فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۸ (بهار ۱۳۸٦) صص. ۳ تا ۳۵

جنبه‌های هندسی آنالیز تصادفی (بخش اول)

ک. دیوید اِلورثی

ترجمه: روح‌الله جهانی‌پور

مقدمه

شمارهٔ اول مجلهٔ Nagoya Math. Journal در سال ۱۹۵۰ منتشر شد و در همین شماره بود که مقالهٔ ک. ایتو[1] با عنوان «معادلات دیفرانسیل تصادفی روی خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر» به چاپ رسید. البته مقالهٔ قبلی ایتو که عنوانش «حرکت براونی روی گروه‌های لی» بود، پیش از آن در Proc. of the Japan Academy چاپ شده بود. واقعیت این است که پیش از ایتو افراد دیگری از جمله پرن[2] در سال ۱۹۲۸، فرآیندهای خمینه ـ مقدار و به‌طور کلی‌تر فرآیندهای گروه لی ـ مقدار را مورد بررسی قرار داده بودند و خود ایتو هم به این موضوع اذعان دارد. لکن ایتو توانست نظریهٔ انتگرال تصادفی را که خود او در دههٔ ۴۰ ارائه کرده بود، جهت توصیف دینامیک فرآیندهای نفوذ به‌کار بندد. با این همه، در واقع ایتو در سخنرانی سال ۱۹٦۲ در کنفرانس بین‌المللی ریاضیدان‌ها در استکهلم امکان ترکیب کردن ابزارهای هندسهٔ دیفرانسیل و آنالیز تصادفی را مطرح کرد، ولی عملاً این موضوع را هیچ کس تا انتهای دههٔ ٦۰ و اوایل دههٔ ۷۰ به‌طور جدی دنبال نکرد.

برای این که وضعیت را برای افرادی که تخصصی در نظریهٔ احتمال ندارند توصیف کنیم، ابتدا لازم است یادآوری کنیم که یک فرآیند تصادفی با فضای حالت M (که در بحث پیش‌گفتهٔ ما یک خمینهٔ هموار است)، خانواده‌ای است از مسیرهای $t \longrightarrow z_t(\omega)$ که پرمایشی با متغیر $\omega \in \Omega$ دارد و $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال است طوری که تابع $z_t : \Omega \longrightarrow M$ به ازای هر t اندازه‌پذیر است. بر مبنای الگوی کلموگروف[3] از نظریهٔ احتمال، اساساً «احتمال این‌که یک فرآیند به‌طور معینی رفتار کند» به کمک اندازهٔ (برحسب قانون احتمال $\mathbb{P}$) مجموعهٔ همهٔ مسیرهای $t \longrightarrow z_t(\omega)$ که بدان‌گونه

1) K. Itô 2) Perran 3) V. I. Kolmogorov

رفتار می‌کنند، محاسبه می‌شود. ردهٔ مهمی از فرآیندهای تصادفی آن‌هایی هستند که از دستگاه‌های دینامیکی عادی ناشی می‌شوند که نوعی اختلالات تصادفی بر آن‌ها حاکم است.به‌ویژه اختلالات از نوع به‌اصطلاح «نوفهٔ سفید»، به فرآیندهای نفوذ منجر می‌شوند. حقیقت ریاضی مهم دربارهٔ فرآیندهای نفوذ (و به‌طور کلی‌تر نیمه مارتینگل‌ها) که مطالعهٔ آنالیز تصادفی را هم اجتناب‌ناپذیر می‌کند و هم مملو آن را از قضیه‌های مهم می‌سازد، این است که به‌طور کلی نه تنها مسیرها دیفرانسیل‌پذیر نیستند، حتی به‌طور موضعی با تغییر کراندار هم نیستند. به همین دلیل است که معادلات عادی را نمی‌شود برای توصیف دینامیک آن‌ها به‌کار بست. باز درست به همین دلیل بود که ایتو حسابان خاص خود را ابداع نمود. (مقدمهٔ مرجع [SV] را ملاحظه کنید.)

انگیزه‌های متعددی در گسترش آنالیز تصادفی هندسی نقش داشته است. یکی از آشکارترین آنها این است که محیط زندگی دستگاه‌های دینامیکی تصادفی همچون دستگاه‌های دینامیکی عادی، خمینه‌ها هستند و این در عمل هم غالباً رخ می‌دهد. برای مثال، کارِ پرن که در بالا به آن اشاره شد، مربوط است به حرکت براونی روی گروه‌های دوران‌ها. حتی بیش از این‌ها می‌توان گفت و آن این که فرآیندهای نفوذ و نیمه مارتینگل‌ها، موجب ظهور اشیاء هندسی مرتبهٔ دومی می‌شوند (رجوع کنید به [Em]) که دست کم در مورد اولی، کار به هندسهٔ ریمانی و زیرریمانی ختم می‌شود که بهترین زبان هندسی برای توصیف رفتار این نوع فرآیندها است. در واقع ارتباط نزدیکی بین معادلات دیفرانسیل تصادفی و هموستارهای مُستوی روی زیرکلاف‌های کلاف مماس وجود دارد که هندسهٔ این موضوع نقش مهمی در تحلیل جواب‌های معادلات تصادفی بازی می‌کند.

به‌علاوه، روش‌های احتمالاتی ارتباط نزدیک‌تری بین جواب‌های معادلات حرارت، مثلاً معادلهٔ حرارت روی فرم‌ها، با هندسه به نمایش می‌گذارند که از روش‌های آنالیزی صرف مفیدترند. مثال ملموس در این مورد مسألهٔ تسلط نیمگروهی برای نیمگروه حرارت روی فرم‌ها است که تقریباً به سرعت از فرمول «فاینمن ــ کاتس[1]» نتیجه می‌شود. برای شرح بیشتر رجوع کنید به بخش ۳. به تعبیری، دیدگاه احتمالاتی در این زمینه فراگیرتر از برخی رویکردهای آنالیزی است، زیرا بعضی فرآیندهای نفوذ از قبیل حرکت براونی، در یک آن، روی کل خمینه پخش می‌شوند. به همین خاطر، فرض‌هایی از قبیل مثبت بودن انحناء یک خمینه می‌بایست «به‌طور متوسط» برقرار باشند؛ برای مثال اگرعملگر لاپـلاسی به عـلاوهٔ یک پتانسیل که کران پایینی برای انحنای ریچی[2] به دست می‌دهد، به عنوان عملگری روی L^2ی یک خمینهٔ فشرده M، مثبت باشد، آن‌گاه $\pi_1 M$ متناهی است [Li95]. این تعمیمی است از قضیهٔ کلاسیک میرز[3].

به‌طور کلی، روش‌های تصادفی خیلی طبیعی‌تر از دیگر روش‌ها، رفتار دستگاه‌های پیچیده را به ویژگی‌های پتانسیلی (در مورد معادلات عددی) بر روی خمینه‌های وابسته به آن‌ها ربط می‌دهند. مثالی دیگر از این گونه، کاری است که کندال در اواخر دههٔ ۷۰ آغاز نمود. او رویکرد احتمالاتی را

1) Feynman – Kac 2) Ricci 3) Myers

Kiyoshi Itô, 1982

در مطالعهٔ توابع همساز برگزید تا مسألهٔ عدم وجود تابع همساز غیرثابت $f : M \longrightarrow N$ را که در اینجا N خمینهٔ کارتان ــ آدامار[1] است به عدم وجود توابع همساز غیرثابت روی M مرتبط سازد. بخش ۶ را ببینید. در مورد نظریهٔ پتانسیل روی خمینه‌ها نظیر مسألهٔ دیریکله در بی‌نهایت یا شرایط مرزی مارتین، شهودی که از شناخت رفتار حرکت براونی روی خمینه‌ها در زمان‌های طولانی به دست می‌آید، اهمیت فراوان دارد[Ki95]. این جریان با کار ج. ج. پرات[2] در سال ۱۹۷۵ آغاز شد که ثابت کرد وقتی زمان به بی‌نهایت میل کند، حرکت براونی روی خمینه‌های کارتان ــ آدامار (که انحنایشان به دور از صفر و $-\infty$ کراندار است)، قریب به یقین به نقطه‌ای روی کره در بی‌نهایت، همگرا می‌شود. یکی از بهترین نمونه‌های کاربرد آنالیز تصادفی در این گونه مسائل، اثباتی است که د. مایکل[1] در ۱۹۷۶ ارائه کرد مبنی بر این‌که برای خمینه‌های فشردهٔ همبند ساده، همساز بودن سرتاسری، همساز بودن قوی را نتیجه می‌دهد [El81]. با این همه مشخص شده است که معمولاً روش‌های آنالیزی پیشرفته، بسیار مؤثرند.

ولی خوب! دو جای خاص هم وجود دارد که روش‌های تصادفی در آن‌ها تأثیر ویژه‌ای گذاشته‌اند. یکی آنجا که خمینه‌ها هموار نیستند یا این که ضرایب معادلات مورد بحث، غیرهموارند؛ و دیگری آنجا است که تلاش می‌کنیم فضاهای مسیری یا حلقوی روی خمینه‌های ریمانی را با ابزارهای نامتناهی ــ بعد بررسی کنیم. مورد اول را می‌توان بخشی از مطالعاتی دانست که در آن‌ها شرط هموری به‌عمد کنار گذاشته می‌شود. مثلاً وقتی هدف، بررسی ویژگی‌هایی است که تحت شبه ــ طولپایی‌ها ناوردا هستند[Ly91]؛ یا نتیجه‌ای که پ. لی[4] و کارپ[5] راجع به کار گافنی[6] به‌دست آوردند. او وجود حرکت براونی را روی خمینه‌های ریمانی کامل (معادلاً اگر P_t نیمگروه حرارت باشد، $P_t 1 = 1$ برای هر $t \geq 0$)ی بررسی کرده بود که به جای شرط استاندهٔ

1) Cartan – Hadamard 2) J. J. Perat 3) D. Michel 4) P. Li 5) Karp 6) Gaffney

Wilfried Kendall, 1993

یائو[1] یعنی از پایین کراندار بودن انحنای ریچی، شرایطی روی رشد حجمی آنها، جایگزین شده بود. البته روشی که فوکوشیما[2] برای بررسی فرم‌های دیریکله در اواخر دههٔ ٦٠ و دههٔ ٧٠ ارائه کرد نیز می‌تواند در این مورد مناسب باشد. رجوع کنید به $[FOT]$. آنالیز روی فضاهای بی‌نهایت بعدی به‌طور طبیعی در حوزه‌های گوناگونی از فیزیک ـ ریاضی مورد استفاده است. برای مثال در $[ADK]$ حاصل‌ضرب بینهایت فضای فشرده به عنوان فضای حالت در نظر گرفته شده است. همچنین رویکردی که بیسموت[3] در اوایل دههٔ ٨٠ در قضیه‌های شاخص انتخاب می‌کند، حاوی انگیزه‌های زیادی در استفاده از ابزارهای آنالیز نامتناهی ـ بعد روی فضاهای مسیری و حلقوی است. البته، محرک تحقیق دربارهٔ این موضوع فرمول انتگرال جزء به جزء درایور[4] است که آن را در اوایل دههٔ ٩٠ ارائه کرد[Dr92]. آنالیز نیمگروه‌ها نیز که اساساً به بکری[5] منتسب است، تأثیر زیادی در پیشرفت آنالیز نامتناهی ـ بعد داشته است (البته مطالب این حوزه به پرسش‌های متناهی ـ بعد هم پاسخ می‌دهد) [Tan94]. از این‌ها بگذریم، یکی از مسائل مشهور، نحوهٔ ارتباط آنالیز تصادفی با ساختارهای توپولوژیک بوده است که شرحی از آن را می‌توان مثلاً در [BGV] یا [Bud89] (یا برعکس) یافت.

در باقیماندهٔ این مقاله، هدف این است که بعضی از جنبه‌های آنالیز تصادفی هندسی را که از زمان سخنرانی ایتو در کنفرانس بین‌المللی ریاضیدانان به این طرف، بسط و گسترش یافته است با جزئیات بیشتری شرح دهیم.

