فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۶ (بهار ۱۳۹۰) صص. ۳۱ تا ۳۵

برهانی مقدماتی برای فرمول گرِگوری ـ مِنگولی ـ مِرکاتور*

گرو فریسک، جان کریستف ورشتد

مترجم: سید محمد طباطبایی

در این نوشتار، برهانی مقدماتی و جدید برای «فرمول برجستهٔ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2 \qquad (1)$$

که در زمرهٔ رابطه‌هایی است که کشف آن تأثیری عمیق بر اوّلین پیشگامان حساب دیفرانسیل و انتگرال گذاشت» (ریچارد کورانت [۲])، ارائه می‌دهیم. این فرمول دست‌کم به کارهای پیترو منگولی (۱۶۲۶–۱۶۸۶) [۶]، جیمز گرگوری (۱۶۳۸–۱۶۷۵) [۳] و نیکولاس مرکاتور (۱۶۲۰–۱۶۸۷) [۷] برمی‌گردد و ارتباطی به دور از انتظار بین دیدگاه عهد باستان مبتنی بر عددهای طبیعی فیثاغورثی خوش‌ترتیب از یک سو، و فرهنگ ریاضی قرن هفدهم از سوی دیگر، برقرار می‌کند که به‌همراه مفهوم‌هایی متعالی همچون لگاریتم، بی‌نهایت کوچک‌ها و عدد e[۱]، ریاضیات را به‌مثابهٔ ابزاری برای جستجو در جهان ماده می‌داند.

خوانندهٔ این متن، احتمالاً طرف چپِ رابطهٔ (۱) را در اوایل فصل مربوط به دنباله‌ها و سری‌ها در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال یا آنالیز دورهٔ کارشناسی، به‌عنوان مثالی کلاسیک از یک سری که همگرا است ولی همگرای مطلق نیست، دیده است. معمولاً برای اثبات همگرایی این سری، به محک لایب‌نیتز استناد می‌شود که بر طبق آن، سری متناوبی که قدرمطلق جمله‌های آن نزولی

---

*) Friesecke, G., and Wehrstedt, J. C., "An elementary proof of Gregory-Mengoli-Mercator formula", *The Mathematical Intelligencer*, **28** (2006), No 3, 4–5.

۱) که به‌طور تجربی از زمان مسألهٔ معروف تربیع برای هذلولی، به‌عنوان مبنایی که معادلهٔ اوّلِ (۴) ذیل را اعتبار می‌بخشد، شناخته شده بود.

همگرا به صفر باشد، همگرا است. ولی مقدار این سری چیست؟ در کتاب‌های درسی اعلام می‌شود که بعداً با استفاده از حساب دیفرانسیل یا حساب انتگرال، نشان داده خواهد شد که این حد برابر با $\log 2$ است. اما این سخنی دلسرد کننده است، زیرا برای نمایش هر دو طرف رابطهٔ (۱) هیچ نیازی به حساب دیفرانسیل و انتگرال نیست. از این‌رو، این سؤال پیش می‌آید که آیا می‌توان این برابری را به‌طور مستقیم اثبات کرد؟ پاسخ این است که می‌توان. برهانی که در این مقاله ارائه می‌شود، تنها به تعریف لگاریتم طبیعی به‌عنوان لگاریتم با مبنای e، یعنی وارون تابع نمایی با پایهٔ e:

$$e^{\log x} = x \tag{۲}$$

و فرمول مشهور اویلر:

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \tag{۳}$$

(یکی از چند تعریف استاندارد e) که از محاسبات مربوط به ربح مرکب حاصل شده، نیازمند است.

برخلاف اقتباس‌های معمول، ما به هیچ‌یک از ابزارهای حساب دیفرانسیل و انتگرال نیاز نداریم. یکی از روش‌های مرسومِ اثبات رابطهٔ (۱) با نمایش سری توانی تابع لگاریتم که از انتگرال‌گیری جمله‌به‌جمله از سری هندسی به‌دست می‌آید، شروع می‌شود:

$$\log(1 + x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \tag{۴}$$

و در ادامه، با به‌کارگیری قضیهٔ آبل[۱] [۱] معلوم می‌شود که تساوی طرف‌های چپ و راست به‌ازای $x = 1$ که سری هندسی در آن همگرا نیست، برقرار است. با استفاده از قضیهٔ تیلور (مثلاً [۸] را نگاه کنید) هم می‌توان این سری را به‌دست آورد و با تحلیل دقیق باقیماندهٔ آن، روشن می‌شود که تساوی به‌ازای $x = 1$ نیز معتبر است.

