

جدال

آرند هیتینگ

مترجم: احسان ممتحن

اشخاص حاضر در گفتگو: کلاس، صورت، شهود، حرف، عملگرا، نماد
در این مباحثه*، ظاهراً صورت مدافع مکتب هیلبرت یعنی صورتگرایی، شهود مدافع مکتب براؤر
یعنی شهودگرایی و کلاس مدافع مکتب راسل یعنی منطق‌گرایی است. به نظر می‌رسد که حرف
نماینده مکتب بورباکی باشد چرا که هیتینگ منبع سخنان حرف را مقاله ژان دیودونه ذکر می‌کند که
یکی از بنیانگذاران بورباکی بوده است؛ این که می‌توان دیودونه یا حرف را نماینده رسمی مکتب
بورباکی دانست هنوز برای من روشن نیست. اما علامت، واقعاً نمی‌دانم علامت نماینده کدام جریان
فکری در فلسفه ریاضی است، همانطور که کلاس هم می‌گوید موجود ناقلابی به نظر می‌رسد، شاید
نماینده نومینالیسم یا حتی سمبولیسم باشد. به هر حال وی به نقش غالب زبان در علم معتقد است و
از این نظر می‌تواند پیرو فلسفه ریاضی لودویگ ویتگنشتاین نیز به حساب آید. (م)

کلاس: حالتان چطور است آقای شهود؟ مثل این که شهر را در این روز خوب تابستانی رها
نکرده‌اید؟

شهود: ایده‌هایی داشتم و در کتابخانه بر روی آنها کار می‌کردم.

کلاس: زنبور پرکار! پیشرفتی هم داشته‌اید؟

شهود: کاملاً. چیزی می‌نوشید؟

کلاس: متشکرم. شرط می‌بندم که بر روی موضوع مورد علاقه همیشه‌گی‌تان کار می‌کردید، رد
اصلی‌تر د شق وسط و سایر مطالب. من هرگز نفهمیدم که چرا منطق در همه جا باید مورد اعتماد
باشد جز در ریاضیات؟

شهود: قبلاً راجع به این موضوع صحبت کرده‌ایم. این ایده که برای توصیف بعضی از انواع

اشیاء، ممکن است منطق دیگری مناسب‌تر از منطق متداول باشد گهگاه مورد بحث قرار گرفته است. اما نخستین بار برآور بود که شیئی کشف کرد که واقعاً به منطق دیگری نیاز داشت، یعنی ساختمان ریاضی ذهنی^۱ ال. ای. جی. براؤر ۱۹۰۸]. علت این است که در ریاضیات از همان آغاز با نامتناهی سروکار داریم، در حالی که منطق معمولی برای استدلال در بارهٔ گردآیه‌های متناهی ساخته شده است.

کلاس: می‌دانم، ولی در چشم من منطق عام است و در مورد نامتناهی به همان خوبی متناهی کار می‌کند.

شهود: باید توجه داشته باشید که برنامهٔ برآور چه بود ال. ای. جی. براؤر ۱۹۰۷]. این برنامه مشتمل بر پژوهش در ساختمان ریاضی ذهنی به معنای دقیق کلمه بود بی آن که پرسش‌هایی از قبیل این که آیا این اشیاء مستقل از دانش ما از آنها، وجود دارند، مطرح سازد. بهتر است این نکته را که این دیدگاه مستقیماً به رد اصل طرد شق وسط منجر می‌شود با مثالی توضیح دهم. اجازه دهید دو تعریف از اعداد طبیعی چون k و l را با هم مقایسه کنیم:

۱- k بزرگترین عدد اولی است که $k-1$ نیز اول است، یا $k=1$ هرگاه چنین عددی وجود نداشته باشد.

۲- l بزرگترین عدد اولی است که $l-2$ نیز اول است، یا $l=1$ هرگاه چنین عددی وجود نداشته باشد.

ریاضیات کلاسیک یکسره تفاوت آشکار در ویژگی‌های این دو تعریف را نادیده می‌گیرد. k را واقعاً می‌توان محاسبه کرد ($k=3$)، در حالی که هیچ روشی برای محاسبهٔ l نداریم، چرا که هنوز دانسته نیست دنبالهٔ زوجهای اعداد اول دوقلو، $p, p+2$ متناهی است یا خیر. بنابراین شهودگرایان (۲) را به عنوان تعریف یک عدد صحیح مردود می‌شمارند. آنها عدد صحیح را خوش تعریف می‌دانند بشرطی که روشی برای محاسبهٔ آن داده شده باشد. حال همین خط فکری به رد اصل طرد شق وسط منجر می‌شود، زیرا [با قبول این اصل] دنبالهٔ اعداد اول دوقلو چه متناهی باشد و چه نامتناهی، (۲)، عدد صحیحی را تعریف می‌کند.

