

یک سؤال خوب از بین نمی‌رود: نمونه‌ای از پژوهش ریاضی*

آر. اف. براون
ترجمه رسول کاظمی

چکیده. از نقل داستان این سؤال که «آیا نگاشت‌های جابه‌جایی روی بازه واحد دارای نقطه ثابت مشترکی هستند» استفاده می‌کنیم تا راهبردهایی را نشان دهیم که یک پژوهش ریاضی بر اساس آن‌ها پیش می‌رود.

۱ مقدمه

مدتی پیش، در یک کنفرانس ریاضی در حال بحث درباره این موضوع بودیم که اگر در یک مهمانی کسی از شما درباره کارتان بپرسد، چه جوابی می‌دهید؟ اگر بگویید «من تدریس و پژوهش می‌کنم» و او بپرسد «چه نوع پژوهشی؟» آیا خجالت‌زده زمزمه می‌کنید «توضیحش سخت است» یا حرفی برای گفتن دارید؟

من حرفی برای گفتن دارم. «من با اشیاء هندسی کار می‌کنم. علاقه‌مندم بدانم وقتی نقاط را روی این اشیاء به صورت پیوسته (به این معنا که نقاط نزدیک به هم، به مکان‌های نزدیک به هم منتقل بشوند) حرکت می‌دهید، چه اتفاقی می‌افتد. برای مثال، اگر نقاط روی کره، یعنی سطح یک گوی، را به صورت پیوسته کمی جابه‌جا کنید، مشخص می‌شود که حداقل یک نقطه باید ثابت بماند. از طرف دیگر، می‌توانم تمام نقاط یک چنبره، یعنی سطح یک دونات، را فقط با دوران آن، کمی

عبارات و کلمات کلیدی: نگاشت‌های جابه‌جایی، پیوستگی، نقطه ثابت
نوع مقاله: ترویجی؛ تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۶/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۸/۵

*Brown, R. F., A good question won't go away: An example of mathematical research, *Amer. Math. Monthly*, **128** (2021), no. 1, 62-68.

جابه‌جا کنم. این دوران هیچ نقطه ثابتی ندارد. تخصص من نظریه نقطه ثابت نامیده می‌شود و آنچه که برایتان توضیح دادم این است که چگونه نظریه نقطه ثابت تفاوت نسبتاً ظریفی بین یک کره و یک چنبره را به لحاظ ریاضی نمایان می‌کند.»

در آن مهمانی احتمالاً به اندازه‌ای که دوستم بخواهد بداند، در مورد پژوهش‌های ریاضی توضیح خواهم داد. من فرض می‌کنم که خوانندگان ماهنامه ریاضی آمریکا توجه بیشتری به این موضوعات دارند. به‌ویژه اگر (تاکنون) در یک پژوهش ریاضی شرکت نکرده باشند، چه در یک پروژه کارشناسی و چه به‌عنوان دانشجوی تحصیلات تکمیلی. در این مقاله، داستان پرسش ارائه نقطه ثابت را بازگو خواهم کرد؛ داستانی که چندین ویژگی مهم از پژوهش‌های ریاضی را شرح می‌دهد.

۲ پرسش

مسئله مربوط به حرکت نقاط روی یک شیء هندسی است، اما یکی که حتی از کره یا چنبره نیز ابتدایی‌تر است؛ بازه $I = [0, 1]$ از خط حقیقی. یک تابع پیوسته f ، که من برای آن از واژه ساده‌تر نگاشت استفاده می‌کنم، از I به خودش باید یک نقطه ثابت داشته باشد. دلیل این امر آن است که تابع $d(x) = f(x) - x$ یک نگاشت است، چون تابع f چنین است، $d(0) \geq 0$ و $d(1) \leq 0$. پس قضیه مقدار میانی به ما می‌گوید $x^* \in I$ موجود است که $d(x^*) = 0$ و بنابراین $f(x^*) = x^*$. حال دو نگاشت f و g از I به خودش را در نظر بگیرید. هر دو، نقطه ثابت دارند، اما در حالت کلی نقاط ثابت f هیچ رابطه‌ای با نقاط ثابت g ندارند. با این حال، فرض کنید بین نگاشت‌های f و g رابطه‌ای برقرار باشد. آیا نقاط ثابت آن‌ها نیز مرتبط خواهند بود؟ دقیق‌تر اینکه:

پرسش. فرض کنید نگاشت‌های $f, g : I \rightarrow I$ جابه‌جایی هستند، یعنی برای هر $x \in I$ ، $f(g(x)) = g(f(x))$. آیا مجموعه نقاط ثابت این دو نگاشت یکدیگر را قطع می‌کنند؟ یعنی اگر نگاشت‌های f و g با هم جابه‌جا شوند، آیا یک نقطه ثابت مشترک دارند؛ یک جواب x^* برای معادلات $f(x^*) = x^* = g(x^*)$ ؟