حرکت براونی و معادلات دیفرانسیل تصادفی

الف. اگر بخواهیم به فلسفه‌ای که در پس این همه تحقیقات در حوزهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی

1) T. T. Yau 2) fukushima 3) Bismut 4) Driver 5) Bakry

در دوران ما، نهفته است پی ببریم، می‌بایست به برخی از جنبه‌هایی که ساختار غنی اندازهٔ وینر روی $\mathbb{R}^m$ یا به‌طور کلی‌تر اندازه‌های گاوسی دارند، اشاره کنیم. یادآوری می‌کنیم که حرکت براونی m ـ بعدی ($BM(\mathbb{R}^m)$) فرآیندی تصادفی $t \longrightarrow B_t(\omega)$ است با فضای حالت $\mathbb{R}^m$ و روی یک فضای احتمال داده شدهٔ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ که مسیرهای پیوسته دارد و نقطهٔ شروع آن معمولاً مبدأ است. ویژگی مشخصهٔ این فرآیند این است که اگر زمان‌های $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ و زیرمجموعه‌های برل $A_1, A_2, \cdots, A_k$ از $\mathbb{R}^m$ داده شده باشند، احتمال این‌که ذرهٔ براونی در زمان t_j در مجموعهٔ A_j واقع شود برابر است با

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{B_{t_j}\in A_j, \quad \forall j\} &= \mathbb{P}\{\omega\in\Omega : B_{t_j}(\omega)\in A_j, \quad \forall j\}\\ &= \int_{\mathbb{R}^m\times\cdots\times\mathbb{R}^m} \Pi_{i=1}^k p_{t_j-t_{j-1}}(x_{j-1},x_j)dx_j\end{aligned} \tag{1}$$

که در آن $x_0 = 0$ و $p_t(x,y) = (2\pi t)^{-m/2}\exp\left(-\frac{1}{2t}|x-y|\right)$. نسخهٔ متداول $BM(\mathbb{R}^m)$ به این ترتیب ساخته می‌شود که فضای Ω عبارت است از $C_0([0,\infty);\mathbb{R}^m)$ یعنی فضای همهٔ مسیرهای پیوسته در $\mathbb{R}^m$ که از مبدأ آغاز می‌شوند و اندازهٔ احتمال $\mathbb{P}$، اندازه‌ی برل $\mathbb{W}$ است که به اصطلاح اندازهٔ وینر نامیده می‌شود. خوب است که فقط تا یک زمان متناهی کار کنیم و از این رو Ω را فضای باناخ $C_0([0,T];\mathbb{R}^m)$ در نظر می‌گیریم همراه با اندازهٔ وینر $\mathbb{W}$. در این صورت $B_t(\sigma)=\sigma(t)$ برای هر $\sigma\in C_0([0,T];\mathbb{R}^m)$ یک حرکت براونی روی $\mathbb{R}^m$ است. در واقع به کمک ویژگی (۱) می‌توان $\mathbb{W}$ را طوری تعریف کرد که این مطلب خود به خود برقرار باشد. اندازهٔ وینر، نمونه‌ای از یک اندازهٔ گاوسی روی یک فضای باناخ است. اگر E یک فضای باناخ حقیقی جدایی‌پذیر باشد، یک اندازهٔ برل اکیداً مثبت γ روی E را گاوسی می‌نامیم اگر تبدیل فوریهٔ آن $\hat\gamma : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ به شکل زیر باشد:

$$\hat\gamma(l) = e^{-\frac{1}{2}|l|_H^2} \tag{2}$$

که در آن $|\cdot|_H$ نرم ناشی از ضرب داخلی $\langle .\,,.\rangle$ است که روی فضای دوگان E یعنی E^* تعریف می‌شود. کامل شدهٔ E^* با این نرم، یک فضای هیلبرت H است که موجب پیوستگی تابع شمول خطی $i : H \longrightarrow E$ می‌شود و نگاشت دوگان آن j نیز یک شمول $j : E^* \longrightarrow H$ است. در دههٔ ۶۰، گراس[1] فضای E همراه با شمول $i : H \longrightarrow E$ و اندازهٔ گاوسی متناظر آن‌ها، γ را فضای وینر مجرد نامید و بر مبنای آن نظریهٔ پتانسیلی را وضع کرد که در اواخر دههٔ ۶۰ و اوایل دههٔ ۷۰ توسط خود او و شاگردانش مورد مطالعه قرار گرفت. این‌طور به نظر می‌آید که اندازه‌های گاوسی علاوه بر این‌که در نظریهٔ احتمال و فیزیک ـ ریاضی اهمیت دارند بهترین جایگزین برای اندازهٔ لبگ در آنالیز نامتناهی ـ بعد باشند. در مورد اندازهٔ وینر، ساختار فضای مجرد وینر $\mathbb{W}$ با نگاشت شمول طبیعی فضای هیلبرت $H = L_0^{2,1}([0,T];\mathbb{R}^m)$ در فضای باناخ مذکور در فوق، معلوم می‌شود.

1) L. Gross

این فضای هیلبرت مرکب است از همهٔ مسیرهای $\sigma : [۰, T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ که مشتقشان تقریباً همه جا موجود است و در $L^۲([۰,T];\mathbb{R}^m)$ قرار دارد. به عبارت دیگر $\sigma(t) = \int_۰^t \sigma'(s)ds$ که $|\sigma|_H = \sqrt{\int_۰^T |\sigma(t)|^۲ dt}$، یعنی مسیرهایی با انرژی متناهی. فضای هیلبرت H نقشی اساسی ولی مرموز در تحلیل‌های متضمن γ بازی می‌کند؛ مثلاً خود γ را براساس (۲) معلوم می‌کند، زیرا هر اندازه‌ای با تبدیل فوریه‌اش مشخص می‌شود. با این حال

(i) γ ـ اندازهٔ مجموعهٔ $i(H)$ در E صفر است.

(ii) گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های اندازه صفر در E تحت انتقال به موازات عنصری چون v از E ناوردا است اگر و فقط اگر v در تصویر H قرار گیرد.

Lenard Gross, 1983

در مورد حرکت براونی کلاسیک، (i) مبین این حقیقت است که مسیرهای براونی انرژی متناهی ندارند و (ii) هم برگردانی است از قضیهٔ کامرون ــ مارتین[1]. به همین دلیل معمولاً H را فضای کامرون ــ مارتین منسوب به γ می‌نامند. نکتهٔ مهم در اینجا این است که دنباله‌ای از افکنش‌های متناهی ــ بعد $\{P_n : n = ۱, \cdots, \infty\}$ روی E وجود دارد که بردشان در $ij(E^*)$ واقع است و تحدیدشان به افکنش‌های متعامد روی H، به‌طور قوی به نگاشت همانی روی H همگرا است. به‌علاوه به عنوان نگاشت‌هایی روی E در احتمال به نگاشت همانی همگرا هستند. در مورد فضای وینر کلاسیک، این افکنش‌ها را می‌توان از خانوادهٔ تقریب‌های قطعه‌ای خطی $\{P_\pi :$ π افرازی از بازهٔ $[۰, T]$ است$\}$، انتخاب کرد که در آن $P_\pi(\sigma) = \sigma_\pi$ و به ازای $t_{j-۱} \leq t \leq t_j$،

$$\sigma_\pi(t) = (t_{j+۱} - t_j)^{-۱}((t - t_j)\sigma(t_{j+۱}) + (t_{j+۱} - t)\sigma(t_j))$$

و البته π افرازی است به شکل $\{۰ = t_۰ < t_۱ < \cdots < t_k = T\}$ برای بازهٔ $[۰, T]$. انتگرال‌گیری از تابعی از یک مسیر به کمک تقریب‌های $f \circ P_\pi$ درست همتای «برش زمانی» در تعریف انتگرال‌های

1) Cameron – Martin

مسیری فاینمن است که در آن به‌طور صوری به جای t در (۱)، «$\mathrm{i}t$» قرار گرفته است.

ب. برای خمینهٔ ریمانی M از ردهٔ C^{∞}، حرکت براونی $BM(M)$ روی M فرآیند M ـ مقداری است که مسیرهای پیوسته دارد، از نقطه‌ای چون $x_{\circ}$ روی M آغاز می‌شود و در ویژگی‌های مشخصه‌ای درست مشابه با آنچه دربارهٔ $BM(\mathbb{R}^m)$ در بالا گفتیم صدق می‌کند. به عبارت دیگر

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = -\frac{۱}{۲}\Delta f_t \tag{۳}$$

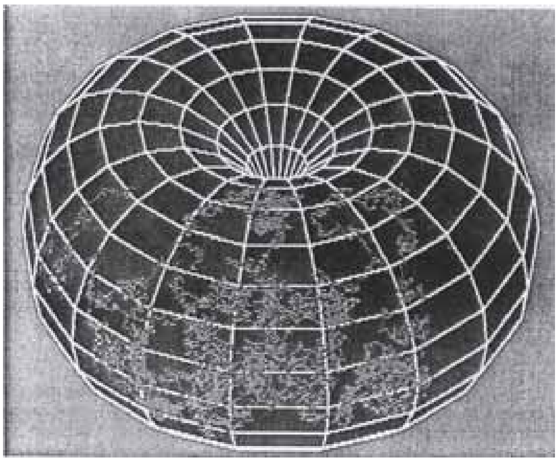
(۱) برقرار است (البته A_j زیرمجموعهٔ برل M است) و $p_t(x,y)$ در اینجا جواب اساسی معادلهٔ حرارت است که توابع در این معادله روی M تعریف می‌شوند و Δ عملگر لاپلاس ـ بلترامی[1] روی M است (البته Δ را به شکل $-\mathrm{div}\,\mathrm{grad}$ تعریف می‌کنیم تا بعداً با قواعد علامت‌گذاری هندسه‌دانان هم‌خوانی داشته باشد). به ویژه اگر $\{\xi_t(x_{\circ}) : t \geq ۰\}$ حرکت براونی روی M باشد که از نقطهٔ $x_{\circ}$ آغاز می‌شود، آن‌گاه نیمگروه $\{P_t : t \geq ۰\}$ که به صورت زیر روی توابع اندازه‌پذیر کراندار تعریف می‌شود:

$$P_t f(x_{\circ}) = \mathbb{E} f(\xi_t(x_{\circ})) \tag{۴}$$

دقیقاً نیمگروه حرارت است که مولد آن هم بستار عملگر $-\Delta$ است. معادلاً حرکت براونی روی M فرآیندی است مارکوف با مسیرهای پیوسته (یک فرآیند نفوذ) و توسط عملگر لاپلاس ـ بلترامی تولید می‌شود. ایرادی که بلافاصله می‌شود بر این تعریف $BM(M)$ وارد کرد این است که خوب ممکن است $BM(M)$ برای همهٔ زمان‌ها وجود نداشته باشد: در صورتی‌که M فشرده نباشد مثل یک گوی باز در $\mathbb{R}^m$، یا این‌که اگر انحنای خمینه از پایین کراندار نباشد، چنین وضعی رخ می‌دهد. این امکان، از دیدگاه آنالیزی این‌گونه رخ می‌نماید که برای نیمگروه حرارت داریم $P_۱ ۱ < ۱$؛ یعنی ممکن است فرآیند، ناپایستار یا زیرمارکفی باشد. در این صورت حرکت براونی روی M یک زمان انفجار مثبت $\zeta(x_{\circ},\omega)$ خواهد داشت که پس از آن یا دیگر وجود خارجی ندارد یا در نقطه‌ای خیالی در بی‌نهایت به خواب ابدی خواهد رفت. نمود آنالیزی دیگر برای چنین وضعیتی در فقدان یکتایی نیمگروه و جواب اساسی انعکاس می‌یابد (مثلاً، می‌توانستیم روی گوی شرایط مرزی نویمان را قرار دهیم که معادل با انعکاس حرکت براونی پس از برخوردش به مرز است). این جواب اساسی به تعبیری جواب می‌نیمال منسوب به مسألهٔ دیریکله در بی‌نهایت است. در [Az74] پاسخ به این سؤالات در مورد حرکت براونی و فرآیندهای نفوذ بیضوی کلی‌تر، به‌طور جامع داده شده است. به‌علاوه، محک‌هایی نیز برای بازگشتی یا گذرا بودن حرکت براونی ارائه شده است که منبعث از کارهای اولیه‌ای است که خازمینسکی[2] روی فرآیندهای نفوذ یک‌بعدی انجام داد.

---

1) Laplace–Beltrami   2) Khasminskie



حرکت براونی روی چنبره از دید سه بعدی

محک بنیادی مربوط به حرکت براونی روی خمینه‌های کاملی که انحنای ریچی آن‌ها از پایین کراندار است، این است که $t \geq ۰$، $P_t ۱ = ۱$ (و بنابر این $BM(M)$ انفجاری ندارد و این به کمال تصادفی موسوم است). اثبات آنالیزی این مطلب را یائو[۱] در سال ۱۹۷۸ ارائه داد. این نتیجه، از جنبهٔ احتمالاتی واضح به نظر می‌رسد: اگر $r_t = d(p, x_t)$ که در آن $x_t = \xi_t(x_۰)$ و $d(p, .)$ تابع فاصله از نقطهٔ ثابت p، $p \neq x_۰$ روی M است، در این صورت دست‌کم از اواسط دههٔ ۷۰ به این طرف معلوم شده است که (مثلاً رجوع کنید به $[DGM]$) بنابر فرمول ایتو

$$r_t = d(p, x_۰) + \beta_t - \frac{۱}{۲}\int_۰^t \Delta(d(p, .))(x_s)ds \qquad (۵)$$

در اینجا $\{\beta_t : t \geq ۰\}$ حرکت براونی استانده روی $\mathbb{R}$ است که لااقل تا زمان $\zeta(x_۰)$ امتداد دارد و $d(p, .)$ تابعی است از ردهٔ $C^۲$. از اینجا به‌سادگی نتیجه می‌شود که اگر $\Delta(d(p, .))$ از پایین کراندار باشد، r_t نمی‌تواند در زمان متناهی بی‌نهایت شود و همتای هندسی این شرط، از پایین کراندار بودن انحنای ریچی است. در این زمینه مرجع [Pin78] را ببینید. اما مسأله این است که تابع $d(p, .)$ خارج مجموعهٔ نقاط برش $C(p)$ از ردهٔ $C^۲$ است و پس از آن که حرکت براونی وارد این مجموعه می‌شود، دیگر رابطهٔ (۵) برقرار نیست.

