

فلسفه ریاضی کانت

احسان ممتحن

ایمانوئل کانت (۱۷۲۴-۱۸۰۴)، فیلسوف دشوارنویسی بود. نقل می‌کنند که یکی از دوستان او، از ترس آن که مبادا دیوانه شود، خواندن «سنجش خرد ناب» شاهکار کانت را نیمه کاره رها کرد. با وجود این، برای آموختن فلسفه ریاضی به‌ویژه درک اندیشه‌های شهودگرایان آشنایی با فلسفه ریاضی کانت ضروری به نظر می‌رسد [یادداشت ۱].

۱ دیباچه

معرفت‌شناسی کانت و فلسفه ریاضی او ارتباط تنگاتنگی با یکدیگر دارند. بنابراین ضروری است که پیش از شرح فلسفه ریاضی کانت قدری درباره معرفت‌شناسی او بدانیم. اطلاع از فلسفه کانت در واقع پیش فرض فهم معرفت‌شناسی مدرن است. به علاوه، مکتب مهم شهودگرایی در ریاضی نیز سخت تحت تأثیر کانت است، در حقیقت براور، هیتینگ، وایل و دیگر شهودگرایان را می‌توان فرزندان معنوی کانت دانست [یادداشت ۲]. زندگی ایمانوئل کانت به آرامی در همان شهر زادگاه خودش کونیسبرگ گذشت. وی نیز چون حافظ هیچگاه موطن خود را ترک نکرد. کانت در اخلاق مطلق‌گرا بود [یادداشت ۳]، و در همه عمر تلاش کرد تا به این پرسش پاسخ دهد که آیا می‌توان متافیزیک را بر چنان پایه‌هایی استوار ساخت که استحکامی چون فیزیک نیوتنی و هندسه اقلیدسی بیابد؟ تلاش سترگ او در پاسخ به این سؤال و سؤالاتی از این دست، به نوشتن شاهکارش، «سنجش خرد ناب»^۱ منجر شد. کانت دو سال پس از «سنجش خرد ناب»، چکیده این کتاب دشوار را در کتاب کوچک دیگری با نام «پیش درآمدی بر هرگونه متافیزیک آینده که خواهد توانست چون دانش به میان آید» یا به اختصار Prolegomena آورد^۲. «نقد خرد عملی» کتاب مهم دیگری از کانت است که فلسفه اخلاق او را شرح می‌دهد. «نقد قوه داور» نیز مجموعه نظرات کانت در باب

1) Kritik der reinen Vernunft

۲) این کتاب با نام «تمهیدات» توسط غلامعلی حداد عادل به فارسی برگردانده شده است.

هنر و زیباشناسی است. مجموعه این آثار فلسفه نقدی کانت را تشکیل می‌دهد. خوشبختانه «سنجش خرد ناب» و «نقد قوه داوری» به زبان فارسی برگردانده شده‌اند. در بخش بعد با چکیده آنچه در قسمتهایی از «سنجش خرد ناب» بیان شده آشنا می‌شویم.

۲ معرفت‌شناسی کانت

کانت به جهان خارج، مستقل از ما آدمیان، اعتقاد داشت. او اشیاء چنین جهانی را شیء فی‌نفسه^۱ می‌نامید. ما آدمیان از طریق حواس خود برداشتهایی از شیء فی‌نفسه داریم که ممکن است کاملاً با آنچه در خود هست متفاوت باشد. به هر حال ما به درک شیء فی‌نفسه آنچنان که هست نخواهیم رسید و باید به درک آنچه از طریق داده‌های حسی خود از آن برداشت می‌کنیم قانع باشیم. کانت، آنچه بر داده‌های حسی ما پدیدار می‌شود را پدیده می‌نامد و آنچه در برابر حواس ما بایستد و محل شناسایی واقع شود را برابر ایستا^۲ یا Objekt. تأثرات حسی یا داده‌های حسی^۳ بطور خام محل فهم ما نیستند. داده‌های حسی خود ماده نگرش^۴ را تشکیل می‌دهند. نگرش، دومین مرحله در فرآیند فهم^۵ است. نگرش، «تصویری واسطه برابر ایستا است»^۶. در عین حال نگرش، انعکاس آینه‌وار صرف تأثرهای حسی نیست، بلکه چیزی در این میان افزوده می‌شود. تأثرهای حسی تنها ماده نگرش را تشکیل می‌دهند اما صورت آن مکان و زمان است. داده‌های حسی را در قالب زمان و مکان می‌ریزیم، آنچه از این قالب بیرون می‌آید نگرش خواهد بود. بنابراین، صدق، مطابق نظر کانت، دیگر مطابقت با امر واقع نیست بلکه این وسط چیزهایی نیز از خودمان (زمان، فضا، علیت) بر داده‌های حسی اضافه می‌کنیم. پس صدق بر خلاف نظر پیشینیان کانت، هم به آنچه هست و هم به افزوده ذهن متفکر بستگی تام دارد (مراجع [۱۱] و [۱۲])، گفتگوهای برایان مگی با وارنوک و پاتنام را ملاحظه فرمایید). این مطلب الهام بخش اینشتین و بسیاری از فیزیکدانان و فلاسفه بعد از کانت بوده است. نظریه‌های علمی را امور واقع صرفاً به ما دیکته نمی‌کنند بلکه در این میان چیزی انسانی یا مفهومی نیز به آن افزوده می‌شود. ورنر هایزنبرگ در [۱۳] گفتگوی بسیار مهمی را به خاطر می‌آورد که ضمن آن اینشتین می‌گوید:

نظریه است که حکم می‌کند چه چیزی مشاهده‌پذیر است. باید توجه داشته باشید که مشاهده، فرآیندی بسیار پیچیده است. پدیده‌ای که در دست مشاهده داریم رویدادهایی را در دستگاه اندازه‌گیری ما ایجاد می‌کند. در نتیجه، فرآیندهای دیگری در دستگاه رخ می‌دهند، که سرانجام از راههای پیچیده‌ای ایجاد تأثرات حسی می‌کنند و به ما کمک می‌کنند که پدیده‌ها را در آگاهی خود تثبیت کنیم.