اگرچه این پرسش جایی مکتوب نشده بود، به‌طور غیررسمی سه نفر مختلف، مستقلاً، آن را مطرح کرده بودند: اِلدون دایر^۱ در ۱۹۵۴، آلن شیلدز^۲ در ۱۹۵۵، و لستر دیوبینز^۳ در ۱۹۵۶. انگیزه طرح این پرسش ممکن است از این واقعیت ناشی شده باشد که می‌دانستند خاصیت نقطه ثابت

مشترک برای چندجمله‌ای‌های جابه‌جایی برقرار است. جی. اف. ریت [۲۷] در ۱۹۲۳ ثابت کرد که به‌غیر از مثال‌های نسبتاً واضحی مانند $f(x) = (p(x))^m$ و $g(x) = (p(x))^n$ برای چندجمله‌ای $p(x)$ ، تنها چندجمله‌ای‌هایی که با هم جابه‌جا می‌شوند، چندجمله‌ای‌های چیشف هستند. این رده که بسیار مطالعه شده بودند دارای ویژگی نقطه ثابت مشترک بودند (به [۳] مراجعه کنید).^۱

اولین پاسخ به این پرسش برحسب تاریخ انتشار، مقاله‌ای از رالف دومار [۱۲] بود که در ماهنامه ریاضی آمریکا در ۱۹۶۳ منتشر شد. استراتژی پژوهشی او در این کار را، همان‌طور که خواهیم دید، چندین پژوهشگر دیگر استفاده کردند. دیده شد که اگر f و g پیوسته باشند و جابه‌جا شوند، برای داشتن نقطه ثابت مشترک، به اندازه کافی قوی نیستند. بنابراین دومار فرض‌ها را قوی‌تر کرد تا به شکل محدودکننده‌تری از پیوستگی دست پیدا کند: نگاشت‌های f و g باید پیوسته لیپ‌شیتس باشند. یادآوری می‌کنیم که نگاشت $f: I \rightarrow I$ پیوسته لیپ‌شیتس است هرگاه عدد $\alpha > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x, y \in I$ داشته باشیم $|f(x) - f(y)| < \alpha|x - y|$. توجه کنید عدد α ، که ثابت لیپ‌شیتس نامیده می‌شود، یکتا نیست، زیرا این نابرابری برای هر مقدار بزرگ‌تری نیز صادق خواهد بود. فرض کنید β ثابت لیپ‌شیتس g باشد. اگر کوچک‌ترین مقادیر تکی α و β بزرگ‌تر از ۱ باشد، او نشان داد که این نگاشت‌ها یک نقطه ثابت مشترک دارند، مشروط بر اینکه این ثابت‌ها در یک نابرابری خاص، که رفتار دو نگاشت را به هم مرتبط می‌کند، صدق کنند.

با این حال، اگر برای یکی از نگاشت‌ها، مثلاً f ، بتوانیم از $\alpha = 1$ استفاده کنیم، یعنی اگر برای هر $x, y \in I$ داشته باشیم $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ ، که در این حالت f را غیرانبساطی می‌نامیم، آنگاه یک نقطه ثابت مشترک وجود دارد، حتی اگر g به‌جای پیوسته لیپ‌شیتس تنها پیوسته باشد. برای اثبات، گیریم $\Phi(f)$ مجموعه نقاط ثابت f باشد، که یک زیرمجموعه بسته از I و در نتیجه دارای یک ماکسیمم M و یک مینیمم m است. اگر $x \in [m, M]$ ، آنگاه

$$f(x) - m \leq |f(x) - m| = |f(x) - f(m)| \leq |x - m| = x - m,$$

که نتیجه می‌دهد $f(x) \leq x$. به روش مشابه می‌توان نشان داد که $M - f(x) \leq M - x$ و در نتیجه $f(x) \geq x$. بنابراین ثابت می‌شود که اگر f غیرانبساطی باشد، $\Phi(f) = [m, M]$. حال اگر $x \in [m, M]$ ، چون g با f جابه‌جا می‌شود، $g(x) = g(f(x)) = f(g(x))$.

۱. بحث‌های بیشتری در مورد پیش‌زمینه این پرسش در مقدمه [۵] و در بخش ۴ از [۲۶] وجود دارد.