معادلهٔ (۵) مبنای تحقیقات اولیهٔ بسیاری در دههٔ ۷۰ بوده است؛ مراجع [DGM]، [Pin78]، و [E181] را ببینید. از طرفی، خمینه‌های کارتان ــ آدامار (یعنی خمینه‌های همبند ساده با انحنای مثبت) نقاط برش ندارند و لذا می‌شد آن‌ها را در اثبات قضیهٔ پرات در سال ۱۹۷۵ دربارهٔ واگرایی حرکت براونی به بی‌نهایت به‌کار برد [Pin78].

1) S. T. Yau

با این حال مسألهٔ ضعیف‌تر کردن شرط مربوط به کران انحناء ماند تا این که هسو و کیفر[۱] در [Corn87] و کرانستون و دیگران در [Greg95] صورت مجردی از آن را برای خمینه‌هایی که در شرایط هذلولوی گروموف صدق می‌کنند، تشریح کردند. در ۱۹۸۷، کندال[۲] نشان داد که اگر یک «زمان موضعی[۳]» روی مکان برش هم به سمت راست رابطهٔ (۵) بیفزاییم صحت آن همچنان برقرار است. این جملهٔ اضافی، ناصعودی است تا این‌که مسیرها به مکان برش برخورد کنند که از آنجا به بعد نزولی می‌شود. در واقع این جمله، رشد r_t را کند می‌کند. شرح این مطلب در [Ken87] آمده است.

یک ویژگی خمینه‌های ریمانی کامل که از انحنایشان «کلی‌تر» است، رشد حجمی است. یعنی رفتار حجم گوی شعاع r، $V(r)$ حول نقطهٔ $x_\circ$ روی M، وقتی $r \longrightarrow \infty$. این رفتار با انحنای ریچی کنترل می‌شود لکن فقط برای متریک‌های غیرهموار معنی پیدا می‌کند. ارتباط بین رشد حجمی با رفتار حرکت براونی روی M (یا دست کم با مفاهیم همتای آنالیزی خودش) را یک وقتی گافنی در [Gaf59] بررسی کرده بود. او نشان داد که اگر همهٔ توان‌های $(\exp(-d(p,.))$ روی M انتگرال‌پذیر باشند، هیچ انفجاری رخ نخواهد داد. از آن سو، چنگ و یائو[۴] نشان دادند [ChY75] که اگر رشد $V(r)$ حداکثر درجه دوم باشد، حرکت براونی روی M بازگشتی خواهد بود. در اواسط دههٔ ۱۹۸۰، کارپ و لی[۵]، رابطهٔ بین رشد حجمی و عدم انفجار را در یک مقالهٔ منتشر نشده، شرح دادند که به دنبال آن تاکدا[۶] اثبات هوشمندانه‌ای برای آن به کمک فرآیندهای دیریکله، ارائه داد. به علاوه گریگوریان[۷] نشان داد [Grig86] که تصادفی ــ کامل بودن به شرطی برقرار است که $\int_\circ^\infty \frac{r}{\log V(r)} dr = \infty$.

Elton P. Hsu, 1992

1) Hsu and Kifer 2) W. Kendall 3) Local time 4) Cheng and Yau 5) Karp and Li
6) Takeda 7) Grigoryan

تحقیقات در زمینه‌هایی از قبیل عدم‌انفجار، بازگشتی بودن، گذرا بودن یا رفتار در بی‌نهایت دربارهٔ حرکت براونی روی M یا فرآیندهای نفوذ کلی‌تر، همچنان ادامه یافته است، البته نه صرفاً به خاطر رابطه‌ای که این موضوعات با نظریهٔ پتانسیل دارند. برای مثال رجوع کنید به [Az74]، [Corn95] و آنچه کیفر در [War85]، و واروپولوس در [Corn87] انجام داده‌اند. کار پرات همراه با کیفر و به دنبال آن سولیوان[1] منجر به حل مسألهٔ «دیریکله در بی‌نهایت» برای رده‌ای از خمینه‌های کارتان ــ آدامار شد (ساختن توابع همساز کراندار). قدم مهم دیگر را اندرسن و شوئن[2] در سال ۱۹۸۵ برداشتند که نشان دادند مرز مارتین (یا به عبارتی توصیف توابع همساز مثبت) با کره در بی‌نهایت برای خمینه‌های فوق یکی است. سپس آنکونا[3] این نتیجه را تعمیم داد، ساده ساخت و آن را در بستر هندسهٔ هذلولوی قرار داد[St-F188]. کیفر نیز دیدگاه احتمالاتی را برگزید[War85]. در مورد حرکت براونی روی فضاهای متقارن نیز کارهایی انجام شده است: از جمله دینکین[4] در دههٔ ۱۹۶۰ و به دنبال آن نوریس[5]، راجرز و ویلیامز[6] در سال ۱۹۸۶ و مالیوان[7] در سال ۱۹۷۴ که جی. سی. تیلور[8] آن را در دههٔ ۸۰ ادامه داد. می‌توانید مقالات پاول و راجرز و تیلور را در [Corn87] ملاحظه کنید. در واقع بررسی رفتار طولانی مدت حرکت براونی روی فضاهای متقارن گروه‌های لی نه تنها از غنای ذاتی برخوردار است، بلکه ارتباط نزدیکی با مبحث مهم مجانب‌های ماتریس‌های تصادفی و شارهای تصادفی و همچنین نظریهٔ ارگودیگ ضربی وابسته به آن دارد. مقالهٔ م. لیائو[9] در [Corn93] و مراجع مورد اشاره در آن را ببینید.

از اوایل دههٔ ۸۰ به این طرف، تحقیقات در زمینهٔ نظریهٔ ارگودیک ارتباط عمیقی با رفتار حرکت براونی و اندازه‌های پتانسیل وابسته به آن روی کره‌های در بی‌نهایت خمینه‌های کارتان ــ آدامار، به ویژه پوشش‌های خمینه‌های فشرده داشته است.

Michael Cranston, 1994

1) Sullivan 2) Anderson–Shoen 3) Ancona 4) Dynkin 5) Norris 6) Rogers and Williams 7) Malliavin and Malliavin 8) J. C. Taylor 9) M. Liao

در این زمینه می‌توانید به لدراپیر[1] در [Corn93] و [Kai90] رجوع کنید. این موضوع ارتباط نزدیکی با ویژگی‌های گروه‌های گسسته نیز دارد. رجوع کنید به واروپولوس در [Corn87]. رفتار کوتاه مدت حرکت براونی و هندسهٔ دیفرانسیل موضعی، عمدتاً در دههٔ ۸۰ در سلسله مقالاتی که پینسکی[2] و همکارانش نوشتند، ظاهر شد. آن‌ها بسط‌های مجانبی برای کمیت‌هایی از قبیل میانگین زمان خروج حرکت براونی از یک گوی ژئودزیک کوچک یا مقدار ویژهٔ اصلی همسایگی‌های لوله‌وار زیرخمینه‌ها، ارائه دادند. در این باره کارپ و پینسکی را در [Crn87] ببینید. معلوم شد که در حالت‌های معینی، جملات این بسط‌ها، هندسهٔ موضعی خمینه‌ها را مشخص می‌کند: پینسکی در [Dur90] را ببینید.

پ. ساختن حرکت براونی روی M، یا معادلاً اندازهٔ وینر متناظرش روی فضای مسیرهایی که از نقطهٔ $x_\circ \in M$ آغاز می‌شوند، یعنی فضای $C_\circ([\circ,T];M)$ یا $C_\circ([\circ,\infty);M)$ مشکل نیست. به فرض برقراری ویژگی بیان شده در معادلهٔ (۱)، وجود چنین حرکت براونی بلافاصله از قضیهٔ توسیع کلموگروف و خواص پیوستگی فرآیندهای مارکفی که دارای عملگر مولد دیفرانسیل‌پذیر هستند، نتیجه می‌شود. این مطلب حتی در مورد فرآیندهایی که مولد نیمه بیضوی کلی‌تری دارند برقرار است، منتهی این بار ممکن است جواب اساسی به صورت یک تابع وجود نداشته باشد و لذا در معادلهٔ (۱) می‌بایست به‌جای جملهٔ $p_t(x,y)dy$ اندازهٔ (احتمال گذر) $p_t(x,dy)$ را قرار دهیم. در پرداختن به متریک‌های ریمانی غیرهموار یا مولدهایی که ضرایب غیرهموار دارند، از یک طرف رویکرد «مارتینگلی» منتسب به استروک[3] و وارادان[4] وجود دارد که در اواخر دهه‌های ٦٠ و ۷۰ عرضه شد و در این باب می‌توانید فصلی را که د. ویلیامز در [Dur80] با عنوان « پنجاه سال معادلهٔ پیشرو[5] » نگاشته است یا مرجع [Az74] را مطالعه کنید. از طرف دیگر به‌خصوص دربارهٔ فرآیندهای نفوذ متقارن مثل حرکت براونی، نظریه‌ی فرم‌های دیریکله را داریم که فوکوشیما در دههٔ ۷۰ ارائه داد که روش مستقیمی برای ساختن حرکت براونی روی خمینه‌های M که ساختار ریمانی صرفاً پیوسته دارند، به‌دست می‌دهد[FOT]، [MR]؛ دربارهٔ فرآیند نفوذ روی خمینه‌های لیپشیتزی آنچه ژنگ[6] در [Corn93] نگاشته است و دربارهٔ فرآیندهای نفوذ روی رده‌ای از فضاهای متریک کار استورم در [Crete97] را ملاحظه کنید.

به کارگیری نظریهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی نه تنها رویکردی پویاتر در مطالعهٔ فرآیندهای نفوذ فراهم می‌آورد و در الگوسازی دستگاه‌های دینامیکی عادی هم دارای اهمیت است، بلکه ساختن مستقیم ساختارهای هندسی زیادی را از قبیل آن‌چه که ایتو در سخنرانی ۱۹٦۲ خود دربارهٔ انتقال‌های موازی تشریح کرد، بدون استفاده از تقریب‌ها امکان‌پذیر می‌سازد و به‌علاوه ارتباط مستقیمی هم بین فضای وینر تخت $C_\circ([\circ,T];\mathbb{R}^m)$ و مسیرهای واقع در M ایجاد می‌کند. به یاری رویکرد استراتونویچ[7] در حسابان تصادفی بود که پیچیدگی‌های هندسی ناشی از مشتقات مرتبهٔ دوم موجود در فرمول ایتو برطرف شد: با فرض این‌که شرایط هموار کافی برقرار است، انتگرال

1) Ledrappier 2) Pinsky 3) Stroock 4) Varadan 5) Fifty years of the forward equation
6) Zheng 7) Stratonovich

L. C. G. Rogers, 1993

ایتوی یک فرآیند $\mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ ـ مقدار $\{a_t \,:\, t \geq ۰\}$ نسبت به حرکت براونی $BM(\mathbb{R}^m)$ با نماد $\{B_t \,:\, t \geq ۰\}$ عبارت است از

$$\int_۰^t a_s(.)dB_s(.) \;=\; L^۲ - \lim \sum_j a_{t_j}(.)(B_{t_{j+۱}}(.) \;-\; B_{t_j}(.)) \;:\; \Omega \to \mathbb{R}^p$$

که در اینجا حد وقتی طول بزرگترین زیربازهٔ افراز $۰ = t_۰ < t_۱ < \cdots < t$ به صفر میل کند محاسبه می‌شود. فرمول ایتو مربوط است به ترکیب این فرآیند با یک نگاشت $\phi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ از ردهٔ $C^۲$، به این ترتیب که اگر قرار دهیم $z_t = \int_۰^t a_s dB_s$ و با حذف نمایش وابستگی به $\omega \in \Omega$ داریم

$$\phi\left(\int_۰^t a_s dB_s\right) = \phi(۰) + \int_۰^t D\phi(z_s)(a_s dB_s) + \frac{۱}{۲}\int_۰^t D^۲\phi(z_s)(a_s dB_s \,,\, a_s dB_s)$$

که در اینجا بر مبنای قاعدهٔ ضرب ایتو $dB_s^i dB_s^j = \delta_{ij} ds$، تعبیر جملهٔ مرتبهٔ دوم به صورت $\frac{۱}{۲}\int_۰^t \mathrm{trace} D^۲\phi(z_s)(a_s- \,,\, a_s-)ds$ است که البته وجودش به این خاطر این است که مسیرهای حرکت براونی با تغییر کراندار نیستند. از طرف دیگر نظیر همین دستور در مورد انتگرال استراتونویچ به این صورت است:

$$\int_۰^t a_s(.) \circ dB_s(.) \;=\; L^۲ - \lim \sum_j a_{(t_j+t_{j+۱})/۲}(.)(B_{t_{j+۱}}(.) \;-\; B_{t_j}(.)) \;:\; \Omega \to \mathbb{R}^p$$

و همچنین

$$\phi\left(\int_۰^t a_s \circ dB_s\right) = \phi(۰) + \int_۰^t D\phi(z_s)(a_s \circ dB_s)$$

که در اینجا z_s انتگرال استراتونویچ است.

