ، $\hat{f}(\chi) \geq \psi(\chi)$.

قضیهٔ فوق را به کرتیس و فیگا-تالامانکا [۶] منسوب کرده‌ایم، اما تصور می‌کنم کمی بیش از حد سخاوتمند بودیم. مسلماً تساوی (۲) از توضیحات آن‌ها از $\widehat{L^1(G)} \cdot L^\infty(\hat{G})$ به روشنی حاصل

۱. من و هیوئیت در دانشگاه واشنگتن روی [۱۷] کار می‌کردیم و دفتر گلیکسبرگ هم در انتهای راهرو بود.

می‌شود، اما با نگاه دقیق‌تر به مقاله آن‌ها، ملاحظه می‌شود که از این تساوی برای اثبات قضیه فوق استفاده نشده است. در اصل، کرتیس و فیگا-تالامانکا به تساوی‌های دیگری از جمله $\widehat{L^1(G)}$ استفاده کرده‌اند. بخش ۳۲ از کتاب [۱۷] شامل $L^p(\hat{G}) = L^p(\hat{G})$ برای $1 \leq p < \infty$ اشاره کرده‌اند. وارپولوس که بیان می‌کند همه توابع مثبت روی یک *-جبر باناخ، دارای همانی تقریبی کراندار، پیوسته‌اند [۱۷]، قضیه ۲۷.۳۲.۱ اثبات او عمیقاً به قضیه زیر متکی بود:

قضیه ([۱۷]، قضیه ۲۳.۳۲). اگر (a_n) دنباله‌ای در جبر باناخ A مانند A باشد به طوری که $\lim_n a_n = 0$ ، آنگاه عنصری مانند b و دنباله‌ای مانند (c_n) در A موجودند به طوری که $\lim_n c_n = 0$ و برای هر n $a_n = bc_n$.

در سال ۱۹۶۹، مارک ریفل اثبات ساده و ظریفی برای این قضیه یافت: فرض کنید $c_0(A)$ مجموعه همه دنباله‌های نامتناهی (a_n) در A باشد به طوری که $\lim_n a_n = 0$. تعریف کنید

$$\|(a_n)\|_{c_0(A)} = \sup\{\|a_n\|_A : n = 1, 2, \dots\}.$$

در این صورت $c_0(A)$ یک A -مدول باناخ تحت عمل مدولی $b \bullet (a_n) = (ba_n)$ است. بنابراین از قضیه تجزیه مدول‌های باناخ نتیجه می‌شود که $c_0(A) = A \bullet c_0(A)$ ، و این حکم قضیه را به دست می‌دهد.

قضیه کولموگوروف در سال ۱۹۲۳، با این مضمون که برای هر f در $L^1(\mathbb{T})$ تبدیل $\hat{f}$ می‌تواند به طور آهسته در بی‌نهایت صفر شود، پرسش مشابهی را تداعی می‌کند. آیا هر دنباله (a_n) در $\ell^2(\mathbb{Z})$ توسط تبدیل فوریه تابعی در $C(\mathbb{T})$ مغلوب می‌شود؟ رابرت ای. ادواردز، در استرالیا، و من در سال‌های ۱۹۷۲-۱۹۷۳ روی این مسئله کار کردیم، اما موفقیتی نداشتیم. بعدها در سال ۱۹۷۷ کارل دلیو^۲، ژان پیر کاهان و یئتراک کاتس نلسون [۸] به زیبایی پاسخ مثبت به این پرسش دادند. آن‌ها اشاره کرده بودند که این نتیجه برای هر گروه فشرده آبلی نیز برقرار است. اثبات دقیق قضیه دلیو-کاهان-کاتس نلسون در آخرین فصل کتاب کارل اشترومیرگ [۳۴] آمده است.