بنابراین تحدید g نگاشتی از $[m, M]$ به خودش است و بنابر قضیه مقدار میانی عضو $x_* \in [m, M] = \Phi(f)$ موجود است که $g(x_*) = x_*$ ؛ یعنی x_* یک نقطه ثابت مشترک است. پس، اگر نگاشتی با یک نگاشت غیرانبساطی جابه‌جا شود، آنگاه یک نقطه ثابت مشترک وجود دارند. چند سال بعد، در مقاله‌ای دیگر از ماهنامه ریاضی آمریکا، جرال د جونگک [۲۲] شرایط دومار را بهبود بخشید به‌طوری که هیچ‌یک از نگاشت‌ها نیاز نیست پیوسته لیپ‌شیتس باشند، اما نگاشت‌ها همچنان باید رفتار به هم مرتبط مشابهی از خود نشان دهند.

هاسکل کوئین [۱۱] وجود یک نقطه ثابت مشترک را با تقویت فرض‌های روی توابع جابه‌جایی f و g به روش دیگری ثابت کرد، به این ترتیب که آن‌ها نه تنها پیوسته بلکه باز نیز باشند. در چارچوب ما، این یعنی که تصاویر زیرمجموعه‌های I که تقاطع بازه‌های باز خط حقیقی با I هستند، زیرمجموعه‌هایی از همان نوع باشند.^۱ به‌ویژه، همان‌ریختی‌ها نگاشت‌های باز هستند؛ بنابراین نتیجه کوئین ثابت می‌کند که همان‌ریختی‌های جابه‌جایی، نقطه ثابت مشترک دارند. همان‌طور که طرح پرسش، به‌طور مستقل برای چند نفر اتفاق افتاد، همین اتفاق برای شرط نگاشت باز نیز رخ داد. جان فولکمن [۱۴] و جیمز جوئیچی [۲۱]، هر دو نتیجه کوئین را با نشان دادن اینکه «اگر فقط یکی از نگاشت‌های جابه‌جایی f یا g ، یک نگاشت باز باشد، آنگاه آن‌ها نقطه ثابت مشترک دارند»، بهبود بخشیدند.

یک لم ساده در مقاله فولکمن می‌تواند به ما حسی از اهمیت شرط جابه‌جایی بدهد. ما تلاش نمی‌کنیم که نشان دهیم یک نگاشت از بازه‌ای به خودش که با یک نگاشت باز جابه‌جا می‌شود، یک نقطه ثابت مشترک با آن دارد. در عوض این، نتیجه بسیار ضعیف‌تر را اثبات خواهیم کرد که یک نگاشت که با نگاشتی یکنوا جابه‌جا شود، یک نقطه ثابت مشترک با آن دارد. فرض کنید f یک نگاشت یکنوا روی I و g نگاشتی باشد که با f جابه‌جا می‌شود. اگر f یکنوا نزولی باشد، پس نقطه ثابت یکتای x_* دارد و چون نگاشت‌ها جابه‌جا می‌شوند، $f(g(x_*)) = g(f(x_*)) = g(x_*)$. بنابراین $g(x_*)$ یک نقطه ثابت f است که بنابر یکتایی نقطه ثابت f ، نتیجه می‌شود $g(x_*) = x_*$. حال فرض کنید f یکنوا صعودی باشد. گیریم x_* یک نقطه ثابت g باشد و برای $n \geq 1$ دنباله $x_n = f(x_{n-1})$ را در I در نظر می‌گیریم. این دنباله صعودی است و بنابراین به یک $x_* \in I$ همگرا می‌شود. با استقرا می‌توان ثابت کرد که نقاط دنباله $\{x_n\}$ همگی نقاط ثابت g هستند: حکم

۱. کوئین شرایط خود را به‌گونه متفاوتی بیان کرد، اما بعداً مشخص شد که شرایط او معادل مفهوم نگاشت باز است که در توپولوژی بسیار استفاده می‌شود.

برای $n = 0$ درست است و اگر $g(x_{n-1}) = x_{n-1}$ آنگاه

$$g(x_n) = g(f(x_{n-1})) = f(g(x_{n-1})) = f(x_{n-1}) = x_n.$$

در نتیجه x_* یک نقطه ثابت g است، زیرا g پیوسته است:

$$g(x_*) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*.$$

اما x_* یک نقطه ثابت تابع پیوسته f نیز هست، زیرا

$$x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x_*).$$

فرضیه مکمل دیگری برای پرسش ما، به مفهوم نقطه تناوبی بستگی دارد. برای تابع داده شده $f^n : X \rightarrow X$ ، $n > 1$ می نویسیم $f^1(x) = f(x)$ و در حالت کلی برای $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ تعریف می کنیم. نقطه $x \in X$ یک نقطه تناوبی f است هرگاه $f^n(x) = x$. اگر $f^n(x) = x$ برای هر $k < n$ داشته باشیم $f^k(x) \neq x$ ، آنگاه n حداقل تناوب نقطه تناوبی x نامیده می شود. برای ساده سازی این واژه گزینی، چنین نقطه ای را نقطه تناوبی از مرتبه n می نامیم.