معادلهٔ استراتونویچ روی یک خمینهٔ M که از حرکت براونی $BM(\mathbb{R}^m)$ ناشی می‌شود، عبارت است از

$$dx_t = X(x_t) \circ dB_t + A(x_t)dt \qquad (٦)$$

که در آن A یک میدان برداری است و برای هر x در M، $X(x) \in L(\mathbb{R}^m; T_xM)$، یعنی فضای نگاشت‌های خطی از $\mathbb{R}^m$ به‌توی فضای مماس بر M در نقطهٔ x. جواب این معادلهٔ دیفرانسیل فرآیند Mـ مقدار x_t است به طوری که در هر نقشهٔ موضعی در معادلهٔ انتگرالی استراتونویچ حاصل از به‌کاربردن نمایش‌های X و A در آن نقشه، صدق می‌کند. این مطالب نخستین بار در ۱۹۷۳ مطرح شد [Cl] و تا سال ۱۹۹۴ مخصوصاً در بین فیزیکدانان نظری که به انتگرال‌گیری‌های مسیری روی فضاهای خمیده علاقه‌مندند، رایج بود [Cumb74].

Daniel Stroock, 1988

معادلات استراتونویچ از نوع (٦) را می‌توان به کمک تقریب‌های قطعه‌ای خطی P_π که پیش از این معرفی کردیم نیز توصیف نمود. به ازای هر $\omega \in \Omega$ فرض کنید $B_t^\pi(\omega) = P_\pi(B_\cdot(\omega))(t)$. معادلهٔ دیفرانسیل زمان ـ وابستهٔ زیر را در نظر می‌گیریم که با $\omega \in \Omega$ پرمایش می‌شود:

$$\frac{dx_t^\pi}{dt}(\omega) = X(x_t^\pi(\omega))\frac{dB_t^\pi}{dt}(\omega) + A(x_t^\pi(\omega)) \qquad (٧)$$

در اینجا $x_\circ^\pi(\omega) = \circ$ به ازای یک $x_\circ \in M$ داده شده. با فرض این‌که X از ردهٔ $C^۲$، A از ردهٔ $C^۱$ و M خمینه‌ای فشرده است یا با فرض کرانداری مشتقات X و A در حالتی که $M = \mathbb{R}^m$، معادلات (٧) جواب دارند و حد در احتمال

$$x_t = \lim_\pi x_t^\pi : \Omega \longrightarrow M$$

به طور یکنواخت نسبت به t روی بازه‌های کراندار وجود دارد و جواب معادلهٔ (٦) است. استفاده از این دست تقریب‌ها برمی‌گردد به کارهای وانگ و ذاکایی [1] در ١٩٦٥ که پس از آن‌ها مک‌شین [2] و استروک و وارادان این روش‌ها را گسترش دادند. این مطالب را ایلز [4] و الورثی به روی خمینه‌ها هم منتقل کردند [NWest78]، [El] و مالیوان با اصلاحاتی آن‌ها را مورد استفاده قرار داد [Mal78]. به زبان فضای کامرون ــ مارتین $H = L^{2,1}_{x_0}([0,T];\mathbb{R}^m)$ که قبلاً معرفی شد، هر h در H یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی روی بازهٔ $0 \leq t \leq T$ به صورت زیر به‌دست می‌دهد:

$$\frac{d}{dt}\tilde{I}_t(h) = X(\tilde{I}_t(h))h'(t) + A(\tilde{I}_t(h)), \qquad \tilde{I}_0(h) = x_0. \tag{٨}$$

به این ترتیب، یک نگاشت $\tilde{I} : H \longrightarrow L^{2,1}_{x_0}([0,T];M)$ از فضای H به توی فضای $L^{2,1}$ همهٔ مسیرهایی در M که از نقطهٔ x_0 شروع می‌شوند، به‌دست می‌آید. اگر X و A هموار باشند این نگاشت، نگاشتی C^∞ بین خمینه‌های هیلبرتی خواهد بود. اکنون با به‌کار بردن قضیه‌های مربوط به تقریب، ترکیب نگاشتی

$$C_0([0,T];\mathbb{R}^m) \xrightarrow{P_\pi} H \xrightarrow{\tilde{I}} L^{2,1}_{x_0}([0,T];M) \longrightarrow C_{x_0}([0,T];M)$$

را به‌دست می‌آوریم که وقتی نرمِ افراز Π به صفر میل می‌کند، در احتمال به حد I_0 همگرا می‌شود که در اینجا $\{I_t : t \geq 0\}$ جوابِ معادلهٔ (٨) است با انتخاب صورت کانونی برای حرکت براونی $BM(\mathbb{R}^m)$. در حالت کلی نگاشت I اندازه‌پذیر است و خارج یک مجموعهٔ اندازه ــ صفر تعریف شده است و جز در موارد خاص مثل حالت $m = 1$ نمی‌تواند پیوسته باشد. این را نگاشت ایتو وابسته به معادلهٔ (٦) می‌نامند.

اکنون فرض کنیم که X و A از ردهٔ C^∞ باشند. در این صورت برای هر x_0، معادلهٔ (٦) جوابی دارد که خارج یک مجموعهٔ اندازه ــ صفر تعریف شده، نسبت به زمان پیوسته است و سازگار است به این معنی که برای هر t، x_t نسبت به σــ جبر تولید شده توسط $\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$ اندازه‌پذیر است اما ممکن است صرفاً تا یک زمان انفجار $\zeta(x_0) : \Omega \longrightarrow (0,\infty]$ تعریف شده باشد که در ضمن اگر $\zeta(x_0)(\omega) < \infty$ آن‌گاه وقتی $t \uparrow \zeta(x_0)(\omega)$ داریم $x_t(\omega) \to \infty$. اگر برای تقریباً هر $\omega \in \Omega$ داشته باشیم $\zeta(x_0)(\omega) = \infty$، آن‌گاه معادله را کامل یا پایستار(با شروع از x_0) می‌خوانیم. به کمک این جواب‌ها، نیمگروه $\{P_t : t \geq 0\}$ ساخته می‌شود که روی توابع اندازه‌پذیر کراندار $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ اثر می‌کند به صورت

$$P_t(f)(x_0) = \mathbb{E}f(x_t)$$

تعریف می‌شود. عملگر مولد $\mathcal{A}$ برای این نیمگروه که روی توابع از ردهٔ C^2 تعریف می‌شود، عبارت است از

$$\mathcal{A}(f)(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \mathcal{L}_{X^j}\mathcal{L}_{X^j} f + \mathcal{L}A(f). \tag{٩}$$

---

1) Wong & Zakai 2) McShane 3) Eells

که در اینجا $X^{1},\cdots,X^{m}$ عبارت‌اند از میدان‌های برداری $X^{j}(x)=X(x)e_{j}$ و $e_{1},\cdots,e_{m}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای $\mathbb{R}^{m}$ است. به علاوه $\mathcal{L}$ عملگر مشتق‌گیری لی است، یعنی مشتق‌گیری در جهت میدان برداری داده شده: $\mathcal{L}_{A}(f)(x)=df(A(x))$ برای هر $x\in M$. در واقع تعریف انعطاف‌پذیرتر دیگری که برای جواب‌های (۶) وجود دارد و در $[IW]$ از آن استفاده شده است، این است که $\{x_{t}\ :\ 0\leq t<\rho\}$ جواب است اگر برای هر تابع C^{2} مانند $f\ :\ M\longrightarrow\mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x_{t})=f(x_{0})+\int_{0}^{t}df(X(x_{s})dB_{s})+\int_{0}^{t}\mathcal{A}(f)(x_{s})ds,\qquad (10)$$

تقریباً همه جا برای $0\leq t<\rho$. براحتی می‌توان دید که $\mathcal{A}$ یک عملگر دیفرانسیل مرتبهٔ دوم نیمه‌ـ بیضوی است و بیضوی است در صورتی که میدان برداری X ناتبهگون باشد به این معنی که برای هر $x\in M$، نگاشت $X(x)\ :\ \mathbb{R}^{m}\to T_{x}M$ پوشا باشد. در چنین صورتی یک متریک ریمانی روی M مشخص می‌شود که ضرب داخلی آن عبارت است از $\langle\,,\rangle_{x}=\langle\,,\rangle_{x}^{X}$ که همان ضرب داخلی استانده روی $\mathbb{R}^{m}$ است تقسیم بر $X(x)$. عملگر $\mathcal{A}$ را برحسب هموستار لوی ـ چیویتا ∇ برای این متریک می‌توان به صورت

$$\mathcal{A}=-\frac{1}{2}\Delta+\mathcal{L}_{A^{x}},$$

نوشت که در آن $A^{x}=A+\frac{1}{2}\sum_{j}\nabla_{X^{j}}X^{j}$. به‌ویژه، جواب‌ها نسبت به این متریک، حرکت براونی خواهند بود اگر وفقط اگر $A^{x}\equiv 0$.

چند مثال: اصلی‌ترین مثال‌های هندسی در مورد مطالب پیش‌گفته از این قرارند:

۱. دستگاه‌های گرادیانی : فرض کنید خمینه‌ی M در $\mathbb{R}^{m}$ غوطه‌ور شده باشد. نگاشت $X(x)\ :\ \mathbb{R}^{m}\longrightarrow T_{x}M$ را افکنش متعامد تعریف می‌کنیم. در این صورت $X^{j}(x)=\text{grad}\alpha^{j}(x)$ که در آن $\alpha=(\alpha^{1},\cdots,\alpha^{m})\ :\ M\longrightarrow\mathbb{R}^{m}$ غوطه‌ور سازی مربوطه است. با فرض $A\equiv 0$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی حاصل حرکت براونی روی M است. در این باره و صورت‌های دیگر آن رجوع کنید به [El]، [El87] و [RW].

۲. دستگاه‌های چپ (راست) ـ ناوردا روی گروه‌های لی: فرض کنید $M=G$ یک گروه لی باشد و X چپ ـ ناوردا است به این معنی که $X(gx)e=TL_{g}(X(x)e)$ به ازای هر $e\in\mathbb{R}^{m}$، $x\in G$، $g\in G$، که در آن L_{g} عمل ضرب از چپ در g و TL_{g} نگاشت مشتق القایی روی فضاهای مماس است. در این وضعیت، X با مقدارش در عنصر همانی به‌طور کامل معین می‌شود. اگر X ناتبهگون باشد و متریک چپ ـ ناوردایی که القاء می‌کند، راست ـ ناوردا هم باشد، آن‌گاه $A\equiv 0$ و جواب‌های معادله دوباره حرکت براونی خواهند بود. این، طبیعی‌ترین روشی است که می‌توان برای ساختن حرکت براونی روی گروه‌های لی فشرده به‌کار برد. جواب‌های معادله‌ای از این دست معمولاً به‌عنوان انتگرال ضربی تصادفی در نظر گرفته می‌شوند[۱۶]. مثال مهم تبهگون در این زمینه معادله‌ای است

روی گروه هایزنبرگ[1] که در [Gav77] مطالعه شده است. این مثال از نوع غیر بیضوی است. بخش ۵ مقالهٔ حاضر را نیز نگاه کنید.