1) Ding an sich/thing in itself 2) Gegenstand 3) Impressions 4) Anschauung
5) Begriff 6) Unmittelbare Vorstellung des Gegenstandes

در سراسر طول این مسیر - از پدیده تا تثبیت آن در حافظه ما - باید بتوانیم بگوییم که طبیعت چگونه رفتار می کند، دست کم باید به طور عملی قوانین طبیعت را بشناسیم، تا اصلاً بتوانیم ادعا کنیم که چیزی را مشاهده کرده ایم.

خلاصه آن که «برای شناخت هر پدیده‌ای نیاز به یک نظریه است». برای خواننده دشوار نخواهد بود تا در لابلای این سطور حضور نامرئی کانت و معرفت‌شناسی اش را تشخیص دهد. اما تأثیرگذاری معرفت‌شناسی کانت از این هم فراتر می‌رود. ارسطو، صدق را مطابقت با امر واقع می‌دانست؛ مطابق با این برداشت از صدق، گزاره «برف سپید است» درست است اگر و تنها اگر در عالم واقع برف سپید باشد. این تعریف از صدق با درک طبیعی ما همخوانی دارد و به طور طبیعی به آن قائل هستیم. برای تعیین صدق شعار تبلیغاتی «صادرات نشانه کیفیت کالا است» به کالاهای صادراتی توجه می‌کنیم و از کیفیت آنها می‌پرسیم. علاوه بر این یکی از مهمترین نظریه‌های صدق معاصر، یعنی نظریه صدق تارسکی نیز عملاً ادامه و تعمیم نظریه صدق ارسطو است. دامنه نفوذ نظریه صدق تارسکی تا آن اندازه است که پال بناسراف، فیلسوف ریاضی معاصر در مهمترین مقاله اش «صدق ریاضی»، (مرجع [۸]) می‌نویسد:

... بنابراین هر تحلیل مقبولی از صدق ریاضی باید تحلیل از مفهومی باشد که دست کم به معنای تارسکی مفهوم صدق باشد.

اکنون پرسشی به شکل طبیعی مطرح می‌شود؛ آیا ایجاد نظریه صدقی منطبق با معرفت‌شناسی کانت، یعنی یک نظریه صدق کانتی ناممکن است؟ به نظر می‌رسد که پاسخ بناسراف به این پرسش مثبت باشد، او قائل به چنین نظریه‌ای نیست اما این که از میان نظریه‌های صدق موجود کدامیک با معرفت‌شناسی کانت امکان آشتی دارد پرسشی است که همچنان بر روی ما گشوده است.

انواع داوری‌ها از نظر کانت

شناخت ما از جهان، مجموعه داوری‌ها و قضاوت‌های ما در باره جهان است. پس بسیار بجاست که بدانیم داوری‌های ما چگونه‌اند. نخست باید فرق قضاوت یا داوری^۱ را با قضیه توضیح دهیم. اگر بگوییم «قو سپید است» یعنی آن که همه قوهای عالم سپیداند. اگر بگوییم «به اعتقاد من قو سپید است» یعنی آن که همه قوهای من در طول عمر خود دیده‌ام سپید بوده‌اند. داوری ما امکان آن که در سرزمینی دوردست، چون قصه «جوجه اردک زشت»، قویی سیاه رنگ زندگی کند را نفی نمی‌کند حال آن که در مورد اول چنین نیست. تا پیش از کانت، فلاسفه قضاوت‌های ما را به دو نوع تقسیم می‌کردند؛ داوری‌های تحلیلی^۲ و داوری‌های ترکیبی^۳. اگر بگوییم «هر آدم قدبلندی، آدم است» چیز تازه‌ای نگفته‌ایم به این معنی که «آدم بودن» در «آدم قد بلند بودن» مستتر است. داوری تحلیلی آن است که همه محمول در موضوع مستتر باشد. مثل آن که بگوییم «باران خیس