باز هم شرایط مشابه و به اندازه کافی قوی که یک نقطه ثابت مشترک را نتیجه می دهند به طور مستقل کشف شدند. مکسفیلد و مورانت [۲۵] نشان دادند که نگاشت های جابه جایی روی بازه واحد دارای یک نقطه ثابت مشترک هستند به شرط آنکه یکی از نگاشت ها هیچ نقطه تناوبی از مرتبه ۲ نداشته باشد. به عبارت دیگر، اگر $f(f(x)) = x$ ، آنگاه $f(x) = x$. شرط شروود چو و مویر [۹] این است که یک زیر بازه $[a, b]$ وجود داشته باشد که در آن یکی از نگاشت ها نقطه ثابت دارد و دیگری نقطه تناوبی از مرتبه ۲ ندارد.

مفهوم نقطه تناوبی را آرتور شوارتس در [۲۸] در رویکرد متفاوتی به پرسش ما به کار برده است. در تلاش برای پاسخ به سؤالی مانند پرسش ما، که آیا فرض های خاصی نتیجه مطلوب را به همراه دارند یا خیر، به جای تقویت فرض ها، می توانید بپرسید که آیا فرض های داده شده حداقل برای اثبات نتیجه ای کمی ضعیف تر کافی هستند یا نه. به جای پرسیدن این سؤال که، آیا نگاشت های جابه جایی f و g یک نقطه ثابت مشترک دارند، می توانیم انتظار داشته باشیم که یک نقطه تناوبی مشترک با دوره های احتمالاً متفاوت داشته باشند. اصولاً، اثبات این امر باید آسان تر باشد، زیرا نگاشت ها معمولاً نقاط تناوبی زیادی دارند که نقطه ثابت نیستند. در [۲۸]، شوارتس به تقویت فرض ها نیاز

داشت، اینکه f مشتق‌پذیر باشد نه فقط پیوسته. نتیجه او این است که یک نقطه ثابت f وجود دارد که یک نقطه تناوبی g است، اما لزوماً یک نقطه ثابت g نیست.

۳ پاسخ

طبیعی به نظر می‌رسد که اگر سؤالی مستقلاً به ذهن بیش از یک نفر خطور کرده باشد، مستقلاً دو نفر دیگر پاسخ بدهند. در ۱۹۶۷ ویلیام بویس و جان هونکه مثال‌هایی از نگاشت‌های جابه‌جایی روی یک بازه ساختند که هیچ نقطه ثابت مشترکی نداشتند و آن را در ۱۹۶۹ به ترتیب در [۵] و [۲۰] منتشر کردند. بنابراین پاسخ پرسش ما «نه» است. پیش از بحث در مورد این مثال‌ها، شایان ذکر است که این موضوع می‌تواند خبر خوبی برای همه افرادی که در بالا ذکر شدند، باشد. اگر پاسخ «بله» بود، یعنی اگر نگاشت‌های جابه‌جایی روی بازه، همیشه یک نقطه ثابت مشترک داشتند، آن وقت تمام نتایج آن‌ها فقط راه‌حل‌های جزئی برای مسئله‌ای که بالاخره حل شد، بودند. اما از آنجا که پاسخ کلی «نه» است، مشارکت‌های آن‌ها بخشی از پاسخی جالب‌تر هستند: «لزوماً نه، اما...».

در [۲۰]، هونکه دو مثال ارائه کرد. مثال اولش با مثال بویس یکسان است، در حالی که مثال دیگر، که به روش متفاوتی به دست آمده است، به قول هونکه «تا حدی هموارتر» نسبت به پیوستگی لیپ‌شیتس است. این بحث را به مثالی که مشترکاً بویس و هونکه ارائه کرده‌اند، محدود خواهیم کرد. طبق نظر بویس کلید ساخت این مثال، در مقاله‌ای از گلن باکستر [۲] است که از پرسش ما الهام گرفته شده و اخیراً منتشر شده است. برای درک آنچه باکستر انجام داد، در نظر داشته باشید که می‌توانیم نمودار یک تابع $f: I \rightarrow I$ را به عنوان یک منحنی در مربع واحد و نقاط ثابت f را به عنوان تقاطع نمودار آن با قطر مربع در نظر بگیریم. با نگاشت‌های جابه‌جایی معمول f و g شروع می‌کنیم. باکستر متوجه شد که تابع f روی نقاط ثابت تابع $h(x) = f(g(x))$ ، حرکت می‌کند، زیرا اگر $h(x) = x$ ، آنگاه $f(h(x)) = f(x)$ و با توجه به جابه‌جایی بودن f و g

$$f(h(x)) = f(f(g(x))) = f(g(f(x))) = h(f(x)).$$

بنابراین $h(f(x)) = f(x)$.