۳. توسعهٔ تصادفی: برای یک خمینهٔ ریمانی M هیچ معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی کانونی که جواب‌هایش حرکت براونی باشند وجود ندارد. با این حال روی کلاف OM متشکل از همهٔ چارچوب‌های متعامد یکه روی M، هموستار لوی ـ چیویتا، یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی به شکل

$$du_t = X(u_t) \circ dB_t \qquad (11)$$

به دست می‌دهد که برای هر چارچوب متعامد یکه u (یعنی طولپایی $u : (\mathbb{R}^m, \langle\rangle) \longrightarrow (T_xM, \langle\rangle)$) در نقطهٔ $x \in M$، $X(u)e$ انتقال افقی $u(e)$ به توی T_uOM است (در اینجا $m = n = \dim M$). اگر $x_\circ \in M$ و یک چارچوب $u_\circ$ را در $x_\circ$ تثبیت کنیم، می‌توانیم معادلهٔ (۱۱) را حل کنیم و u_t را به دست آوریم. سپس با تصویر کردن روی M، فرآیند $\{x_t : \circ \leq t < \rho(u_\circ)\}$ به دست می‌آید که گرچه به $u_\circ$ وابسته است لیکن همواره یک حرکت براونی روی M خواهد بود. این مطلب، صورت تصادفی قضیهٔ گسترش کارتان است که غلطیدن یک جسم صلب را در امتداد یک خم، بدون سُر خوردن یا هرزگردی توصیف می‌کند. در واقع، جریان از این قرار است که اگر در (۱۱) به جای $B_\circ(\omega)$، مسیر هموارتری مثل $h \in H$ را قرار دهیم، آن‌گاه جواب $\tilde{I}_\circ(h)$ مسیر حرکت نقطه‌ی تماس M را با $\mathbb{R}^m$ نشان می‌دهد وقتی که M در امتداد خم h پس از «افتادن روی $\mathbb{R}^n$»، می‌غلطد. البته این عمل با دخالت چارچوب $u_\circ$ که $T_{x_\circ}M$ را با $\mathbb{R}^n$ یکی می‌کند، صورت می‌پذیرد. این مسأله‌ای در علم حرکت شناسی بود که الی کارتان[2] آن را حل کرد. مطالعهٔ شکل تصادفی این مسأله برمی‌گردد به سال ۱۹۶۴ [Gan] و همچنین ایلز و الورثی در اوایل دههٔ ۷۰ آن را به کمک معادلهٔ (۱۱)، صورتبندی کردند. فرآیند $\{u_t : t \geq \circ\}$ را می‌توان انتقال افقی حرکت براونی روی M دانست که از اوایل دههٔ ۷۰ به این طرف، مالیوان و شاگردانش آن را به‌طور سازمان‌یافته‌ای فی‌المثل در توصیف معادلهٔ حرارت برای فرم‌ها، به خدمت گرفته‌اند [Mall74]، [Air76] و [Mer]. وقتی که u_t را داشته باشید، انتقال موازی $// : T_{x_\circ}M \longrightarrow T_{x_t}M$ در امتداد مسیر x را هم دارید که به این صورت تعریف می‌شود: $//_t = u_t \circ u_\circ^{-1}$. استفاده از صورت‌بندی مسأله به شکل (۱۱) این امکان را فراهم می‌آورد که این ساختارها را بدون توسل به فرآیند تقریب که ایتو در سال ۱۹۶۲ معرفی کرد، به انجام برسانیم. به‌کارگیری نتایج تقریب مزبور به این معنی است که می‌توانیم از تمامی قواعد حسابان کوواریان سود جوییم حتی اگر به‌جای مسیرهای هموار روی M از مسیرهای نمونه‌ای حرکت براونی یا فرآیندهای نفوذ کلی‌تر و یا حتی نیمه‌مارتینگل‌های پیوسته استفاده کنیم، مشروط بر این‌که جملات مشتمل بر مشتق‌های این مسیرها را بر حسب دیفرانسیل‌های استراتونویچ بیان کنیم: این همان «اصل انتقال» مالیوان است.

گسترش تصادفی، یک نگاشت حافظ اندازه از فضای وینر کلاسیک روی $\mathbb{R}^m$ به توی فضای وینر مرکب از همهٔ مسیرهای پیوسته‌ای که از $x_\circ$ روی M آغاز می‌شوند همراه با اندازهٔ ناشی از

1) Heisenberg 2) E. Cartan

حرکت براونی روی M، به دست می‌دهد:

$$\mathcal{D} \,:\, C_0([0,T];\mathbb{R}^m) \longrightarrow C_{x_0}([0,T];M)$$

این نگاشت، به تعبیری یک یکریختی بین این فضاها است و تعریفش طوری است که صرفاً نگاشتی است اندازه‌پذیر که خارج یک مجموعه اندازه صفر اعتبار دارد. به علاوه به یک معنی توسیعی است از گسترش کارتان و یک وابرریختی[1] C^∞ را بین فضای هیلبرت $H = L_0^{2,1}([0,T];\mathbb{R}^m)$ و خمینهٔ هیلبرتی متناظرش $H = L_{x_0}^{2,1}([0,T];M)$ ارائه می‌دهد. با این حال، اندازهٔ این زیرفضاها صفر است. یکی از اصلی‌ترین مسائل در گسترش آنالیز تصادفی این بوده که چگونه بین این واقعیات یا چیزهایی شبیه آن‌ها در حوزه‌های گوناگون ارتباط ایجاد کنیم.

شرحی از تقریب‌های متناهی ــ بعد اندازهٔ وینر روی $C_{x_0}(M)$ در مرجع $[AnDr]$ یافت می‌شود. در $[Str]$ هم توصیفی شهودی از این مطالب ارائه شده است.

ت. یکی از پیشرفت‌هایی که اخیراً صورت گرفته رویکردی است که لیونز[2] در مطالعهٔ معادلات از نوع استراتونویچ به‌کار گرفته است. در این رویکرد جواب‌های مسیروار با این شرط به‌دست می‌آیند که نوفهٔ موجود در معادله (در اینجا مسیرهای براونی) به همراه «انتگرال‌های مساحت[3]» که در شرایط طبیعی معینی صدق می‌کنند، داده شده باشد. در این وضعیت، احتمالات فقط به مثابه ابزاری برای ساختن این انتگرال‌ها رخ می‌نماید. اساساً نگاشت‌های ایتو (یعنی نگاشت‌های جواب) توابعی پیوسته از این مسیرها وانتگرال‌های مساحت وابسته به آن‌ها هستند. در حالت کلاسیک مسیرهای براونی، مساحت لوی است که مورد استفاده قرار می‌گیرد، لیکن برای مسیرهایی کلی‌تر از مسیرهای براونی، مثل آن‌هایی که پیوستهٔ هلدر هستند، از انتگرال‌های مساحت مرتبهٔ بالاتری متضمن انتگرال‌های مکرر استفاده می‌شود. جزئیات کامل در $[Ly]$ آمده است.

Mark Freidlin, 1994

1) diffeomorphism 2) Lyons 3) area integrals

شار جواب برای معادلات دیفرانسیل تصادفی

الف. در قیاس با دستگاه‌های دینامیکی عادی، می‌توان انتظار داشت که معادله‌ای نظیر (۶)، شار جوابی چون $\xi_t(x)(\omega)$ داشته باشد که تا یک زمان تصادفی $\zeta(x) : \Omega \to (0,\infty]$، $x \in M$، تعریف شده است؛ به این معنی که $\{\xi_t(x) : 0 \leq t < \zeta\}$ جوابی برای معادلهٔ (۶) با شرط اولیهٔ $\xi_0(x) = x$ باشد و $\xi_.(\,.\,)(\omega)$ به ازای تقریباً هر $\omega \in \Omega$ نسبت به (t,x) پیوسته و شاید هم نسبت به $x \in D_t(\omega) = \{y \in M : t < \zeta(y)(\omega)\}$ که زیرمجموعهٔ بازی از M است، هموار باشد. در ۱۹۶۱، بلاگوویشنسکی[1] و فریدلین[2] توانستند با استفاده از محک پیوستگی کلموگروف نشان دهند که اگر $M = \mathbb{R}^n$ و مشتقات X و A کراندار باشند، آن‌گاه چنین حکمی برقرار است. در این حالت، شار به ازای تمامی زمان‌ها وجود دارد، یعنی می‌توان آن را طوری انتخاب کرد که $\zeta(x)(\omega) = \infty$ برای هر x و تقریباً هر $\omega \in \Omega$. در صورتی که چنین شاری موجود باشد معادلهٔ (۶) را قویاً کامل یا اکیداً پایستار می‌نامیم. توجه کنید که جوابی از معادلهٔ (۶) که از نقطهٔ x آغاز می‌شود تنها در حد تغییرات روی یک مجموعهٔ اندازه ــ صفر یکتا است. به خاطر همین برای ساختن شار می‌بایست برای هر x یک برگردان از جواب را انتخاب کنیم (و خوب تعداد ناشمارایی از این برگردان‌ها وجود دارند، چون تعداد ناشمارا x داریم). ولی یکی از ویژگی‌های بارز این واقعیت وجود معادلاتی (مثلاً روی $\mathbb{R}^2$) است که کامل‌اند اما قویاً کامل نیستند و لذا $\zeta(x) = \infty$ تقریباً همه‌جا برای هر x اما نمی‌توان ζ را طوری انتخاب کرد که $\zeta(x) = \infty$ تقریباً همه‌جا برای تمامی xهامعتبر باشد. دراین باره می‌توانید مراجع [El]، و [Kun] را ملاحظه کنید و همچنین سری هم بزنید به [Li94] که در آن محک‌هایی برای قویاً کامل بودن ارائه شده است. پس می‌بینید که هنوز هم درک کاملی از این مسأله وجود ندارد. از میانهٔ دههٔ ۱۹۷۰ تا انتهای آن، روش‌های بلاگوویشنسکی و فریدلین را افرادی چون مالیوان و بکسندیل[3] مجدداً کشف کردند. برای این منظور، مالیوان از روش منظم‌سازی حرکت براونی سود جست. از سوی دیگر، الورثی با به‌کارگیری رویکردی که ابین و مارسدن[4] در بالابری معادلات دیفرانسیل عادی به گروه وابرریختی‌ها استفاده کرده بودند، توانست بر مسألهٔ انتخاب برگردان برای جواب فائق آید (در واقع جواب معادلهٔ بالا برده شده عبارت است از شار جواب برای معادلهٔ (۶)) و با به‌کار بردن حسابان تصادفی روی خمینهٔ هیلبرتی سوبولف H^sــ وابرریختی‌های M، به ازای s به اندازهٔ کافی بزرگ، نتایج گوناگون مربوط به تقریب‌ها و ترکیب‌ها را روشن سازد. پس از آن بیسموت[5] و کونیتا[6] [Dur80] جریان کار را به پیش راندند: ویژگی وابرریختی شارهای جواب برای معادلات روی $\mathbb{R}^n$ با شرایط لیپشیتز سراسری را ثابت کردند و به علاوه نشان دادند که این ویژگی لزوماً در حالت کلی برقرار نیست حتی اگر معادله، قویاً کامل باشد. گذشته از این‌ها وجود شارهای موضعی برای خمینه‌های نافشرده را نیز ثابت نمودند [Kun].

1) Blagoveschenskii 2) Freidlin 3) Baxendale 4) Ebin & Marsden 5) Bismut
6) Kunita

Yves Le Jan, 1999

کنفرانس درام[1] در ۱۹۸۰ [Dur80] تأثیر بسزایی بر تحقیقات در این زمینه و حوزه‌های متعدد دیگر گذاشت و این به خاطر ارتباطی بود که مطالب آن با حسابان مالیوان داشت.

ب. اکنون فرض کنید که M خمینه‌ای است فشرده. بکسندیل در [Bax84] نشان داد که «حرکت‌های براونی» روی گروه وابرریختی‌های M، شارهای جواب معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی روی Mاند. به علاوه او با گسترش دادن نتایجی که هانت[2] در همان موقع‌ها دربارهٔ رده‌بندی این دست از فرآیندها روی گروه‌های لی متناهی ـ بعد به دست آورده بود، نشان داد که اساساً این‌ها شارهای جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی‌اند لیکن نوفهٔ موجود در معادله ممکن است یک حرکت براونی نامتناهی ـ بعد متناظر با یک اندازهٔ گاوسی روی فضای میدان‌های برداری روی M (فضای مماس بر $\mathrm{Diff}M$ در عنصر همانی) باشد، درست همان‌طور که $BM(\mathbb{R}^m)$ با اندازهٔ گاوسی استاندهٔ $\mathbb{R}^m$ در تناظر است. در این وضعیت، به جای $\mathbb{R}^m$ در معادلهٔ (٦) فضای میدان‌های برداری و به جای $X(x)$ ارزیابی در نقطهٔ x قرار می‌گیرد. پیشرفت‌های بیشتر را در این زمینه لی جان و واتانابه[3][Tan82] و کونیتا[Kun] به کمک معادلات دیفرانسیل تصادفی ناشی از مارتینگل‌های فضایی ـ تعمیم‌یافته، صورت دادند.

پ. مطالعهٔ توان‌های لیاپانوف برای معادلات دیفرانسیل تصادفی خطی و ویژگی‌های پایداری مربوط به آن را خازمینسکی در اواخر دههٔ ٦۰ آغاز نمود. سپس از اواخر دههٔ ۷۰ به این طرف، آرنولد و همکارانش پایدارسازی و ناپایدارسازی به کمک نوفه را با استفاده از قضیهٔ ارگودیک ضربی اسلدتس[4] شرح و بسط دادند. از میانهٔ دههٔ ۷۰ تا انتهای آن پسین[5] و روئل[6] بر روی نظریهٔ ارگودیک هموار کار کردند که در حالت تعینی روش‌های اسلدتس در مطالعهٔ دستگاه‌های دینامیکی غیرخطی را به‌کار می‌برد: توان‌های لیاپانوف منفی پایداری را نتیجه می‌دهند و توان‌های مثبت

1) Durham 2) Hunt 3) Le Jan & Watanabe 4) Oseledec 5) Pesin 6) Ruelle

«وابستگی حساس نسبت به شرایط اولیه» را، که این همان رفتار آشوبی است. پس از آن در ۱۹۸۰ آرنولد مسألهٔ توسیع این نتایج به معادلات دیفرانسیل تصادفی غیرخطی را مطرح ساخت که چند سال بعد، کارورهیل [1] آن را با موفقیت حل نمود و از آن نتایج مستقیمی دربارهٔ معادلات ناتبهگون روی خمینه‌های فشرده به‌دست آورد. برای مثال در این حالت بزرگترین توان لیاپانوف λ_1 قریب به یقین به ازای تقریباً هر $x_0 \in M$ از دستور

$$\lambda_1 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log |T_{x_0}\xi_t|$$

به‌دست می‌آید که در آن $T_{x_0}\xi_t \,:\, T_{x_0}M \longrightarrow T\xi_t(x_0)M$ مشتق شار جواب معادلهٔ (۶) است. این توان، مستقل از x_0 و $\omega \in \Omega$ است. اگر λ_1 منفی باشد، خمینهٔ پایدار $U(x_0,\omega)$ با تعریف

$$U(x_0,\omega) = \{y \in M \,:\, \lim_{t\to\infty} \log d(\xi_t(x_0,\omega), \xi_t(y,\omega)) \leq \lambda_1\}$$

که همسایگی باز تصادفی از x_0 وجود دارد، (مجدداً برای تقریباً هر (x_0,ω) در مجموعهٔ $M \times \Omega$). مجموعه مقالات کنفرانس ۱۹۸۴ برمن، حاوی مروری تاریخی بر این مطالب و مقالات مربوط به آن است [Brem84].