کلاس: می‌توان چنین به اعتراض برخاست که دانش ما درباره وجود یا عدم وجود آخرین زوج از اعداد اول دوقلو صرفاً تصادفی و به‌طور کلی با چند و چون صدق ریاضی بی ارتباط است. یا تعداد نامتناهی از چنین زوج‌هایی وجود دارند، که در آن صورت $l=1$ یا تعدادشان متناهی است، که در آن صورت l مساوی بزرگترین عدد اولی است که $l-2$ هم اول باشد. در هر دو حالت فرض شده l تعریف می‌شود؛ چرا مهم است که واقعاً بتوانیم یا نتوانیم این عدد را محاسبه کنیم؟

شهود: استدلال شما سرشتی متافیزیکی دارد. اگر «وجود داشتن» به معنی «می‌تواند ساخته شود» نباشد، باید معنایی متافیزیکی داشته باشد. پژوهش در این معنی یا تصمیم در باب

1) mental mathematical construction

قابل دفاع بودن یا نبودن آن کار ریاضیات نیست. ما هیچ مخالفتی با ریاضیدانی که در خلوت هر نظریه متافیزیکی را که دوست دارد می‌پذیرد، نداریم، اما برنامه‌برآور متضمن آن است که ریاضیات را چون موضوعی ساده‌تر و سراسر از متافیزیک مورد مطالعه قرار دهیم. در بررسی ساختمان‌های ریاضی ذهنی «وجود داشتن» با «می‌تواند ساخته شود» باید هم معنی باشد.

کلاس: به بیانی دقیق‌تر، تا زمانی که ندانیم که آخرین زوج از اعداد اول دوقلو وجود دارند، (۲)، تعریف یک عدد صحیح نخواهد بود، اما همین که این مسأله حل شد، به یک باره، به یک تعریف بدل می‌شود. فرض کنید در اول ژانویه ۱۹۷۰ ثابت شود که بینهایت عدد اول دوقلو وجود دارند؛ از آن لحظه $l = 1$. آیا پیش از آن هم $l = 1$ بوده است؟ [منگر، ۱۹۳۰]

شهود: یک قضیه ریاضی، مؤید این واقعیت است که ساختمان ریاضی معینی حاصل شده است. واضح است که قبل از آن که این ساختمان ساخته شود، ساخته نشده بوده است. اگر این مطلب را در مورد مثال شما اعمال کنیم می‌بینیم که پیش از اول ژانویه ۱۹۷۰ ثابت نشده بوده که $l = 1$. اما منظور شما این نیست. چنین به نظر می‌رسد که برای آن که معنای پرسش شما روشن شود باید باز به مفاهیم متافیزیکی رجوع کنید: به جهانی از اشیاء ریاضی، که مستقل از دانش ما وجود دارند، جایی که « $l = 1$ » به معنای مطلق کلمه درست است. اما تکرار می‌کنم، ریاضیات نباید به مفاهیمی از این دست متکی باشد. در واقع همه ریاضیدانان و حتی شهودگرایان متقاعد شده‌اند که به تعبیری ریاضیات حامل حقایق جاودان است، ولی وقتی برای تعریف دقیق این تعبیر تلاش می‌شود، در هزرتوی دشواری‌های متافیزیکی گرفتار می‌آییم. تنها راه پرهیز از آنها آن است که آنها را از ریاضیات کنار بگذاریم. منظور من از گفتن این که ما ساختمان‌های ریاضی را به معنای دقیق کلمه مطالعه می‌کنیم و برای این مطالعه منطق کلاسیک بسنده نیست همین بود.

کلاس: دوستانمان صورت و حرف هم آمدند. دوستان! مشغول بحث بسیار جالبی درباره شهودگرایی هستیم.

حرف: مگر می‌توانستید با دوست خوب قدیمی‌مان آقای شهود راجع به چیز دیگری صحبت کنید؟ او کاملاً در آن غرق شده است.

شهود: وقتی مسحور زیبایی موضوعی شدید، زندگیتان را وقف آن کنید!

صورت: حق با شماست! فقط متحیرم چطور در چیز نامشخصی مثل شهودگرایی می‌تواند زیبایی وجود داشته باشد. هیچ یک از عبارات شما خوش تعریف نیست، و قوانین دقیق استنتاج را هم ارائه نمی‌دهید. بنابراین این که کدام استدلال صحیح و کدام ناصحیح است برای همیشه در برده ابهام باقی می‌ماند [ز. کارناپ ۱۹۳۴ صفحه ۴۱، ۱۹۳۷ صفحه ۴۶، و. دوبیسلاو ۱۹۳۲ صفحه‌های ۵۷ و ۷۵]. در زبان روزمره هیچ کلمه‌ای معنی کاملاً ثابتی ندارد؛ همیشه قدری تفاوت برداشت وجود دارد، و هرچه مفهوم مجردتر باشد این مقدار نیز بیشتر است. این موضوع

(۱) این مقاله در سال ۱۹۵۶ انتشار یافته و مسأله فوق همچنان حل نشده باقی مانده است. (م)

مردم را دربارهٔ نظرات یکدیگر و همچنین در استدلال‌های ریاضی غیرصوری به اشتباه می‌اندازد. تنها راه دست یافتن به نظم و استحکام مطلق آن است که همهٔ معناها را از گزاره‌های ریاضی جدا کنیم و گزاره‌ها را فی‌نفسه، چون دنباله‌هایی از نمادها، بی‌اعتنا به معنایی که ممکن است داشته باشند مورد توجه قرار دهیم. آنگاه صورتبندی قواعد معین برای استنتاج قضایای جدید از آنهایی که تا به حال دانسته شده‌اند و اجتناب از عدم اطمینانی که حاصل ابهام زبان است ممکن می‌شود.