1) Das Urteil/Judgement 2) Analytic 3) Synthetic

است»، واضح است که خیس بودن در باران نهفته است. هر داوری که تحلیلی نباشد ترکیبی است. لایب‌نیتس سنخ گزاره‌های ریاضی را تحلیلی می‌دانست. (نک [۳]) یعنی پیچیده‌ترین گزاره‌های ریاضی چیزی از سنخ «حسن، حسن است» بوده و به این معنی درون تهی است، زیرا چیزی را جمع به خارج از خود به ما نمی‌گوید. این نظر در میان فیلسوف‌های علم معاصر، به ویژه اصحاب حلقه وین نیز طرفداران سرسختی چون کارنپ، رایشنباخ و دیگران یافت. حتی ویتگنشتاین نیز در «رساله منطقی - فلسفی» (تراکتاتوس) خود ریاضیات را از «نوع معادله و منطق را همانگویی» می‌دانست [۴]. کانت این تقسیم‌بندی را دگرگون ساخت. او علاوه بر تقسیم گزاره‌ها به تحلیلی و ترکیبی، گزاره‌های ترکیبی را نیز به گزاره‌های ماقبل تجربه یا پیشین^۱ و پسین یا پس از تجربه^۲ تقسیم کرد. این که «آب در صد درجه سلسیوس به جوش می‌آید» گزاره‌ای پسین است و مواد آن از تجربه ناشی می‌شود؛ یک گزارهٔ پسین به برداشت‌های حسی وابسته است و اگر درست باشد، یا باید یک برداشت حسی محتمل را توصیف کند (خودکار من سیاه است) یا آن که منطقاً گزاره‌هایی را ایجاب کند که توصیفگر برداشت‌های حسی باشند (همه کلاغ‌ها سیاه هستند). پیشتر هیوم در کتابش «رساله دربارهٔ فهم بشری» نشان داده بود که «اصل علیت»، این که «هر معلولی علتی دارد» از تجربه به دست نمی‌آید. اگر کودکی توپی را به زمین زند و هر بار شاهد به زمین خوردن و برخاستن توپ باشد چنین نتیجه نمی‌شود که توپ همواره همین رفتار را خواهد داشت. ما تنها به این شکل از نظام علت و معلولی پدیده‌ها عادت می‌کنیم. هیوم روی کلمه عادت خیلی تأکید می‌کرد. احتمال این که یک بار توپ رفتار دیگری داشته باشد صفر نیست. ما تنها به مرور چنین دیده‌ایم که پدیدهٔ A، همواره پس از پدیدهٔ B رخ می‌نماید و عادت کرده‌ایم B را علت A بنامیم. اما این ترتیب (اول علت بعد معلول) از تجربه قابل استنتاج نیست. حتی اگر علت و معلول هم در عالم باشند علیت در عالم نیست بلکه در ذهن ماست. کانت می‌گفت که هیوم با این کار مرا از خواب دکماتیزم بیدار کرد.

قضایای ریاضی به مثابه گزاره‌های ترکیبی پیشین

کانت قضایای ریاضی را از سنخ گزاره‌های ترکیبی پیشین می‌دانست. یعنی اگر چه معمول آنها در موضوعشان مستتر نیست اما از تجربه نیز به دست نمی‌آیند. به یاد بیاوریم که فیلسوف ما فضا و زمان را صورت‌های نگرش می‌دانست. برای کانت هندسه و حساب به ترتیب، توصیفات ضروری این صورت‌ها یعنی فضا و زمان بودند. به نظر او احکام ریاضیات محض تحلیلی نیستند زیرا که حامل معرفت‌هایی دربارهٔ جهان هستند و ترکیبی پسین نیز نیستند چرا که توصیفات فضا و زمان هستند و فضا و زمان نیز به نوبهٔ خود مفاهیم (یا صورت‌های) پیشین‌اند یعنی آن که از داده‌های حسی به دست نمی‌آیند. آنچه در پی می‌آید توضیح بیشتر همین معناست. یک شرط ضروری برای ممکن شدن دریافت، یا آنگونه که کانت عادت داشت بگوید دریافت بشری، بودن در فضا و زمان است.

1) A priori 2) A posteriori

یکی از پرسش‌های بنیادی دربارهٔ فضا و زمان آن است که آنها به چه چیز شبیه‌اند؟ به اشیاء فیزیکی، به ویژگی‌های این اشیاء یا آن که به روابط بین اشیاء؟ کانت آنها را به اشیاء فیزیکی شبیه‌تر می‌دانست (یعنی زمان و مکان شبیه به مفاهیم خاص هستند تا مفاهیم کلی). استدلال اساسی کانت بر تمایز بین تقسیم‌پذیری اشیاء خاص و تقسیم‌پذیری مفاهیم کلی استوار است. برای تقسیم یک مفهوم کلی آن را به «زیر-مفاهیم» تقسیم می‌کنیم اما اشیاء خاص را به قطعات یا تکه‌ها. مفهوم «رنگ شده» را می‌توان به رنگ‌های مختلف تقسیم کرد اما یک سیب را به قطعه‌های کوچک‌تر (و نه سیب‌های کوچک‌تر). کانت می‌گفت فضا و زمان قابل تقسیم‌اند اما همانگونه که سیب تقسیم می‌شود تقسیم می‌شوند. فضا به جعبه شبیه است و زمان به جوی.

با این حال این «زمان - جوی» و «فضا - جعبه» به معنای بسیار ویژه‌ای شبیه به اشیاء خاص هستند. آنها همانند ظروف تغییرناپذیری هستند که در آنها مادهٔ دریافت بنیاد نهاده می‌شود. آنها جزیی از مادهٔ مبتنی بر تجربه و تغییرپذیر دریافت نیستند. این تغییرناپذیر بودن فضا و زمان به مثابهٔ اشیاء خاص، ما را به یاد مُثُل (ایده‌های) افلاطونی می‌اندازد. اما شباهت فضا و زمان کانتی به مُثُل افلاطونی چندان زیاد نیست. فرض کانت این است که این دو به‌طور مطلق (فرارونده - استعلایی) واقعی نیستند، بلکه تا آنجا واقعی هستند که به عنوان شرایطی نگریسته شوند که در آنها موجوداتی که قادر به دریافت و اندیشهٔ کلی هستند بتوانند تجربه‌های عینی داشته باشند.

