فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۹ (پاییز ۱۳۸۶) صص. ۶۷ تا ۸۳

از سری‌های تیلر تا حرکت براونی، با منظره‌ای در مسیر بازگشت*

ژان - پیرکاهان

ترجمه: ارسلان شادمان

این مقاله دعوت به یک گردش است. نقطهٔ عزیمت ما در این سفر، بُرِل[۱] و شعار تحریک آمیزی است که در سال ۱۸۹۶ با این مضمون عنوان کرد: «دایرهٔ همگرایی یک سری تیلر[۲] در حالت کلی یک برش[۳] برای این سری است». این ادعا پیامدهای فراوانی داشت. ما هم در گردشِ خود، برخی از آثار برخاسته از آن شعار را مشاهده خواهیم کرد، تأثیر آن را بر ادامهٔ کارهای خودِ برل خواهیم دید و با تعبیرهای گوناگون آن آشنا و روبرو خواهیم شد. از جمله، تعبیر به کمک نظریهٔ بئر[۴]، تعبیرهای احتمالاتی، دست آورد اشتاینهاوس[۵] و تعامل آن با نظریهٔ وینر[۶] درمورد حرکت براونی را ملاحظه خواهیم کرد. به اینجا که می‌رسیم، سال ۱۹۳۳ است و چشم‌انداز، با کتاب مبانی احتمالاتِ کولموگوروف[۷] [K] دگرگون می‌شود. اما نظریهٔ حرکت براونی[۸] با کارهای پُل لِوی[۹] منزلت می‌یابد و از ظرافت برخوردار می‌شود. ناوردایيِ مسیرهای حرکتِ براونيِ مسطح تحت نمایش‌های همدیس[۱۰]، آخرین بخشِ عنوانِ مقالهٔ ما را توجیه می‌کند: منظره‌ای در مسیر بازگشت.

---

*) Jean Pierre Kahane, Des séries de Taylor au mouvement brownien, avec un aperçu sur le retour, in: Development of Mathematics 1900 - 1950, Birkhauser, Basel, 1994, (pp. 415 - 429).

1) Borel 2) Taylor

۳) cut یا coupure. منظور این است که ادامهٔ تحلیلی تابع مورد بحث به دامنهٔ وسیع‌تری ناشدنی است. م.

4) Baire 5) Steinhaus 6) Wiener 7) Kolmogorov 8) Brownian motion 9) Paul Lévy

10) conformal representations

آثار برل در فاصلهٔ سال‌های ۱۸۹۷ ـ ۱۸۹۶ راجع به سری‌های تیلر آن گونه که وی در سال ۱۹۱۲ تحلیل می‌کند.

جمله‌ای که قبلاً نقل کردیم، برگرفته از یادداشت ۱۸۹۶ برل [Bo3] و یا از مقالهٔ ۱۸۹۷ متعاقب آن [Bo4] نیست، بلکه ما آن را از نوشتار سال ۱۹۱۲ وی [Bo6]، که نخستین جمعبندی آن کارهاست، برگرفته‌ایم.

به چه دلیل ادعای مورد بحث، تحریک آمیز است؟ از آن رو که تا آن زمان، سری‌های تیلر توسیع‌ناپذیر، استثنائی تلقی می‌شدند. پوانکاره[1] مثالی از آن را ارائه کرد، مثال او سری $\sum_{1}^{\infty} 2^{-n} x^{3^n}$ بود [Po]. در همان سال، آدامار[2] گزارهٔ کلی‌تری بیان می‌کند به این صورت: «سری $\sum b_\mu x^{c_\mu}$ دایرهٔ همگرایی خود را به عنوان خط تکین[3] می‌پذیرد هرگاه نسبت $(c_{\mu+1} - c_\mu)/c_\mu$ همواره بزرگتر از عدد ثابتی باشد» [Ha]. البته این شرط با شرط بهین بسیار فاصله دارد (قضیه‌ای از فابری[4]، [Fa1] ص 382، حاکی است که حکم قضیهٔ آدامار با فرض $\lim (c_\mu/\mu) = \infty$، نیز برقرار است). با این حال، شرط کافی بیان شده در قضیهٔ آدامار در مباحث دیگری نیز سودمند است و در منابع ریاضی به عنوان «شرط حفره‌پذیری آدامار[5]» معروف است [Zy].

مقالهٔ پوانکاره با صراحت به نظریهٔ امتداد تحلیلی وایرشتراس[6] [We] ارجاع می‌دهد و برای آن که توابع غیرقابل توسیع روی یک مجموعهٔ مفروض را به دست آوَرَد، به سری‌هایی از کسرهای گویا به شکل $\sum A_n (x - a_n)^{-1}$ متوسل می‌شود. رسالهٔ آدامار [Ha] عمدتاً راجع به جستجوی قطب‌ها و رفتار مقایسه‌ای دنبالهٔ ضرایب تیلر تابع مفروض در همسایگی دایرهٔ همگرایی است: بنابراین حالت «طبیعی» ظاهراً همان است که امتداد تحلیلی ممکن باشد. رسالهٔ خود برل [Bo1]، که از پوانکاره الهام گرفته است، توسیع سری‌های کسرهای گویا را بررسی می‌کند (اما به یک مفهوم کاملاً نو که الهام بخش دانژوا[7] در کارهای ۱۹۲۱ روی مفهوم شبه ـ تحلیلی[8] شد، [De] صفحات 76 تا 84 و یادداشت‌های صفحات 34 تا 37 را ببینید). در اواخر ۱۸۹۶ برل یادداشتی «راجع به ناحیهٔ جمع‌پذیری یک سری تیلر» [Bo2] منتشر می‌کند و در آن تبدیلی (که به تبدیل بُرل[9] مشهور شد) همراه با یک فرایند جمعبندی را معرفی می‌کند که به نام خود او معروف است[10]. چند هفته بعد و با عنوان مرموز «راجع به سری‌های تیلر» یادداشت دیگری در آکادمی علوم پاریس منتشر می‌کند و

---

1) Poincaré

۲) Hadamard نام او را هادامار نیز می‌نویسند. م.

۳) singular line تعبیر آن همان است که در مورد برش توضیح دادیم. زیرنویس ۴ صفحهٔ پیش دیده شود.م.

4) Fabry 5) Hadamard's lacunarity condition 6) Weierstrass theory of analytic continuation 7) Denjoy 8) quasi-analyticity 9) Borel transformation 10) Borel summation process

اعلام می‌کند که: هنگامی که ضرایب دلخواه باشند، دایرهٔ همگرایی یک برش است [Bo3]. در نامه‌ای به میتاگ ـ لفلر[1] که موضوع مقالهٔ [Bo4] است، نظر خود را در این زمینه شرح می‌دهد.