شهود: من اختلاف بین صورت‌گرایان و شهودگرایان را عمدتاً ناشی از اختلاف سلیقه می‌دانم. شما نیز در آنچه هیلبرت فراریاضیات می‌نامید از استدلال پرمعنایی استفاده می‌کنید، اما قصد شما کنار گذاشتن این استدلال‌ها از ریاضیات صرفاً صوری و محدود کردن خودتان به ساده‌ترین استدلال‌های ممکن است. ما بر خلاف شما، به وجه صوری ریاضیات علاقمند نیستیم، بلکه دقیقاً به آن گونه از استدلال که در فراریاضیات^۱ ظاهر می‌شود علاقمندیم، تلاش می‌کنیم که آن را تا دوردست‌ترین نتایجش توسعه دهیم. این برتری نهادن ناشی از این اعتقاد است که اینجا را یکی از بنیادترین توانایی‌های ذهن آدمی می‌یابیم.

صورت: اگر شما با صورت‌گرایی دعوایی ندارید، من نیز با شهودگرایی دعوایی نخواهم داشت. صورت‌گرایان جزو صلح‌جوترین افراد بشر هستند. هر نظریه‌ای می‌تواند صوری و سپس موضوعی برای روش‌های ما شود. به همین ترتیب ریاضیات شهودگرا نیز می‌تواند بدین شکل بیان شود و خواهد شد [ز. کارناپ ۱۹۳۴، صفحه ۴۴، ۱۹۳۷، صفحه ۵۱].

کلاس: به بیان دقیق‌تر، ریاضیات شهودگرا باید چون بخشی از ریاضیات مطالعه شود. در ریاضیات نتایج فرض‌های داده شده را مورد پژوهش قرار می‌دهیم؛ فرض‌های شهودگرایانه ممکن است جالب باشند ولی حق انحصارطلبی ندارند.

شهود: ما هم، چنین ادعایی نکرده‌ایم؛ اگر شما حُسن برداشت ما را بپذیرید، به همین قانع هستیم. اما باید علیه این ادعا که شهودگرایی از فرض‌های کم و بیش دلخواه و معینی آغاز می‌کند اعتراض کنم. موضوع شهودگرایی، [یعنی] اندیشهٔ ریاضی سازنده^۲، قضایای را به طور یکتا مشخص می‌سازد و آن را در کنار و نه در درون ریاضیات کلاسیک جای می‌دهد که موضوع دیگری را، حال هر چه که هست، مطالعه می‌کند. به این دلیل، توافق صورت‌گرایی و شهودگرایی توسط صوری سازی ریاضیات شهودگرا نیز ناممکن است. این درست است که حتی در ریاضیات شهودگرا نیز بخش تمام شدهٔ یک نظریه می‌تواند صوری شود. مفید خواهد بود که لحظاتی به معنای این صوری سازی بیان‌دیشیم. می‌توانیم یک نظام صوری را توصیف زبانی اندیشهٔ ریاضی، در زبانی به‌ویژه مناسب، در نظر بگیریم. اگر این دیدگاه را بپذیریم، با مانع ابهام بنیادی زبان برخورد می‌کنیم. چون معنای یک کلمه هرگز نمی‌تواند به اندازه کافی دقیق تثبیت شود که امکان هر گونه بدفهمی را منتفی سازد، هرگز نمی‌توانیم به لحاظ ریاضی مطمئن باشیم که نظام صوری، اندیشه‌های ریاضی ما را به طور صحیحی بیان می‌کند.

1) meta mathematics 2) constrution Mathematical thought

با این وصف اجازه دهید دیدگاه دیگری اتخاذ کنیم. می‌توانیم خود نظام صوری را چون ساختار ریاضی به غایت ساده‌ای در نظر بگیریم که اشیاءش (علائم نظام) با دیگر ساختارهای ریاضی غالباً بسیار پیچیده مربوط شده‌اند. به این طریق صورتبندی‌ها می‌توانند در درون ریاضیات عملی گردند و به ابزار ریاضی نیرومندی بدل گردند. البته، هرگز نمی‌توان اطمینان یافت که نظام صوری به تمامی، حوزه‌ای از اندیشه ریاضی را نمایش می‌دهد، در هر لحظه، کشف روش‌های جدید استدلال ممکن است ما را به توسعه نظام صوری ناگزیر سازد.

صورت: چند سالی است که با این وضعیت آشنا شده‌ایم. قضیه ناتمامیت گودل نشان داد که هر نظام صوری سازگار از نظریه اعداد می‌تواند به طور سازگار به طرق مختلف توسعه یابد.

شهود: تفاوت در آنجاست که شهودگرایی مستقل از صورتگرایی که تنها می‌تواند از پی ساختمانی ریاضی بسط یابد به پیش می‌رود.