کانت نمی‌پذیرفت که ریاضیات محض صرفاً مجموعه‌ای از تعاریف و اصول موضوعه است و از این نظر فلسفهٔ ریاضی او با آموزه‌های راسل و بخشی از آموزه‌های هیلبرت مخالف است. او گزاره‌های ریاضیات محض را تحلیلی نمی‌دانست. اما اگر کانت در همین جا متوقف شده بود دیگر قادر به توضیح غنا و تنوع ریاضیات نمی‌بود. توصیف فضا - البته فضای دریافت‌پذیر^۱ - نمی‌توانست بیش از این باشد که فضا سه بعدی است و توصیف زمان نیز چیزی بیش از این نمی‌توانست باشد که زمان یک بعدی و جهت‌دار است. پس وجود این همه قضایای ژرف چطور توضیح داده می‌شد؟ به نظر می‌رسد که نفوذ کانت بر متفکرین پس از او به دلیل گسترش بیشتر آموزه‌هایش دربارهٔ این که ریاضیات توصیف فضا و زمان هست می‌باشد. برای ترسیم اندیشه‌های بعدی کانت در این باب پیش از هر چیز باید گفت که او اجازه نمی‌داد که توصیف تمام و کمال ساختار فضا و زمان تنها با تأملات صرف (منفعلانه؟) صورت گیرد بلکه این کار «عمل ساختن» را پیش فرض داشت. «ساختن یک مفهوم» چیزی فراتر از بیان کردن یا به‌یاد آوردن تعریف آن است، ساختن یک مفهوم مستلزم فراهم آوردن چنین مفهومی به صورت شبیهی پیشین است. چیزی که کانت در این باب می‌گوید ممکن است دشوار باشد ولی به هیچوجه مبهم یا گمراه‌کننده نیست. شاید بیان یک مثال بر بحث ما نوری بیافکند: مفهوم کرهٔ پانزده بعدی، $\{ (x_1, x_2, \dots, x_{15}) \mid \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 1 \}$ ، کاملاً خودسازگار است اما نمی‌تواند ساخته شود. اما قادریم کرهٔ سه بعدی را در فضای سه بعدی بسازیم (یا دایره، یعنی کرهٔ دوبعدی را) و نه آن که تنها تعریف

1) Perceptual Space

اصل موضوعی آن را بیان کنیم. امکان ساختن کره سه بعدی نه تنها به واسطه خودسازگاری این مفهوم بلکه به خاطر آن است که فضای دریافتپذیر این گونه است. نباید ساختمان پیشین یک کره سه بعدی فیزیکی را با ساختمان فیزیکی یک کره به طور مثال آهنی یا چوبی اشتباه کرد. توجه کنیم که امکان ساختن یک کره سه بعدی از جنس چوب یا آهن به دلیل امکان ساخت پیشین کره سه بعدی در فضا است. این که نمی توان کره پانزده بعدی از جنس چوب یا آهن ساخت به خاطر این مواد سازنده نیست بلکه به علت عدم امکان ساخت از پیشی کره‌ای با پانزده بعد است.

تمایزی که کانت در مقدمه «سنجش خرد ناب» بین یک مفهوم ریاضی (که تنها به سازگاری درونی نیاز دارد) با ساختن آن مفهوم که لازم دارد تا فضای دریافتپذیر ساختار معینی داشته باشد قائل می شود برای فهم فلسفه ریاضی او ضروری به نظر می رسد. کانت منکر امکان هندسه های خودسازگار دیگری سواى هندسه اقلیدسی نبود؛ و به این معنی فلسفه ریاضی او در اثر پدید آمدن چنین هندسه هایی باطل نمی شود زیرا کانت نگفته است که چنین هندسه هایی ناممکن اند که اکنون با ظهور آنها آموزه های او مردود شود، آنچه او گفته است ناممکن بودن این هندسه ها در مقام توصیفگر فضای دریافت پذیر است.

گاه گفته می شود که کاربرد فضای اقلیدسی چهار بعدی در نسبیت خاص، یا کاربرد هندسه نااقلیدسی در نظریه نسبیت عام نشان داده است که کانت در پندار اقلیدسی بودن فضای دریافت پذیر بر خطا بوده است. مسأله ای است به غایت دشوار و ظریف. نفس پیدایش هندسه های نااقلیدسی یا نظریه نسبیت عام اندیشه های کانت را باطل نمی کنند آنچه در اندیشه های او ایجاد تزلزل کرد اصرار او بر اقلیدسی بودن فضای دریافت پذیر بود. علاوه بر این، بعضی فلاسفه چون کورنر (مرجع [۳] صفحه ۲۹) می گویند که هر چند کانت در بیان این که فضای دریافت پذیر تنها با هندسه سه بعدی اقلیدسی قابل توصیف است مرتکب اشتباه شده است ولی این بدان معنا نیست که فضای دریافت پذیر نااقلیدسی^۱ است، ممکن است فضای دریافت پذیر نه با هندسه اقلیدسی و نه با هندسه های نااقلیدسی شناخته شده، با هیچ کدام قابل توصیف نباشد.