برل در نوشتار ۱۹۱۲، فصل مربوط به توابع یک متغیر مختلط، به وضوح نشان می‌دهد که انگیزهٔ اصلی وی در ابداع فرایندهای جمع‌بندی، در نظریهٔ سری‌های واگرا و در «روش نوینی» که «یک تابع تام را به یک سری تیلر مفروض وابسته می‌سازد» یعنی در تبدیل برل، توسیع تحلیلی توابعی بوده است که با سری تیلرشان بیان می‌شوند. امروز که به این‌ها توجه می‌کنیم می‌بینیم پیشرفت‌های اساسی و مهمی هستند. با این وصف، مهمترین پیامد از دید برل هیچ یک از اینها نیست. به تحلیل خود او ([Bo6]، جلد اول، ص 154) نگاه کنیم:

« نتیجه‌ای که به نظر من مهمتر است این است: یک سری تیلر دایرهٔ همگرایی خود را، در حالت کلی، به عنوان یک برش می‌پذیرد. . ..

مشکل اصلی آن است که پیش از ارائه برهان، معنای این جمله روشن شود. . .. می‌توان سری را به بینهایت گروه متوالی از جمله‌های سری تقسیم کرد و به هر گروه نقطه‌ای از دایرهٔ همگرایی را وابسته کرد که این نقطه فقط به ضرایب این گروه وابسته باشد؛ این نقاط یک مجموعهٔ E تشکیل می‌دهند. هر نقطه از مجموعهٔ مشتق، E'، یک نقطهٔ تکین خواهد بود. از همین جا روشن است که اگر ضرایب متوالی به طور تصادفی انتخاب شوند، یعنی مستقل از ضرایب قبلی، احتمال آن که مجموعهٔ E روی دایرهٔ همگرایی چگال باشد برابر واحد است.»

در تمام این نقل قول، کلمات کلیدی عبارتند از به طور کلی، به طور تصادفی، مستقل از، احتمال برابر واحد. بُرل شهودی روشن از آنها داشت اما هم برای برل و هم برای دیگران ده‌ها سال زمان لازم بود تا این واژه‌ها به مفاهیم ریاضی صورتبندی شده و منظم تبدیل شوند. برای خودِ برل، این مسأله به نقطهٔ عزیمت نظریهٔ احتمالات شمارایِ وی، یعنی نظریهٔ جدید احتمالات به عنوان توابع σ ـ شمارا از پیشامدها [Bo5]، تبدیل شد.

در این جا نکته‌ای از خودِ برل بر برهان فوق را، به گونه‌ای که در نامه به میتاگ ـ لفلر نوشته بود [Bo4] می‌افزاییم. در پایان آن نامه، جملهٔ زیر دیده می‌شود: «بنابراین، روی دایره، بینهایت کمان مستقل می‌توان یافت که حاصلجمع آنها از هر عدد مفروضی بیشتر است، لذا، در حالت کلی، هر نقطهٔ دایره، متعلق به بینهایت کمان است.»

این جمله در واقع قسمت مشکل «لم بُرِل ـ کانْتِلّی»[2] است که می‌گوید: اگر پیشامدهایی مستقل باشند و اگر حاصل جمع احتمال‌های آن‌ها واگرا شود، آنگاه تقریباً به طور حتم بینهایت تا از آن‌ها به وقوع می‌پیوندند. بدین ترتیب لم برل ـ کانْتِلّی از همان زمان ۹۷ ـ ۱۸۹۶ به کار رفته است؛ حال آن که در کتاب‌های مشروح احتمالات، نظیر [Re] معمولاً این لم را به مقالهٔ ۱۹۰۹ برل [Bo5] و مقاله‌ای از کانتلی [Ca] به تاریخ ۱۹۱۶ ارجاع می‌دهند.

1) Mittag-Leffler 2) Borel-Cantelli's Lemma

پیش از آن که به گردش خود ادامه دهیم، نخستین درسی را که راجع‌به نحوهٔ تولید و زایش نظریه‌ها و مفاهیم می‌گیریم، می‌آوریم. در هر دوره، مسائل مهم آن دوره مطرح‌اند، سپس قضایای پیش بینی شده و پیش‌بینی نشده‌ای که به این مسائل جواب می‌دهند مطرح می‌شوند، که گاهی مورد فراموشی آیندگان قرار می‌گیرند. پس از آن، ابزارهایی پدید می‌آیند که در اثبات این قضایا مورد استفاده قرار می‌گیرند، یعنی لم‌ها. در مورد برخی از این لم‌ها، به تدریج آیندگان می‌بینند که دامنهٔ استعمال آن‌ها فراتر از قضیه‌ای است که لم به خاطر آن پدید آمده است و آن‌ها را با عنوان لم به خاطر می‌سپارند (مانند لم برل ـ کانتلی، لم فاتو[1]) و یا آن‌ها را با نام قضایا می‌خوانند (مانند قضیهٔ لبگ[2]). پس از این‌ها، آن مفاهیمی که چارچوب مناسبتر و استعمال ساده‌تری برای ابزارهای فوق را فراهم سازند، مطرح می‌شوند (نظیر σ ـ جمعپذیری، احتمال، استقلال و ... در مورد برل؛ اندازه، انتگرال و ... در مورد لبگ و فاتو). وقتی این مفاهیم به شکل صوری درآیند، به تعاریف می‌انجامند و در آموزش نظریه‌ها نقطهٔ شروع را به تعاریف اختصاص می‌دهند. امّا از حیث تاریخی، تعاریف، نقطهٔ به ثمر رسیدن تلاش‌هایی **می‌باشند** که در طول قرون و اعصارصورت گرفته‌اند، و نمی‌توان به اهمیت و غنای آن‌ها پی برد مگر آن که هم در نظریه‌هاو هم در کاربردها، حداقل بخشی از نتایج و تأمّلات و تفکراتی را که موجب پیدایش آن تعریف شده‌اند، بازیابی کرد.

اکنون که به این شکل نفسی تازه کردیم، مدتی هم در یک مسیر فرعی راه‌پیمایی کنیم.

معنای «در حالت کلی» چیست؟

بی‌گمان، «درحالت کلی» برای برل به معنای امروزی «تقریباً به طور حتم» است؛ یعنی یک مفهوم احتمالاتی است. همچنین است برای فابری که در ۱۸۹۷ (در واقع چند روز پس از یادداشت دسامبر ۱۸۹۶ برل) اثبات جدیدی (البته تلنگرهای اثبات) برای حکم برل ارائه کرد [Fa2] (رهیافت فابری را می‌توان در ص 61 از [HM] مطالعه کرد). با این وصف، اگر خود را به سری‌های تیلر با ضرایب صحیح محدود کنیم، اصطلاح «به طور کلی» را می‌توان به مفهوم نظریهٔ مجموعه‌ای عدد اصلی تعمیم داد. در ۱۹۱۸، هاوسدورف ملاحظه می‌کند که در این مورد، سری‌های تیلر قابل توسیع مجموعه‌ای شمارا و سری‌های تیلر غیرقابل توسیع مجموعه‌ای ناشمارا تشکیل می‌دهند و در نتیجه بسیار غنی‌ترند [Hau2].

