فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۹ (پاییز ۱۳۸۶) صص. ۲۳ تا ۳۲

بیان‌هایی از استقراء

محمد مشکوری

چکیده

خوش‌ترتیب بودن[1] ω مجموعهٔ اعداد طبیعی، اجراء استقراء را روی آن امکان‌پذیر می‌کند، در این نوشته تلاش شده است با بیان‌های مختلف استقراء و وابستگی آن به ترتیب[2] روی این مجموعه و کاربردهای جالب استقراء روی مجموعه اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، آشنا شویم.

مقدمه

بشر ریاضیات را با شمارش و اندازه‌گیری (طول، مساحت و $\cdots$) آغاز کرد. این دو ابزار محاسباتی باتوجه به مشخصهٔ آن‌ها، شمارش[3] روی متغیرهای گسسته[4] یا به عبارتی در محیطی گسسته قابل اجراست و اندازه‌گیری[5] روی متغیرهای پیوسته[6] یا به عبارتی در محیطی پیوسته مفهوم پیدا می‌کند.

با نگاهی به دستاوردهای بشر در علوم ریاضی که قدمت آن به اندازهٔ حیات اوست، می‌بینیم که این دستاوردها یا در محیطی گسسته یا در محیطی پیوسته بیان شده‌اند و در خیلی از موارد شاهد هستیم که پدیده‌هایی که در یک محیط گسسسته بررسی شده‌اند به محیط‌های پیوسته تعمیم داده شده‌اند و یا برعکس. با اشاره به موردی که اخیراً [۳] مورد توجه منطق‌دانان و متخصصین علوم کامپیوتر و ریاضی واقع شده، به بحث اصلی این نوشته که مرتبط با این موضوع است می‌پردازیم.

نظریهٔ محاسبه‌پذیری[7] و نظریهٔ پیچیدگی[8] دو شاخهٔ اصلی در منطق و علوم کامپیوتراند. نظریهٔ محاسبه‌پذیری، محدودیت و قابلیت‌های کامپیوتر را در انجام محاسبه بررسی، و نظریهٔ پیچیدگی چهارچوبی برای هزینه‌های محاسبه اعم از زمان و فضا را تعیین می‌کند.

الگوریتم عملیاتی این دو مقوله در محیط‌های گسسته (روی متغیرهای گسسته) نظیر مجموعه اعداد طبیعی، صحیح و $\cdots$ قابل پیاده شدن است و توانایی اجرائی در محیط‌های پیوسته (روی

1) Well-Order 2) Order 3) Counting 4) Discrete Variables 5) Measuring
6) Continous Variables 7) Computablity 8) Complexity

متغیرهای پیوسته) نظیر مجموعه اعداد حقیقی را ندارد. در صورتی که بسیاری از مسائل محاسباتی در علوم پایه، مهندسی و $\cdots$ در محیط‌های پیوسته مطرح می‌شوند. هدف اصلی محافل علمی مربوطه انتقال رهیافت سنتی محاسبه‌پذیری و پیچیدگی از محیط‌های گسسته به الگوریتمی عملیاتی روی محیط‌های پیوسته می‌باشد.[۳]

با توجه به این که مکانیزم محاسبه در علوم کامپیوتر متکی بر استقراء[1] و تابع بازگشتی[2] است، اولین قدم، انتقال استقراء و تابع بازگشتی به محیطی پیوسته نظیر $\mathbb{R}$ خواهد بود. هدف از این نوشته، بررسی مفهوم استقراء در محیط‌های مختلف، به خصوص در محیط پیوسته $\mathbb{R}$ و کاربرد آن می‌باشد [۴] و [۵].

می‌دانیم که استقراء روشی منطقی برای اثبات یک قانون از جزء به کل است. مکانیزم آن به این صورت است که ابتدا آن را برای مورد آغازی a اثبات می‌کنند و هرگاه بتوان ثابت کرد با فرض برقرار بودن این قانون برای تمام موارد ماقبل x، برای x نیز درست است، می‌توان نتیجه گرفت قانون مذکور برای تمام موارد از a به بعد درست است. مکانیزم اجرائی استقراء و کاربرد آن را، بسته به مجموعه و ساختار ترتیبی[3] آن (محیط محاسباتی)، می‌توان به صورت‌های مختلف بیان کرد. در اینجا با موارد و کاربردهایی از آنها آشنا می‌شویم.