از ر. بورکل[۲] نیز سپاسگزاریم که روشی دیگر را بر پایهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال خاطرنشان کرد: در این روش، ابتدا نشان داده می‌شود دنبالهٔ $D_N = \sum_{n=1}^{N} 1/n - \int_1^N 1/t\, dt$ که یک مجموع ریمان و یک انتگرال را با هم مقایسه می‌کند، همگرا است (حد این دنباله به ثابت اویلر موسوم است). با استفاده از این همگرایی، معادلهٔ اوّلِ (۴) و تساویِ (٦) ذیل، داریم $\sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n+1}/n - \log(2N) + \log(N) = D_{2N} - D_N \to 0$ که با در نظر گرفتن قاعدهٔ $\log(2N) - \log(N) = \log 2$، (۱) ثابت می‌شود ([۵] را نگاه کنید).

---

۱) قضیهٔ آبل حاکی از این است که اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ همگرا باشد و تابع $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ برای $-1 < x < 1$ تعریف شود، آن‌گاه $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ـ م.

2) R. Burckel

اکنون برهان خود را برای قضیهٔ ذیل ارائه می‌دهیم.

قضیه: سری همساز متناوب $\cdots + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} - ۱$ به $\log ۲$ همگرا است.

برهان: ۱. مقدمات. باید نشان دهیم که مجموع‌های جزئی $S_N := \sum_{n=۱}^{N} (-۱)^{n+۱}/n$ به $\log ۲$ همگرا هستند. وجود این حد، مثلاً از محک لایب‌نیتز که در بالا در مورد آن صحبت شد، به‌دست می‌آید. این حد را با S نشان می‌دهیم. بنابر تعریف لگاریتم طبیعی، (۲) و پیوستگی تابع نمایی $x \mapsto e^x$ [۱]، کافی است نشان دهیم

$$\lim_{N\to\infty} e^{S_N} = ۲. \tag{۵}$$

۲. ساده کردن مجموع‌های جزئی. خاطرنشان می‌کنیم که سری همساز متناوب از ۱ تا $۲N$، با سری همساز نامتناوب از $N + ۱$ تا $۲N$ برابر است:

$$\sum_{n=۱}^{۲N} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n} = \sum_{n=N+۱}^{۲N} \frac{۱}{n}. \tag{٦}$$

به‌خاطر این‌که طرف چپ، مجموعی از کسرهای فرد مثبت و کسرهای زوج منفی است و از این‌رو برابر با مجموع همهٔ کسرها منهای دو برابر مجموع کسرهای زوج است:

$$\sum_{n=۱}^{۲N} ۱/n - ۲\sum_{n=۱}^{N} ۱/۲n.$$

۳. استفاده از قانون نماها. در (۵)، تنها کافی است مجموع‌های جزئی از ۱ تا عددهای صحیح زوج $۲N$ را در نظر بگیریم، زیرا $S_{۲N+۱} - S_{۲N} = \frac{۱}{۲N+۱}$ به صفر همگرا است. بنابر (٦) و قانون نماها، $e^{a+b} = e^a e^b$، طرف چپِ (۵) برابر می‌شود با

$$e^{S_{۲N}} = \prod_{n=N+۱}^{۲N} e^{\frac{۱}{n}}. \tag{۷}$$

۴. استفاده از تقریبی متفاوت برای هر عامل. اکنون ایدهٔ کلیدیِ ما، استفاده از تقریبی متفاوت برای هر یک از عامل‌های فوق است به‌قسمی که همواره نمای $\frac{۱}{n}$ حذف شود. اگر N بزرگ باشد، به‌ازای هر $n \in \{N + ۱, \ldots, ۲N\}$، $e \approx \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$ و از این‌رو به‌طور شهودی

$$\prod_{n=N+۱}^{۲N} e^{۱/n} \approx \prod_{n=N+۱}^{۲N} \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^{\frac{n}{n}} = \frac{N+۲}{N+۱} \cdot \frac{N+۳}{N+۲} \cdots \frac{۲N+۱}{۲N}.$$

ولی صورت هر عامل، مخرج عامل دیگر را حذف می‌کند، لذا طرف راست برابر است با $\frac{۲N+۱}{N+۱}$ که وقتی N زیاد می‌شود، به ۲ میل می‌کند.

---

۱) یا با این دلیل مقدماتی‌تر که تابع نمایی صعودی است و به‌ازای N زوج، $S_N < S < S_{N+۱}$ که از آنجا به‌دست می‌آوریم $e^{S_N} \le e^S \le e^{S_{N+۱}}$.