بالاخره، «در حالت کلی» را می‌توان از دید توپولوژی تعبیر کرد. پولیا همین کار را در ۱۹۱۸ انجام داد [Po1]: در یک توپولوژی مناسب مجموعهٔ سری‌های تیلر توسیع‌ناپذیر یک مجموعهٔ باز و چگال تشکیل می‌دهند (می‌توان ص 68 از کتاب [HM] را نیز دید).

در ادامهٔ کارهای پولیا، به نظر من کار کیرشت[3] و اشپیلراین[4] در ۱۹۳۳ از همه پخته‌تر است [KS]. مجموعهٔ توابع تمامریخت در قرص یکهٔ باز را به توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده مجهز می‌کنیم، که بدین ترتیب به یک فضای فرِشه[5] تبدیل می‌شود. با الهام

1) Fatou 2) Lebesgue 3) Kierst 4) Szpilrajn 5) Fréchet

دائمی از ریاضیدانان لهستانی آن زمان، که به ویژه توسط ماژورکیویچ[1] آشکار می‌شد، کیرشت و اشپیلراین مسأله را از دید رده‌های بئر نگاه کردند، یعنی به جستجوی ویژگی‌هایی پرداختند که روی یک اشتراک شمارا از مجموعه‌های باز برقرارند. امروزه، چنین ویژگی‌هایی را ژنریک یا شبه ـ مطمئن می‌نامند. این دو ریاضیدان ویژگی‌های ژنریک دیگری را نیز نشان می‌دهند، هم در مورد توابع تمامریخت در قرص یکه و هم در مورد توابع تام و توابع ناقص ریخت.

با شروع از این دیدگاه، گردش دیگری نیز پیش روی ما قرار می‌گیرد. این سه دیدگاه، احتمالاتی، نظریهٔ مجموعه‌ای، توپولوژیکی در نظریه‌های گوناگون ریاضی چگونه وارد می‌شوند؟ اگر فقط به آنالیز همساز، یا به نظریهٔ سری‌های دیریشله، یا به قضایای برهمنهش[2] هم بسنده کنیم، جا دارد گردش‌های علمی جالبی انجام دهیم.

اما به مسیر اصلی برگردیم و راه را از برل به سوی اشتاینهاوس، وینر و پل لوی ادامه دهیم.

دیدگاه اشتاینهاوس

با وجود آن که امروز مشابهت بین اندازهٔ لبگ (۱۹۰۴) و احتمالات شمارای برل (۱۹۰۹) بر ما آشکار است، ترجمهٔ یکی به دیگری از نظر تاریخی یک روزه انجام نشده است. نخستین صورتبندی که موجب اتحاد بین احتمال روی مجموعهٔ بخش‌های نامحدود شیر یا خط از سویی و اندازهٔ لبگ روی بازهٔ [۰, ۱] از سوی دیگر گردید، متعلق به هـ. اشتاینهاوس است (۱۹۲۳). جا دارد در این‌جا بخشی از مقدمهٔ او [St] را بیاوریم:

«آقای اِ. بُرِل نخستین کسی بود که به اهمیت مطالعه در احتمالات شمارا پی برد و کاربردهای این رشته را در حساب نشان داد، از جمله قضیهٔ زیر که به «تناقض برل[3]» معروف است توجه آنالیزدانان را به خود جلب کرده است:

احتمال آن که بسامد رقم ۰ در بسط دوتایی یک عدد تصادفی برابر با $\frac{1}{2}$ باشد، برابر یک است؛ منظور از بسامد رقم صفر حد کسری است که صورت آن تعداد دفعاتی است که این رقم در بین n رقم اول بسط عدد ظاهر می‌شود و مخرج آن عدد n است.

این قضیه را در نوشته‌های سایر نویسندگان به شکل زیر می‌توان دید:

تقریباً همهٔ اعداد α این ویژگی را دارند که بسامد صفرها در بسط دوتایی آن‌ها برابراست با $\frac{1}{2}$. در اینجا معنای تقریباً همه این است که اندازهٔ لبگ αهایی که ویژگی مورد بحث را ندارند برابر صفر است. برای آن که این حکم ثابت شود، کافی است که برهان اولیهٔ برل را در نظر بگیریم، فکر او را کاملاً حفظ کنیم و فقط برهان را به طور مناسب تغییر دهیم.

هدف این یادداشت آن است که دستگاهی متشکل از چند اصل موضوع[4] احتمالات شمارا برقرار

1) Mazurkiewicz 2) superposition 3) Borel Paradox

۴) بُرل از واژهٔ Postulat استفاده می‌کند نه از واژهٔ axiome. م.

کند تا در این گونه پژوهش‌ها یک بار برای همیشه امکان ترجمهٔ یک تعبیر به تعبیر دیگر فراهم شود.»

اشتاینهاوس در ارجاع به برل، از [Bo5] صفحات 259 تا 260 و در ارجاع به «سایر نویسندگان» از هاوسدورف[1] [Hau1] صفحات 419 تا 422 نام می‌برد.

اشتاینهاوس در مقاله‌ای که به سال ۱۹۲۹ نوشت و در سال ۱۹۳۰ منتشر کرد [St 2] به این موضوع باز می‌گردد، تا احتمال آن را که یک سری تیلر دایرهٔ همگراییش را به عنوان برش بپذیرد، بررسی نماید. مرجع اصلی او برلِ ۱۸۹۶ است و اینجاست که برای نخستین بار حکم برل معنای ریاضی دقیقی می‌یابد. اشتاینهاوس یک سری

$$\sum_{\circ}^{\infty} c_n z^n$$

با شعاع همگرایی ۱ را در نظر می‌گیرد، و سری‌هایی را که از روی آن با تغییر فاز تصادفی به دست می‌آیند به شکل

$$\sum c_n e^{\text{۲}\pi i\varphi_n} z^n \qquad (S)$$

مطرح می‌کند، جایی که φ_nها متغیرهای تصادفی مستقلی هستند که به شکل یکنواخت روی $[\circ, \text{۱}]$ توزیع شده‌اند. لااقل امروز مطالب را می‌توانیم به این گونه مطرح کنیم. کار اشتاینهاوس شامل مراحل زیر است:

الف) φ_nها را به شکل توابعی از یک متغیر حقیقی $\varphi \in [\circ, \text{۱}]$ در نظر می‌گیرد؛

ب) نشان می‌دهد که توسیع‌ناپذیریِ سری (S) متناظر با یک مجموعهٔ برل از مقادیر φ است؛

پ) نشان می‌دهد که این مجموعه با اندازهٔ پُر[2] است.