کلاس: آنچه مرا بیشتر سردرگم می‌سازد آن است که به نظر می‌رسد شما دو نفر اصولاً از هیچ آغاز می‌کنید. به نظر می‌رسد که شما مشغول بنای دژهایی در هوا هستید. چطور می‌توانید دریابید که استدلالتان صحیح است اگر محک خطانپذیر منطق را در اختیار نداشته باشید؟ دیروز با نماد صحبت می‌کردم که هنوز از هر دوی شما نسبی‌گراتر است. او چنان ناقلاست که هیچ استدلالی گیرش نمی‌اندازد و هرگز به نتیجه محکمی نمی‌رسد. من از چنین سرنوشتی برای همه آنانی که پشتیبانی منطق، یعنی عقل سلیم را به کناری نهاده‌اند هراسانم.

علامت: موی جن را آتش زدید و یکباره سروکله‌اش پیدا شد. داشتید غیبت مرا می‌کردید؟

کلاس: به بحث دیروز اشاره می‌کردم. امروز به مواضع این دو نسبی‌گرای نفرین شده دیگرم حمله برده‌ام.

علامت: من نیز راغبم در این کار به شما بپیوندم، اما نخست اجازه دهید پاسخ مخالفانتان را بشنویم. لطفاً با دوست من عملگرا آشنا شوید، او نیز به موضوع بحث علاقمند خواهد شد.

صورت: حالتان چطور است؟ شما نیز فیلسوف علم هستید؟

عملگرا: من از متافیزیک متنفرم.

شهود: خوش آمدی برادر!

صورت: ای، من ترجیح می‌دهم که در حال حاضر از مواضع خودم دفاع نکنم، چون بحث ما عمدتاً به شهودگرایی مربوط است و ممکن است به آسانی سردرگم شویم. ولی از این که درباره منطق شهودگرا دچار اشتباه شوید هراسناکم. در واقع این [منطق] نیز صورتبندی شده و کارهای باارزشی توسط عده زیادی از مصنفین در این حوزه انجام گرفته است. به نظر می‌رسد که این مطلب ثابت کند که شهودگرایان به منطق بیش از آنچه فکر می‌کنید ارج می‌نهند، هرچند که آن، منطقی متفاوت از منطقی است که شما با آن مانوس هستید.

شهود: متأسفم که مجبورم مایوستان سازم. منطق زمینی نیست که من بر آن بایستم. و چطور

می‌تواند باشد؟ منطق، خود به یک زیر بنا نیاز دارد که بایستی شامل اصلهایی باشد با پیچیدگی بسیار بیشتر و سراسری بسیار کمتر از اصل‌های خود ریاضیات. یک ساختمان ریاضی باید چنان سراسر و بیواسطه به ذهن [برسد] و نتایجش چنان روشن باشند که هیچ نیازی به زیربنایی از هرسنخ نباشد. می‌توان بدون استفاده از هیچ منطقی خیلی خوب فهمید که آیا استدلالی درست است یا نه؛ یک وجدان روشن علمی کافی است. بله، این درست که منطق شهودگرا گسترش یافته است. برای نشان دادن اهمیت این منطق اجازه دهید با مثالی موضوع را توضیح دهم. فرض کنید که A بیانگر خاصیت عاد شدن یک عدد صحیح توسط عدد 8 ، B همین خاصیت منتها توسط عدد 4 ، و C همان خاصیت توسط عدد 2 باشد. می‌توانیم $8a$ را به صورت $4 \times 2a$ بنویسیم؛ می‌بینیم که بنا بر این ساختمان ریاضی P ، A موجب B است ($A \rightarrow B$). ساختمان مشابه Q نشان می‌دهد که $B \rightarrow C$. با نخست تأیید دادن P و سپس Q (عطف P و Q) خواهیم داشت $8a = 2 \times (2 \times 2a)$ که نشان می‌دهد $A \rightarrow C$. اگر برای A ، B ، C خواص دیگری را جانشین کنیم این نتیجه‌گیری همچنان درست باقی می‌ماند: اگر ساختمان P ، $A \rightarrow B$ ، Q ، $B \rightarrow C$ را نشان دهد، آنگاه عطف P و Q ، $A \rightarrow C$ را نشان می‌دهد. یک قضیه منطقی به دست آورده‌ایم. فرآیندی که این قضیه از آن به دست آمد به ما نشان می‌دهد که این قضیه با قضایای ریاضی تفاوت اساسی ندارد، فقط کلی‌تر است، به همان معنی کلی‌تر که به طور مثال «جمع اعداد صحیح خاصیت تعویض‌پذیری دارد» گزاره کلی‌تری است از « $2 + 3 = 3 + 2$ ». برای هر قضیه منطقی موضوع همین است: قضیه منطقی یک قضیه ریاضی است منتها با کلیتی فوق‌العاده بیشتر؛ به بیان بهتر، منطق بخشی از ریاضی است، و به هیچوجه نمی‌تواند چون زیربنایی برای ریاضیات به خدمت گرفته شود. دست کم این برداشتی است از منطق که من به آن رسیده‌ام؛ ممکن و مطبوع است که بتوان شکل‌های دیگری از منطق را برای مقاصد دیگری بسط داد.

منطقی که هم‌اکنون آن را توصیف کردم منطق ریاضی صوری شده است. نظام صوری ناشی از آن خواص ویژه و منحصر به فردی دارد، که وقتی با نتایج دیگر نظام‌های منطق صوری مقایسه شود بسیار جالب است. این واقعیت به پژوهش‌هایی منجر می‌شود که آقای صورت به آنها اشاره کرد، که هرچند جالب‌اند اما ارتباط نامستحکم و دوری با ریاضیات شهودگرا دارند.