این نتیجه از چند جهت تعمیم یافته است. س. و. کیس لیاکف [۲۰] نشان داد که برای هر دنباله نامنفی (a_n) در $\ell^2(\{0, 1, 2, \dots\})$ تابع f در $C(\mathbb{T})$ وجود دارد به طوری که برای $n \geq 0$ ، $|\hat{f}(n)| \geq a_n$ و برای $n < 0$ ، $\hat{f}(n) = 0$. به علاوه، قضیه دلیو-کاهان-کاتس نلسون به گروه-

۱. وارپولوس اولین برنده جایزه سالم بود. ۲. این آخرین مقاله دلیو بود. او زمانی که ۴۸ ساله بود، در ۱۸ آگوست ۱۹۷۸ توسط یک دانشجوی ناراضی فارغ‌التحصیل دانشگاه استنفورد به قتل رسید.

های فشرده ناآبلی و به رده خاصی از ابرگروه‌های آبلی فشرده متریک‌پذیر تعمیم داده شد. مقاله باربارا هاین [۱۴] و مقاله [۱۲]، قضیه ۱۰.۴، مثال ۷.۲]، مقاله مشترک من و جان فورنیه، را ببینید.

۴ برخی کاربردهای دیگر

یک نمایش $\pi : L^1(G) \rightarrow B(H)$ که در آن G یک گروه موضعاً فشرده و $B(H)$ فضای عملگرهای کراندار روی یک فضای هیلبرت H است، «ناتباهیده» نامیده می‌شود اگر مجموعه $\{\pi(f)\xi : f \in L^1(G), \xi \in H\}$ زیرفضای خطی چگالی از H تولید کند.^۱ برای مثال، به [۷]، درست قبل از گزاره [۳.۲.۶] مراجعه کنید. شایان ذکر است که عملاً، مجموعه‌ای مثل $\{\pi(f)\xi : f \in L^1(G), \xi \in H\}$ باید برابر با H باشد. برای دیدن این مطلب، از عمل مدولی $(f, \xi) \rightarrow f \bullet \xi$ از $L^1(G) \times H \rightarrow H$ که در آن $f \bullet \xi = \pi(f)\xi$ است، استفاده می‌کنیم؛ در این صورت H یک $L^1(G)$ -مدول باناخ است. بنابراین، با به کارگیری قضیه تجزیه مدول‌های باناخ، داریم

$$\{\pi(f)\xi : f \in L^1(G), \xi \in H\} = L^1(G) \bullet H = \pi(L^1(G))H = H.$$

کرتیس و فیگا-تالامانکا در [۶، نتیجه ۴.۲] به این نکته اشاره کرده‌اند.

یک گروه موضعاً فشرده آبلی G با گروه سرشت‌های $\hat{G}$ را در نظر بگیرید. اگر رابطه (۱) از قضیه کرتیس و فیگا-تالامانکا را برای گروه $\hat{G}$ به کار ببریم نتیجه می‌شود که

$$L^1(\hat{G}) * L^\infty(\hat{G}) = C_{ru}(\hat{G}) = L^1(\hat{G}) * C_{ru}(\hat{G}). \quad (۳)$$

$L^1(\hat{G})$ اغلب جبر فوریه G نامیده و به صورت $A(G)$ نوشته می‌شود. این فضا را پی‌یرایمار [۱۱]، [۱۹۶۴] به همه گروه‌های موضعاً فشرده G تعمیم داد. اگر G آبلی باشد فضای دوگان آن $L^\infty(\hat{G})$ است و در حالت کلی، دوگان $A(G)$ جبر فون نویمان $VN(G)$ است. ادگرانی‌ر تعمیم مناسبی از $C_{ru}(\hat{G})$ را $UCB(\hat{G})$ نامید و نشان داد [۱۳، ۱۹۷۴، گزاره ۱] که برای هر گروه میانگین‌پذیر G داریم

$$A(G) \cdot VN(G) = UCB(\hat{G}) = A(G) \cdot UCB(\hat{G}). \quad (۴)$$

گرانیرر قضیه تجزیه کوئین را برای $A(G)$ -مدول $VN(G)$ و همچنین قضیه هورست لپتین را

۱. البته، این تعریف را می‌توان به نمایش جبرهای باناخ توسط عملگرها روی فضاهای باناخ تعمیم داد.