مرحلهٔ الف) ساده و در عین حال فنی است، که از پرتاب سکه الهام می‌گیرد. در بسط دوتایی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\varphi_\text{۱} &= \circ/\varphi_{\text{۱۱}}\varphi_{\text{۱۲}}\varphi_{\text{۱۳}}\cdots \\
\varphi_\text{۲} &= \circ/\varphi_{\text{۲۱}}\varphi_{\text{۲۲}}\varphi_{\text{۲۳}}\cdots \\
\varphi_\text{۳} &= \circ/\varphi_{\text{۳۱}}\varphi_{\text{۳۲}}\varphi_{\text{۳۳}}\cdots \\
&\cdots
\end{aligned}$$

و

$$\varphi = \circ/\varphi_{\text{۱۱}}\varphi_{\text{۲۱}}\varphi_{\text{۱۲}}\varphi_{\text{۳۱}}\varphi_{\text{۲۲}}\varphi_{\text{۱۳}}\varphi_{\text{۴۱}}\varphi_{\text{۳۲}}\cdots$$

1) Hausdorf 2) full measure

به این شکل، با φ می‌توان کل دنبالهٔ (φ_n) را کدگزاری کرد. بنابراین می‌توان اندازهٔ لبگ روی $[\circ, ۱]$ را به یک احتمال روی $[\circ, ۱]^{\mathbb{N}}$ تبدیل کرد.

مرحلهٔ ب) با مشکل مفهومی مواجه نیست. مطلب بر سر این است که برای یک نقطهٔ دایرهٔ همگرایی، منظم بودن برای سری (S) به شکل فرمول‌هایی ترجمه شود.

اما برعکس، مرحلهٔ پ) کاملاً اصیل و ابتکاری است. در این مرحله نشان می‌دهد که اگر احتمالِ واقعیتِ موردِ بحث، مثبت باشد، آنگاه الزاماً برابر ۱ است. به عبارت دیگر، در این حالت خاص (که اساساً با حالت کلی هم‌ارز است) قانون همان قانون معروف صفر ـ یک کولموگوروف است [Ko].

در نتیجه دایرهٔ همگرایی (S) تقریباً به طور حتم، یک برش است.

اما شیوهٔ عمل اشتاینهاوس فوایدی بسیار وسیع‌تر از حل مسألهٔ فوق دارد. کلید این رهیافت، کدگذاری (φ_n) به کمک φ است. دنبالهٔ (φ_n) نمونهٔ بارزی از متغیرهای تصادفی مستقل است. هر دنباله از متغیرهای تصادفیِ مستقل را می‌توان به شکل یک دنبالهٔ $X_n(\varphi_n)$ تعبیر کرد، هر ویژگی قابل تعبیر با احتمالات (احتمالپذیر[1]) را می‌توان به صورت یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر φ تعبیر کرد و احتمال آن را با اندازهٔ لبگ این مجموعه از φها یکی گرفت. در این مرحله، همهٔ مفاهیمی را که برل در ۱۸۹۶ با محتوای شهودی مطرح کرده بود، می‌توان دقیقاً به شکل صوری به دست آورد و **اثباتی خدشه‌ناپذیر برای آن ارائه نمود.** به علاوه، همهٔ مسائل نظریهٔ احتمالات را می‌توان اساساً و به شکل ملموس به اندازهٔ لبگ تحویل نمود.

در طول سال‌های دههٔ ۲۹ ـ ۱۹۲۰، نمونهٔ بارز سری‌های با متغیر تصادفی مستقل به صورت سری‌های رادِماخِر[2] مطرح می‌شد، سری‌هایی که رادماخر در ۱۹۲۲ ارائه کرد [Ra] (همگرایی تقریباً همه‌جای این سری‌ها را خودِ رادماخر و واگرایی تقریباً همه‌جای آن‌ها را خینچین[3] و کولموگوروف در سال ۱۹۲۵ بررسی کردند [KK]). از سال ۱۹۳۰ به بعد، سری‌های اشتاینهاوس مورد توجه قرار گرفت و متغیرهای φ_n، یا متغیرهای اشتاینهاوس، امکان مطالعهٔ توابع مستقل را با تمام کلیت فراهم کردند [SKR].

ملاقات با حرکت براونی

نظریهٔ فیزیکی حرکت براونی مدیون اینشتین[4] است و به سال ۱۹۰۵ برمی‌گردد[Ei]. کاربرد این نظریه در تعیین بُعد اتمی، یعنی عدد آووگادرو[5]، کار ژان پرَن[6] است که در مقاله‌ای مبسوط به سال ۱۹۰۹ [Pe1] و یک کتاب چاپ ۱۹۱۲ [Pe2] تشریح کرده است. نوربرت وینر[7] به توصیهٔ راسل[8]، به مطالعهٔ کار اینشتین می‌پردازد و کارهای ژان پرن به ویژه توصیف وی از مسیرهای براونی توجه وینر را جلب می‌کند. از پرن [Pe1] نقل کنیم:

1) Probabilisable 2) Rademacher 3) Khinchine 4) Einstein 5) Avogadro's number
6) Jean Perrin 7) Norbert Wiener 8) Russel

«مسیر آنچنان به سرعت و به کرّات در خود می‌پیچد که امکان ندارد بتوانیم درخودپیچی‌های آن را تعقیب کنیم و مسیر مورد ملاحظه همواره بینهایت ساده‌تر و کوتاهتر از مسیر واقعی است. هم‌چنین سرعت متوسط یک ذره در یک مدت زمانی مفروض (خارج قسمت تغییر مکان بر تغییر زمان) هم از حیث مقدار و هم از حیث جهت به شکل حیرت‌انگیزی در حال تغییر است و هنگامی که زمان مشاهده تنزل می‌کند هیچ حدی ندارد . . . این یکی از آن مواردی است که ناچار باید به فکر توابع پیوسته‌ای باشیم که مشتق ندارند، توابعی که ممکن است عده‌ای به خطا گمان برند محصول کنجکاوی سادهٔ ریاضیدانانند، حال آن که طبیعت، مطالعهٔ این توابع را هم به خوبی توابع مشتق‌پذیر، توصیه می‌کند».

به بیان امروزی، فیزیک، مُدِلی را تحمیل می‌کند. حرکت براونی باید به شکل یک فرایند گاوسی[1] (X_t) با نموهای مانا، که نموهای آینده مستقل از گذشته‌اند، تشریح شود. از اینجا یک نرمال‌سازی به دست می‌آید، به این شکل که واریانس[2] X_t برای $t > 0$ باید (صرف نظر از یک ضریب) برابر با t باشد.

قانون (X_t) تحول سرتاسری[3] پدیده را بیان می‌کند. هر یک از مسیرها، مسیری از $X(t,\omega)$ به ازای ωهای ثابت است. برنامهٔ وینر، که از اینشتاین و ژان پرن الهام گرفته بود، آن بود که $X(t,\omega)$ را به عنوان نسخه‌ای از فرآیند (X_t) در نظر بگیرد که تقریباً به طور حتم پیوسته است، و تقریباً به طور حتم هیچ جا مشتق‌پذیر نیست. در مقالات متعددی روی این موضوع (به ویژه [Wi1] و [PW] فصل ۹)، وینر نوشته‌هایی از ژان پرن را نقل می‌کند که به توابع مشتق‌ناپذیر در مبحث مسیرهای براونی پرداخته است.