حرف: به اعتقاد من همه این مشکلات خیالی یا تصنعی هستند. ریاضیات چیز کاملاً چیز ساده‌ای است. علائمی تعریف می‌کنیم و قواعدی برای ترکیب آنها به دست می‌دهیم؛ تمام شد و رفت.

صورت: شما به برخی از شیوه‌های استدلال نیازمندید تا سازگاری نظام صورتان را ثابت کنید. حرف: چرا باید بخواهم این مطلب را ثابت کنم؟ نباید فراموش کرد که نظام‌های صوری برای کاربردهایشان ساخته می‌شوند و عموماً نیز مفید بودن خود را به اثبات می‌رسانند؛ اگر هر فرمولی در نظام‌های صوری قابل استنتاج می‌بود توضیح این واقعیت دشوار می‌شد. بدین طریق به قضاوتی عملی درباره سازگاری دست می‌یابیم که برای کار ما کافی است. آنچه در شهودگرایی با آن مخالفم

این عقیده است که ریاضیات با نامتناهی سروکار دارد. من می‌توانم علامتی چون α بنویسم و آن را عدد اصلی اعداد صحیح بنامم. سپس می‌توانم قواعدی موافق قواعدی که آقای کلاس برای این مفهوم بکار می‌برد برای کار با آن وضع کنم. به محض اینکه مفهوم نامتناهی وارد صحنه می‌شود ابهام و سردرگمی در استدلال رخنه می‌کند. بنابراین همه نظرات شهودگرایانه در باره نامتناهی تا درجه‌ی بالایی از ابهام برخوردارند، حتی این نکته نیز قابل پرسش است که آیا علامتی چون 10^{10} معنی دیگری بجز شکلی بر کاغذ که بر طبق قواعدی معین با آن کار می‌کنیم دارد (ژ. دیودونه ۱۹۴۹).

شهود: البته متناهی‌گرایی افراطی شما بالاترین امنیت را در برابر کژفهمی تضمین می‌کند، اما به نظر ما موجب انکار مفهوم ناشناسی می‌شود که پذیرش آن ممکن نیست. بچه‌ها در دبستان می‌فهمند که اعداد طبیعی چه هستند و این واقعیت که دنباله اعداد طبیعی می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد را می‌پذیرند.

حرف: اعتقاد بر این است که اینها را می‌فهمند.

شهود: مخالفتی نیست، زیرا هر ارتباطی که توسط زبان انجام گیرد می‌تواند چون اعتقاد تعبیر شود. همچنین اقلیدس در گزاره ۱۲۰م از کتاب IX، همانجا که ثابت کرد مجموعه اعداد اول نامتناهی‌اند، می‌دانست در باره چه سخن می‌گوید. این برداشت مقدماتی از اعداد طبیعی که برای هر موجود متفکری آشناست در ریاضیات شهودگرا بنیادی است. مدعی هیچگونه قطعیت یا تعینی مطلق برای آن نیستیم، که امری نامحقق است، اما سخن ما اینست که [اعداد طبیعی] به اندازه کافی واضح هستند که ریاضیات را بتوان بر آنها استوار ساخت.

حرف: مخالفت من از این جهت است که شما نه تنها فرض‌های بسیار کمی، آنگونه که آقای کلاس می‌پندارد نپذیرفته‌اید، که بسیار بیشتر از اندازه فرض می‌گیرید. شما از اصل‌های مشخصی آغاز می‌کنید که آنها را بطور شهودی، بی آنکه توضیحی ارائه دهید واضح می‌دانید و دیگر شیوه‌های استدلال را بدون ارائه علتی برای این سره - ناسره کردن، مردود می‌شمارید. به عنوان مثال به نظر بیشتر مردم اصل طرد شقی وسط دست کم همانقدر واضح است که اصل استقرای کامل. چرا اولی را رد و دومی را تأیید می‌کنید؟ چنین انتخاب بی‌دلیلی به نظام شما سرشتی کاملاً جزمی می‌دهد.

شهود: در حقیقت باید گزاره‌های شهودگرایانه برای کسانی که آنها را چون گزاره‌هایی در باب امور واقع می‌نگرند جزمی بنظر آید، اما آنها به این شکل معنی نمی‌شوند. ریاضیات شهودگرا همانگونه که کمی پیش از این برای آقای کلاس توضیح دادم، مبتنی بر ساختمانهای ذهنی است؛ یک قضیه ریاضی صرفاً یک واقعیت تجربی را، یعنی موفقیت یک ساختمان مشخص را بیان می‌دارد. « $2 + 2 = 3 + 1$ » باید چون کوتاه‌نوشت این جمله بازخوانی شود که «من ساختمان‌های ذهنی‌ای توسط $2 + 2$ و $3 + 1$ ایجاد کرده‌ام و دریافته‌ام که این دو به نتیجه‌ای مشابه منجر می‌شوند». حال به من بگویید در کجا عنصر جزمیت می‌تواند وارد شود؛ نه در خود ساختمان ذهنی،

چرا که به وضوح بنا به سرشت خود همچون یک فعالیت است، و نه دیگر در گزاره‌هایی که راجع به این ساختمان‌ها ساخته می‌شوند زیرا که آنها صرفاً نتایج تجربی را بیان می‌کنند.