[۲۳، ۱۹۶۸، گزاره ۱] که بیان می‌کند $A(G)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار است اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد، برای حصول این نتیجه به کار برد. مدت‌ها بعد، تونی لاثو و ویکتور لوزرت [۲۲، ۱۹۹۳، گزاره ۱۰.۷] عکس نتیجهٔ گرانیئر را به دست آوردند: یعنی رابطهٔ تساوی $UCB(\hat{G}) = A(G) \cdot VN(G)$ میانگین‌پذیر بودن G را ایجاب می‌کند، بنابراین (۴) را می‌توان به عنوان یک گزارهٔ «اگر و تنها اگر» بازنویسی کرد.

۵ یک‌های موضعی در جبرهای فوریه

در اینجا قضیهٔ دیگری در این زمینه می‌آوریم. این قضیه را می‌توان در رودین [۲۹، قضیه ۸.۶.۲]، هیوئیت و راس [۱۷، قضیه ۳۷.۳۱] و بورباکی [۳، فصل ۲، بخش ۲، تمرین ۱۳] یافت.

قضیه. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشردهٔ آبلی و Φ زیرمجموعهٔ ناتهی و فشرده‌ای از $\hat{G}$ باشد و $\epsilon > 0$. در این صورت f ی در $L^1(G)$ وجود دارد به‌طوری که $\hat{f}$ دارای تکیه‌گاه فشرده بوده و روی Φ داریم $\hat{f} = 1$ و $\|f\|_1 < 1 + \epsilon$.

اثبات این قضیه برای هریک از G های $\mathbb{R}^n$ ، $\mathbb{Z}^m$ و $\mathbb{T}$ ، و درواقع برای هر گروه (آبلی) فشرده آسان بود. قضیه در حالت کلی نیز، به‌جز شرط نرم، باز هم اثبات آسانی دارد. ظاهراً این قضیه از آن رودین [۲۹] است. او قضیهٔ ساختاری بسیار دشوار و غیربدیهیِ گروه‌های فشردهٔ تولیدشده [۲۹، قضیه ۱۰.۴.۲] را صرفاً به این دلیل اثبات کرد که بتواند این قضیهٔ پرکاربرد را ثابت کند. هیوئیت و راس و همچنین بورباکی نیز از همان روش اثبات استفاده کرده‌اند.

در بهار ۱۹۷۱، گرگوری باچلیس و بیل پارکر، که هر دو در آن زمان در دانشگاه ایالتی کانزاس بودند، طی نامه‌ای به من اطلاع دادند که اثبات بسیار ساده‌ای از این نتیجه برای گروه‌های فشردهٔ آبلی دارند؛ در واقع، اگر حکم به صورت مناسبی برای چندجمله‌ای‌های مثلثاتی صورت‌بندی شود، برای همهٔ گروه‌های فشرده (نه لزوماً آبلی) نیز برقرار می‌شود. گرگ در مطالعهٔ خود بر روی جبرهای پوچ توان متوجه این موضوع شده بود. آن‌ها می‌خواستند بدانند که آیا من از این اثبات ساده برای حالت گروه فشردهٔ آبلی اطلاع دارم یا خیر. من اطلاعی از اثبات سادهٔ آن‌ها نداشتم، و فقط چند دقیقه طول کشید تا استدلال آن‌ها را برای اثبات قضیهٔ ذکرشده در بالا تنظیم کنم. گرگ و بیل به همراه همکارشان کارل اشترومبرگ، متقاعدم کردند که با وجود سهم اندکی که در این کار داشتم، نام به عنوان یکی از نویسندگان مقاله آورده شود. این اثبات در قالب یک یادداشت کوتاه در پراسیدینگز انجمن ریاضی آمریکا [۲] به چاپ رسیده است. اثبات شش سطر است، هرنویسنده دو سطر. اتفاقاً،

در نقد و بررسی آن مقاله [۲]، به داور گفتم که هانس رایتز مرا در جریان گذاشته که هورست لپتین نیز این قضیه را بدون نیاز به قضیه ساختاری گروه‌ها اثبات کرده است.