بخش آغازی برنامه در ۱۹۲۳ طی مقالهٔ بنیادی فضای دیفرانسیل [Wi1] انجام شد. در واقع، راستش را بگوییم، وینر تابع $X(t,\omega)$ را به شکل صریح نمی‌سازد، بلکه یک اندازه روی مجموعهٔ توابع پیوسته می‌سازد و از آن یک فضای احتمال به وجود می‌آورد؛ به این ترتیب هر یک از توابع این فضا نقش ω را ایفا می‌کند. همهٔ ساز و برگ اندازه و انتگرال در فضاهای تابعی به کار گرفته می‌شود. ویژگی‌های سری فوریهٔ این فرآیند، که امروز سری فوریه ـ وینر[4] نامیده می‌شود، ثابت می‌شوند: از جمله ثابت می‌شود که ضرایب مورد نظر، متغیرهای تصادفی گاوسی مستقل‌اند و واریانس آن‌ها برابر با وارونِ بسامد[5] است.

به مناسبت تحقیق بزرگ دیگری، آنالیز همساز تعمیم یافته[6]، وینر در سال ۱۹۳۰ مجدداً به حرکت براونی باز می‌گردد [Wi2]، و بیان آن را اندکی ساده می‌کند و نشان می‌دهد که توابع پیوسته‌ای که احتمال روی آنها متمرکز است، تقریباً به طور حتم در یک شرط هولدر[7] مرتبه $\frac{1}{2}$ صدق می‌کنند

---

1) Gaussian process 2) variance 3) global evolution 4) Fourier-Wiener series
5) frequency 6) Generalized hormonic analysis 7) Hölder condition

بخش پایانی این برنامه با همکاری پاله[1] و زیگموند[2] فقط در سال ۱۹۳۳ به انجام می‌رسد [PWZ]؛ آنان ثابت می‌کنند که تقریباً به طور حتم، هنگِ پیوستگیِ $X(t,\omega)$ها به شکل $\mathrm{O}(\mathrm{h}^\alpha)$ به ازای هر $\alpha < \frac{1}{2}$ است و در جهت عکس، تقریباً به طور حتم برای هر t، داریم

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\ \frac{|X(t+h,\omega)-X(t,\omega)|}{|h|^\alpha} = \infty,$$

به ازای هر $\alpha > \frac{1}{2}$، یعنی مشتق‌ناپذیری به یک معنای بسیار قوی برقرار است.

بدون تردید مقدمهٔ [PWZ] نوشتهٔ وینر است و در آن نقشِ بنیادین برل و اهمیت دیدگاه اشتاینهاوس، به خوبی روشن شده است. شروع این مقدمه چنین است:

«ورود مفهوم تصادف در آنالیز، پیش از همه کار برل است. نظریهٔ او با عنوان احتمالات شمارا[3] راجع به کمیت‌هایی است که به یک دنبالهٔ نامتناهی از انتخاب‌ها و به مقدار میانگین آنها بستگی دارند. در ساده‌ترین حالت، این انتخاب‌ها از میان دو حالت صورت می‌پذیرند که می‌توان آنها را به شکل علامت + و علامت − مطرح کرد. بنابراین مسائلی از قبیل احتمال همگرایی سری‌های

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pm C_n$$

و توزیعِ حاصلجمعِ این سری‌ها، به مقولهٔ این افکار مربوط می‌شوند. مسائلی از این دست با تفصیل در مقالات متعددی در دو مجلهٔ *Fundamenta Mathematicae* و *Studia Mathematica* درج شده‌اند که نام‌های اشتاینهاوس و رادماخر را می‌توان در زمرهٔ مؤلفین این مقالات مشاهده کرد. به ویژه تحویل این مسائل به مسائلی در باب انتگرال لبگ مدیون اشتاینهاوس است.»

سپس در همین اثر با تأکید بیشتر به کارهای پاله و زیگموند راجع به سری‌های تصادفی از نوع

$$\sum_{1}^{\infty} \pm f_n(t)$$

اشاره می‌شود، که سری‌های فوریه ـ رادماخر[4] و سری‌های تیلر ـ رادماخر[5] حالت خاص آنند، هم‌چنین سری‌های

$$\sum_{1}^{\infty} e^{2\pi i\varphi_n} f_n(t)$$

1) Paley   2) Zygmund

3) probabilités dénombrables؛ از مقدمهٔ [PWZ] به زبان انگلیسی نقل قول شده است، اما اصطلاح فرانسوی مورد بحث عیناً به زبان فرانسوی آمده است. م.

4) Fourier-Rademacher series   5) Taylor-Rademacher series

(که سری‌های فوریه ــ اشتاینهاوس [1] و سری‌های تیلر ــ اشتاینهاوس [2] حالت خاص آن هستند) مطرح می‌شوند که تاریخ انتشار آنها از سال ۱۹۳۰ تا سال ۱۹۳۲ است [PZ]. فایدهٔ این سری‌ها در تولید مثال‌های نقض مورد توجه قرار گرفته و حق مطلب ادا شده است.

پس از این اشارات، سرانجام حرکت براونی ارائه می‌شود:

«باوجود این، مباحثی برای فیزیکدانان پیش می‌آید که در آنها توابع حاوی عنصری تصادفی خودنمایی می‌کند. حرکت براونی، یعنی حرکت یک ذرهٔ معلق در یک سیال تحت تأثیر بی‌نظمی‌های چسبندگی ملکولی این سیال، به شدت ماهیت تصادفی دارد تا جایی که به نظر می‌رسد این ذره حتی سرعت هم ندارد. پِرَن که یک فیزیکدان بود، به خوبی توضیح داده است که چگونه حرکت براونی، بررسی توابع پیوستهٔ مشتق‌ناپذیر وایرشتراس را الزام‌آور می‌کند، و برل هم رابطهٔ این موضوع با نظریهٔ احتمالات شمارای خود را توضیح می‌دهد. مؤلفه‌های تغییر مکان این ذره، وقتی به عنوان تابع زمان مطالعه شوند، توابعی تصادفی هستند اما به معنایی کاملاً متفاوت با آنچه زیگموند و پاله مطرح کرده بودند. وینر نظریهٔ این توابع تصادفی را به شکل ریاضی قطعی درآورد که بر پایهٔ انتگرال لبگ بنا شده است....

هدف این مقاله آن است که خلاء بین نظریهٔ PZ و نظریهٔ W را پر کند».