حرف: در عین حال شما مدعی هستید که این ساختمان‌های ذهنی به گونه‌ای به حقیقت منجر می‌شوند، آنها بازی فالی ورق نیستند، بلکه به یک معنی برای نوع بشر ارزشمند هستند در غیر این صورت در زحمت دادن به دیگران با ریاضیات بر خطایید. درست در همین دعوی است که من عنصر جزمیت را می‌بینم. شهود ریاضی، الهام بخش شما با حقایق عینی و جاودان است؛ به این معنی دیدگاه شما نه تنها جزم‌گرایانه بلکه حتی از سنخ الهیات است. [ه. ب. کوری ۱۹۵۱، صفحه ۶]

شهود: در وهله نخست، اندیشه‌های ریاضی من به زندگی فکری - فردی من تعلق دارند و به ذهن من محدود شده‌اند، در مورد اندیشه‌های دیگر نیز این موضوع صادق است. عموماً متقاعد شده‌ایم که آدم‌های دیگر اندیشه‌های شبیه به ما دارند و وقتی که اندیشه‌هایمان را با کلمات بیان می‌کنیم قادر به فهم آنها هستند، اما در عین حال می‌دانیم که هیچوقت مطمئن نیستیم که کاملاً مطالبمان را فهمانده‌ایم. از این دیدگاه، ریاضیات فرق اساسی با موضوعات دیگر ندارد؛ اگر شما به این علت ریاضیات را جزم‌گرایانه می‌دانید باید مابقی استدلال‌ات بشری را نیز جزمی بدانید. ویژگی اندیشه ریاضی آنست که حامل حقیقتی درباره جهان خارج نیست، بلکه تنها با ساختمان‌های ریاضی سروکار دارد. اکنون باید بین فعالیت صرف ریاضی و ارزش آن فرق بنهیم. برای ساختن نظریه‌های ریاضی به هیچ پیش‌فرض فلسفی نیاز نیست، اما ارزشی که برای این فعالیت قائل می‌شویم به دیدگاه فلسفی ما بستگی دارد.

علامت: اینطور که شما با زبان برخورد می‌کنید در گذشته باقی می‌مانید. زبان ابتدایی این سرشت غیر قابل پیش‌بینی و غیرثابتی را که شما بیان می‌کنید دارد و زبان روزمره نیز عمدتاً به همان گونه است، ولی همین که اندیشه علمی آغاز می‌گردد صوری سازی زبان نیز شروع می‌شود. در دهه‌های اخیر نمادگرایان این فرآیند را مطالعه کرده‌اند. هنوز این راه به پایان خود نرسیده است زیرا زبان‌های اکیداً صوری شده بیشتری تازه در حال شکل‌گیری هستند.

شهود: اگر واقعاً صوری‌سازی زبان راه و رسم علم باشد، ریاضیات شهودگرا به این معنا از کلمه به علم تعلق ندارد. بلکه ترجیحاً پدیده‌ای از زندگانی و فعالیت طبیعی آدمی است، که خود چون موضوعی برای مطالعه بر روی روش‌های علمی گشوده است؛ و عملاً نیز با این شیوه‌ها یعنی صوری‌سازی استدلال شهودگرایانه و روش‌های علمی مورد مطالعه قرار گرفته است، اما روشن است که این بررسی به ریاضیات شهودگرا و به نتایج آن تعلق ندارد. چنین آزمونی علمی از ریاضیات شهودگرا هرگز قادر به ارائه توصیفی دقیق و کامل از آن نخواهد بود، همان‌طور که به وضوح می‌توان دید، قادر به ارائه یک نظریه کامل از پدیده‌های دیگر هم نیست. هر چه که این ملاحظات فرا شهودگرایانه امیدوارکننده و جالب هم باشند، نمی‌توانند بخشی از خود ریاضیات شهودگرا تلقی گردند. البته این نکته‌ها، همانطور که چند لحظه پیش توضیح دادم قابل اعمال به صوری‌سازی

درون ریاضیات نیستند.

عملگرا: اجازه دهید آنچه را که آقای نماد هم‌اکنون گفت مورد تأکید قرار دهیم. علم، بوسیلهٔ صوری سازی زبان به پیش می‌رود؛ علم از این شیوه استفاده می‌کند چرا که کارآمد است. به ویژه زبان‌های کاملاً صوری شدهٔ مدرن بسیار مفید واقع شده‌اند. آرمان یک دانشمند مدرن، فراهم آوردن زرادخانه‌ای از نظام‌های صوری مفید است، که از میان آنها برای هر نظریه، نظامی که نتایج تجربی را صحیح‌تر نمایش می‌دهد انتخاب کند. نظام‌های صوری باید با این محک مفید بودن مورد قضاوت قرار گیرند نه با تعبیرهای دلخواه و مبهم که به درد استدلال‌های متافیزیکی یا جزمگرایانه می‌خورند.