آن اثبات ساده قضیه این است. اصل مطلب این است که اگر g و h عناصری خودتوان در یک حلقه باشند، آنگاه $gh - h - g$ نیز چنین است. اینک با استفاده از صورت (آسان) قضیه، یعنی بدون شرط نرم، تابعی مانند h در $L^1(G)$ وجود دارد به‌طوری که $\hat{h}$ دارای تکیه‌گاه فشرده بوده و $\hat{h} = 1$ روی Φ . از طرفی $L^1(G)$ دارای یک همانی تقریبی شامل توابعی با L^1 -نرم ۱ بوده که تبدیل‌های فوریه آن‌ها تکیه‌گاه فشرده دارند. بنابراین g بی در $L^1(G)$ وجود دارد به‌طوری که $\|g\|_1 = 1$ و $\|g * h - h\|_1 < \epsilon$ و همچنین $\hat{g}$ دارای تکیه‌گاه فشرده است. فرض کنید $f = g + h - g * h$. آنگاه $\hat{f}$ دارای تکیه‌گاه فشرده است، $\|f\|_1 \leq \|g\|_1 + \|h - g * h\|_1 < 1 + \epsilon$ ، به‌علاوه برای هر سرشت χ در Φ ، داریم $\hat{f}(\chi) = \hat{g}(\chi) + \hat{h}(\chi) - \hat{g}(\chi)\hat{h}(\chi) = \hat{g}(\chi) + 1 - \hat{g}(\chi) \cdot 1 = 1$. چطور این اثبات را دیگران پیدا نکرده بودند؟ حدس من این است که والتر رودین، که قبل از تألیف کتابش یک آنالیزدان کلاسیک بود، می‌دانست که چگونه این نتیجه را برای $\mathbb{R}^n$ و موارد خاص دیگر اثبات کند. سپس از قضیه ساختار برای اثبات نتیجه کلی استفاده کرد. هیوئیت و راس، و ظاهراً بورباکی نیز به فکر جستجوی چنین اثبات ساده‌ای نیفتادند.

این داستان ادامه دارد. همکارانم از من خواستند این مقاله را برای مجله ارسال کنم، بنابراین آن را برای مناسب‌ترین دبیر مجله، ایروینگ گلیکسبرگ، فرستادم. این کار را در جمعه‌ای در ماه می ۱۹۷۱ انجام دادم، در یادداشتی از او خواستم که اگر ظرف کمتر از یک ماه به نتیجه رسید، به گرگ باچلیس پاسخ دهد، چون من قرار بود یک ماه به هند بروم. چهارشنبه بعد، در راه فرودگاه و رفتن به هند، برای دیدن نامه‌هایم به دفتر دانشگاه رفتم، یک نامه پذیرش آنجا بود! بعدها، ایروینگ گفت که در آن دوشنبه ماه می که یادداشت‌م به دستش رسیده بود، روزهایی بود که از روی کتاب رودین [۲۹] تدریس می‌کرد، از این‌رو بلافاصله پی برده بود که یادداشت ساده‌ما جالب‌توجه است.

ثابت شد که این قضیه برای ابرگروه‌های موضعاً فشردهٔ آبلی K نیز برقرار است اگر مجموعهٔ $\hat{K}$ مرکب از همهٔ سرشت‌های ابرگروهی، تحت اعمال نقطه‌ای یک ابرگروه باشد [۴، قضیه ۹.۲].

۶ حدس L^p

در پایان، «حدس L^p » را مورد بحث قرار می‌دهیم که به فضاهای L^1 و L^p مربوط بوده و تاریخچهٔ مشابهی نیز داشته است، به این معنا که این حدس تا زمانی که سرانجام حل‌وفصل شد، بسیار دشوار

به نظر می‌رسید. اگر G فشرده باشد، اندازه هار روی G متناهی است و $L^p(G) \subseteq L^1(G)$. بنابراین $L^p(G) * L^p(G) \subseteq L^1(G) * L^p(G) = L^p(G)$. عکس محتمل این حکم زمانی به عنوان «حدس L^p » معروف بود:

حدس L^p . اگر $p > 1$ و $L^p(G) * L^p(G) \subseteq L^p(G)$ ، آنگاه G فشرده است.