به این مناسبت، وینر نقطهٔ عزیمت خود را تغییر می‌دهد. در [PWZ] نیز نویسنده از حرکت براونی شروع می‌کند تا سری فوریه ــ وینر را مطالعه کند. اما به عنوان نتیجه‌ای از همکاریش با پاله که در سال ۱۹۳۴ اتفاق افتاده بود، اکنون $X(t,\omega)$ با سری فوریه ــ وینر تعریف می‌شود. این سری به شکل

$$\sum_{1}^{\infty} \xi(\omega_n) f_n(t)$$

است که در آن $\xi(\omega_n)$ها متغیرهای گاوسی نرمال شدهٔ مستقل هستند و $f_n(t)$ها مضاربی از سینوس‌ها و کسینوس‌های کمان‌های چندگانه‌اند. از حیث صوری، این سری شبیه سری‌هایی است که پاله و زیگموند در نظر می‌گرفتند و بررسی آن‌ها هم به شیوه‌ای نزدیک به شیوهٔ آن دو می‌تواند انجام شود.

از نظر مفهومی، جهش قابل ملاحظه‌ای به وقوع پیوسته است. به جای آن که اندازه‌ای روی یک فضای توابع در نظر بگیریم (که این فضا به عنوان فضای احتمال مطرح می‌شد)، اکنون وینر از یک مدل اشتاینهاوس عزیمت می‌کند و بدین ترتیب بلافاصله دنباله‌های ω_n را که مستقل هستند و به طور یکنواخت روی $[0,1]$ توزیع شده‌اند در نظر می‌گیرد (این همان φ_nهای اشتاینهاوس است)، و به عنوان فضای احتمال با همان شیوهٔ اشتاینهاوس، بازهٔ $[0,1]$ از خط حقیقی را در نظر می‌گیرد که به اندازهٔ لبگ مجهز شده است.

1) Fourier-Steinhaus series 2) Taylor-Steinhaus series

او به این ترتیب ساختاری از $X(t,\omega)$ را موسوم به تابع تصادفی اساسی معرفی می‌کند و آن را با $\psi(t,\alpha)$ نمایش می‌دهد، که البته این‌ها در فصول آخر کتابش با پاله که در سال ۱۹۳۴ منتشر کرد آمده‌اند. [PW]

به ظاهر با این شیوه تمام نظریهٔ احتمال به آنالیز توابع یک متغیر حقیقی و اندازهٔ لبگ روی $[\circ, ۱]$ تبدیل می‌شود. وینر به مسلک اشتاینهاوس درمی‌آید و لبگ به توجیه برل و اینشتین می‌پردازد.

نقش جدید و حرکت آفرین احتمالات

ظاهر فریبنده است. نخست آن که ۱۹۳۳ سال انتشار کتاب کولموگوروف [Ko] مشهور به $Grundbegriffe$ است که در آن احتمالات به عنوان یک نظریهٔ مستقل مطرح می‌شود. سپس و به ویژه، موضوعات این نظریه با غنا و تنوع خود که از دنیای فیزیک، زیست‌شناسی، اقتصاد، بیمه و غیره می‌آیند، به سویی می‌روند که نقش محرک را در خود آنالیز کلاسیک نیز برعهده گیرند. این همان مطلبی است که با مطرح کردن منظره‌ای در مسیر بازگشت می‌خواهیم بگوییم. برای آن که سردرگم نشویم، بحث خود را به حرکت براونی و سری‌های تیلر محدود می‌کنیم.

آخرین اثر مهم وینر راجع به حرکت براونی، آشوبِ همگن[1] [Wi3] است، یعنی نظریهٔ آشوب احتمالاتی که امروز به اندازهٔ آشوب تعیّنی[2] معروف نیست اما نقش قابل ملاحظه‌ای ایفا کرده است.

در این زمان است که پُل لِوی وارد صحنه می‌شود. از همان نخستین یادداشت راجع به موضوع [Le2]، او شیفتهٔ حرکت براونی در صفحه است و بررسی هندسی آن را برعهده می‌گیرد. نخستین مقالهٔ مفصل او چاپ ۱۹۳۹ است [Le3]. در حقیقت، پیش از آن تاریخ، پل لوی در کتاب خود [Le1] که در ۱۹۳۷ منتشر ساخت، به انشای حرکت براونیِ خطی به عنوان حالت خاصِ فرآیندهای با نمو مستقل پرداخت. در آنجا نقش تابع $\sqrt{۲h\log\frac{۱}{h}}$ در بررسیِ هنگ پیوستگی و تخمین تقریباً به طور حتم آن روشن می‌شود. او به باشلیه[3] [Ba1,2] و وینر [Wi1] ارجاع می‌دهد و آنها را به عنوان بنیانگذار نظریه مطرح می‌کند و از خینچین [Kh] به عنوان واضع قانون لگاریتم تکراری نام می‌برد. از اسمولوچوفسکی[4] بی‌اطلاع است. به نظر نمی‌رسد که کارهای پاله و وینر را بشناسد؛ در هر حال، باید گفت که آن‌ها را نقطهٔ عزیمت خود قرار نمی‌دهد. پل لوی خود را به دست شهود هندسی و احتمالاتی می‌سپارد، از دید او فایدهٔ تحویل احتمالات به اندازهٔ لبگ و یا هرگونه مبانی نظری دیگر، باید مانند فایدهٔ نظریهٔ اصل موضوعی هیلبرت در هندسهٔ اقلیدسی قلمداد شود.

در مقالهٔ ۱۹۳۹ وی، نوآوری‌هایی اساسی دیده می‌شود، از قبیل انتگرال‌های تصادفی $\int_\circ^۱ Y(t)dX(t)$ و $\int_\circ^۱ (dX(t))^۲$، که در آن $X(t)$ و $Y(t)$ دو نسخهٔ مستقل از حرکت براونی روی

1) homogeneous chaos 2) deterministic chaos 3) Bachelier 4) Smoluchowski

خطاند (لذا $(X,Y)(t)$ یک نسخه از حرکت براونی در صفحه است)، او هم‌چنین نشان می‌دهد که مساحت خم به دست آمده صفر است و هندسهٔ این خم را تشریح می‌کند. با وجود این، فقط در مقالهٔ ۱۹۴۷ بود که لِوی، در مجله‌ای که ریاضیدانان چندان به آن دسترسی ندارند [Le4]، ناوردایی مسیرها تحت نمایش‌های همدیس را خاطر نشان می‌سازد، ظاهراً معلوم می‌شود که لوی مدت‌ها بود این پدیده را می‌شناخت. به عنوان فرعی بر این قضیه، به تعبیر اندازهٔ همساز[1] می‌پردازد و آن را به شکل احتمال دسترسی حرکت براونی تعبیر می‌کند، نتیجه‌ای که کاکوتانی[2] چندی پیش ثابت کرده بود [Ka]، و البته پس از کارهای پولیا[3] [Pol] سر زبان‌ها افتاده و جزء فرهنگ عامه (فولکلور) شده بود. تأثیر مذاکراتی که پل لوی با دامادش لوران شوارتس[4] داشته است در این زمینه محسوس است، همان گونه که در ملاحظه‌ای پس از این فرع بیان می‌کند:

«طی مذاکره‌ای که در ۱۹۴۱ با ل. شوارتس داشتم، اطلاع یافتم که این فرع قبلاً نیز شناخته شده بود. اما آقای شوارتس نتواست برایم مرجعی فراهم کند و از آنجا که می‌توان این فرع را مستقیماً ثابت کرد، نمی‌دانم قضیهٔ راجع به نمایش همدیس تازگی دارد یا خیر به این دلیل تا امروز صبر کردم و انتشار آن را به تأخیر انداختم.»