اگرچه که کانت مکان و زمان را مفاهیم پیشین می دانست اما بین این دو فرق می گذاشت. درک این فرق برای فهم اندیشه او درباره مکان و زمان (و لذا هندسه و حساب به مثابه توصیف های مکان و زمان) ضروری است. کانت بین حس خارجی که با آن اشیاء خارج از خود را ادراک می کنیم (یا به قول او اشیاء را به نحو خارج از خود در خود تصویر می نمایم) و حس درونی یا داخلی که به وسیله آن حالات درونی خود را ادراک می کنیم فرق می گذاشت. مکان «صورت همه تصویرهای حواس خارج است، یعنی شرط ذهنی احساس است که نگرش خارجی تنها در پرتو آن ممکن است» ([۲] یا [۹]، B۴۲). کلیه اشیاء خارجی در مکان ادراک می شوند. اما «زمان صورت حواس داخلی است، یعنی نگرش خودمان و حالات درونی آن» ([۲] یا [۹]، B۴۹). حالات نفسانی ما، یا پشت سر هم یا

۱) منظور هندسه های نااقلیدسی بیضوی و هذلولوی شناخته شده است. هر چند اینشتین معتقد بود که هندسه جهان بیضوی است و جهان بیکران و نامتناهی است (مرجع [۶]).

در کنار هم، در زمان ادراک می‌شوند اما در مکان ادراک نمی‌شوند. کانت این گفته هیوم را باور داشت که ما نمی‌توانیم بگوئیم یک حالت درونی شده است. در طرف راست یا چپ یک حالت درونی دیگر است. کانت کمی بعد می‌افزاید که زمان صورت پیشینی همه نمودها است حال آن که مکان تنها صورت پیشینی نمودهای خارجی است. منظور او این است که همه تصورات چه مربوط به عالم خارج باشد و چه نباشد چیزهایی ذهنی هستند و از این لحاظ به حالات درونی ما متعلق‌اند. لذا همه تصورات باید تابع پیش شرط نگرش درونی یعنی زمان باشند. بدین ترتیب زمان شرط با واسطه نمودهای خارجی است حال آن که شرط بی‌واسطه نمودهای درونی است. برآور در مقاله خود، «شهودگرایی و صورتگرایی» (مرجع [۴]) می‌نویسد که هرچند از اعتقاد به پیشینی بودن مکان دست برداشته است اما بیش از گذشته به پیشینی بودن زمان اعتقاد پیدا کرده است. به زعم برآور با آن که لحظات حیات دارای کیفیت متفاوت و مستقل از یکدیگرند، چیزی آنها را به هم پیوند می‌دهد و به شکل تمامیت یافته‌ای آنها را در پیشگاه فهم و «نگرش» آدمی حاضر می‌نماید که وی آن را به پیروی از کانت «نگرش زمان» می‌نامد. بدینسان حساب (و به یمن ابداع دکارت هندسه) می‌تواند بر بنیاد «نگرش زمان» استوار گردد. بیاد بیاوریم که دکارت به ما آموخت که چگونه می‌توان هندسه را به حساب تحویل کرد: از اعداد طبیعی به طرق مختلف (چه روش وایرشتراس و چه برش ددکیند) می‌توان به \mathbb{R} رسید و از آنسوی همه مفاهیم هندسه چون نقطه، خط و صفحه نیز می‌توانند به مفاهیمی در \mathbb{R}^2 ، که مجموعه سه‌تایی‌های مرتبی از اعداد حقیقی است، مبدل شوند. دیدیم که نگرش زمان (به نحوی که در بالا توضیح داده شد) مقدم بر نگرش مکان است، تبدیل دکارتی هندسه به حساب نیز شاید شاهی بر همین مدعا باشد که هندسه (به عنوان توصیفگر مکان) قابل تحویل به حساب (به عنوان توصیفگر زمان) است، این نکته‌ای است که برآور نیز بر آن تأکید می‌کند (مقاله «شهودگرایی و صورتگرایی»، [۴]).

اما حساب به عنوان توصیف کننده زمان چگونه ممکن است؟ کانت در «سنجش خرد ناب» می‌نویسد: «زمان‌های مختلف صرفاً بخش‌هایی از یک زمانند» و «نمی‌توان هیچ ادراکی را تخیل کرد که در زمان نباشد» (مرجع [۱۰]، فصل ۲). از طرفی او متذکر می‌گردد که «ساختن یک مفهوم به معنای تصویر کردن ادراکی است که به شکل پیشین با آن مطابقت دارد» (همان مرجع). ساختن عدد ۲ یا تصویر کردن آن به طرز پیشین، مانند آن است که یک شیء مادی را کنار شیء مادی دیگر بگذاریم. به این صورت مفاهیم حساب، یعنی اعداد طبیعی را، در زمان و مکان می‌توان ساخت. از اینرو شهود عدد طبیعی ۲ آسان به نظر می‌رسد: دو یکی دوتاست، همانطور که دو تا یک سیب، دو سیب است. بقیه اعداد طبیعی نیز به همین نحو ساخته می‌شوند، به عنوان مثال عدد ۳، در واقع تصویر از پیشی در کنار هم نهادن یک «دو چیز» و یک «یک چیز» است. بدین ترتیب می‌توان اعداد طبیعی را ساخت و لذا حساب ممکن می‌گردد.

نظر کانت در باب احکام حساب شبیه به نظر او درباره هندسه است. این حکم که با افزودن ۵ به ۷ عدد ۱۲ را تولید می‌کنیم می‌تواند توصیف این مطلب باشد که چیزی به طور ترکیبی و پیشین در

فضا و زمان ساخته شده است، یعنی تالی‌های بعدی یک و جمع آنها^۱. کانت متذکر می‌شود که ۵ و ۷ باید با هم جمع گردند تا عدد ۱۲ حاصل شود، ایده ۱۲ نه مستتر در آنها است و نه در ایده جمع آنها با یکدیگر نهفته است. هیچ تحلیلی از موضوع نمی‌تواند به ما محمول یعنی عدد ۱۲ را نشان دهد. بازهم امکان منطقی حساب‌های دیگر نفی نمی‌شود. آنچه که گفته می‌شود آنست که این نظام‌ها، توصیفات زمان دریافتی‌پذیر نخواهند بود.