این حدس را ام. راجاگوپالان در سال ۱۹۶۳ در رساله‌اش در ییل مطرح کرد، اگرچه آن را و. زلازک [۳۶] قبلاً در حالت آبدی حل کرده بود. پیشرفت‌هایی توسط افراد مختلفی، از جمله نیل ریکرت، که او نیز دانشجوی تحصیلات تکمیلی ییل بود، صورت گرفت. آن‌ها این نتیجه را برای p های مختلف و رده‌های مختلفی از گروه‌ها نظیر گروه‌های گسسته، کاملاً ناهمبند، پوچ‌توان، حاصل ضرب نیم‌مستقیم گروه‌های موضعاً فشرده آبدی، حل‌پذیر و میانگین‌پذیر اثبات کردند. این پروژه اساساً در اوایل دهه ۱۹۷۰ کنار گذاشته شد. بعدها در سال ۱۹۹۰، ساداهیرو سائکی [۳۱]، ص ۶۱۵-۶۲۰]، که او نیز در دانشگاه ایالتی کانزاس بود، حدس را برای همه گروه‌های موضعاً فشرده با اثباتی مبتکرانه و مستقل حل کرد.

۷ پیوست: سلسله‌ای از ایده‌ها

کلید اصلی هر دو قضیه تجزیه و «قضیه نرخ کاهش» روی گروه دایره‌ای $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ این است که دنباله‌های متقارن مثبت (c_n) روی $\mathbb{Z}$ که بر $\{0, 1, 2, \dots\}$ محدب بوده و همگرایی یکنواخت به صفرند، تبدیل فوریه توابع نامنفی در $L^1(\mathbb{T})$ هستند؛ این مطلب از آن دبلیو. اچ. یانگ [۳۵]، ۱۹۱۳، قضیه در فصل ۳] است؛ همچنین نگاه کنید به [۳۷، قضیه ۵.۱، فصل ۵] یا [۱۰، ۱۰۳.۷]. در واقع، سری فوریه یک تابع در خارج هر همسایگی^۰ به خود تابع همگرایی یکنواخت می‌شود. به راحتی نشان داده می‌شود که هر دنباله روی $\mathbb{Z}$ که به^۰ همگرا می‌شود مغلوب چنین دنباله متقارن «محدبی» می‌شود؛ این مطلب در [۳۷، درست قبل از ۵.۱۰۷] و [۱۰، ۵.۱۰۷] اثبات شده است. «قضیه نرخ کاهش» برای $\mathbb{T}$ از این ملاحظات و قضیه دبلیو. اچ. یانگ حاصل می‌شود. آن. کولموگوروف [۲۱، ۱۹۲۳] به طور مستقل «قضیه نرخ کاهش» را بیان و اثبات کرد. همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، برای تعمیم این قضیه به گروه‌های فشرده آبدی و فراتر از آن، به صورت مدولی قضیه تجزیه کوئین نیاز داشتیم.

نتیجه مشابهی برای $\mathbb{R}$ برقرار است. به‌ویژه، هر تابع نامنفی متقارن (یعنی زوج) ψ در $C_0(\mathbb{R})$

۰.۱ چون دنباله (c_n) متقارن است، سری فوریه آن یک سری کسینوسی است.

که روی $(\circ, \infty)$ محدب است، تبدیل فوریۀ تابعی در $L^1(\mathbb{R})$ است. در حالت $\psi(\circ) = 1$ ، این حکم نزد احتمال دانان به «محک پولیا» معروف است، که بیان می‌کند هر چنین تابعی تابع مشخصۀ یک توزیع مطلقاً پیوسته است؛ [۱۹، قضیه ۲۰.۵۰۱] را ببینید. همان طور که در پیوست کتاب کای لای چانگ [۱، ص ۱۹۳] اشاره شده است، این نتیجه در مقالۀ پولیا [۲۵، ۱۹۱۸] «تا حدی مستتر» است.