استقراء روی یک مجموعهٔ جزئاً مرتب[4]:

فرض کنید رابطهٔ $\leq_R$ روی مجموعهٔ ناتهی X یک رابطهٔ ترتیب جزئی بوده، به طوری که هر زیرمجموعهٔ ناتهی D از X عضو کمین[5] داشته باشد، یعنی

$$\exists a \in D, \ni \forall x \in D, \quad x \leq a \rightarrow x = a.$$

در این صورت اگر $p(x)$ یک خاصیت ادعائی برای عناصر مجموعه X فرض شود و زیرمجموعهٔ $S = \{x \in X : \quad p(x)\} \subseteq X$

الف: شامل تمام عناصر کمین X باشد و

ب: $\forall t \in X, \quad I_t = \{x \in X : \quad x < t\} \subseteq S \longrightarrow t \in S$

1) Induction

2) Recursion function $\forall X \neq \emptyset, \ \ni a \in X, \ f : X \longrightarrow X$ یک تابع باشد $\longrightarrow \exists C : w \longrightarrow X, \ni$ $C(\circ) = a, \ \forall n \in w, \ C(n^+) = C(n + ۱) = f(c(n))$

3) Ordered Structure

4) $(\leq_R) R : X \rightarrow X$

رابطهٔ R را یک رابطهٔ ترتیب جزئی روی $X \neq \emptyset$ گویند، هرگاه دارای خواص زیر باشد،

$\forall x \in X, \quad (x, x) \in R$(انعکاسی)$, \forall x, y \in X, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \longrightarrow x = y$(پادمتقارن)

$\forall x, y, z \in X, \quad (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \longrightarrow (x, z) \in R$ترایایی

5) minimal

آنگاه $X = S$، یعنی خاصیت $p(x)$ برای تمام عناصر X درست است.
گیریم $X - S \neq \emptyset$ پس بنا به فرض $X - S$ یک عنصر کمین $c \in X - S$ دارد، چون $c \notin S$ پس بنا بر (الف)، c نمی‌تواند عنصر کمین X باشد، بنابراین $\exists z \in X \quad \ni z < c.$
حال مجموعهٔ $I_c = \{x \in X : \quad x < c\} \subseteq X$ را در نظر بگیرید، $I_c \neq \emptyset$ زیرا $z \in I_c$. ادعا می‌کنیم $I_c \subseteq S$، گیریم $t \in I_c$ و $t \notin S$، پس $t \in X - S$، از طرفی $t \in I_c$، یعنی $t < c$ و این متناقض با عنصر کمین بودن c در $X - S$ است، پس

$$I_c = \{x \in X : \quad x < c\} \subseteq S$$

و بنابر (ب)، نتیجه می‌شود $c \in S$ که متناقض با فرض $c \in X - S$ است، بنابراین $X - S = \emptyset$، یعنی $X = S$.

یکی از کاربردهای جالب توجه اصل استقراء روی مجموعهٔ جزئاً مرتب که هر زیرمجموعهٔ ناتهی آن عنصر کمین دارد، در نظریهٔ مقدماتی اعداد و در اثبات قضیهٔ اساسی حساب رخ می‌دهد. برای بیان و اثبات قضیه رابطه $|$ روی $\mathbb{N}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \;\; a|b \longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \quad \ni b = ka$$

به سادگی می‌توان نشان داد $|$ یک رابطه ترتیب جزئی روی $\mathbb{N}$ است. بدیهی است هر زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbb{N}$ تحت این ترتیب جزئی، عنصر کمین دارد. گیریم $p(x)$ خاصیت تجزیه‌پذیری $x \in \mathbb{N}$ به حاصلضربی از اعداد اول باشد، یعنی

$$S = \{x \in X : \;\; p(x)\} = \{x \in \mathbb{N} : \;\; x = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}, \;\;\; p_j \text{ عدد اول }, \;\; r_j \in \mathbb{N} \quad j = 1, \cdots, k\}.$$