اکنون، پاسخ کانت در باب سرشت ریاضیات محض و کاربردی می‌تواند تا حدی صورتبندی شود. احکام حساب و هندسه محض احکام ضروری هستند. با این وجود، این احکام ترکیبی پیشین هستند نه تحلیلی. ترکیبی هستند زیرا درباره ساختار فضا و زمان اند زیرا با آنچه که در آنها ساخته می‌شود نموده می‌شوند. پیشین هستند چرا که فضا و زمان از شرایط همیشگی و پایای هر دریافتی از اشیاء فیزیکی هستند. احکام ریاضیات کاربردی تا آنجا که درباره ماده خام دریافت‌های حسی باشند پسینی هستند [یادداشت ۵]. ریاضیات محض از امور تجربی به سبب موضوع خود که مطالعه ساختار فضا و زمان است، مستقل می‌باشد. موضوع ریاضیات کاربردی ساختار فضا و زمان است همراه با دنیای تجربی که آنها را پر ساخته است.

نظر کانت در باب بی‌نهایت بالفعل و بالقوه یادآور نظر ارسطو است صرف نظر از این که صراحت و وضوح بیان کانت بیشتر است. در یک دنباله ریاضی آنچه که به ما می‌گوید چطور از یک مرحله به مرحله بعد برویم یک قاعده است. ولی کانت نمی‌پذیرد که وقتی چنین قاعده پیشروی ارائه شود تمامیت آنچه که باید ساخته شود نیز به نوعی داده شده است. کانت این را نمی‌پذیرد. موضوع بویژه در حالتی که گام آخر یا اول وجود ندارد بسیار مهم است. به عنوان مثال، دنباله اعداد طبیعی از صفر آغاز می‌شود و مابقی اعضای دنباله با افزودن یک به گام قبل، به ترتیب ساخته می‌شوند. فرض می‌شود که ضمن این کار اعداد دیگری به جز اعضای دنباله وجود ندارند. دنباله‌ای که در حال ساخت و رشد کردن است با دنباله‌ای که کامل شده است و به تمامیت خود رسیده به کلی متفاوت است. صرف بیان این مطلب که بنابر این قاعده و قانون، تولید اعضای دنباله تا بی‌نهایت می‌تواند ادامه یابد، وجود دنباله کامل شده، در تمامیت خود را تضمین نمی‌کند (نک [۳]).

تفاوت ارسطو و کانت در آن است که ارسطو منطقاً وجود بی‌نهایت بالفعل را نفی می‌کرد. نه به دلیل این که هیچ بی‌نهایت بالفعلی در جهان تجربه‌های حسی وجود ندارد بلکه چنین بی‌نهایتی به لحاظ منطقی نمی‌تواند وجود داشته باشد. ارسطو (و همین‌طور آکویناس) با این مقدمه، حتی به اثبات وجود علت اولی (علت نخستین) پرداخت بدین شکل که: علت نخستین وجود دارد وگرنه باید وجود یک بی‌نهایت بالفعل را بپذیریم که منطقاً محال است (نک [۳]).

کانت معتقد نیست که وجود بی‌نهایت بالفعل منطقاً محال است و از این نظر ابداع جسورانه کانتور در به خدمت گرفتن بینهایت‌های بالفعل در نظریه مجموعه‌ها با اندیشه کانت در تضاد نیست.

(۱) کتاب «تمهیدات»، بخش دهم

این چیزی است که کانت آن را «ایده خرد» می‌نامید^۱؛ یعنی مفهومی با سازگاری درونی اگرچه غیر قابل کاربرد در تجربه حسی، چون نمونه‌های این مفهوم نه قابل مشاهده‌اند و نه قابل ساخت. به نظر کانت ما می‌توانیم ۲ را بسازیم، و ۲ تا چیز (مثل ۲ تا اسب) را مشاهده کنیم، می‌توانیم $10^{10}10^{10}$ را بسازیم هرچند از مشاهده و فراهم آوردن مجموعه‌ای با این همه عضو ناتوانیم. و سرآخراین که یک مجموعه بی‌نهایت بالفعل را نه می‌توانیم مشاهده کنیم و نه این که بسازیم.

تفاوت مابین بی‌نهایت بالفعل که نمی‌تواند ساخته شود ولی بدان نیاز ناگزیر داریم و بی‌نهایت بالقوه (که در حال ساخته شدن است) اغلب توسط کانت مورد تأکید قرار می‌گیرد. به زعم او، در تخمین‌های ریاضی و ساختپذیر از اندازه، «فهم هر یک از واحدهایی را که تخیل برای تخمین زدن اندازه انتخاب کند به خوبی به کار می‌گیرد و با آن اقناع می‌شود... در هر حال تخمین منطقی اندازه تا بی‌نهایت و بی‌توقف به پیش می‌رود». هرچند کانت چنین ادامه می‌دهد که «ذهن اکنون به آوای خرد گوش فرا می‌دهد که، برای همه اندازه‌های داده شده ... نیازمند تمامیت است ... و حتی بی‌نهایت را نیز از این نیاز معاف نمی‌کند... اما کم و بیش ما را ناگزیر می‌سازد تا به این بی‌نهایت ... چون [چیزی] کاملاً داده شده (یعنی داده شده در تمامیت خود) توجه کنیم^۱».