شهود: کاملاً معقول به نظر می‌رسد که یک نظام ریاضی را بر اساس مفید بودنش مورد داوری قرار دهیم. می‌پذیرم که از این دیدگاه، شهودگرایی، حتی بخت کمتری برای پذیرفته شدن دارد، زیرا تأکید بر چند اشارهٔ مختصر که امکان دارد در فیزیک استفاده شده باشد ساده‌اندیشانه خواهد بود [۱].
 ل. دستوچز [۱۹۵۱]: به نظر من [ریاضیات شهودگرا] برای مفید واقع شدن در فلسفه، تاریخ و دیگر علوم انسانی بخت بیشتری دارد. در حقیقت ریاضیات، از دیدگاه شهودی، مطالعهٔ کارکردهای معینی از ذهن بشر است، و تنها از این جنبه شبیه به این علوم است. ولی آیا واقعاً سودمندی تنها معیار ارزشمندی است؟ به آسانی می‌توان بسیاری از فعالیت‌های سودمند چون هنرها، ورزش‌ها و تفریحات سالم را ذکر کرد که به هیچ وجه پشتیبان علم نیستند. ما مدعی ارزشی از این دست برای شهودگرایی هستیم که قبل از شروع تعریف کردنش دشوار است ولی آشکارا به هنگام کار با این موضوع احساس می‌شود. می‌دانید که چطور فیلسوفان در مسألهٔ تعریف مفهوم ارزش در هنر به زحمت افتاده‌اند؛ با این حال هر فرد تحصیل کرده‌ای این ارزش را احساس می‌کند. ارزش ریاضیات شهودگرا وضعیتی مشابه دارد.

صورت: برای بیشتر ریاضیدانان این ارزش به طرز ناخوشایندی از این حقیقت متأثر شده است که شما ارزشمندترین نتایج ریاضی را نابود می‌سازید؛ یک روش ارزشمند برای مبانی ریاضی باید تا آنجا که ممکن است نتایج این دانش را حفظ کند [د. هیلبرت ۱۹۲۲]. این امر حتی به کمک روش‌های ساختنی نیز عملی است؛ زیرا امکان تعریف‌های سازندهٔ سوی آنچه که مورد حمایت شهودگرایان است وجود دارد. به همین خاطر، حتی تعداد معدودی از شهودگرایان واقعی نیز با تثبیت شدن تعریف ساختپذیری موافق نیستند. رادیکال‌ترین مثال، رد مفهوم نقیض توسط گریس است، که دیگر شهودگرایان آن را به عنوان مفهومی کاملاً روشن می‌پذیرند [ه. فرویدنال ۱۹۳۶؛ گ. ف. س. گریس A ۱۹۴۶، صفحهٔ ۲۴]. از سوی دیگر محتمل بنظر می‌رسد که برداشتی محتاتانه‌تر از ساختپذیری به حفظ بخش‌های حیاتی ریاضیات کلاسیک بیانجامد.

شهود: وقتی شهودگرایان دربارهٔ زبان صوری نشده صحبت می‌کنند، باید واگرایی‌های اندکی را میان عقاید آنان انتظار داشت. اگر چه این واگرایی‌ها زودتر و پرتنش‌تر از آنچه پیش‌بینی می‌شد به پا خواسته است، به هیچ روی نگران‌کننده نیستند، زیرا همگی آنها به قسمت‌های کم اهمیت‌تر

مربوطند و بر ایده‌های بنیادی که در باره آنها توافقی کامل وجود دارد تأثیر نمی‌گذارند. اما درباره آسب رساندن به ریاضیات که مرا بدان متهم کردید، باید آن را چون نتیجه ناگزیر [نگرش] خاص ما در نظر گرفت. این کار، همچنین می‌تواند چون دور ریختن زیورآلات زائد که در ظاهر زیبا، اما در باطن خود توخالی هستند تلقی شود، و به لطف موهبت‌های ظریف و شیوه‌های نازک اندیشه‌ای که شهودگرایان به یاری آنها اندیشه ریاضی را غنی ساخته‌اند دست کم تا اندازه‌ای جبران شده است.

صورت: بحث ما، شکل بحثی درباره ارزش‌ها را به خود گرفته است. من از حرف‌های شما چنین نتیجه می‌گیرم که حاضرید برداشت‌های دیگر از ریاضیات را قدر نپسندید، اما [در عین حال] مدعی ارزشی فی‌نفسه برای برداشت خودتان هستید. درست است؟

شهود: کاملاً، تنها بحث قاطع در مبنای ریاضی که من مخالف آن هستم اینست که ریاضیات کلاسیک معنایی واضح دارد، باید اعتراف کنم که این مطلب را نمی‌فهمم. ولی حتی کسانی که می‌گویند آن را می‌فهمند باید قادر به فهمیدن دیدگاه ما و ارج نهادن به کار ما [نیز] باشند.

حرف: به کمک پارادوکس‌ها نشان داده شده است که ریاضیات کلاسیک کاملاً واضح نیست.

صورت: بله، اما نقد شهودگرایانه بسیار بیش از آنچه که برای اجتناب کردن از پارادوکسها لازم است پیش می‌رود؛ آقای شهود هنوز به آنها چون استدلالی در تایید برداشت خود اشاره نکرده است و بدون شک به نظر او سازگاری، چیزی جز محصول جانبی نیست.