باکستر با فرض اینکه h تعداد متناهی نقطه ثابت دارد، نقاط ثابت h در بازه $(0, 1)$ را به سه رده تقسیم کرد برحسب اینکه نمودار h چه ارتباطی با قطر دارد: آن را رو به پایین قطع می‌کند، آن را رو به بالا قطع می‌کند، یا به آن برخورد می‌کند ولی قطعش نمی‌کند. قضیه باکستر این است که f ، یک نقطه ثابت از h فقط به نقطه ثابتی از رده خودش تصویر می‌کند. اگر نقاط ثابت h را از

چپ به راست از x_1 تا x_N شماره‌گذاری کنیم، آنگاه همه جایگشت‌های ممکن از اندیس‌ها امکان‌پذیر نیستند، زیرا به‌عنوان مثال، نمودار h نمی‌تواند در نقاط ثابت متوالی، قطر را رو به پایین قطع کند. جایگشت‌های ممکن به‌عنوان جایگشت‌های باکستر شناخته شدند.

این مثال بر اساس یکی از جایگشت‌های باکستر با ۱۳ تقاطع با قطر است. بویس از کامپیوتر استفاده کرد تا تعداد جایگشت‌های ممکن باکستر را که نیاز به مطالعه داشت، به ۱۱۲ کاهش دهد و نشان داد تنها جایگشتی که می‌تواند مثال را تولید کند، شماره ۱۰۱ است.^۱ برای تعریف توابع جابه‌جایی f و g ، بویس توابع تکه‌ای خطی f_1, f_2, g_1, g_2 را از I به خودش به‌طور صریح تعریف کرد. پس نمودارهای این توابع، خطوطی هستند که از انتها به انتها به هم متصل شده‌اند. سپس به‌صورت استقرایی دنباله‌هایی از توابع (f_n) و (g_n) را با خاصیت $f_n g_{n+1} = g_n f_{n+1}$ تعریف کرد. او نشان داد که این دنباله‌ها همگرایی یکنواخت هستند، پس حدهای آن‌ها، f و g که جابه‌جا می‌شوند، پیوسته‌اند و f_n و g_n به‌گونه‌ای تعریف شده‌اند که مجموعه نقاط ثابت f و g مجزا هستند.

۴ استراتژی‌های تحقیقاتی پس از پاسخ

مانند سنگی که به یک برکه ساکن پرتاب می‌شود و موج‌هایی را در تمام جهات می‌فرستد، این پرسش و پاسخ آن نقاط شروع تحقیقات گسترده‌ای بودند. از آنجا که تمرکز ما روی استراتژی‌های تحقیقاتی است، من فقط برخی از نتایج این تحقیقات را که نشان‌دهنده آن استراتژی‌ها هستند، بررسی می‌کنم.^۲

پس از انتشار مثال‌های بویس و هونکه بهبودهای زیادی در نتایج قبلی حاصل شد؛ زیرا پاسخ منفی باعث شد آنچه کشف شده بود گسترش پیدا کند. به‌عنوان مثال، بویس در [۶] شرایط مکسفیلد و مورانت و همچنین چو و مویر را اصلاح کرد با اثبات اینکه اگر نگاشت‌ها جابه‌جایی باشند و اگر مجموعه نقاط تناوبی از مرتبه ۲ یکی از نگاشت‌ها همبند باشد، به‌ویژه اگر فقط یک نقطه تناوبی از مرتبه ۲ داشته باشد، آنگاه آن‌ها باز هم یک نقطه ثابت مشترک دارند.

مدتی بعد، جونگک در [۲۳] رابطه بین نقاط ثابت و تناوبی را خیلی شفاف‌تر کرد. مجموعه انطباق f و g مجموعه‌ای از نقاط $x \in I$ است که $f(x) = g(x)$. جونگک نشان داد که اگر f و g روی مجموعه انطباق خود جابه‌جایی باشند، آنگاه یک نقطه ثابت مشترک دارند اگر و تنها اگر g هیچ نقطه تناوبی به‌جز نقاط ثابت نداشته باشد.