پایان سخن

در سال ۱۹۱۹ کتاب راسل، که حاصل روزگار محبس بود، با عنوان «مقدمه‌ای بر فلسفه ریاضی» منتشر شد. در دیباچه این کتاب راسل نوشت که پس از کانت تقریباً همه چیز بر خلاف نظر وی پیش رفته است. این گفته در آن زمان موجه بود چرا که منطق‌گرایی به یمن کارهای عظیم فرگه، راسل و وایتهد نوید روزهای خوشی را می‌داد و صورتگرایی نیز برای اثبات سازگاری ریاضیات امیدهای بسیار داشت. اما کمی بیشتر از یک دهه بعد اوضاع به کلی دگرگون شد. گودل ثابت کرد که تمامیت و سازگاری اصول پئانو یا هر توسیع متناهی آن نمی‌تواند برقرار باشد، اگر سازگاری حساب را بپذیریم همواره در آن گزاره‌های درست ولی غیرقابل اثبات وجود خواهند داشت. امروز تقریباً همه فلاسفه ریاضی این قضیه گودل را همچون «پرچم شکست دائم» این دو مکتب می‌دانند. زیاده‌روی نیست اگر بگوئیم که بعد از کارهای گودل اوضاع، چه در عالم ریاضی و چه در بیرون آن، در جهت تأیید بعضی از آموزه‌های کانت سیر کرده است. شاید نظریات چامسکی، زبان‌شناس بزرگ معاصر، برگ برنده دیگری در این بازگشت به کانت باشد. با پژوهش‌های چامسکی در زبان‌شناسی، آموزه‌های رفتارگرایان متزلزل شد. رفتارگرایان ذهن آدمی را در آغاز تولد چون لوحی سپید می‌دانستند که حک کردن هر چیزی بر آن امکان داشت، حال آن که

1) The idea of reason

(۱) از کتاب «نقد قوه داور» بخش ۲۶، نقل شده در مرجع [۳].

چامسکی نشان داد که نوعی «دستور زبان» با آدمی متولد می‌شود که هم بر زبان‌های بشری محدودیت‌هایی تحمیل می‌کند و هم (در عین حال) عامل آموختن سریع زبان و استفاده کارآمد از زبان در توصیف عالم است (گفتگوی برابری با چامسکی را در [۱۱] ملاحظه فرمائید). اگر اینگونه باشد و ما با نوعی دستور زبان متولد شویم، آنگاه می‌توان گفت که چنین دستور زبانی امری پیشین است و از تجربه حاصل نمی‌شود، چرا که کودک در آغاز تولد هنوز تجربه‌ای ندارد. این امر شاید تأییدی باشد بر نظر کانت که مفاهیم ترکیبی و پیشین ممکن‌اند و این «دستور زبان» یکی از آنها است.

کانت فیلسوف جامعی بود و در زیباشناسی و اخلاق به همان وسعت معرفت‌شناسی، کارهای جدی و اثرگذار از خود بجای نهاد. او در زندگی پارسا و بسیار منظم بود. گویا اهالی شهر وقت خود را با گردش‌های روزانه کانت (در ساعت ۳ بعد از ظهر) تنظیم می‌کردند. تلاش کانت در برپای ساختن متافیزیک به اینجا ختم شد که «شناخت شیء فی‌النفسه یا چیز در خود، یعنی یک واقعیت در خود و آن سوی پدیداری، ناممکن می‌شود: شناخت محدود می‌شود به پهنه مشاهده یا بینش و دریافت حسی، و بیرون از احساس (اندریافت حسی) به گفته کانت «مقولات تهی‌اند» و این که برای مسائل عمده هستی و نیز زندگی انسانی هیچ‌گونه حل معرفت‌آمیزی یافت نمی‌شود: متافیزیک ناممکن است» (مرجع [۷]). ولی کانت به مسأله وجود خدا، جاودانگی روح و آزادی هم پرداخت - که به اعتقاد او سه مسأله بنیادی فلسفه‌اند - و آنها را از راهی بیرون عقلی و به وسیله مفروض‌های «اراده» انسانی حل کرد.

یادداشت‌ها

۱ - «سنجش خرد ناب» توسط دکتر میرشمس‌الدین ادیب سلطانی به فارسی برگردانده شده است (مرجع [۹]). این ترجمه دقیق و امانتدار است، هرچند این مترجم و محقق عالیقدر در ترجمه این اثر، زبان ویژه‌ای اختیار کرده است که خواندن را برای خواننده (اگر چه حوصله نباشد) دشوار می‌نماید. برابر نهاد زیبای «برابر ایستا» در مقابل «Gegenstand» از ساخته‌های ماندگار ادیب سلطانی است. در معرفی کانت از این ترجمه، از نسخه آلمانی اثر (مرجع [۲]) و از درسگفتارهای دکتر محمود هومن استفاده شده است. نگارنده امکان دسترسی به منبع اخیر را که تاکنون به زیور طبع آراسته نگردیده مدیون استاد عبدالعلی دستغیب است. من در برابر واژه کلیدی «Anschauung» واژه «نگرش» را به کار برده‌ام که پیشنهاد مرحوم دکتر هومن بوده است (پیشنهاد ادیب سلطانی «بهبش» است). از کتاب «فلسفه ریاضی» اثر استفان کورنر (منبع [۳]) خصوصاً در توصیف هندسه از دیدگاه کانت استفاده بسیار برده‌ام. فهرست آثاری که در تهیه متن حاضر مورد استفاده قرار گرفته‌اند در قسمت مراجع آمده است.