برای اثبات دقیق این مطلب از این واقعیت مشهور (رجوع کنید به [۴، بخش ۱۰.۱]) استفاده می‌کنیم که دنباله‌های $e_n := \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$ و $E_n := \left(۱ + \frac{۱}{n-۱}\right)^n$ که بنابر (۳) هر دو به e همگرا هستند، به‌ترتیب، صعودی و نزولی‌اند. اثبات صعودی بودن دنبالهٔ اوّل از این قرار است:

$$\frac{e_{n+۱}}{e_n} = \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)\left(\frac{۱ + \frac{۱}{n+۱}}{۱ + \frac{۱}{n}}\right)^{n+۱} = \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)\left(۱ - \frac{۱}{(n+۱)^۲}\right)^{n+۱}$$
$$\geq \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)\left(۱ - \frac{۱}{n+۱}\right) = ۱$$

زیرا بنابر نامساوی برنولی به‌ازای هر $x > -۱$ و هر عدد طبیعی n، $(۱ + x)^n \geq ۱ + nx$. برای نشان دادن نزولی بودنِ دنبالهٔ دوّم، با بحثی مشابه، $\frac{E_n}{E_{n+۱}}$ را در نظر بگیرید. در نتیجه می‌توانیم طرف راست (۷) را از بالا و پایین با

$$\prod_{n=N+۱}^{۲N}\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^{\frac{n}{n}} \leq \prod_{n=N+۱}^{۲N} e^{۱/n} \leq \prod_{n=N+۱}^{۲N}\left(۱ + \frac{۱}{n-۱}\right)^{\frac{n}{n}}$$

تخمین بزنیم. پیش‌تر، حاصل‌ضرب طرف چپ را به‌دست آوردیم و حاصل‌ضرب طرف راست برابر است با $\frac{N+۱}{N} \cdot \frac{N+۲}{N+۱} \cdots \frac{۲N}{۲N-۱} = ۲$. لذا این نامساوی به‌شکل

$$۲ - \frac{۱}{N+۱} \leq \prod_{n=N+۱}^{۲N} e^{۱/n} \leq ۲$$

خلاصه می‌شود. اگر N به بی‌نهایت میل کند، جملهٔ سمت چپ و در نتیجه جملهٔ وسط، به ۲ میل می‌کند. این، قضیه را اثبات می‌کند.

همان‌طور که خواننده ممکن است حدس زده باشد، انگیزهٔ بخش‌بخش کردن این برهان، ناشی از توضیحاتی است که در مقدمه ارائه شد. ما به این ترتیب خواسته‌ایم هنگام آموزش نظریهٔ همگرایی دنباله‌ها و سری‌ها به دانشجویان ترم اول کارشناسی ریاضی، رابطهٔ (۱) را نیز با آنان در میان بگذاریم. چون بخش اصلی این برهان بر اساس انجام اعمال جمع و ضرب متناهی است، برهان به اندازه‌ای مقدماتی است که می‌تواند بدون توسل به نظریهٔ حد، مورد تصدیق قرار گیرد.

در واقع، این آخرین مطلبی است که در آن وضعیتی بسیار نزدیک به زمینهٔ کشف فرمولِ (۱) به‌وسیلهٔ اولین پیشگامان حساب دیفرانسیل و انتگرال بازسازی می‌شود: محاسبه‌های زیربنایی متناهی همچون به‌دست آوردن آنچه امروزه در مسألههای تربیع، جمع‌های ریمان نامیده می‌شود، با تکیه بر مفهوم‌های محکم ریاضیات صورت گرفت و «گذر به حد» به‌طور شهودی انجام شد.

مراجع

[1] Abel, Niels Henrik, "Recherches sur la serie $۱ + \frac{m}{۱}x + \frac{m(m+۱)}{۱\cdot ۲}x^۲ + \frac{m(m+۱)(m+۲)}{۱\cdot ۲\cdot ۳}x^۳ + \cdots$", *Crelles Journal*, **1**(1827), 311-339. Reprinted in L. Sylow and S. Lie (eds), *Oeuvres completes de N. H. Abel*, Tome 1, 219-250, Grondell and Son, 1881.

[2] Courant, R., *Vorlesungen uber Differential und Integralrechnung*, Erster Band, Springer, 1955.

[3] Gregory, J., *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura, in Propria Sua Proportionis Specie*, Inventa and Demonstrata, Padua, 1667.

[4] Hildebrandt, S., *Analysis 1*, Springer, 2002.

[5] Koecher, M., *Klassiche elementare Analysis*, Birkhauser, 1987.

[6] Mengoli, P., *Novae quadraturae arithmeticae, seu de additione fractionum*, Bologna, 1650.

[7] Mercator, N., *Logarithmotechnia*, 1668.

[8] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1964.

مترجم: سید محمد طباطبایی
دانشگاه قم، گروه ریاضی
sm-tabatabaei@qom.ac.ir