بدیهی است مجموعه اعداد اول، مجموعه تمام عناصر کمین $(\mathbb{N}, |)$ است و S شامل تمام اعداد اول می‌باشد. پس S شرط (الف) را دارد، حال گیریم $n \in \mathbb{N}$ و $I_n = \{x \in \mathbb{N} : \;\; x|n, x \neq n\} \subseteq S$ *
اگر n اول باشد در این صورت $n \in S$ و حکم برقرار است، پس گیریم n اول نیست، بنابراین

$$\exists m, l \in \mathbb{N}, \;\; \ni \;\; n = ml$$

در نتیجه $m, l \in I_n$، بنابراین

$$m = p_1^{t_1} \cdots p_k^{t_k}, \qquad n = q_1^{r_1} \cdots q_l^{r_l}$$

به طوری که $p_i, \;\; i = 1, \cdots, k$ و $q_j, \;\; j = 1, \cdots, l$ اعداد اول‌اند و $r_i \in \mathbb{N}$ و $t_j \in \mathbb{N}$. در نتیجه، $n = ml = (p_1^{t_1} \cdots p_k^{t_k})(q_1^{r_1} \cdots q_l^{r_l}) \in S$. بنابراین $S = \mathbb{N}$. یعنی هر عدد طبیعی به حاصلضرب عامل‌های اول در $\mathbb{N}$ تجزیه می‌شود.

* توجه: $R = |$ رابطهٔ ترتیب جزئی روی $\mathbb{N}$ است و $x|n \equiv xRn \equiv (x, y) \in R \equiv x \leq_R n$

استقراء روی یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب [۱]

گیریم $(X, \leq)$ یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب و $p(x)$ یک خاصیت ادعائی روی X، و زیرمجموعهٔ $S = \{x \in X : \; p(x)\} \subseteq X$ دارای خواص زیر باشد.

الف: a کوچک‌ترین عنصر X) $a \in S$)

ب: $\forall t \in X, \;\; I_t = \{x \in X : \;\; x < t\} \subseteq S \longrightarrow t \in S$

در این صورت $X = S$، یعنی تمام عناصر X دارای خاصیت $p(x)$ هستند.

خواننده با مکانیزم استقراء روی چنین محیطی کاملاً آشناست. از موارد مهم آن همان استقراء قوی [۲] روی مجموعه خوش‌ترتیب اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ با رابطه ترتیب جزئی کوچکتر یا مساوی معمولی است. $1 \in \mathbb{N}$ کوچک‌ترین عنصر $\mathbb{N}$ و اگر $p(n)$ یک خاصیت برای عناصر $\mathbb{N}$ و $S = \{n \in \mathbb{N} : \;\; p(n)\}$ به طوری که

الف: $1 \in S$

ب: $\forall n \in \mathbb{N}, \;\; I_n = \{x \in \mathbb{N} : \;\; x < n\} \subseteq S \longrightarrow n \in S$

آنگاه $S = \mathbb{N}$.

استقراء روی یک مجموعهٔ کلاً مرتب [۳]

گیریم $(X, \leq)$ یک مجموعه کلاً مرتب باشد، به طوری که هر زیرمجموعهٔ غیرتهی و از پایین کراندار آن دارای اینفیمم [۴] است، اگر $p(x)$ یک خاصیت ادعائی روی عناصر X و زیرمجموعهٔ $S = \{x \in X : \;\; p(x)\} \subseteq X$ دارای شرایط زیر باشد،

الف: $\exists a \in X, \; \ni \; I_a = \{x \in X : \;\; x < a\} \subseteq S$

ب: $\forall y \in X, \;\; I_y = \{x \in X : \;\; x < y\} \subseteq S \longrightarrow \exists z \in X, \; \ni \; y < z,$

$I_z = \{t \in X : t < z\} \subseteq S.$

آنگاه $X = S$، یعنی تمام عناصر X دارای خاصیت $p(x)$ هستند.