اگر از دو کتاب پل لوی [Le1] و [Le5] بگذریم، پر جاذبه‌ترین نوشته‌های او در این زمینه تک نگاری است که با عنوان حرکت براونی در سال ۱۹۵۴ منتشر ساخت [Le6]، کتابی که می‌توان آن را مانند یک داستان خواند مشروط بر آن که خود را به شهود نویسنده بسپاریم.

توجه ویژه به حرکت براونی در صفحه، در نیمهٔ دوم قرن بیستم روبه تزاید بوده است. برای آن که بتوانیم دریابیم تا چه اندازه این موضوع امروز هم فعال است، کافی است به خطابه و کارهای لوگال[5] [LG] رجوع کنیم. این مبحث با اندازهٔ همساز ارتباطی نو و پویا یافته است؛ از جمله، شبیه‌سازی رشد اشیاء مسطحی را که توسط ذرات براونی بمباران می‌شوند و این ذرات جذب آنها می‌گردند، مشاهده خواهیم کرد [WS]. از سوی دیگر فایدهٔ حرکت براونی در آنالیز کلاسیک نیز همواره مورد تأیید بوده است [Kah]، [Bu]، [*Pe*]، [*De*]. به عنوان مثال، قضیهٔ پیکار[6] راجع به توابع تام متناظر با یکی از ویژگی‌های مسیرهای براونی در پیچش حولِ دو نقطه است. رده‌های هاردی[7] قرص یکه، H^p، را هم می‌توان به وسیلهٔ رفتار عناصر آنها روی مسیرهای براونی تعریف و هم می‌توان بررسی نمود. به طور خلاصه، همهٔ ناورداهای همدیس را می‌توان به منزلهٔ ناورداهایی برای مسیرهای براونی که بدون قانون زمانِ سیر هستند در نظر گرفت. به این علت است که، در هندسهٔ یک متغیر مختلط، حرکت براونی از ژئودزیک‌ها هم سودمندتر به نظر می‌رسد (به عنوان مثال، اگر به وسیلهٔ یک تابع مدولی[8] بخواهیم قرص یکه را روی پوشش جهانی[9] یک صفحه با دو سوراخ در هر نقطه، نمایش دهیم،

---

1) harmonic measure 2) Kakutani 3) Polya 4) Laurent Schwartz 5) Le Gall
6) Picard 7) Hardy cfasses 8) Modular function 9) universal cover

ژئودزیک‌های هندسهٔ پوانکاره به راه‌های پیچیده‌ای تبدیل می‌شوند، حال آن که مسیرهای براونی خیلی ساده فقط به مسیرهای براونی تبدیل خواهند شد). حرکت براونی وسیله‌ای است که با آن می‌توان در عین حال، اندازهٔ همساز، مجموعه‌های با ظرفیت لگاریتمیِ[1] صفر، مرز مارتین[2] و حتی ژئودزیک‌ها را «دید». به عنوان مثال، تمرین زیر را که مدیون آدرین دووادی[3] هستم در نظر می‌گیریم. در هندسهٔ پوانکارهٔ نوار، یک ژئودزیک در نظر می‌گیریم که دو نقطهٔ A و B را به هم وصل می‌کند و فرض می‌کنیم که A و B هر دو به یک لبهٔ نوار تعلق دارند. نشان دهید که این ژئودزیک در قرص (اقلیدسی) بر قطر AB قرار دارد. اثبات: مورچه‌ای در نظر می‌گیریم که از یک نقطهٔ M متعلق به این ژئودزیک حرکت خود را شروع می‌کند و هر وقت بخواهد از نوار خارج شود مجبور می‌شود بایستد. این مورچه، همان قدر شانس دارد روی پاره‌خط AB بایستد که روی بقیهٔ مرز. اگر اجازه دهیم این مورچه در نیم‌صفحه‌ای که به خط گذرنده بر AB محدود می‌شود گردش کند، آنگاه شانس بیشتری خواهد داشت که پاره‌خط AB را تلاقی کند تا آن که بقیهٔ مرز را. بنابراین، این مورچه بین پاره‌خط AB و ژئودزیک نیم‌صفحهٔ پوانکاره که دو نقطهٔ A و B را به هم وصل می‌کند، قرار خواهد گرفت، یعنی نیمدایرهٔ اقلیدسی به قطر AB.

بدون شک ادامهٔ بحث [تأکید بر اهمیت احتمالات.م] بیفایده است. امروز شهودِ احتمالی، همه جا مطرح است، حتی در آنالیز کلاسیک. در این گردش، که در بخشی از تاریخ ریاضیات نیمهٔ اول قرن بیستم انجام گرفت، دیدیم که یک مسأله آنالیز گسترش احتمالات را برانگیخت و اکنون می‌بینیم که حرکت براونی آنالیز را تحت تأثیر قرار می‌دهد. باید اضافه کنم که گردش تصادفی در بسیاری از حوزه‌های مربوط به زندگی، علوم و بدون تردید مربوط به تاریخ ریاضیات خالی از فایده نیست.

سپاسگزاری. از همکار ارجمندم آقای دکتر علی آبکار، که نسخهٔ دستنویس ترجمه را مطالعه فرمودند و در جهت ویرایش متن، تذکرات سودمندی به مترجم دادند، صمیمانه سپاسگزارم. همهٔ این نکات به جا بود و بادیدهٔ منت رعایت شد. هم‌چنین از هیأت تحریریهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، به خاطر مطالعهٔ معرفی و نقد کتاب‌های گسترش ریاضیات ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰ و گسترش ریاضیات ۱۹۵۰ تا ۲۰۰۰ بذل توجه به برخی از توصیه‌های مندرج در آن، از جمله سفارش این مقاله برای ترجمه و درج در فرهنگ و اندیشه ریاضی، تشکر می‌کنم.

مراجع

[Ba1] L. BACHELIER: Théorie de la spéculation. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 17 (1900), 21–86.

[Ba2] L. BACHELIER: Théorie mathématique du jeu. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 18 (1901), 143–210.

1) logarithmic capacity 2) Martin boundary 3) Adrien Douady

[Bo1] E. BOREL: Sur quelques points de la théorie des fonctions. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 12 (1885), 9–55.

[Bo2] E. BOREL: Sur la région de sommabilité d'une série de Taylor. *C. R. Acad. Sci. Paris* 123 (oct. 1896), 348.

[Bo3] E. BOREL: Sur les séries de Taylor. *C. R. Acad. Sci. Paris* 123 (déc. 1896), 1051–1052.

[Bo4] E. BOREL: Sur les séries de Taylor. *Acta Math.* 20(1897), 243–247.

[Bo5] E. BOREL: Sur les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rend. Circ. Mat. Palermo* 26 (1909), 247–271.