۱. از آنجا که کامپیوترها تازه در دهه ۱۹۵۰ به‌طور عمومی در دسترس پژوهشگران قرار گرفتند، این مثال در سال ۱۹۶۷، باید یکی از اولین استفاده‌ها از کامپیوتر، برای حل یک مسئله انتزاعی ریاضی بوده باشد. ۲. توضیح بسیار دقیق‌تری درباره پژوهش الهام گرفته از پرسش مورد بحث در بخش ۴ از [۲۶] ارائه شده است.

بررسی منابع قبل از پاسخ به پرسش ما، راهبرد پژوهشی را که احتمالاً بیش از همه به کار رفته است نشان نمی‌دهد: تعمیم. تعریف نگاشت‌های جابه‌جایی و نقاط ثابت مشترک برای همه نگاشت‌های $f, g : X \rightarrow X$ روی هر فضای توپولوژیک X معنی دارد. هرچند به‌طور کلی انتظار نمی‌رود که اولی، حتی با وجود شرایط مکمل قوی، دومی را نتیجه دهد.

آنچه درباره نگاشت‌های بازه واحد می‌دانیم، به‌طور قطع به هر کمان، یعنی فضای X که همان‌ریختی $h : I \rightarrow X$ برای آن وجود دارد، قابل تعمیم است. زیرا در این حالت، نگاشت $f : X \rightarrow X$ را می‌توان به نگاشت $h^{-1}fh : I \rightarrow I$ تبدیل کرد. سؤال وقتی جالب‌تر می‌شود که X ، یک پیوستار شبه‌کمانی باشد، یعنی فضای فشرده و همبندی که به معنای مناسبی حدی از کمان‌ها است. یان بورونسکی اخیراً در [۴] نشان داد که حتی همان‌ریختی‌های جابه‌جایی، نه فقط نگاشت، روی یک پیوستار شبه‌کمانی وجود دارند که هیچ نقطه ثابت مشترکی ندارند. در جهت متفاوتی با تعمیم، فرض کنید Y یک سه‌تایی^۱ ساده باشد، یعنی سه کمان که فقط در یک نقطه انتهایی مشترک با هم تلاقی می‌کنند، به‌طوری که شکل حرف «Y» باشد. اگر $f, g : Y \rightarrow Y$ نگاشت‌های جابه‌جایی باشند، آیا حداقل یک نقطه انطباق $y_* \in Y$ (یعنی $f(y_*) = g(y_*)$) دارند، حتی اگر این نقطه ثابت نباشد؟ در سال ۲۰۰۹، اریک مک‌داول بررسی مفصلی از نقاط انطباق منتشر کرد [۲۶]. اما هنوز سؤال مربوط به سه‌تایی ساده بی‌پاسخ مانده است.

اگرچه نگاشت‌های جابه‌جایی روی یک بازه ممکن است نقطه ثابت مشترکی نداشته باشند، دیدیم که مفروضات اضافی، آن را تضمین می‌کنند؛ به‌ویژه اگر یکی از نگاشت‌ها باز باشد [۱۴، ۲۱]. فرض کنید f و g نگاشت‌های جابه‌جایی باز و پوشا روی فضایی باشند که بسیاری از خواص توپولوژیکی بازه را دارا است. آیا این نگاشت‌ها باید یک نقطه ثابت مشترک داشته باشند؟ در سال ۱۹۷۵، ویلیام گری و کارول اسمیت این سؤال را در [۱۵] مطرح کردند و ویژگی‌هایی را پیشنهاد کردند که فضا باید با بازه در آن‌ها اشتراک داشته باشد. اما به نظر می‌رسد تا به حال در پاسخ سؤال آن‌ها هیچ پیشرفتی حاصل نشده است.

یک روش طبیعی تعمیم، به بُعد مربوط می‌شود. بازه واحد یک‌بعدی است؛ چه اتفاقی می‌افتد اگر نگاشت‌های جابه‌جایی را در بُعد بعدی در نظر بگیریم، یعنی نگاشت‌های روی مربع واحد I^2 ؟ مارتین گرینچ [۱۶] به مطالعه آنچه که نگاشت‌های مثلثی می‌نامید پرداخت؛ یعنی نگاشت‌های $F : I^2 \rightarrow I^2$ به شکل $F(x, y) = (f_1(x), f_2(x, y))$ که f_1 و f_2 پیوسته هستند. او