گیریم $X \neq S$، پس $S' = X - S \neq \emptyset$ و برای هر x در S'، $a \leq x$ زیرا $I_a \subseteq S$، پس S' یک زیرمجموعه غیرتهی و از پایین کراندار X است. بنابراین دارای بزرگترین کران پایین در X است،

---

۱) Well-ordered، مجموعهٔ جزئاً مرتب $(X, \leq)$ را یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب گویند، هرگاه هر زیرمجموعهٔ غیرتهی آن نظیر، $\emptyset \neq A \subseteq X$ دارای کوچکترین عنصر باشد یعنی $\exists a \in A, \ni \forall x \in A, \; a \leq x$

2) Transfinite Induction

۳) Totally ordered مجموعه جزئاً مرتب $(X, \leq)$ را یک مجموعه کلاً مرتب گویند، هرگاه هر دو عنصر مختلف آن مقایسه‌پذیر باشند، یعنی، $\forall x, y \in X, \; x \neq y \longrightarrow x < y \; or \; y < x$

۴) $\alpha \in X$ را بزرگ‌ترین کران پایین A در X گویند، هرگاه α یک کران پایین A در X بوده و از هر کران پایین A در X بزرگتر یا مساوی باشد.

گیریم $c = infS'$، دو حالت وجود دارد $c \in S'$ یا $c \notin S'$. اگر $c \in S'$، آنگاه

$$\forall x \in S', c \leq x$$

پس برای هر $t \in X$ به طوری که $t < c$ بایستی $t \in S$، بنابراین $I_c = \{x \in X : x < c\} \subseteq S$ و طبق (ب) داریم $\exists z \in X, \ni\ c < z,\ \ I_z = \{t \in X :\ \ t < z\} \subseteq S$ و این نتیجه می‌دهد $c \in S$ که متناقض با فرض $c \in S'$ است. گیریم $c \notin S' = X - S$ پس $c \in S$ و برای هر x در X، اگر $x < c$، آنگاه $x \in S$ زیرا اگر $x \notin S$، آنگاه $x \in S'$ و متناقض با $c = infS'$ است، بنابراین $I_c = \{x \in X :\ \ x < c\} \subseteq S$ و طبق (ب)

$$\exists z \in X,\ \ni\ c < z,\ \ I_z = \{t \in X :\ \ t < z\} \subseteq S$$

بنابراین برای هر x در S'، $x \leq z$، یعنی $z \in X$ یک کران پایین $\emptyset \neq S' \subseteq X$ است و چون $c = infS'$ بایستی $z \leq c$ و این متناقض با فرض $c < z$ است. بنابراین $X = S$.
از کاربردهای جالب استقراء روی مجموعه‌های کلاً مرتب که هر زیرمجموعهٔ ناتهی و از پایین کراندار آن دارای اینفیمم است، می‌تواند استقراء روی مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با رابطهٔ کوچک‌تر یا مساوی معمولی $\leq$ باشد، که بیان آن چنین خواهد بود.

می‌دانیم $\mathbb{R}$ با ترتیب کوچک‌تر یا مساوی معمولی $\leq$ یک مجموعهٔ کلاً مرتب است که هر زیرمجموعهٔ ناتهی و از پایین کراندار آن دارای اینفیمم در $\mathbb{R}$ است. گیریم $p(x)$ یک خاصیت ادعائی برای $\mathbb{R}$ باشد. اگر $S = \{x \in \mathbb{R} :\ \ p(x)\} \subseteq \mathbb{R}$ دارای خواص زیر باشد،

الف: $\exists a \in \mathbb{R},\ \ni\ I_a = \{x \in \mathbb{R} :\ \ x < a\} = (-\infty, a) \subseteq S$

ب: $\forall y \in \mathbb{R},\ \ I_y = \{x \in \mathbb{R} :\ \ x < y\} = (-\infty, y) \subseteq S \longrightarrow$
$\exists z \in \mathbb{R},\ \ni\ y < z,\ \ I_z = \{x \in \mathbb{R} :\ \ x < z\} = (-\infty, z) \subseteq S.$

آنگاه $S = \mathbb{R}$. یعنی $p(x)$ برای تمام اعداد حقیقی درست است.

از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که تحت شرایطی، مفهوم استقراء از محیط گسسته $\mathbb{N}$ به محیط پیوسته $\mathbb{R}$ منتقل می‌شود.

اکنون با چند کاربرد اصل استقراء در محیط پیوسته $\mathbb{R}$ در آنالیز مقدماتی آشنا می‌شویم.

۱ ـ قضیه بولتسانو[1].

اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b) < 0$، آنگاه

$$\exists c \in (a, b)\ \ni\ \ f(c) = 0.$$

1) Bolzano 's Theorem

اثبات. گیریم $f(a) < \circ$ و $f(b) > \circ$. تابع $F:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F(x) = \begin{cases} f(a) & ,\ x < a \\ f(x) & ,\ a \leq x \leq b \\ f(b) & ,\ x > b \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. بدیهی است F تابعی پیوسته است. گیریم برای هر x در (a,b)، $f(x) \neq \circ$، حال مجموعه $S = \{x \in \mathbb{R}:\ \ \forall t \in I_x = (-\infty, x),\ F(t) < \circ\}$ را در نظر بگیرید با توجه به فرض و تعریف داریم،

الف: $I_a = (-\infty, a) \subseteq S$.

گیریم $y \in \mathbb{R}$ و $I_y = (-\infty, y) \subseteq S$. اگر $F(y) > \circ$، چون F در y پیوسته است،

$$\exists \delta > \circ,\ \ni \forall t \in (y-\delta, y+\delta),\ \ F(t) > \circ$$

و امّا $(y-\delta, y) \subseteq I_y$ و این با فرض $I_y \subseteq S$ متناقض است. پس $F(y) < \circ$. بنابراین:

$$\exists \delta > \circ,\ \ni \forall t \in (y-\delta, y+\delta),\ \ F(y) < \circ$$

حال قرار دهید $z = y + \delta$، بنابراین

ب: $\forall y \in \mathbb{R},\ \ I_y \subseteq S \longrightarrow \exists z \in \mathbb{R},\ \ni y < z,\ I_z \subseteq S$

بنابراین $S = \mathbb{R}$، یعنی $\forall x \in \mathbb{R},\ \ F(x) < \circ$ و این متناقض با فرض $F(b) > \circ$ است، در نتیجه $\exists c \in (a,b)\ \ \ni\ \ f(c) = \circ$.

۲ ـ قضیهٔ هاینه ـ بورِل[1]:

برای هر a و b در $\mathbb{R}$، فاصله بسته $[a,b]$ فشرده[2] است، یعنی برای هر پوشش باز $[a,b]$ نظیر O، وجود دارد تعداد متناهی مجموعهٔ باز در O نظیر $o_\text{۱}, o_\text{۲}, \cdots, o_m$ به‌طوری که $[a,b] \subseteq \bigcup_{i=\text{۱}}^{m} o_i$.

اثبات: گیریم O یک پوشش باز $[a,b]$ و

$S = \{t \in \mathbb{R}:\ \ (-\infty, t) \cap [a,b]$ دارای یک زیرپوشش متناهی در O است $\}$

بدیهی است برای هر x در $\mathbb{R}$ اگر $x < a$، آنگاه $(-\infty, x) \cap [a,b] = \emptyset$ پس،

الف: $\exists a \in \mathbb{R},\ \ni\ \ (-\infty, a) \subseteq S$

گیریم $y \in \mathbb{R}$ و $(-\infty, y) \subseteq S$، اگر $y > b$ که حکم برقرار است، پس فرض کنید $y \in [a,b]$. چون $[a,b] \subseteq \cup O$ پس $o \in O$ به طوری که $y \in o$. چون o باز است، پس بازهٔ باز (α, β) وجود دارد که $y \in (\alpha, \beta) \subset o$. گیریم $z = y + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\beta - y) \in (\alpha, \beta)$ پس وجود دارد $z \in \mathbb{R}$ به‌طوری که $y < z$ و

1) Heine–Borel 2) compact

$(-\infty,z)=(-\infty,y)\cup[y,z)$ و امّا $(-\infty,y)\subseteq S$، پس

$$\exists o_1,o_2,\cdots,o_m\in O,\ \ni\ (-\infty,y)\cap[a,b]\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}o_i$$

از طرفی $[y,z]\subseteq(\alpha,\beta)\subset o\in O$، بنابراین

$$\begin{aligned}(-\infty,z)\cap[a,b] &= \big((-\infty,y)\cup[y,z)\big)\cap[a,b]\\ &= \big((-\infty,y)\cap[a,b]\big)\cup\big([y,z)\cap[a,b]\big)\\ &\subseteq \big(\bigcup_{i=1}^{m}o_i\big)\cup o\end{aligned}$$

و این نتیجه می‌دهد،

ب: $\forall y\in\mathbb{R},\ \ (-\infty,y)\subseteq S\longrightarrow\exists z\in\mathbb{R},\ \ni\ y<z,\ \ (-\infty,z)\subseteq S.$

پس $S=\mathbb{R}$.