توان‌های لیاپانوف برای معادلاتی که به‌طور هندسی تعریف می‌شوند، ناورداهای هندسی‌اند. در حالت کلی محاسبه یا حتی برآورد آن‌ها آسان نیست. با این حال چاپل [2] نشان داد که مثلاً در مورد خمینهٔ فشردهٔ M که در $\mathbb{R}^m$ غوطه‌ور شده است، میانگین این توان‌ها برای دستگاه گرادیانی القایی از بالا به مقدارویژهٔ پیشرو عملگر $-\frac{1}{2}\Delta$ کراندار است. در این باب می‌توانید مقالهٔ او در [Brem84] و یا مرجع [El87] را ملاحظه کنید. همهٔ توان‌های لیاپانوف مربوط به شار کانونی روی کلاف چارچوبی S^n برابر صفرند در حالی که توان‌های لیاپانوف مربوط به خمینه‌هایی که انحنای ثابت منفی دارند، مشابه است با توان‌های شار ژئودزیکی روی آن‌ها. شارهای کانونی برای این دست خمینه‌های با انحنای ثابت در واقع شارهای دستگاه‌های چپ ــ ناوردا روی گروه‌های لی‌اند و توان‌ها توضیح می‌دهند که چگونه عمل ضرب از راست در جواب $u_t(\omega)$، فضا را به کمک اندازه‌ای ناشی از یک متریک چپ ــ ناوردا، منبسط یا منقبض می‌کند. این مطالب با مطالعاتی که فورستنبرگ [3] و دیگران روی ضرب ماتریس‌های تصادفی انجام داده‌اند و همچنین با رفتار مجانبی حرکت براونی بر روی گروه‌های لی و فضاهای متقارن در ارتباط است. مطالعهٔ موضوع اخیر را دینکین در ۱۹۶۸ آغاز نمود و مالیوان و مالیوان [MMall75] و اخیراً تیلور، بابیلو و لیائو آن را ادامه داده‌اند.

---

1) Carverhill 2) Chappell 3) Furstenberg

Martine. Babillot, 1998

یکی از مسائل مهم در این زمینه عبارت است از همگرایی توان‌های لیاپانوف وقتی ضریب نوفه به سمت صفر میل می‌کند. مشکل اصلی مربوط است به رفتار اندازه‌ی ناوردا برای معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی (که با فرض ناتبهگون بودن، اساساً یکتا است). این اندازه یا اندازه‌های حدی می‌بایست اندازه‌های ناوردای دستگاه‌های دینامیکی عادی حدی با ویژگی‌های خاصی باشند: اندازه‌های بون ـ روئل ـ سینایی[1]. این مسأله را کیفر برای رده‌ای از معادلات حل کرد، منتهی هنوز هم به‌عنوان یکی از مسائل سخت و مهم در این حوزه، باقی مانده است [Kif].

توان‌های گشتاوری، ارتباط نزدیک‌تری با توپولوژی و هندسهٔ خمینهٔ زمینه دارد تا توان‌های لیاپانوف نمونه‌ای. توان‌های گشتاوری برای هر $p \in \mathbb{R}$ و هر زیرمجموعهٔ K از M به صورت

$$\mu_K(t) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \sup_{x\in K} \mathbb{E}|T_x \xi_t|^p$$

تعریف می‌شود. آرنولد[2] در تحقیقات اولیه‌ای که روی این توان‌ها انجام داد نشان داد که به‌عنوان تابعی از p نسبت به p محدب است و برای M های فشرده تحت شرایط هذلولوی معینی داریم $\mu_x(p) = \mu_M(p)$ برای هر $x \in M$ و به‌علاوه مشتق این تابع برابر است با بزرگترین توان لیاپانوف نمونه‌ای λ_1.

اگر M فشرده باشد، پایداری قوی در گشتاور مرتبهٔ p ـ ام، به این معنی که $\mu_M(p) < 0$، روی خمینه‌هایی که در قیود معینی صدق می‌کنند، تنها وقتی رخ خواهد داد که $p \geq 1$. برای مثال اگر $p \in \{1, \cdots, n-1\}$، آن‌گاه گروه‌های هموتوپی $\pi_j(M)$ می‌بایست به ازای $j = 1, \cdots, p$ برابر با صفر باشند. اگر این نتایج و محک‌های وابسته به آن را در مورد دستگاه‌های گرادیانی به‌کار ببریم، قضایایی دربارهٔ صفر شدن گروه‌های هموتوپی و همولوژی زیرخمینه‌های غوطه‌وری بر حسب

1) Bowen–Ruelle–Sinai 2) L. Arnold

شرایطی روی فرم‌های اساسی مرتبهٔ دوم آن‌ها به‌دست می‌آوریم که مشابه با نتایجی‌اند که پیش از این‌ها لاوسن وسیمونز[1] به‌دست آورده بودند، منتهی تحت شرایطی ضعیف‌تر[ElRo96]. همچنین به الورثی ولی در [Corn93] نگاه کنید. در مرجع [Tan82] لی‌جان و واتانابه به این مطلب اشاره کردند که کوواریانس اندازهٔ گاوسی روی میدان‌های برداری را که با حرکت براونی روی گروه وابرریختی‌های M مشخص می‌شود، می‌توان برای به‌دست آوردن نمادهای کریستوفل برای هموستار مستوی $\breve{\nabla}$ روی M به‌کار برد که مولد فرآیند مارکف وابسته به آن صورت زیر را به خود می‌گیرد:

$$\mathcal{A}f = \frac{۱}{۲} trace \breve{\nabla} df + \mathcal{L}_A f$$

در اینجا A میانگین اندازهٔ گاوسی است. اگر به معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی (٦) برگردیم نتیجه این خواهد بود که

$$\sum_j \mathcal{L}_{X^j} \mathcal{L}_{X^j} = \frac{۱}{۲} trace \breve{\nabla} df. \qquad (۱۲)$$

این هموستار، متریکی است برای متریک ریمانی القاشده روی TM. اخیراً معلوم شده است که این هموستار لی جان ــ واتانابه ابزار مطالعاتی سودمندی در جاهای گوناگون است. اگر میدان‌های برداری W را به‌سان میدان‌های تصادفی بنگریم، به زبان اندازهٔ گاوسی γ روی میدان‌های برداری با میانگین صفر، داریم

$$\breve{\nabla}_v Z = \frac{d}{dt} \mathbb{E}\{W(x_\circ)|W(a(t)) = Z(a(t))\}|_{t=\circ}$$

که در آن $v \in T_{x_\circ}M$، Z یک میدان برداری روی M است و $a : (-۱, ۱) \to M$ خم همواری است که در شرط $\dot{a}(\circ) = v$ صدق می‌کند. دقت در این نکته مهم است که این هموستار با مولد $\mathcal{A}$ مشخص نمی‌شود بلکه با عبارت A برحسب فرم‌های هرماندر[1] یا به عبارت دیگر برحسب معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی (٦) یا شار جواب $\{\xi_t : t \geq \circ\}$ معلوم می‌گردد. در واقع یکی از نتایج قضیهٔ وجودی این است که اگر $n > ۱$ آن‌گاه به هر معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی (٦)، یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی به شکل

$$dx'_t = X'(x'_t) \circ dB'_t$$

نظیر می‌شود که متضمن حرکت براونی روی فضای $\mathbb{R}^{m'}$ به ازای m'ی است و مولدش همان مولد معادلهٔ اصلی است. به عبارت دیگر می‌توان بخش غیرخطی را نادیده گرفت و لذا هنگامی که معادلهٔ (٦) را به‌عنوان اختلال تصادفی برای دستگاه دینامیکی عادی

$$\frac{dx_t}{dt} = A(x_t)$$

1) Simons and Lawson 1) Hörmander

در نظر می‌گیریم، باید خیلی محتاط باشیم. هموستار لی جان ــ واتانابه برای دستگاه‌های گرادیانی دقیقاً همان هموستار لوی چیویتا است و برای دستگاه‌های چپ ــ ناوردا روی گروه‌های لی دقیقاً هموستار چپ ــ ناوردای تخت است. معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی ما، نیمگروه $\tilde{P}^q_t$ روی q ــ فرم‌ها را با دستور

$$\tilde{P}^q_t(\phi) = \mathbb{E}\xi^*_t\,\phi = \mathbb{E}\phi \circ \Lambda^q T\xi \qquad (۱۳)$$

مشخص می‌کند که مولدش $\mathcal{A}^q$ مجدداً با مشتق‌گیری‌های لی در فرمول مربوط به $\mathcal{A}$ در (۹) به‌دست می‌آید. در حالت ناتبهگون داریم

$$\mathcal{A}^q = \frac{۱}{۲}\mathrm{trace}\hat{\nabla}^{۲} - \frac{۱}{۲}(\breve{\mathbb{R}}^q)^* + \mathcal{L}_A$$

که در آن $\hat{\nabla}$ هموستار الحاقی هموستار لی جان ــ واتانابه به معنایی است که درایور[1] در [Dr۹۲] معرفی می‌کند و $(\breve{\mathbb{R}}^q)^*$ الحاقی نگاشت $\Lambda^q TM \to \Lambda^q TM$ است که دقیقاً مانستهٔ $\breve{\nabla}$ در جملهٔ مربوط به انحنای ویتزنباک[2] در هموستار لوی چیویتا است. در حالت $q = ۱$ این، تبدیل می‌شود به Ric یعنی انحنای ریچی $\breve{\nabla}$. به‌ویژه، در مورد دستگاه‌های براونی گرادیانی، $\mathcal{A}$ دقیقاً لاپلاسی دورام ــ هاج[3] برای خمینهٔ M است.

در حالت کلی، $X(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow T_xM$ یک به یک نخواهد بود و لذا نوفهٔ اضافی خواهیم داشت. نمود ریاضی این واقعیت این است که زیر σــ جبر $\mathcal{F}^{x_\circ}$ که با فرآیند $\{\xi_t(x_\circ) : t \geq \circ\}$ به ازای هر $x_\circ \in M$ تولید می‌شود، کوچکتر از آنی است که فرآیند $\{B_t : t \geq \circ\}$ تولید می‌کند(در حالتی که نوفهٔ موجود در معادله، حرکت براونی کانونی روی میدان‌های برداری است، این زیر σ ــ جبر تولید شده‌ی دومی عبارت است از σ ــ جبر تولید شده توسط فرآیندهای و ابرریختی ــ مقدار $\{\xi_t : t \geq \circ\}$). نوفهٔ اضافی را معمولاً می‌شود صافی کرد به این معنی که امید شرطی نسبت به $\mathcal{F}^{x_\circ}$ را می‌توان محاسبه نمود. مثلاً اگر برای سادگی M فشرده و ناتبهگون باشد، و اگر

$$V_\circ \in \Lambda^q T_{x_\circ}M, \qquad V_t = \Lambda^q T\xi_t(V_\circ) \in \Lambda^q T_{\xi_t x_\circ}M.$$

امید شرطی آن

$$\bar{V}_t := \mathbb{E}\{V_t \,|\mathcal{F}^{x_\circ}\}$$

در معادلهٔ کوواریان زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\hat{D}\bar{V}_t}{dt} = -\frac{۱}{۲}\breve{\mathcal{R}}^q + \breve{\nabla}\mathcal{A}(\bar{V}_t); \qquad (۱۴)$$

در این باب رجوع کنید به الورثی، لی جان و لی در [Tan94] و نیز بخش ۴ مقالهٔ حاضر. این، تعمیمی است از نتیجه‌ای که پیش از این الورثی و یور[4] دربارهٔ دستگاه‌های گرادیانی به دست

1) Drive 2) Weitzenbock 3) de Rham - Hodge 4) Yor

آورده بودند و در مطالعهٔ نماهای گشتاوری در [ElRo 96] و آنالیز فضاهای مسیری و حلقوی مورد استفاده قرار گرفت. به‌عنوان مثالی ساده، مشتق $P_t f$ را به ازای تابع $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ از ردهٔ C^1 در جهت بردار $v_\circ \in T_{x_\circ} M$ در نظر بگیرید. با جابه‌جا کردن مشتق‌گیری با امید ریاضی به‌دست می‌آوریم

$$d(P_t f)(v_\circ) = d(\mathbb{E} f(\xi_T(\,.\,)))(v_\circ) = \mathbb{E} df(T\xi_t(v_\circ)) = \mathbb{E} df(\bar{v}_t)$$

که در آن بنابر (۱۴) داریم

$$\frac{\hat{D}\bar{v}_t}{dt} = -\frac{1}{2} Ric(\bar{v}_t) + \check{\nabla}_{\bar{v}_t} A \qquad (15)$$

برای شرح بیشتر در این باب، می‌توانید بخش‌های ۴ و ۸ مقالهٔ حاضر را هم ببینید. ساختارهای مشابهی را برای معادلات دیفرانسیل تصادفی تباهیده هم می‌توان به دست آورد، به این شرط که نگاشت $X(x) : \mathbb{R}^m \to T_m M$ رتبهٔ ثابت داشته باشد.