قضیه تجزیه برای $L^1(\mathbb{T})$ ، که چندین سال بعد ثابت شد، عموماً به رافائل سالم [۳۲] نسبت داده می‌شود. در واقع، هدف او کمی متفاوت بود. ظاهراً او می‌خواست نشان دهد که برای هر f ی در $L^1(\mathbb{T})$ ، تابعی مانند g در $L^1(\mathbb{T})$ وجود دارد که تبدیل فوریۀ آن روی $\mathbb{Z}$ کندتر از تبدیل f به $\circ$ می‌رود. [او نتیجۀ مشابهی را برای $C(\mathbb{T})$ ثابت کرد.] در حالت خاص، او اساساً نشان داد که برای هر f ی در $L^1(\mathbb{T})$ ، تابعی مانند g در $L^1(\mathbb{T})$ و دنبالۀ متقارن مثبتی مانند (λ_n) روی $\mathbb{Z}$ وجود دارد که مقعر بوده و روی $\{0, 1, 2, \dots\}$ به‌طور یکنوا به $+\infty$ صعود نموده و به‌علاوه برای هر n تساوی $\hat{f}(n) \cdot \lambda_n = \hat{g}(n)$ صدق می‌کند. زیگموند در یادداشت‌های [۳۷، یادداشت‌های فصل ۵] اشاره می‌کند که قضیه تجزیه برای $L^1(\mathbb{T})$ نتیجه آسانی از این مطلب است. در واقع، بررسی اینکه دنبالۀ وارون‌های $(1/\lambda_n)$ دنباله‌ای محدب است که مفروضات قضیه دلیو. اچ. یانگ، ذکر شده در بالا، را برآورده می‌کند، بسیار آسان است. بنابراین، h ی در $L^1(\mathbb{T})$ موجود است به‌طوری که برای هر n داریم $\frac{1}{\lambda_n} = \hat{h}(n)$ و $\hat{f}(n) = \hat{h}(n)\hat{g}(n)$. از این رو با قضیه یکتایی تبدیل‌های فوریه، تساوی $f = h * g$ حاصل می‌شود. حدس من این است که این موضوع را زیگموند یا خود سالم در زمانی بین سال‌های ۱۹۳۹ و ۱۹۵۹ بررسی کرده‌اند؛ یا شاید هردوی آن‌ها، چون که «از ۱۹۴۵ تا ۱۹۵۹، سالم نزدیک‌ترین دوست و همکار زیگموند بوده است.» [۱۸]. آن‌ها در آن دوره حداقل ده مقاله و یک کتاب مشترکاً تألیف کرده‌اند.

مراجع

- [1] Alexanderon, G. L., *The Random Walks of George Pólya*, The Mathematical Association of America, 2000.
- [2] Bachelis, G. F., Parker, W. A., Ross, K. A., Local units in $L^1(G)$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **31** (1972), 312-313.
- [3] Bourbaki, N., *Éléments de mathématique*, Fasc. XXXII, Théories spectrales, Ch. I: Algèbres normées, Ch. II: Groupes localement compacts commutatifs, Act. Sci. Ind., No. 1322, Hermann, 1967.
- [4] Chilana, A. K. (after 1978, Ajit Iqbal Singh), Ross, K. A., Spectral synthesis in hypergroups, *Pacific J. Math.*, **76** (1979), 313-328.
- [5] Cohen, P. J., Factorization in group algebras, *Duke Math. J.*, **26** (1959), 199-205.