۳ ـ قضیه اشتراک کانتور:

هرگاه $I_n=[a_n,b_n]$ دنباله‌ای از بازه‌های بسته در $\mathbb{R}$ باشد و برای هر n، $I_{n+1}\subseteq I_n$، آنگاه $\cap_{n\in\mathbb{N}}I_n\neq\emptyset$.

اثبات: گیریم $\cap_{n\in\mathbb{N}}I_n=\emptyset$، مجموعه

$$S=\{x\in\mathbb{R}:\ \ (-\infty,x)\cap\{b_n\}=\emptyset,\ \ \forall n\in\mathbb{N}\}$$

را در نظر بگیرید. بدیهی است برای هر x در $\mathbb{R}$ اگر $x<a_1$، آنگاه $(-\infty,x)\cap\{b_n\}=\emptyset$. پس
الف: $\exists a_1\in\mathbb{R},\ \ni\ (-\infty,a_1)\subseteq S.$

گیریم $y\in\mathbb{R}$ و $(-\infty,y)\subseteq S$، بدیهی است وجود دارد $n\in\mathbb{N}$ به طوری که $(y,+\infty)\cap\{a_n\}\neq\emptyset$ زیرا اگر برای هر n در $\mathbb{N}$، $(y,+\infty)\cap\{a_n\}=\emptyset$، آنگاه

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n\leq y\leq b_n$$

بنابراین $\cap_{n\in\mathbb{N}}I_n\neq\emptyset$ که خلاف فرض است. اگر $a_m\in(y,+\infty)$، آنگاه $z=a_m>y$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ (-\infty,z)\cap\{b_n\}=\emptyset$$

بنابراین

ب: $\forall y\in\mathbb{R},\ \ni\ (-\infty,y)\subseteq S\longrightarrow\exists z\in\mathbb{R},\ \ni\ y<z,\ (-\infty,z)\subseteq S$

در نتیجه بنابر استقراء، $S=\mathbb{R}$، یعنی

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}, (-\infty,x)\cap\{b_n\}=\emptyset$$

و این غیرممکن است. پس $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n\neq\emptyset$.

۴ ـ قضیهٔ (بولتسانو ـ ویراشتراوس)[1]

هر زیر مجموعهٔ نامتناهی و کراندار $\mathbb{R}$ حداقل یک نقطهٔ حدی[2] (نقطه انباشتگی) دارد.

اثبات. گیریم زیرمجموعهٔ نامتناهی و کراندار X از $\mathbb{R}$ نقطه حدّی نداشته باشد. از این که X کراندار است پس وجود دارد $a,b\in\mathbb{R}$، به طوری که $X\subseteq[a,b]$. حال مجموعهٔ

$$S=\{x\in\mathbb{R}:\quad \text{متناهی است } (-\infty,x)\cap X\}$$

را در نظر بگیرید. بدیهی است برای هر x اگر $x<a$، آنگاه $(-\infty,x)\cap X=\emptyset$. پس

الف: $\exists a\in\mathbb{R},\ \ni\ (-\infty,a)\subseteq S.$

گیریم $y\in\mathbb{R}$ و $(-\infty,y)\subseteq S$ پس مجموعه $(-\infty,y)\cap X$ متناهی است. اگر $(-\infty,y)\cap X=\emptyset$، آنگاه چون y نقطه حدی X نیست پس وجود دارد $\delta>0$، به طوری که $(y-\delta,y+\delta)\cap X=\emptyset$ و این نتیجه می‌دهد،

$$\exists z=y+\delta>y,\ \ni\ (-\infty,z)\cap X=\emptyset.$$

پس گیریم $(-\infty,y)\cap X=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ و $\delta=\frac{1}{2}min\{|y-c_i|:\quad i=1,2,\cdots,n\}$، بنابراین $(y-\delta,y+\delta)\cap X=\emptyset$. در نتیجه وجود دارد، $z=y+\delta>y$ به طوری که

$$\begin{aligned}(-\infty,z)\cap X &= \big((-\infty,y)\cup[y,z)\big)\cap X\\ &= \big((-\infty,y)\cap X\big)\cup\big([y,z)\cap X\big)\\ &= \{c_1,c_2,\cdots,c_n\}\cup\emptyset\\ &= \{c_1,c_2,\cdots,c_n\}\end{aligned}$$