شرایطی به دست آورد که تحت آن‌ها نگاشت‌های مثلثی جابه‌جایی روی مربع واحد دارای نقاط ثابت مشترک هستند؛ به‌ویژه او و لوبومیر اسنوها [۱۷] نشان دادند که قضیهٔ جونگک نگاشتی که هیچ نقطهٔ تناوبی به‌جز نقاط ثابت ندارد با هر نگاشتی که با آن جابه‌جایی باشد یک نقطهٔ ثابت مشترک دارد، به نگاشت‌های مثلثی نیز تعمیم می‌یابد. آنتونیو لینرو در [۲۴] رده‌ای از نگاشت‌های F و G را روی مربع در نظر گرفت که به‌صورت $F(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$ و $G(x, y) = (g_1(x), g_2(y))$ هستند و f_i و g_i پیوسته‌اند. او آن‌ها را به افتخار اقتصاددانی که در قرن نوزدهم این نگاشت‌ها را معرفی کرد، نگاشت‌های کورنو^۱ نامید. این نگاشت‌ها یک ردهٔ مهم از توابع در اقتصاد ریاضی هستند. او توانست نتایج گرینچ را تحت فرض‌های مناسب به نگاشت‌های کورنو تعمیم دهد.

روش کاملاً متفاوت دیگری، که می‌توان نتایج را به بُعد دو تعمیم داد، بهره‌گیری از این امر است که همان‌گونه که نقاط خط را می‌توان به‌عنوان اعداد حقیقی در نظر گرفت، نقاط صفحه نیز نمایانگر اعداد مختلط هستند. بنابراین یک نگاشت تعریف‌شده روی صفحه می‌تواند به‌عنوان یک تابع مختلط در نظر گرفته شود. دن یوستیس در [۱۳] ثابت کرد که نگاشت‌های جابه‌جایی روی قرص دایره‌ای یک نقطهٔ ثابت مشترک هستند به شرط آنکه تمام‌ریخت^۲ باشند، یعنی درون قرص مشتق‌پذیر مختلط باشند. قضیهٔ یوستیس را روبرتو توراسو در [۲۹] به نگاشت‌های تمام‌ریخت روی همهٔ حاصل‌ضرب‌های دکارتی قرص‌ها تعمیم داد.

تعمیم دیگری نیز وجود دارد که نگاشت‌های بازهٔ واحد است، این بار دربارهٔ نقاط تناوبی به‌عنوان نتیجه، نه به‌عنوان فرض. آیا مجموعه‌های تمام نقاط تناوبی نگاشت‌های جابه‌جایی باید اشتراک داشته باشند؟ همان‌طور که در بالا ذکر شد، شوارتس ثابت کرد که پاسخ «بله» است به شرط اینکه یکی از نگاشت‌ها مشتق‌پذیر باشد، اما علی‌اصغر علیخانی‌کوپایی حدس زد که اگر فقط پیوستگی فرض شود، پاسخ «خیر» است [۱]. جوزه کانوس و آنتونیو لینرو در [۸] ثابت کردند که پاسخ «بله» است به‌شرطی که مجموعهٔ نقاط تناوبی یکی از نگاشت‌ها زیرمجموعهٔ بسته‌ای از I باشد. در واقع، در این صورت یک نقطهٔ ثابت از آن نگاشت یک نقطهٔ تناوبی برای نگاشت دیگر است. با این حال، به نظر می‌رسد که حدس علیخانی‌کوپایی همچنان بی‌پاسخ مانده است.

یادآوری می‌کنیم که جایگشت‌های باکستر در نتیجهٔ بررسی پرسش ما به‌وجود آمدند و کلید پاسخ منفی آن بودند. از میان $N!$ جایگشت اعداد ۱ تا N ، چندتای آن‌ها جایگشت باکستر هستند؟ در آنچه که در [۱۹] منتقد آن را «گوهری در شمارش» توصیف کرد، فن چونگ، رونالد گراهام، ورنر

هیگت، و مارک کلایمن در [۱۰] فرمول مورد نظر را بر حسب ضرایب دوجمله‌ای به دست آورده‌اند. این به‌هیچ وجه پایان علاقه به این مسائل ترکیباتی نبود، همان‌طور که آثار گسترده‌آن نشان می‌دهد، ارتباط نزدیکی با بسیاری از موضوعات دیگر در این حوزه از پژوهش‌های ریاضی دارند. برای مثال، در [۱۸]، اولیویه گیر و سوانته لینوسون جایگشت‌های باکستر را به اعداد کاتالان که در قرن نوزدهم تعریف شده بودند مرتبط کردند و در سال ۲۰۱۵، بنجامین کافری و همکارانش [۷] «جایگشت‌های پلنگ برفی» را به‌عنوان نوع مفیدی از جایگشت‌های باکستر تعریف کردند.

فرض این بود که خوانندگان مجله ماهنامه ریاضی علاقه بیشتری برای بحث در مورد تحقیقات ریاضی نسبت به آشنای فرضی من در آن مهمانی دارند و اگر هنوز در حال خواندن هستید این را نشان داده‌اید. امیدوارم تا اینجا شما را متقاعد کرده باشم که «یک سؤال خوب از بین نمی‌رود».