[Bo6] E. BOREL: *Oeuvres*, tome I. Paris, CNRS, 1972.

[Bu] D.L. BURKHOLDER: Brownian motion and classical analysis. *Probability. Proceedings of symposia in pure mathematics* 31 (1977), 5–14.

[Ca] F.P. CANTELLI: La tendenza ad un limite nel senzo del calculo delle probabilita. *Rend. Circ. Mat. Palermo* 16 (1916), 191–201.

[Da] B. DAVIS: Brownian motion and analytic functions (special invited paper). *Ann. Prob.* 7 (1979), 913–932.

[De] A. DENJOY: *Un demi–siècle (1907–1956) de notes communiquées aux Académies de Paris, d'Amsterdam, des Lincei,* volume l: *la variable complexe*, 221+58 p. Paris, Gauthier–Villars, 1957.

[Ei] A. EINSTEIN: Ueber die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderten Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierter Teilchen. *Annalen der Physik* 19 (1905), 371–381.

[Fa1] E. FABRY: Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* (3), 13 (1896), 367–399.

[Fa2] E. FABRY: Sur les séries de Taylor. *C. R. Acad. Sci. Paris* 124 (janv. 1897), 142–143.

[Ha] J. HADAMARD: Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. *J . Math. Pures* & *Appl.* (4) 8 (1892), 101–186.

[HM] J. HADAMARD & S. MANDELBROJT: La série de Taylor et son prolongement analytique. *Scientia*, Gauthier–Villars, Paris, 1926.

[Hau1] F. HAUSDORFF: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[Hau2] F. HAUSDORFF: Zur Verteilung der fortsetzbaren Potenzreihen. *Math. Zeitschrift* 4 (1919), 98–103.

[Kah] J. P. KAHANE: Brownian motion and classical analysis, *Bull. London Math. Soc.* 8 (1976), 145–155.

[Ka] S. KAKUTANI: Two dimensional Brownian motion and harmonic functions, *Proc. Math. Inst. Osaka* 21 (1945), 138–140.

[Kh] A. KHINTCHINE: *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Springer, t. 2, 4 (1933), 1–77.

[KK] A. KHINTCHINE & A.N. KOLMOGOROV: Ueber Konvergenz von Reihen deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden. *Mat. Sbornik* 32 (1925), 668–77.

[KS] S. KIERST & E. SZPILRAJN: Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes. *Fund. Math.* 21 (1933), 276–294.

[Ko] A.N. KOLMOGOROV: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Berlin, Springer, 1933.

[Le1] P. LÉVY: *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* Paris, Gauthier Villars, 1937.

[Le2] P. LÉVY: Mouvement brownien et schémas géométriques. *C. R. Acad. Sci. Paris* 207 (1938), 1152–1154.

[Le3] P. LÉVY: Le mouvement brownien plan. *Amer. J. Math.* 62, 3 (1940), 487–550.

[Le4] P. LÉVY: Trois théorèmes sur le mouvement brownien. *Ass. franc. avanc. sciences*, Supplt. à l'Intermédiaire des recherches mathématiques, fasc. 9 (1947), 124–126.

[Le5] P. LÉVY: *Processus stochastiques et mouvement brownien.* Paris, Gauthier–Villars, 1948.

[Le6] P. LÉVY: *Le mouvement brownien.* Mémorial Sc. Math. 126 (1954), Paris, Gauthier–Villars.

[LG] J. F. LEGALL: *Some properties of planar Brownian motion.* Cours à la XXe école d' été de probabilités de Saint–Flour (1990).

[PW] R.E.A.C. PALEY & N. WIENER: *Fourier transforms in the complex domain.* A.M.S. Coll. Publ. 19, Providence, 1934.

[PWZ] R.E.A.C. PALEY, N. WIENER & A. ZYGMUND: Notes on random functions. *Math. Z.* 37 (1933), 647–668.

[PZ] R.E.A.C. PALEY & A. ZYGMUND: On some series of functions.
(1) *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 26 (1930), 337–357.
(2) *Ibid*, 458 - 474.
(3) *Ibid*, 28 (1932), 190–205.

[Pe] K.C. PETERSEN: Brownian motion, Hardy spaces and bounded mean oscillation. *London Math. Soc.* Lecture Note Series 28 (1977), Cambridge Univ. Press.

[Pe1] J. PERRIN: Mouvement brownien et réalité moléculaire. *Annales de Chimie et de Physique* (2) 18 (1909), 5–114.

[Pe2] J. PERRIN: *Les atomes.* Paris, 1912.

[Po] H. POINCARÉ: Sur les fonctions à espaces lacunaires. *Amer. J. Math.* 14 (1892), 201–221.

[Pol1] G. PÓLYA: Ueber die Potenzreihen, deren Konvergenzkreis natürliche Grenze ist. *Acta Math.* 41 (1916–1918), 99–118.

[Pol2] G. PÓLYA: Ueber eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die lrrfahrt im Strassennetz. *Math. Annalen* 84 (1921), 149–160.

[Ra] H. RADEMACHER: Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. *Math. Ann.* 87 (1922), 112–138.

[Re] A. RENYI: *Calcul des probabilités.* Paris, Dunod, 1966.

[SKR] H. STEINHAUS, M. KAC & C. RYLL–NARDZEWSKI: Sur les fonctions indépendantes. *Studia Math.* 6 (1936), 46–58, 59–66, 89–97, 7 (1938), 1–15, 96–100, 9 (1940), 121–132, 10 (1948), 1–20, 11 (1949), 133–144, 12 (1951), 102–107, 13 (1953), 1–17.

[St1] H. STEINHAUS: Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure. *Fund. Math.* 4 (1923), 286–310.

[St2] H. STEINHAUS: Ueber die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürlich Grenze ist. *Math. Zeitschrift* 31 (1930), 408–416.

[We] K. WEIERSTRASS: *Zur Funktionenlehre.* Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, août 1880, 719–743.

[Wi1] N. WIENER: Differential space. *J. Math. and Phys.* 7 (1923), 131–174.

[Wi2] N. WIENER: Generalized harmonic analysis. *Acta Math.* 55 (1930), 117–258.

[Wi3] N. WIENER: The homogeneous chaos. *Amer. J. Math.* 60 (1938), 897–936.

[WSI] T.A. WITTEN & L.M. SANDER: Diffusion limited aggregation, a kinetic critical approach. Phys. Rev. Lett. 47 (1981), 1400–1463.

[WS2] T.A. WITTEN & L.M. SANDER: Diffusion limited aggregation. Phys. Rev. B. 27 (1983), 5686 - 5697.

[Zy] A. ZYGMUND: On a theorem of Hadamard. *Ann. Soc. Polon. Math.* 21 (1948), 52–69.

ترجمه: ارسلان شادمان
دانشگاه کردستان
achademan@gmail.com

JEAN - PIERRE KAHANE
Mathématique, Bât. 425
Université Paris - Sud
F - 91405 Orsay Cedex