- [6] Curtis, P. C., Jr., Figa-Talamanca, A., Factorization theorems for Banach algebras, *Function Algebras*, in *Proc. Internat. Sympos. on Function Algebras*, Tulane University, Scott-Foresman, 1965, 169-185,
- [7] Deitmar, A., Echterhoff, S., *Principles of Harmonic Analysis*, Springer, 2009.
- [8] De Leeuw, K., Katznelson, Y., Kahane, J.-P., Sur les coefficients de Fourier des fonctions continues, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B* 285 (1977), no. 16, A1001-A1003.
- [9] Dieudonné, J., Sur le produit de composition, *Compositio Mathematica*, **12** (1954), 17-34.
- [10] Edwards, R. E., *Fourier Series, A Modern Introduction*, volume 1, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1967.
- [11] Eymard, P., L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. France*, **92** (1964), 181-236.
- [12] Fournier, J. J. F., Ross, K. A., Random Fourier series on compact abelian hypergroups, *J. Austral. Math. Soc.*, **37** (1984), 45-81.
- [13] Granirer, E. E., Weakly almost periodic and uniformly continuous functionals on the Fourier algebra of any locally compact group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **189** (1974), 371-382.
- [14] Heiman, B., Fourier coefficients of continuous functions on compact groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **87** (1983), 685-690.
- [15] Hewitt, E., The ranges of certain convolution operators, *Math. Scand.*, **15** (1964), 147-155.
- [16] Hewitt, E., Ross, K. A., *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, 1963. Second edition 1979.
- [17] Hewitt, E., Ross, K. A., *Abstract Harmonic Analysis II*, Springer-Verlag, 1970.
- [18] Kahane, J.-P., Review of Zygmund's 2-volume Trigonometric Series, 3rd edition, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **41** (2004), 377-390.
- [19] Kawata, T., *Fourier Analysis in Probability Theory*, Academic Press, 1972.
- [20] Kislyakov, S. V., Fourier coefficients of boundary values of analytic functions, *Trudy Math.*, **155** (1981), 77-94; translated as *Proc. Steklov Inst. Math.* (1983), 75-91.
- [21] Kolmogorov, A. N., Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier-Lebesgue, *Bull. Acad. Polonaise*, **11** (1923), 83-86.
- [22] Lau, A. T.-M. and Losert, V., The C^* algebra generated by operators with compact support on a locally compact group, *J. Functional Anal.*, **112** (1993), 1-30.
- [23] Leptin, H., Sur l'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B*, **266** (1968), A1180-A1182.
- [24] Paschke, W. L., A factorable Banach algebra without bounded approximate unit, *Pacific J. Math.*, **46** (1973), 249-251.
- [25] Pólya, G., Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen, *Math. Z.*, **2** (1918), 352-383.
- [26] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, first edition (1953), second edition (1964), third edition (1976).
- [27] Rudin, W., Factorization in the group algebra of the real line, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **43** (1957), 339-340.
- [28] Rudin, W., Representation of functions by convolutions, *J. Math. Mech.*, **7** (1958), 103-115.
- [29] Rudin, W., *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Publishers, 1962.
- [30] Rudin, W., *The Way I Remember It*, History of Mathematics, volume 12, American Mathematical Society and London Mathematical Society, 1997.
- [31] Saeki, S., The L^p -conjecture and Young's inequality, *Illinois J. Math.*, **34** (1990), 614-627.
- [32] Salem, R., Sur les transformations des séries de Fourier, *Fund. Math.*, **33** (1939), 108-114; also in *Oeuvres Mathématiques*, Hermann, 1967, 90-96.
- [33] Salem, R., *Oeuvres Mathématiques*, Hermann, 1967.
- [34] Stromberg, K. R., *Probability for Analysts*, Chapman & Hall, 1994.

- [35] Young, W. H., On the Fourier series of bounded functions, *Proc. London Math. Soc.*, **12** (1913), 41-70.
- [36] Zelazko, W., On the algebras L^p of locally compact groups, *Colloq. Math.*, **8** (1961), 112-120.
- [37] Zygmund, A., *Trigonometric Series*, 2nd ed., 2 volumes, Cambridge University Press, 1959.

حمیدرضا ابراهیمی ویشکی: دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم ریاضی
رایانامه: vishki@um.ac.ir

A Trip from Classical to Abstract Fourier Analysis*

K. A. Ross

Translated by H. R. Ebrahimi Vishki¹

Department of Pure Mathematics, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

Abstract. This paper is a personal perspective of some early history of abstract Fourier analysis. Topics visited include factorization of L^1 functions, L^p -conjecture, and theorems about Fourier transforms. The mathematicians who appear in the story include: Raphaël Salem, Paul J. Cohen, Antoni Zygmund, Walter Rudin, Jean Dieudonné, Edwin Hewitt, N. Th. Varopoulos, Philip C. Curtis, Jr., and Alessandro Figà-Talamanca.

Keywords: abstract Fourier analysis, Cohen factorization theorem, local unit, Fourier transform, locally compact group

Article history: Received 23 May 2026; Accepted 2 June 2026

Article type: translation

* Ross, Kenneth A., A trip from classical to abstract Fourier analysis, *Notices Amer. Math. Soc.*, **61** (2014), no. 9, 1032-1038.

1. vishki@um.ac.ir