معادلهٔ حرارت برای فرم‌ها و قضیهٔ شاخص

الف. فرض کنید که ϕ یک q ـ فرم روی خمینهٔ ریمانی M باشد، یعنی برای هر $x \in M$ یک نگاشت q ـ خطی متناوب به صورت

$$\phi_x : T_x M \times \cdots \times T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$$

داریم که آن را می‌توان عضوی از $\Lambda^q T_x^* M$ نیز تلقی کرد. در مورد حرکت براونی روی M، اگر قرار باشد نیمگروه $\bar{P}_t \,:\, t \geq 0$ روی qـ فرم‌ها را به صورت

$$\bar{P}_t \phi_{x_\circ}(v^1, \cdots, v^q) = \mathbb{E}(//_t v^1, \cdots, //v^q)$$

تعریف کنیم، که در آن $//_t$ انتقال موازی در امتداد مسیرهای براونی است که در بخش ۲ توصیف شد، آن‌گاه این نیمگروه در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{P}_t \phi = \frac{1}{2}\, trace\, \bar{P}_t \phi$$

صدق خواهد کرد. در ۱۹۶۲، ایتو مشاهده کرد که با اندکی اصلاحات می‌توان نیمگروه حرارت $P_t^q, t \geq 0$ را روی q ـ فرم‌ها به دست آورد که در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t^q \phi = -\frac{1}{2} \Delta^q P_t^q \phi \qquad (16)$$

صدق می‌کند. در اینجا Δ^q لاپلاسی هاج ـ دورام

$$\Delta^q = (d\delta + \delta d) \qquad (17)$$

است که با دستور ویتزنباک به ∇^{2} مرتبط می‌شود:

$$\Delta^{q} = -trace\nabla^{2} + (\mathbb{R}^{q})^{*} \qquad (18)$$

به‌علاوه جملهٔ ویتزنباک $(\mathbb{R}^{q})^{*}$ الحاقی عملگر مرتبهٔ صفری است که نقطه‌وار روی q ـ بردارهایی که در بخش ۳ به آن اشاره کردیم اثر می‌کند که وقتی $q \geq 1$ تبدیل می‌شوند به انحنای ریچی.

به ازای q ـ بردار V_{0} در x_{0}، فرم $V_{t} \in \Lambda^{q} T_{x_{t}} M$ را با معادلهٔ کوواریان زیر در امتداد مسیرهای $\{x_{t} : t \geq 0\}$ تعریف می‌کنیم که خود حالت خاصی است از (۱۴):

$$\frac{DV_{t}}{dt} = -\frac{1}{2} R^{q}_{x_{t}}(V_{t}) \qquad t \geq 0 \qquad (19)$$

این معادله، نشان دهندهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی روی $\Lambda^{q} T_{x_{t}} M$ برحسب $//_{t}^{-1} V_{t}$ به شکل زیر است:

$$\frac{d}{dt} //_{t}^{-1} = -\frac{1}{2} (//_{t}^{-1} R^{q}_{x_{t}} //)(//_{t}^{-1} V_{t}).$$

به کمک توسیع فرمول فاینمن ـ کاتس می‌توان نشان داد که مثلاً اگر R^{q} روی M از پایین کراندار باشد، نیمگروه حرارت P^{q}_{t} عبارت است از

$$P^{q}_{t}(\phi_{x_{0}})(V_{0}) = \mathbb{E}\phi_{x_{t}}(V_{t}). \qquad (20)$$

از اینجا فوراً برآورد زیر را به‌دست می‌آوریم

$$|V_{t}| \leq e^{-\frac{1}{2}\int_{0}^{t} \underline{R}^{q}(x_{s})ds} |V_{0}|$$

که در آن

$$\underline{R}^{q}(x) = \inf_{|V|=1} \langle R^{q}_{x}(V), V \rangle, \qquad x \in M, \qquad (21)$$

و ضرب داخلی در فضای $\Lambda^{q} T_{x} M$ صورت می‌گیرد. از اینجا نتیجهٔ «تسلطی نیمگروهی»

$$|P^{q}_{t}\phi|_{x_{0}} \leq \mathbb{E} e^{-\frac{1}{2}\int_{0}^{t} \underline{R}^{q}(x_{s})ds} |\phi|_{x_{s}}$$

به‌دست می‌آید که P^{q}_{t} را به نیمگروه شرودینگر با مولد $-\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2}\underline{R}^{q}$ که روی فضایی از توابع اثر می‌کند، ربط می‌دهد. این نتیجه را آیرو[1] و مالیوان و همکارانش در اواسط دههٔ ۷۰ به‌کار گرفتند تا قضایای پوچ‌سازی از نوع بوخنر[2] را به‌دست آورند؛ در این باره می‌توانید رجوع کنید به [Mer] که این نتایج را برای خمینه‌ها لبه‌دار به‌کار برده است؛ یا [Mall 78] را ببینید که صورت‌های تحلیلی‌اش را دونلی و لی[3] در سال ۱۹۸۲ ارائه دادند. برای مطالعهٔ کارهایی که اخیراً انجام شده است هم می‌توانید نگاشته‌های روزنبرگ را در [Corn87] و [ELR] ملاحظه کنید.

این نمایش، ارتباط تنگاتنگی با دستور بیسموت برای مشتق لگاریتمی هستهٔ حرارت روی توابعی که در بخش ۷ شرح خواهیم داد، دارد. به‌علاوه یکی از مراحل اساسی اثبات هسو را برای نابرابری

1) Airault 2) Bochner 3) Donelly & Li

سوبولف لگاریتمی دربارهٔ اندازه وینر روی فضای مسیرهای یک خمینهٔ ریمانی، تشکیل می‌دهد. نمایش فاینمن ــ کاتس (۲۰) در مورد دیگر معادلات کوواریان روی کلاف‌های برداری نیز قابل استفاده است. برای مثال درباره عملگر شرودینگر در حضور میدان مغناطیسی یا برای مربع عملگرهای دیراک که روی اسپینورهایی عمل می‌کند که در قضایای کلاسیک شاخص ظاهر می‌شوند [El82]. اثبات‌های احتمالاتی و «فوق تقارنی» وابسته به آن برای قضیهٔ شاخص آتیا ــ سینگر که از اوایل دههٔ ۸۰ به‌ویژه با سلسله مقالات بیسموت آغاز شد، علایق جدیدی را برانگیخت. در مرجع [Bis84] شرحی دربارهٔ محتوای این اثبات‌ها هم از دیدگاه تاریخی و هم از جنبهٔ پیشرفت‌های آتی آمده است.

مراجع

Monographs

[Arn] L. Arnold, *Random Dynamical Systems*. Springer, 1998.

[Bell] D. Bell, *The Malliavin Calculus*. Pitman Monographs and Surveys in P. & A. Maths. **34**, Longman, 1987.

[BelDa] Ya. I. Belopolskaya & Yu. L. Dalecky, *Stochastic Processes and Differential Geometry*, Kluwer 1989.

[Bis] J.-M. Bismut, *Large Deviations and the Malliavin Calculus*. Progress in Maths. **45**, Birkhäuser, 1984.

[BGV] N. Berline, E. Getzler, & M. Vergne. *Heat Kernels and Dirac Operators*. Grundl. Math. Wiss. **298**, Springer, 1991.

[El] K.D. Elworthy, *Stochastic Differential Equations on Manifolds*. LMS Lecture Note Series **70**, Cambridge University Press 1982.

[Em] M. Emery, *Stochastic Calculus on Manifolds*, Springer Universitext 1989.

[FOT] M. Fukushima, Y. Oshima & M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*. Walter de Gruyter 1994.

[FW] M.I. Friedlin & A.D. Wentzell, *Random Perturbations of Dynamical Systems*. Springer, 1984.

[Glik] Yu. Gliklikh, *Global Analysis in Mathematical Physics: Geometric and Stochastic Methods*, Applied Math. Sciences **22**, Springer 1997.

[IW] N. Ikeda & S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. Maths. Library **24**, North-Holland/Kodansha 1981, Second Ed. 1989.

[Kif] Yu. Kifer, *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Progress in Probability and Statistics **16**, Birkhäuser 1988.

[Kun] H. Kunita, *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*. Cambridge Stud. in Adv. Maths. **24**, C.U.P. 1990.

[Mall] P. Malliavin, *Stochastic Analysis*, Grundlehren der math. Wiss. **313**, Springer 1991.

[MR] Z. Ma & M. Röckner, *Introduction to the Theory of (non-symmetric) Dirichlet Forms*, Springer Universitext 1992.

[PS] A. Pressley & G. Segal. *Loop Groups*. Oxford Math. Monographs. Oxford University Press 1986.

[RW] L.C.G. Rogers & D. Williams, *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol. 2: Itô Calculus*. Wiley 1987.

[Schw] L. Schwartz, *Semi-martingales sur les variétés et martingales conformes sur les variétés analytiques complexes*. Lecture Notes in Math. **780**, Springer-Verlag 1980.

[Sim] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press 1979.

[SV] Itô, Kiyosi, *Selected papers*. Edited and with an introduction by S.R.S. Varadhan and Daniel W. Stroock. Springer-Verlag, 1987.

Collections

[Brem84] L. Arnold & V. Wihstutz (Eds.). *Lyapunov Exponents*: Workshop Bremen, Nov. 1984. Lecture Notes in Math. **1186**. Springer 1986.

[Bud89] L. Fehér et al. (Eds.). *Lecture Notes of the Conference on Topological Quantum Field Theories and Geometry of Loop Spaces*, Budapest, June/July 1989, World Scientific, 1992.

[Corn87] R. Durrett & M.A. Pinsky (Eds.). *Geometry of Random Motion: Summer Research Conference*, Cornell University, July 1987. Contemporary Mathematics **73**, A.M.S.

[Corn93] M.C. Cranston & M.A. Pinsky (Eds.). *Stochastic Analysis: Summer Research Institute*, Cornell University: July, 1993. Proc. of Symp. in Pure Math. **57**, A.M.S. 1995.

[Crete97] J. Jost et al. (Eds.). *Dirichlet Forms and their Applications in Geometry and Stochastics*: Euroconference, Crete, June 1997. AMS/IP Studies in Adv. Math. **8**, 1998.

[Cumb74] A.M. Arthurs (Ed.). *Functional Integration and its Applications*: Int. Conf., Cumberland Lodge, Windsor Great Park, April 1974. Oxford University Press, 1975.

[Dur80] D. Williams (Ed.), *Stochastic Integrals*: Lecture Notes in Math. **851**. Springer 1981.

[Dur90] M.T. Barlow & N.H. Bingham (Eds.). *Stochastic Analysis*: LMS Durham Symposium, July 1990. LMS Lecture Note Series **167**. Cambridge University Press 1991.

[Greg95] I.M. Davies et al. (Eds.). *Stochastic Analysis and Applications*. Proc. of 5th Gregynog Symp., Gregynog, Powys, July 1995. World Scientific 1996.

[Itô@80] N. Ikeda et al. (Eds.). *Itô's Stochastic Calculus and Probability Theory*: A Tribute to K. Itô on his 80th Birthday, September 7, 1995. Springer 1996.

[NWest78] A. Friedman & M. Pinsky (Ed.). *Stochastic Analysis*: Int. Conf. Northwestern University, April 1978. Academic Press 1978.

[Par81] R. Azencott et al. *Géodésiques et diffusions en temps petit*: sém. de probabilités, Université de Paris VII. Astérisque **84-85**. Soc. Math. de France, 1981.

[Par87] M. Métivier & S. Watanabe (Eds.). *Stochastic Analysis*: Japanese-French Seminar, June 1997. Lecture Notes in Math. **1322**. Springer 1988.

[SémXVI] S. Azéma & M. Yor (Eds.). *Séminaire de Probabilités* XVI 1980/81. Lecture Notes in Math. **921**. Springer 1982.

[St-Fl88] A. Ancona et al. *Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour* XVIII – 1988, ed. P.L. Hennequin. Lecture Notes in Math. **1427**, Springer 1990.

[Tan82] K. Itô (Ed.). *Stochastic Analysis*: Taniguchi Int. Symp., Katata & Kyoto, July 1982.

[Tan90] K.D. Elworthy & N. Ikeda (Eds). *Asymptotics problems in probability theory*: Vol. 1, Limiting Behaviour of Stochastic Models; Analysis and Diffusion on Fractals. Vol. 2, Wiener Functionals and Asymptotics Proc. 26th Taniguchi Workshop and Symp. Sanda and Kyoto, August/Sept. 1990. Pitman Research Notes in Math. **282**, **283**, Longman 1993.