پس $(-\infty,z)\subseteq S$، بنابراین

ب: $\forall y\in\mathbb{R},\ \ni\ (-\infty,y)\subseteq S\longrightarrow\exists z\in\mathbb{R},\ \ni\ y<z,\ (-\infty,z)\subseteq S$

---

1)Bolzano - Weierstrass 2) Limit Point (Accumulation Point)

گیریم $A\subseteq\mathbb{R}$، $a\in\mathbb{R}$ را نقطه انباشتگی A در $\mathbb{R}$ گویند، هرگاه

$\forall r>0,\ [(a-r,a)\cup(a,a+r)]\cap A\neq\emptyset$

در نتیجه $S = \mathbb{R}$، یعنی

$$\forall x \in \mathbb{R}، \quad (-\infty, x) \cap X \quad \text{متناهی است}$$

و این غیرممکن است زیرا $(-\infty, b+1) \cap X = X$ نامتناهی است پس X باید نقطه حدی داشته باشد.

۶ ـ قضیهٔ همگرایی یکنوا:

هر دنبالهٔ صعودی و از بالا کراندار همگرا است.

اثبات. گیریم دنبالهٔ صعودی و از بالا کراندار $\{a_n\}$ واگرا باشد. حال مجموعهٔ

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ \exists n \in \mathbb{N}, \ni \ (x, +\infty) \cap \{a_n\} \neq \emptyset\}$$

را در نظر بگیرید. بدیهی است برای هر x در $\mathbb{R}$ اگر $x < a_1$، آنگاه $(x, +\infty) \cap \{a_n\} \neq \emptyset$ زیرا $\{a_n\}$ صعودی است. پس $\exists a_1 \in \mathbb{R}, \ni (-\infty, a_1) \subseteq S$. گیریم $y \in \mathbb{R}$ و برای nی در $\mathbb{N}$ $(y, +\infty) \cap \{a_n\} \neq \emptyset$. پس وجود دارد $m \in \mathbb{N}$ و $a_m > y$، گیریم $z = y + \frac{1}{2}(a_{m+1} - a_m)$، بدیهی است $y < z$ و $(-\infty, z) \cap \{a_n\} \neq \emptyset$، بنابراین

ب: $\forall y \in \mathbb{R}, \ni \ (-\infty, y) \subseteq S \longrightarrow \exists z \in \mathbb{R}, \ni \ y < z, \ (-\infty, z) \subseteq S$

پس بنابر استقراء، $S = \mathbb{R}$. یعنی $\forall x \in \mathbb{R}, (x, \infty) \cap \{a_n\} \neq \emptyset$ و این متناقض با فرض از بالا کراندار بودن $\{a_n\}$ است، پس $\{a_n\}$ همگرا است.
قضایای دیگری از آنالیز حقیقی را نیز می‌توان با استقراء روی $\mathbb{R}$ اثبات کرد.[۱] و [۲] و [۷]

مراجع

[1] Kalantari, Iraj (2004). *Induction over the Continumm* , Western Illinois University, Dept of Math(Kalantari @win.edu) .

[2] Zhang Jingzhong, *The Induction on a Continuous Variable,* International Center for Theoretical Physics, Trieste, Italy. Ic/89/157.

[3] *Internatinal Conference on Computability and Complexity in Analysis,* August 28-30, 2003, University of Cincinati, USA.

[4] Martin Hötzel Escardo, *Induction and Recursion on the real line,* Dept of Computing , Imperial College, London (1996).

[5] Martin Hötzel Escardo, Thomas Streicher, *Induction and Recursion on the partinal real line with application to real PCF,* Theoretical Computer science, (1997).

[6] W.L. Duren, JR, *Mathematical Induction in sets,* The American Mathematical Monthly, Vol. 64, No. 8 (oct., 1957), pp. 19-22.

[۷] ساختار اعداد، مبانی ریاضیات، محمد مشکوری ـ دانشگاه صنعتی اصفهان (۱۳۸۳).

محمد مشکوری
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده ریاضی
mohammad@cc.iut.ac.ir