۲ - براور در مقاله «صورتگرایی و شهودگرایی» (مرجع [۴]) متذکر می‌شود که «در کانت شکلی کهنه از شهودگرایی را می‌یابیم که اکنون به کلی فراموش شده است، که در آن، زمان و فضا،

صورت‌های ضروری و طبیعی خرد آدمی گرفته می‌شوند. برای کانت اصول موضوعه حساب و هندسه داوری‌های ترکیبی پیش از تجربه بودند؛ یعنی داوری‌هایی مستقل از تجربه و حاصل نیامده از برهان‌های تحلیلی، و این مطلب دقت آنها را هم در دنیای تجربه و هم در تجرید توضیح می‌داد. بنابراین برای کانت امکان رد کردن قوانین حسابی و هندسی به‌طور تجربی نه تنها بنا به اعتقادی محکم طرد می‌شد بلکه چنین چیزی اساساً غیر قابل اندیشیدن بود». این مقاله توسط دکتر محمد اردشیر ترجمه و در نشر ریاضی، سال ۹، شماره ۱ منتشر شده است.

۳ - مثال هوشمندانه کانت خود روشن‌گرترا از هر چیز است: «اگر کسی که از جانب یک آدمکش دنبال می‌شود به نزد من آید و از من بخواهد که آدمکش را با اطلاعات غلط منحرف کنم بناچار باید مایوسش سازم چراکه من اجازه دروغ گفتن ندارم» (مرجع [۵] بند پنجم از فصل هشت را ببینید).

۴ - رفته رفته بعضی از فیلسوفان علم در روشن بودن مرز بین گزاره‌های تحلیلی و ترکیبی تردید کردند که از جمله آنها کواین و همپل بودند، هرچند بعضی از شاگردان رایشنباخ همچنان به پیروی از استاد به چنین تمایزی قائل بودند. پاتنام در [۱] اظهار می‌دارد که خود شاهد گفتگوی داغی بین کارل همپل و یکی از دانشجویان رایشنباخ بوده است که در آن همپل از نظر کواین درباره مشخص نبودن مرز بین گزاره‌های تحلیلی و ترکیبی حمایت می‌کرده و دانشجوی رایشنباخ قایل به تمایز بوده است. نهایتاً دانشجوی جوان می‌گوید که «بسیار خوب ممکن است چنین تمایزی در زبان‌های بشری قابل بیان نباشد اما از کجا معلوم که در یک زبان صوری مناسب نتوانیم این تمایز را به دقت نشان دهیم». همپل در جواب می‌گوید، «مشکل آنجاست که سرآخر مجبورید هر آنچه را در آن زبان صوری یافته‌اید به زبان طبیعی برگردانید. چنین مشکلی ارثی است».

۵ - در این رابطه همچنین مراجعه شود به مرجع [۶]، مقاله هندسه و تجربه، همانجا که اینشتین اظهار می‌دارد، «قضایای هندسه تا آنجا که یقینی هستند به تجربه مربوط نمی‌شوند و تا آنجا که در تجربه کاربرد دارند یقینی نیستند».

مراجع

- [1] J. Floyd and H. Putnam, *A note on Wittgenstein's notorious paragraph about Gödel's Theorem*, The Journal of Philosophy, 97: 624, 2000.
- [2] Immanuel Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, Felix Meiner Verlag Hamburg 1998.
- [3] Stephan Körner, *The Philosophy Of Mathematics, An Introductory Essay*, Hutchinson and Co. (Publishers) LTD, 1960.
- [4] Philosophy of Mathematics, selected readings, edited with an Introduction by

Paul Benaceraf and Hilary Putnam, Basil Blackwell Oxford, Prentice-Hall, 1964.

[5] Roland Simon - Schäfer, *Kleine Philosophie Für Berenike*, Reclam Verlag Leipzig, 2001.

- [۶] آلبرت اینشتین، فیزیک و واقعیت، ترجمه محمد رضا خواجه پور، شرکت سهامی انتشارات خوارزمی، ۱۳۶۳.
- [۷] ا. م. بوخنسکی، فلسفه معاصر اروپایی، ترجمه دکتر شرف‌الدین خراسانی - شرف، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۷۹.
- [۸] پال بناسراف، صدق ریاضی، ترجمه ضیاء موحد، نشر ریاضی، سال ۱۰، شماره پیاپی ۱۹.
- [۹] ایمانوئل کانت، سنجش خرد ناب، ترجمه میر شمس‌الدین ادیب سلطانی، مؤسسه انتشارات امیرکبیر، تهران ۱۳۶۲.
- [۱۰] اشتفان کورنر، فلسفه کانت، ترجمه عزت‌الله فولادوند، انتشارات خوارزمی، چاپ اول، ۱۳۶۷.
- [۱۱] برایان مگی، مردان اندیشه، پدید آورندگان فلسفه معاصر، ترجمه عزت‌الله فولادوند، انتشارات طرح نو، چاپ دوم ۱۳۷۸.
- [۱۲] برایان مگی، فلاسفه بزرگ، آشنایی با فلسفه غرب، ترجمه عزت‌الله فولادوند، ۱۳۷۷.
- [۱۳] ورنر هایزنبرگ، جزء و کل، ترجمه حسین معصومی همدانی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.

احسان ممتحن

گروه ریاضی، دانشگاه یاسوج

پست الکترونیک: momtahan_e@hotmail.com