مراجع

- [1] Alikhani-Koopaei, A., On common fixed points, periodic points and recurrent points of continuous functions, *Int. J. Math.*, **2003** (2003), 2465–2473.
- [2] Baxter, G., On fixed points of the composite of commuting functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 851–855.
- [3] Block, H., Thielman, H., Commuting polynomials, *Quart. J. Math.*, **2** (1951), 241–243.
- [4] Boronski, J., A note on fixed points of abelian actions in dimension one, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **147** (2019), 1653–1655.
- [5] Boyce, W., Commuting functions with no common fixed points, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **137** (1969), 77–92.
- [6] Boyce, W., Γ -compact maps on an interval and fixed points, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **160** (1971), 87–102.
- [7] Caffrey, B., Egge, E., Michel, G., Rubin, K., Ver Steegh, J., Domino tilings of Aztec diamonds, Baxter permutations, and snow leopard permutations, *Involve* **8** (2015), 833–858.
- [8] Cánovas, J., Linero, A., On the dynamics of compositions of commuting interval maps, *J. Math. Anal. Appl.*, **305** (2005), 296–303.
- [9] Chu, S., Moyer, R., On continuous functions, commuting functions and fixed points, *Fund. Math.*, **59** (1966), 91–95.
- [10] Chung, F., Graham, R., Higgett, V., Kleiman, M., The number of Baxter permutations, *J. Combin. Theory*, **24** (1978), 382–394.
- [11] Cohen, H. (1964) On fixed points of commuting functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 293–296.
- [12] DeMarr, R., A common fixed point theorem for commuting mappings, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 535–537.
- [13] Eustice, D., Holomorphic idempotents and common fixed points on the 2-disk, *Mich. Math. J.*, **19** (1972), 347–352.
- [14] Folkman, J., On functions that commute with full functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 383–386.
- [15] Gray, W., Smith, C., Common fixed points of commuting mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **53** (1975), 223–226.

- [16] Grinc, H., On common fixed points of commuting triangular maps, *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, **47** (1999), 61–67.
- [17] Grinc, H., Snoha, L., Jungck theorem for triangular maps and related results, *Appl. Gen. Topol.*, **1** (2000), 83–92.
- [18] Guibert, O., Linusson, S., Doubly alternating Baxter permutations are Catalan. *Discrete Math.* **217** (2000): 157–166.
- [19] Harper, L., Review of [10], *Math. Rev.*, MR0491652 (82b:05011).
- [20] Huneke, J., On common fixed points of commuting continuous functions on an interval, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **139** (1969), 371–381.
- [21] Joichi, J., On functions that commute with full functions and common fixed points, *Nieuw. Arch. Wiss.*, **14** (1966), 247–251.
- [22] Jungck, G., Commuting mappings and common fixed points, *Amer. Math. Monthly*, **73** (1966), 735–738. doi.org/10.2307/2313982
- [23] Jungck, G., Common fixed points for compatible maps on the unit interval, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115** (1992), 495–499.
- [24] Linero, A., Common fixed points for commuting Cournot maps, *Real Anal. Exchange*, **28** (2002/3), 121–143.
- [25] Maxfield, J., Moutant, W., Common fixed points of commuting continuous functions on the unit interval, *Indag. Math.*, **27**(1965), 668–670.
- [26] McDowell, E. (2009) Coincidence values of commuting functions, *Topology Proc.*, **34** (2009), 365–384.
- [27] Ritt, J. F., Permutable rational functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **25** (1923), 399–448.
- [28] Schwartz, A., Common periodic points of commuting functions, *Michigan Math. J.*, **12** (1965), 353–355.
- [29] Tauraso, R., Common fixed points of commuting holomorphic maps of the polydisc which are expanding on the torus, *Adv. Math.*, **138** (1998), 92–104.

رسول کاظمی: دانشگاه کاشان، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
 رایانامه: r.kazemi@kashanu.ac.ir

A Good Question Won't Go Away: An Example of Mathematical Research^{*}

R. F. Brown

Translated by R. Kazemi¹

Faculty of Mathematical Sciences, University of Kashan, Iran

Abstract. The story of the question “must commuting maps of the unit interval have a common fixed point” is used to illustrate strategies that advance mathematical research.

Keywords: commuting maps, continuity, fixed point

Article history: Received 4 September 2024; Accepted 26 October 2024

Article type: translation

^{*} Brown, R. F., A good question won't go away: An example of mathematical research, *Amer. Math. Monthly*, **128** (2021), no. 1, 62-68.

¹ r.kazemi@kashanu.ac.ir