علامت: آقای شهود، شما فعالیت خود را چون ساختمان ذهنی توصیف می‌کنید، اما فرآیندهای ذهنی تنها از خلال اعمالی که نتیجه‌ی آنهاست قابل مشاهده‌اند و در مورد شما در خلال کلامی که می‌گویید و فرمولهایی که می‌نویسید. آیا این بدان معنی نیست که تنها راه مطالعه شهودگرایی مطالعه کردن نظام صوری است که شهودگرایی می‌سازد؟

شهود: هنگام نگاه به درختی که آنجاست می‌پذیرم که درختی را می‌بینم، آموزشی قابل توجه لازم است تا این عقیده را با این دانش که در واقع امواج نور به چشمان من می‌رسند و مرا به ساختن تصویری از آن درخت سوق می‌دهند جانشین سازم. به طریقی مشابه، در گفتگو با شما، متقاعد می‌شوم که من عقاید خود را به شما می‌گویم، اما شما به من می‌آموزید که در واقع من ارتعاشاتی در هوا تولید می‌کنم که باعث می‌شود شما عملی انجام دهید، به عنوان مثال تولید کردن ارتعاشی دیگر. در هر دو حالت نخستین نگرش از نوع طبیعی است، دومین [نگرش] یک ساختمان ذهنی است. اغلب فراموش می‌شود که صدق چنین ساختمانهایی به وضعیت فعلی علم بستگی دارد و کلمه‌های «در واقع» باید به شکل «مطابق با دیدگاه دانشمندان معاصر» ترجمه شود. بنابراین ترجیح می‌دهم از این ایده پیروی کنم که هنگام بیان ریاضیات شهودگرا، من اندیشه‌هایی را به شنوندگانم منتقل می‌کنم، این کلمات نباید به معنای نظامی فلسفی بلکه باید به معنای رایج در زندگی روزمره در نظر گرفته شوند.

علامت: پس شهودگرایی، به عنوان شکلی از تعامل میان آدمیان، پدیده‌ای اجتماعی است و مطالعه آن به تاریخ تمدن تعلق دارد.

شهود: مطالعه آن، نه انجام آن. در این نکته با آقای عملگرا موافقم که نخست زندگانی بعد فلسفه^۱ و اگر دوست داریم می‌توانیم دومی را به دیگران واگذاریم. اجازه دهیم آنان که پس از ما می‌آیند بپرسند چرا این ساختارهای ذهنی را ساخته‌ام و چطور می‌توانند در فلسفه‌ای تعبیر شوند؛ از ساختن آنها به این دلیل خاطر که به طریقی به وضوح اندیشه بشری کمک خواهند کرد خرسندم.

عملگرا: این خطای مشترک فیلسوفان است که راجع به چیزهایی که می‌دانند، به صورت ناقص صحبت می‌کنند و نزدیک است که ما نیز در این دام گرفتار آییم. آیا آقای شهود مایلند به ما نمونه‌هایی از استدلال شهودگرا ارائه دهند تا بلکه ما قادر به قضاوت در باره کیفیت این مطلب شویم؟

شهود: یقیناً، حتی به این نتیجه رسیده‌ام که چند درسگفتار به شما بصیرت بهتری راجع به آن خواهد داد تا بحث‌های طولانی. ممکن است از آقایان محترمی که علاقمند به توضیحات من هستند تقاضا کنم با من به کلاس درس بیایند؟

مراجع

- [1] L. E. J. Brouwer, *Over de grondslagen der wiskunde*, Thesis, Amsterdam 1907.
- [2] L. E. J. Brouwer, *De onbetrouwbaarheid der logische principes*, Tijdschrift voor wijsbegeerte 2, 1908.
- [3] R. Carnap, *Logische syntax der Sprache*, Wien 1934.
- [4] R. Carnap, *The logical syntax of language*, London 1937.
- [5] H. B. Curry, *Outlines of formalist philosophy of Mathematics*, Amsterdam 1951.
- [6] J. L. Destouches, *Sur la mecanique classique et l'intuitionnisme*, Proc. Akad. Amsterdam Ser. A 54, pp. 74-79= Indagationes math. 13, pp. 74-79.
- [7] J. Dieudonne, *L'axiomatiques modernes*, Congres intern. de philosophie des sciences, Paaris 1949. (Actualites scientifiques et industrielles 1137, Paris 1951.)
- [8] W. Dubislav, *Die Philosophie der Mathematik in Gegenwart*, Berlin 1932.
- [9] H. Freudenthal, *Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln*, Compositio maath. 4, pp. 112-116.
- [10] G. F. C. Griss, *Idealistische Filosofie*, Een humanistische levens- en wereldbeschouwing, Arnhem 1946.

1) Primum vivere, deinde philosophari

- [11] G. F. C. Griss, *Negationless intuitionistic mathematics I*, Proc. Akad. Amsterdam 49, pp. 1127–1133=Indagationes math. 8, pp. 675–681.
- [12] D. Hilbert, *Neubegründung der Mathematik*, Abhandl. mat. Seminar Hamburg Univers. 1, pp. 157–177.
- [13] K. Menger, *Der Intuitionismus*, Blätter deutsch. Philosophie 4, pp. 311–325.

مترجم: احسان ممتحن
دانشگاه یاسوج، دانشکده علوم گروه ریاضی
پست الکترونیک momtahan_e@hotmail.com