[Tan94] K.D. Elworthy, S. Kusuoka & I. Shigekawa (Eds). *New Trends in Stochastic Analysis*: Taniguchi Int. Workshop, Charingworth Manor, Glos., Sept. 1994. World Scientific 1997.

[War85] K.D. Elworthy (Ed.). *From Local Times to Global Geometry, Control & Physics*: Warwick Symposium in S.D.E. & Appl. 1985/85. Pitman Research Notes in Math. **150**, Longman 1986.

Articles

[ADK97] Albeverio, S., Daletskii, A., & Kondratiev, Yu. (1997). Infinite systems of stochastic differential equations and some lattice models on compact Riemannian manifolds. *Ukrainian J. of Math.* **49**, no. 3.

[AHo78] Albeverio, S. & Hoegh-Krohn, R. (1978). The energy representation of Sobolev Lie groups. *Compositio Math.* **36**, 37–52.

[Aid95] Aida, S. (1995). Sobolev spaces over loop groups. *J. Funct. Anal.* **116**, 83–110.

[Air76] Airault, H. (1976). Subordination de processus dans le fibré tangent et formes harmoniques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. A, **282** (14 juin 1976), 1311–1314.

[AnDr97] Andersson, L. & Driver, B.K. (1997). *On a finite dimensional approximation to Wiener measure on a compact manifold.*

[Arn97] Arnold, L. (1997). The unfolding of dynamics in stochastic analysis. *Comput. Appl. Math.*, V. **16**, 3–25.

[ArTh] Arnaudon, M. & Thalmaier, A. (1997). Complete lifts of connections and stochastic Jacobi fields. *J. Math. Pures Appl.* **77**, 283–315.

[At95] Atsuji, A. (1995). Nevanlinna theory via stochastic calculus. *Jour. Functional Anal.* **132**, 473–510.

[Az74] Azencott, R. (1974). Behaviour of diffusion semigroups at infinity. *Bull. Soc. Math. France* **102**, 193–240.

[Az80] Azencott, R. (1980). Grandes déviations et applications. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour* VIII-1978, ed. P.L. Hennequin, pp. 2-176. Lecture Notes in Math. **774**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

[BAG98] Ben Arous, G. & Gradinaru, M. (1998). Singularities of hypoelliptic Green functions. *Potential Analysis* **8** No. 3, 217–258.

[BaSt] Baxendale, P. & Stroock, D.W. (1988). Large deviations and stochastic flows of diffeomorphisms. *Probab. Th. Rel. Fields* **81**, 521–554.

[Bax84] Baxendale, P. (1984). Brownian motions in the diffeomorphism group I. *Compositio Math.* **53**, 19–50.

[Bax86] Baxendale, P.H. (1986). Asymptotic behaviour of stochastic flows of diffeomorphisms: two case studies. *Probability theory and related fields* **73**, 51–85.

[BenA97] Ben Arous, G. (1988). Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique hors du cut-locus. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* (4), **21**, no. 3, 307–331.

[BFr61] Blagoveschenskii, Ju. N. & Freidlin, M.I. (1961). Some properties of diffusion processes depending on a parameter. DAN 138, *Soviet Math.* **2**, 633–636.

[Bis84] Bismut, J.-M. (1984). The Atiyah-Singer theorems: a probabilistic approach. I & II, *J. Funct. Anal.* **57**, 56–99 & 329–348.

[CaE83] Carverhill, A.P. & Elworthy, K.D. (1983). Flows of stochastic dynamical systems: the functional analytic approach. *Z. f. Wahr. verw. Geb.* **65**, 245–267.

[CaE86] A.P. Carverhill & K.D. Elworthy (1986). Lyapunov exponents for a stochastic analogue of the geodesic flow. *Trans. A.M.S.* **295**, 85–105.

[Cas93] Castell, F. (1993). Asymptotic expansion of stochastic flows. *Probab. Theory Related Fields* **96**, 225–239.

[CHL97] Capitaine, M., Hsu, E.P. & Ledoux, M. (1997). *Martingale representation and a simple proof of logarithmic Sobolev inequalities on path spaces.*

[ChY75] Cheng, S.Y. & Yau, S.T. (1975). Differential equations on riemannian manifolds and their geometric applications. *Comm. Pure Appl. Math.* **28**, 333–354.

[CL73] Clark, J.M.C. (1973). An introduction to stochastic differential equations on manifolds. In *Geometric Methods in Systems Theory*, ed. D.Q. Mayne & R.W. Brockett, Dordrecht, Boston, London: Reidel.

[DGM76] Debiard, A., Gaveau, B. & Mazet, E. (1976). Théorèmes de comparaison en géométrie riemannienne. *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* **12**, 391–425.

[DR92] Driver, B. (1992). A Cameron-Martin type quasi-invariance theorem for Brownian motion on a compact Riemannian manifold. *J. Funct. Anal.* **100**, 272–377.

[DR97] Driver, B.K. (1997). Integration by parts for heat kernel measures revisited. *J. Math. Pures Appl.* **76**, 703–737.

[EEl71] Eells, J. & Elworthy, K.D. (1971). Wiener integration on certain manifolds. In *Problems in Non-Linear Analysis*, ed. G. Prodi. pp. 67–94. Centro Internazionale Matemat. Estiva, IV Ciclo. Rome: Edizioni Cremonese.

[El81] Elworthy, K.D. (1981). "Stochastic methods and differential geometry". In *Séminaire Bourbaki* vol. 1980/81, Exposés 561–578, pp. 95–110. Lecture Notes in Math. **901**.

[El87] Elworthy, K.D. (1987). Geometric aspects of diffusions on manifolds. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour*, XV–XVII. 1985–1987, P.L. Hennequin, ed. pp. 276–425. Lecture Notes in Math. **1362**, Springer-Verlag.

[ELJL98] Elworthy, K.D., Le Jan, Y. & Li, Xue-Mei. (1998). On the geometry of diffusion operators and stochastic flows. MSRI preprint.

[ELR98] Elworthy, K.D., Li, X.-M. & Rosenberg, S. (1998). Bounded and L^2 harmonic forms on universal covers. *Geom. and Funct. Anal.* **8**, 283–303.

[ElRo96] Elworthy, K.D. & Rosenberg, S. (1996). Homotopy and homology vanishing theorems and the stability of stochastic flows. *Geom. and Funct. Anal.* **6**, No. 1, pp. 51–78.

[EMa97] Elworthy, K.D. & Ma, Z.-M. (1997). Vector fields on mapping spaces and related Dirichlet forms and diffusions. *Osaka J. Math.* **34**, 629–651.

[Fan97] Fang, S. (1997). *Girsanov theorem and quasi-invariance on the path space over loop groups*. Preprint: Dept. de Math. Univ. de Bourgogne.

[Gaf59] Gaffney, M.P. (1959). The conservation property of the heat equation on riemannian manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.* **12**, 1–11.

[Gan] Gangolli, R. (1964). On the construction of certain diffusions on a differentiable manifold, *Z. f. Wahr. verw. Geb.* **2**, 406–419.

[Gav77] Gaveau, B. (1977). Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sons-elliptiques sur certains groupes nilpotents. *Acta Math.* **139**, 95–153.

[Ge86] Getzler, E. (1986). A short proof of the local Atiyah-Singer index theorem. *Topology* **25**, no. 1, 111–117.

[Grig86] Grigoryan, A.A. (1986). On stochastically complete manifolds, Dokl. Akad. Nuak CCCP, **290** no. 3, English translation: *Soviet math. Dokl.* **34**, (1987), no. 2, 310–313.

[Gr67] Gross, L. (1967). Potential theory on Hilbert space. *J. Functional Anal.* **1**, 123–181.

[Ib76] Ibero, M. (1976). Intégrales stochastiques multiplicatives et construction de diffusions sur un groupe de Lie. *Bull. Sci. Math.*, 2^e série, **100**, 175–191.

[JMS81] Jona-Lasinio, G., Martinelli, F. & Scoppola, E. (1981). New approach to the semi-classical limit of quantum mechanics, I: Multiple tunnelings in one dimension. *Comm. Math. Phys.* **80**, 223–254.

[Kac66] Kac, M. (1966). Can you hear the shape of a drum. *Amer. Math. Monthly* **73**, 1–23.

[Kai90] Kaimanovich, V.A. (1990). Invariant measures of the geodesic flow and measures at infinity on negatively curved manifolds. *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théorique* **53**, 361–393.

[Ken87] Kendall, W.S. (1987). Stochastic differential geometry: an introduction. *Acta Applicandae Math.* **9**, 29–60.

[Ki95] Kifer, Y. (1995). Spectrum, harmonic functions, and hyperbolic metric spaces. *Israel J. Math.* **89**, 377–428.

[Kus88] Kusuoka, S. (1988). Degree theory in certain Wiener-Riemannian manifolds, In [Par87], 13–108.

[Kus92] Kusuoka, S. (1992). Analysis on Wiener spaces, II. Differential forms. *J. Funct. Anal.* **103**, 229–274.

[Lé97] Léandre, R. (1997). Invariant Sobolev calculus on the free loop space. *Acta Appl. Math.* **46**, 267–350.

[Lé98] Léandre, R. (1998). Çover of the Brownian bridge and stochastic symplectic action. *Reviews in Math. Phys.* To appear.

[LéNo97] Léandre, R. & Norris, J.R. (1997). Integration by parts and Cameron-Martin formulas for the free path space of a compact Riemannian manifold. *Sém. de Prob., XXXI*, Lecture Notes in Math. **1655**, Springer, 16–23.

[Li94] Li, X.-M. (1994). Strong p-completeness of stochastic differential equations and the existence of smooth flows on noncompact manifolds. *Prob. Theory Relat. Fields* **100**, No. 4, 485–511.

[Li95] Li, X.-M. (1995). On extensions of Myers' theorem, *Bull. London Math. Soc.* **27**, 392–396.

[Ly91] Lyons, T. (1991). Instability of the conservative property under quasi-isometries. *J. Diff. Geom.* **34**, 483–489.

[Ly98] Lyons, T. (1998). Differential equations driven by rough signals. *Revista Matematica Iberoamericana.*

[Ma78] Malliavin, P. (1978). *Géométrie Différentielle Stochastique*. Séminaire de Mathématiques Supérieures. Université de Montréal.

[Mall74] Malliavin, P. (1974). Formule de la moyenne pour les formes harmoniques. *J. Funct. Anal.* **17**, 274–291.

[Mall76] Malliavin, P. (1976). *Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators*. Report no. **13**, Institut Mittag-Leffler.

[Mall77] Malliavin, P. (1977). Un principe de transfert et son application au Calcul des Variations, *C. R. Acad. Sci. Paris* **284**, série A, 187–189.

[MMal75] Malliavin, M.-P. & Malliavin P. (1975). Holonomie stochastique au-dessus d'un espace riemannien symétrique. *C. R. Acad. Sci. Paris* **280**, Série A, 793–795.

[MMall90] Malliavin, M.-P. & Malliavin, P. (1990). Integration on loop groups. I. Quasi-invariant measures. *J. Funct. Anal.* **93**, 207–237.

[McK60] McKean, H.P.M., Jr. (1960). Brownian motions on the 3-dimensional rotation group. *Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ.* **33**, 25–38.

[Mér79] Méritet, A. (1979). Théorème d'annulation pour la cohomologie absolue d'une variété riemannienne à bord. *Bull. Sci. Math.* **103**, 379–400.

[Mol75] Molchanov, S.A., (1975). Diffusion processes and Riemannian geometry. *Usp. Math. Nauk* **30**, 3–59. English translation: *Russian Math. Surveys* **30**, 1–63.

[MS67] McKean, H.P. & Singer, I. (1967). Curvature and eigenvalues of the Laplacian. *J. Diff. Geom.* **1**, 43–69.

[Pin78] Pinsky, M. (1978). Stochastic Riemannian geometry. In *Probabilistic Analysis and Related Topics*, 1, ed. A.T. Bharucha Reid. London, New York: Academic Press.

[Prat75] Prat, J.-J. (1975). Étude asymptotique et convergence angulaire du mouvement brownien sur une variété à courbure négative. *C. R. Acad. Sci. Paris* **280**, Sér. A, 1539–1542.

[Rog92] Rogers, A. (1992). Stochastic calculus in superspace. II. Differential forms, supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorems. *J. Phys. A.* **22**, 6043–6062.

[SUW89] Shigekawa, I., Ueki, N., & Watanabe, S. (1989). A probabilistic proof of the Gauss-Bonnet-Chern theorem for manifolds with boundary. *Osaka J. Math.* **26**, 897–930.

[Str96] Stroock, D. (1996). Gaussian measures in traditional and not so traditional settings. *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) **33**, 135–155.

[TW98] Thalmaier, A. & Wang, F.-Yu. Gradient estimates for harmonic functions on regular domains in Riemannian manifolds. *J. Funct. Anal.* **155**, 109–124.

[VF70] Ventsell, A.D. & Freidlin, M.I. (1970). On small random perturbations of dynamical systems. *Russian Math. Surveys* **25**, 1–55.

ترجمه: روح‌الله جهانی‌پور
بخش ریاضی، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه کاشان
jahanipu@kashanu.ac.ir